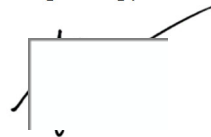


На правах рукописи



НГО ХЫУ ХИЕУ

**МЕТОД СИЛ В ЗАДАЧАХ СТАТИКИ, ДИНАМИКИ
И УСТОЙЧИВОСТИ СТЕРЖНЕВЫХ СИСТЕМ**

Специальность 2.1.9. Строительная механика

АВТОРЕФЕРАТ

Диссертации на соискание ученой степени
кандидата технических наук

Санкт-Петербург – 2025

Работа выполнена в высшей школе промышленно-гражданского и дорожного строительства Федерального государственного автономного образовательного учреждения высшего образования «Санкт-Петербургский политехнический университет Петра Великого» (ФГАОУ ВО «СПбПУ»).

Научный руководитель: доктор технических наук, профессор
Лалин Владимир Владимирович

Официальные оппоненты: **Зверьяев Евгений Михайлович**
доктор технических наук, профессор, ФГАОУ ВО
«Российский университет дружбы народов имени
Патриса Лумумбы», г. Москва, кафедра технологий
строительства и конструкционных материалов,
профессор;

Сорокина Галина Вячеславовна
кандидат технических наук, доцент, ФГБОУ ВО
«Петербургский государственный университет
путей сообщения Императора Александра I»,
кафедра «Механика и прочность материалов
и конструкций», доцент;

Ведущая организация: **ФГАОУ ВО «Казанский (Приволжский)
федеральный университет».**

Защита состоится «10» июня 2025 года в 11:00 часов на заседании диссертационного совета 24.2.380.01 при ФГБОУ ВО «Санкт-Петербургский государственный архитектурно-строительный университет» по адресу: 190005, Санкт-Петербург, 2-я Красноармейская ул., д. 4, зал заседаний диссертационного совета (аудитория №220 главного корпуса). Тел./Факс: (812) 316–58–73; E-mail: rector@spbgasu.ru

С диссертацией можно ознакомиться в библиотеке ФГБОУ ВО «Санкт-Петербургский государственный архитектурно-строительный университет» и на сайте: <https://dis.spbgasu.ru/specialtys/personal/ngo-hyu-hieu>

Автореферат разослан «21» апреля 2025 г.

Ученый секретарь
диссертационного совета



Попов Владимир Мирович

ОБЩАЯ ХАРАКТЕРИСТИКА РАБОТЫ

Актуальность темы исследования. При расчете напряженно-деформированного состояния строительных конструкций от статических, температурных или динамических воздействий, необходимо иметь возможность определять перемещения и усилия (напряжения) с достаточной точностью. В настоящее время промышленные программные комплексы по расчету конструкций основаны на методе конечных элементов в форме метода перемещений. При этом для нахождения усилий приходится использовать процедуры численного дифференцирования перемещений, что приводит к снижению точности определения усилий по сравнению с точностью определения перемещений.

Одним из способов повышения точности определения усилий при решении задач строительной механики является переход к постановке задач непосредственно в усилиях, то есть использование тех или иных вариантов метода сил. Однако, метод сил не реализован в программных комплексах даже для простейших конструкций - стержневых систем. Поэтому, разработка новых вариантов метода сил, которые обладали аналогичными по сравнению с методом перемещений положительными свойствами, делающими алгоритмизацию метода сил сравнимой по сложности с методом перемещений, является **актуальной задачей**.

Степень разработанности темы исследования. Различными проблемами в области алгоритмизации метода сил занималось большое количество ученых: Wehle L.B., Argyris J.H., Robinson J., Gallagher R.H., Patnaik N., Domaszewski M., Васидзу К., Felippa C.A., Joseph K.T., El-Saved M. E. M., Watwood V.B., Spiliopoulos K.V., Kaveh A., Kon C.G., Sedaghati R., Ливсли Р., Розин Л.А., Филин А.П., Резников Р.А., Шулькин Ю.Б., Гибшман М.Е., Лалин В.В., Шварц М.А., Тананайко О.Д. и др.

Наибольшее количество работ на эту тему появилось в отечественной и зарубежной научной литературе в 60-е – 80-е годы XX века. В целом, можно констатировать, что разработать алгоритм метода сил, сравнимый с методом перемещений по сложности программирования и свойствам разрешающей системы уравнений не удалось. Это явилось главной причиной того, что в существующих программных комплексах по расчету строительных конструкций реализован только метод перемещений.

В 1998 г. в работе Лалина В. В, Розина Л. А., Бугаевой Т. Н. на примере плоской статической задачи расчета стержневых систем была изложена идея метода сил в форме метода контурных усилий. Настоящая работа является продолжением, дополнением и реализацией идеи алгоритмизации метода сил в форме метода конечных элементов в усилиях (МКЭУ) для задач статики, динамики и устойчивости плоских и пространственных стержневых систем.

Целью диссертационной работы является разработка новых алгоритмов и конечных элементов метода сил для задач статики, динамики и устойчивости стержневых строительных конструкций.

В соответствии с поставленной целью **решались следующие задачи:**

1. Разработать новые постановки в усилиях для решения задач статики, динамики и устойчивости стержневых систем.
2. Разработать новые конечные элементы для решения задач статики, динамики и устойчивости стержневых систем с неизвестными функциями – усилиями.
3. Провести тестирование и апробацию построенных конечных элементов в усилиях.
4. Привести примеры расчетов конструкций разработанными методами.

Объектом исследования являются методы расчета стержневых конструкций.

Предметом исследования являются методы расчета стержневых конструкций с неизвестными – усилиями.

Научная новизна работы состоит в следующем:

1. Построены для плоских и пространственных задач статики в явном виде невырожденные матрицы податливости и жесткости для всех типов элементов-стержней (с шарнирами и без шарниров), произвольно ориентированных по отношению к глобальной системе координат.
2. Разработаны новые постановки задач динамики и устойчивости стержневых систем, в которых неизвестными функциями являются усилия. Новые постановки представлены в дифференциальной и вариационной формах. Доказана эквивалентность двух форм постановок.
3. Построены новые конечные элементы для решения задач динамики и устойчивости стержневых систем – получены матрицы масс и геометрической жесткости конечных элементов в усилиях.
4. Выполнен анализ точности построенных конечных элементов при решении модельных задач; проведено сопоставление с точными решениями, а также с результатами, полученными с помощью верифицированных программных комплексов.
5. Разработан алгоритм и составлена в среде MATLAB программа решения задач статики, динамики и устойчивости стержневых строительных конструкций с использованием построенных конечных элементов.

Теоретическая и практическая значимость работы заключается в разработке методов, алгоритмов и программ для расчета на ЭВМ стержневых конструкций в задачах статики, динамики и устойчивости с использованием постановок в усилиях. При этом точность определения усилий в предлагаемом методе повышается по сравнению с результатами метода конечных элементов в перемещениях при аналогичных вычислительных затратах.

С помощью разработанных алгоритмов и программ выполнен расчет и проведен анализ напряженно-деформированного состояния металлического каркаса жилого здания в Социалистической Республике Вьетнам.

Практическая значимость работы подтверждается справками о внедрении результатов диссертационного исследования, приведенными в Приложении В.

Методология и методы исследования. В диссертационной работе использовались классические положения строительной механики, динамики и устойчивости конструкций, теории расчета стержневых систем. Численная реализация построена на применении метода конечных элементов.

На защиту выносятся:

1. Метод конечных элементов в усилиях в форме метода контурных усилий для статического расчета статически неопределимых стержневых систем.
2. Постановки и реализация методом конечных элементов в усилиях задач динамики и устойчивости стержневых систем.
3. Численное исследование точности решения задач статики, динамики и устойчивости стержневых систем с помощью разработанных конечных элементов и алгоритмов.
4. Результаты решения модельных задач и задач расчета реальных строительных конструкций.

Личный вклад автора диссертации состоит в: разработке и численной реализации конечных элементов, для которых узловыми неизвестными являются непосредственно усилия; разработке в среде MATLAB программы для решения задач статики, динамики и устойчивости стержневых строительных конструкций; анализе точности разработанных конечных элементов для модельных задач; получении и анализе результатов для реальной строительной конструкции в Социалистической Республике Вьетнам.

Степень достоверности полученных результатов. Достоверность и обоснованность результатов исследований подтверждается использованием строгих математических подходов строительной механики, динамики и устойчивости сооружений; применением теории метода конечных элементов для построения матриц жесткости, масс и геометрической жесткости; верификацией построенных конечных элементов на решении модельных задач; согласованностью полученных результатов с решениями, полученными при использовании верифицированных программных комплексов.

Соответствие диссертации научной специальности. Диссертация соответствует паспорту специальности 2.1.9 – «Строительная механика»:

п. 2 «Линейная и нелинейная механика конструкций, зданий и сооружений, разработка физико-математических моделей их расчета»;

п. 4 «Численные и численно-аналитические методы расчета зданий, сооружений и их элементов на прочность, жесткость, устойчивость при статических, динамических, температурных нагрузках и других воздействиях».

Апробация работы. Основные теоретические положения и численные результаты диссертационной работы подтверждены апробацией на следующих конференциях и семинарах: Научный семинар, посвященный 110-летию доктора технических наук, профессора Олега Александровича Савинова, СПб, ПГУПС и ВНИИГ им. Б.Е. Веденеева (Санкт-Петербург, 2020); IX Международная научная конференция «Задачи и методы компьютерного моделирования конструкций и сооружений» (Золотовские чтения) (Москва, 2021); VII Международная научная конференция «Вопросы науки и практики 2022» (Москва, 2022); International Conference on Materials Physics, Building Structures and Technologies in Construction, Industrial and Production Engineering «MPCPE-2022» (Владимир, 2022); XIV Международная конференция по прикладной математике и механике в аэрокосмической отрасли «АММАТ'2022» (Алушта, 2022); 1-я международная научная конференция «Соломинские чтения» (Челябинск, 2022); XXIII Зимней школы по механике сплошных сред (Пермь, 2023); VIII Международный симпозиум «Актуальные проблемы компьютерного моделирования конструкций и сооружений» (Тамбов, 2023); XXIII Международная конференция по Вычислительной механике и современным прикладным программным системам «ВМСППС'2023» (в п. Дивноморское, Краснодарский край, 2023); Международный научно-практический симпозиум «Будущее строительной отрасли: Вызовы и перспективы развития» (Москва, 2023); XVII Международная научно-техническая конференция «Актуальные вопросы архитектуры и строительства» (Новосибирск, 2024); 10th International Conference on Advanced Engineering and Technology «10thICAET» (Инчхон, Корея, 2024); VI Международная научно-практическая конференция «Проектирование и расчет строительных конструкций и оснований», «DeCaBuS», (Санкт-Петербург, 2024).

Публикации. Результаты выполненного исследования приведены в 13 публикациях. Из них: 1 статья в издании, представленном в базе данных Scopus и Web of Science, 5 статей в журналах, входящих в Перечень ВАК, 4 статьи и 3 тезиса докладов в сборниках трудов научно-технических конференций.

Структура и объем диссертации: Диссертационная работа состоит из введения, четырех глав, заключения и списка литературы (107 наименований). Общий объем диссертации составляет 154 страниц, в него входят 58 рисунков и 69 таблиц.

Автор считает своим долгом выразить искреннюю благодарность научному руководителю, профессору В. В. Лалину, за всестороннюю помощь и поддержку.

ОСНОВНОЕ СОДЕРЖАНИЕ РАБОТЫ

Во **введении** обоснована актуальность темы исследования, сформулированы цель и задачи диссертации, описаны объект и предмет исследования, сформулированы научная новизна, практическая и теоретическая значимость работы.

Первая глава посвящена рассмотрению существующих методов расчета стержневых строительных конструкций, в которых разрешающая система уравнений формируется относительно усилий.

Основными достоинствами метода перемещений являются следующие два свойства матрицы разрешающей системы уравнений – матрицы жесткости конструкции K : матрица K является ленточной и слабо заполненной; структура матрицы K , то есть расположение в ней нулевых и ненулевых блоков, однозначно определяется после нумерации узлов и элементов системы. Именно последнее свойство обеспечивает сравнительно простую алгоритмизацию и программирование метода перемещений.

Главное отличие от метода перемещений и основная трудность алгоритмизации метода сил заключается в том, что основная система метода сил может быть выбрана неединственным образом и, следовательно, разрешающая система уравнений может быть разной. На алгебраическом языке эту особенность можно описать следующим образом.

Рассмотрим уравнения статики стержневых систем в матричном виде:

$$\text{Уравнения равновесия узлов:} \quad A^T \sigma = P, \quad (1)$$

$$\text{связь деформаций с перемещениями:} \quad AU = e, \quad (2)$$

$$\text{физические уравнения (закон Гука):} \quad \sigma = K_d e \text{ или } e = K_d^{-1} \sigma, \quad (3)$$

где P – столбец узловых нагрузок, U – столбец узловых перемещений, e – столбец упругих деформаций, σ – столбец узловых усилий, $K_d = \text{diag}(K_i)$ – блочно-диагональная матрица жесткости отдельных элементов-стержней, верхний индекс «Т» означает операцию транспонирования матрицы.

Для статически неопределимых задач матрица $A^T (n \times m)$ уравнений равновесия является прямоугольной – число строк n в ней меньше числа столбцов m ; при этом число $m - n$ равно степени статической неопределимости системы. В таком случае полное решение системы уравнений (1) может быть представлено, как сумма общего решения σ_0 однородных

уравнений и частного решения σ_q . Для такого представления необходимо путем анализа матрицы A^T найти в ней n линейно независимых столбцов и сформировать из них невырожденный квадратный блок $A_1^T (n \times n)$. После перенумерации при необходимости элементов столбца σ можно считать, что матрица A^T имеет вид

$$A^T = \begin{pmatrix} A_1^T & A_2^T \end{pmatrix}, \quad (4)$$

где матрица $A_2^T (n \times (m-n))$ – матрица из остальных столбцов матрицы A^T .

После этого общее решение системы (1) можно представить в виде

$$\sigma = \sigma_0 + \sigma_q = B^T X + \begin{pmatrix} A_1^{-T} P \\ 0 \end{pmatrix}, \quad (5)$$

$$\text{где } (m \times (m-n)) \text{ матрица } B^T = \begin{pmatrix} -A_1^{-T} A_2^T \\ I \end{pmatrix}, \quad (6)$$

I – единичная $(m-n) \times (m-n)$ матрица, 0 – нулевой $((m-n) \times 1)$ столбец, X – столбец $((m-n) \times 1)$ неизвестных метода сил (лишних неизвестных по терминологии классической строительной механики).

Разрешающая система уравнений метода сил получается следующим образом. Так как по определению общего решения однородных уравнений равенство $A^T B^T X = 0$ выполняется при любом столбце X , то справедливо тождество $A^T B^T \equiv 0$, транспонируя которое, получим $BA \equiv 0$. Тогда, умножив на матрицу B равенство (2), придем к уравнению

$$Be = 0. \quad (7)$$

Подставив в (7) выражения (3) и (5), получим разрешающую систему уравнений метода сил:

$$BK_d^{-1} B^T X + BK_d^{-1} \sigma_q = 0. \quad (8)$$

Матрица $\Lambda = BK_d^{-1} B^T$ разрешающей системы уравнений метода сил (которую можно назвать матрицей податливости системы) зависит от матрицы A_1^T , то есть от выбора линейно-независимых столбцов матрицы A^T . Поскольку такой выбор можно сделать разными способами, то матрица Λ определена неоднозначно, что соответствует множественности основных систем в «ручном» варианте метода сил.

Было предложено много способов построения матрицы A_1^T общего решения однородных уравнений равновесия: прямой анализ различными способами столбцов матрицы A^T с целью выбора линейно независимых; анализ матрицы инцидентий графа стержневой системы; решение проблемы собственных значений матрицы $A^T A$ и др. Общим свойством всех таких способов является необходимость хранения в памяти компьютера матрицы уравнений равновесия A^T (для простых систем – ее логического аналога – матрицы инцидентий) и выполнения операций по ее анализу. Уже один этот факт делает любой подобный алгоритм метода сил более сложным по сравнению со стандартным алгоритмом метода перемещений. Еще одну значительную проблему в алгоритмах метода сил представляет трудность обеспечения таких свойств матрицы разрешающей системы уравнений, как ленточный характер и слабая заполненность.

Далее в главе проанализированы два метода, близких к методу сил, и достаточно интенсивно развивающихся в зарубежных научных публикациях: «интегральный метод сил» (integrated force method) и «силовой метод» (force based method). Сделан вывод, что, по крайней мере для стержневых систем, эти методы уступают методу перемещений и методу сил, как по количеству неизвестных, так и по свойствам матрицы разрешающей системы уравнений.

Вторая глава посвящена решению задач статики по методу конечных элементов в усилиях (МКЭУ) в форме метода контурных усилий (МКУ).

Обратим внимание, что уравнение (7) имеет ясный физический смысл – это уравнение совместности деформаций. Основная идея рассматриваемого метода заключается в полном отказе от анализа матрицы уравнений равновесия и прямом построении матрицы совместности деформаций. После этого матрицу общего решения однородных уравнений равновесия можно получить транспонированием матрицы совместности. При этом можно таким образом построить матрицу совместности, что ее фактическое получение становится не нужным, поскольку удастся сразу сформулировать алгоритм построения матрицы податливости системы, аналогичный по сложности алгоритму построения матрицы жесткости системы в методе перемещений.

Рассмотрим элемент-стержень (рис.1) длиной l_s , на котором указаны единичные касательный и нормальный векторы $t = [t_x \ t_y]^T$, $n = [n_x \ n_y]^T$. Точка C – центральная точка стержня.

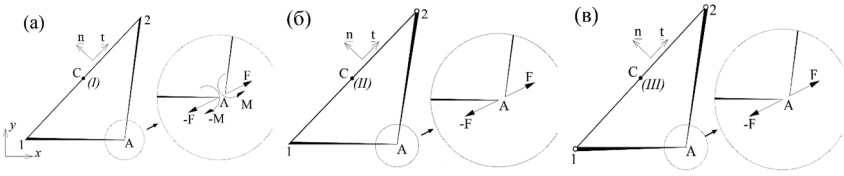


Рисунок 1 - Виды конечных элементов в усилиях (КЭУ):

(а) первый вид элемента; (б) второй вид элемента; (в) третий вид элемента

При отсутствии распределенной нагрузки усилия в любой точке элемента с жесткими узлами (рис. 1а) можно выразить через три независимых параметра. В качестве этих параметров выбираются три усилия F_x, F_y, M , приложенные к концам абсолютно жестких консолей, проведенных из концов стержня к произвольной точке A (рис. 1а). Внутренние усилия в любой точке стержня, соответствующей координате s , следующим образом выражаются через параметры F_x, F_y, M :

$$N(s) = F^T t, \quad Q(s) = F^T n, \quad M(s) = F^T [(-y_{As} \quad x_{As})^T] + M, \quad (9)$$

где $F = [F_x \quad F_y]^T$ и M – усилия и момент в точке A ; x_{As} и y_{As} – координаты вектора $\overrightarrow{As}$; s – координата точки стержня ($0 \leq s \leq l_s$).

Энергия деформации стержня выражается следующей формулой:

$$W = \frac{1}{2} \int_0^{l_s} \left(\frac{N^2(s)}{EA} + \frac{M^2(s)}{EI} + \frac{Q^2(s)}{\kappa GA} \right) ds, \quad (10)$$

где EA, EI и κGA – продольная, изгибная, и сдвиговая жесткости соответственно.

Подставив выражения (9) в формулу (10) и выполнив интегрирование, получим:

$$W = \frac{1}{2} \sigma^T \Lambda_I \sigma = \frac{1}{2} \sigma^T e, \quad (11)$$

где $\sigma^T = (F_x, F_y, M)$ – столбец усилий, $e = \Lambda_I \sigma$ – столбец (3×1) обобщенных перемещений, Λ_I – матрица податливости (3×3) элемента первого типа (без шарниров) с учетом продольной, изгибной, и сдвиговой деформаций:

$$\Lambda_I = \begin{bmatrix} \left(\frac{l_3}{EA} t_x^2 + \frac{l_3}{kGA} t_y^2 + \frac{l_3^3}{12EI} t_y^2 + \frac{l_3}{EI} y_{AC}^2 \right) & (\text{сим.}) & \\ \left(\frac{l_3}{EA} t_x t_y + \frac{-l_3}{kGA} t_x t_y + \frac{l_3^3}{12EI} t_x t_y + \frac{-l_3}{EI} x_{AC} y_{AC} \right) & \left(\frac{l_3}{EA} t_y^2 + \frac{l_3}{kGA} t_x^2 + \frac{l_3^3}{12EI} t_x^2 + \frac{l_3}{EI} x_{AC}^2 \right) & \\ \frac{l_3}{EI} y_{AC} & \frac{-l_3}{EI} x_{AC} & \frac{l_3}{EI} \end{bmatrix}, \quad (12)$$

$$x_{AC} = x_A - x_C, y_{AC} = y_A - y_C.$$

Физический смысл столбца e – взаимные перемещения и углы поворота концов жестких консолей. В дальнейшем будем называть этот столбец деформациями, так как при жестком перемещении стержня все три элемента этого столбца равны нулю.

Рассмотрим второй тип конечного элемента: конечный элемент-стержень с одним жестким и одним шарнирным узлом (рис.1б). Напряженное состояние такого элемента определяется двумя параметрами, в качестве которых можно взять усилия F_x, F_y :

$$\sigma_{II} = [F_x \quad F_y]^T. \quad (13)$$

Параметр M выражается через эти усилия таким образом, чтобы изгибающий момент в шарнирном узле 2 был равен нулю. В итоге энергия деформации второго типа конечного элемента имеет вид:

$$W_{II} = \frac{1}{2} \sigma_{II}^T \Lambda_{II} \sigma_{II}, \quad (14)$$

где Λ_{II} – матрица податливости (2×2) элемента второго типа (с одним шарниром):

$$\Lambda_{II} = \begin{bmatrix} \left(\frac{l_3}{EA} t_x^2 + \frac{l_3}{kGA} t_y^2 + \frac{l_3^3}{3EI} t_y^2 \right) & \left(\frac{l_3}{EA} t_x t_y + \frac{-l_3}{kGA} t_x t_y + \frac{-l_3^3}{3EI} t_x t_y \right) \\ (\text{сим.}) & \left(\frac{l_3}{EA} t_y^2 + \frac{l_3}{kGA} t_x^2 + \frac{l_3^3}{3EI} t_x^2 \right) \end{bmatrix}. \quad (15)$$

Рассмотрим стержень с двумя шарнирными узлами (рис.1в). Напряженное состояние такого элемента определяется одним параметром, в качестве которого удобно взять усилие $\sigma_{III} = F^T t$. (16)

Из условий обращения в нуль изгибающего момента в узлах 1 и 2 получим следующее выражение для энергии деформации третьего типа конечного элемента:

$$W_{III} = \frac{1}{2} \sigma_{III}^T \Lambda_{III} \sigma_{III}, \quad (17)$$

где Λ_{III} – матрица податливости (1×1) элемента третьего типа (с двумя шарнирами):

$$\Lambda_{III} = [l_3 / k_1]. \quad (18)$$

Отметим, что полученные матрицы податливости являются всегда невырожденными несмотря на то, что элементы не закреплены от жестких перемещений. В диссертации аналитически выполнено обращение этих матриц и получены в явном виде новые матрицы жесткости для всех типов элементов.

Построение матрицы совместности деформаций проиллюстрируем на примере произвольного контура, состоящего из 4-х стержней (рис.2). Из концов каждого стержня проведены жесткие консоли в одну и ту же точку A . Для каждого i -го стержня на концах консолей действуют усилия σ_i и $-\sigma_i$. Тогда однородные уравнения равновесия для всех узлов на концах консолей можно записать в виде:

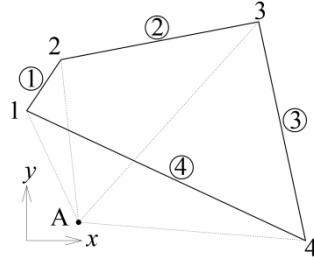


Рисунок 2 – Базовый контур (цифрами обозначены номера узлов, цифрами в кружках – номера стержней)

$$A^T \sigma = 0, \quad (19)$$

где $\sigma^T = (\sigma_1^T \quad \sigma_2^T \quad \sigma_3^T \quad \sigma_4^T)$ – (12×1) – столбец усилий для контура;

$$A^T = \begin{pmatrix} -I & 0 & 0 & -I \\ I & -I & 0 & 0 \\ 0 & I & -I & 0 \\ 0 & 0 & I & I \end{pmatrix}, \quad (20)$$

I – единичная (3×3) матрица, 0 – нулевая (3×3) матрица.

Так как для замкнутого контура первая консоль для первого элемента совпадает с последней консолью для четвёртого элемента, то суммарное относительное перемещение концов консолей будет равно нулю. Таким образом, уравнение совместности деформаций для рассматриваемого контура будет выглядеть следующим образом: $e_1 + e_2 + e_3 - e_4 = 0$, (21)

или в матричном виде:

$$Be = 0, \quad (22)$$

где $B = (I \quad I \quad I \quad -I)$ – матрица (3×12) совместности деформаций.

Нетрудно убедиться, что матрица B^T дает общее решение однородных уравнений равновесия (19).

Таким образом, благодаря введению жестких консолей и использованию одной и той же точки A для всех стержней, матрица совместности деформаций для любого контура будет иметь простейший вид – состоять из

нулей и единиц. Отметим, что количество уравнений совместности равно степени статической неопределимости системы – в данном случае равно трем.

Основной особенностью изложенного метода контурных усилий является то, что стержневую систему необходимо предварительно разбить на некоторое количество статически неопределимых контуров, соблюдая следующий ряд условий:

- сумма всех степеней статической неопределимости контуров $\sum n_{CT}^i$ должна быть равна общей степени статической неопределимости n_{CT} всей конструкции: $n_{CT} = \sum_i n_{CT}^i = n_{CT}^1 + n_{CT}^2 + \dots + n_{CT}^i$.
- контуры могут как иметь ряд общих элементов-стержней, так и не иметь их вообще, но должно выполняться условие независимости каждого контура, т. е. наличие хотя бы одного стержня, не входящего в другие контуры.
- каждый стержень системы должен входить в состав хотя бы одного контура.

Алгоритм расчета методом сил изложим на примере рассмотренного контура (рис.2).

Полная система уравнений строительной механики для этой системы имеет вид:

$$A^T \sigma = P \quad - \text{уравнения равновесия,} \quad (23)$$

$$AU = e_y + e_0 \quad - \text{связь деформаций с перемещениями,} \quad (24)$$

$$e_y = \Lambda \sigma \quad - \text{физические уравнения (закон Гука),} \quad (25)$$

где e_0 – заданные начальные деформации (например, температурные или от неравномерной осадки опор), e_y – упругие деформации, $\Lambda = \text{diag}(\Lambda_i)$ – блочно-диагональная матрица податливости элементов.

Согласно изложенному выше, выполняется равенство

$$B(e_y + e_0) = 0, \quad (26)$$

$$\text{откуда} \quad B\Lambda\sigma = -Be_0. \quad (27)$$

Общее решение уравнений равновесия (23) запишем в виде

$$\sigma = B^T X + \sigma_q, \quad (28)$$

где σ_q – любое частное решение уравнений (23), X – столбец контурных усилий.

В диссертации изложен способ нахождения частного решения σ_q , основанный на расчете отдельного статически определимого контура на заданную нагрузку.

Подставив (28) в (27), получим разрешающую систему уравнений метода сил относительно неизвестных контурных усилий X :

$$B\Lambda B^T X = -Be_0 - B\Lambda\sigma_u, \quad (29)$$

где $L = B\Lambda B^T = \Lambda_1 + \Lambda_2 + \Lambda_3 + \Lambda_4$ – матрица податливости контура. (30)

После решения системы уравнений (29) усилия в отдельных стержнях находятся по формуле (28).

Если стержневая система содержит несколько статически неопределимых контуров, то полная матрица совместности деформаций будет содержать столько блочных строк, сколько контуров есть в системе. Тогда матрица податливости системы L будет на главной диагонали содержать матрицы податливости отдельных контуров (которые, согласно (30), равны сумме матриц податливости стержней, составляющих контур), а недиагональные элементы матрицы L будут состоять из матриц податливости элементов общих для двух контуров. Отсюда вытекают следующие положительные свойства этой матрицы, аналогичные свойствам матрицы жесткости конструкции в методе перемещений:

а) матрица податливости системы автоматически получается ленточной и слабо заполненной, так как каждый контур имеет общие стержни только с соседними контурами;

б) структура матрицы податливости системы становится полностью определенной после нумерации контуров и элементов.

Указанные свойства делают процедуру построения матрицы податливости системы аналогичной по сложности процедуре построения матрицы жесткости системы в методе перемещений.

В итоге алгоритм расчета предлагаемым вариантом метода сил может быть представлен совокупностью следующих шагов:

Шаг 1. Выбрать базовые контуры. Пронумеровать контуры и стержни.

Шаг 2. Сформировать матрицы податливости стержней Λ_i .

Шаг 3. Вычислить по формулам типа (30) матрицы податливости контуров.

Шаг 4. Сформировать матрицу податливости стержневой системы.

Шаг 5. Сформировать столбец правых частей системы уравнений.

Шаг 6. Решить систему уравнений.

Шаг 7. Вычислить усилия в отдельных стержнях.

Подчеркнем, что изложенный алгоритм метода сил, обладает следующими особенностями:

1) не требуется выбирать основную систему метода сил и лишние неизвестные;

2) не требуется формировать, хранить в памяти компьютера и анализировать матрицу уравнений равновесия узлов;

- 3) не требуется нумерации и координат узлов стержневой системы;
 4) матрица податливости системы будет неособенной даже для конструкции, не закрепленной от жестких перемещений.

Указанное свойство 4) делает изложенный подход удобным для расчетов не только наземных строительных конструкций, но и для конструкций, незакрепленных от жесткого смещения: кораблей, самолетов, ракет, космических систем и т. п.

Далее в главе приведены примеры решения изложенным методом задач статики стержневых систем при различных воздействиях: силовых, температурных, неравномерной осадки опор.

В заключении главы изложен вывод матриц податливости и приведены примеры расчетов для плоских стержневых систем, нагруженных нагрузкой перпендикулярной к плоскости системы (балочный ростверк).

Третья глава посвящена постановкам и решениям плоских и пространственных задач динамики стержневых систем методом конечных элементов в усилиях (МКЭУ). Результаты сравниваются с результатами, полученными с помощью программного комплекса SCAD, в котором реализован метод конечных элементов в перемещениях (МКЭП).

На примере задачи о растяжении-сжатии стержня (рис. 3) приведем разработанные формы постановок этой динамической задачи в усилиях.

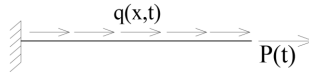


Рисунок 3 – Динамическая задача о растяжении стержня

Уравнение движения:
$$\frac{1}{\rho} N'' + \frac{1}{\rho} q' = \frac{1}{k} \ddot{N}, \quad (31)$$

граничные условия:
$$\begin{aligned} x=0: \quad N'(0,t) + q(0,t) &= 0, \\ x=l: \quad N(l,t) &= P(t), \end{aligned} \quad (32)$$

начальные условия:
$$t=0: \quad \begin{cases} N(x,0) = N_0(x), \\ \dot{N}(x,0) = \dot{N}_0(x), \end{cases} \quad (33)$$

где $N(x, t)$ – продольное усилие; $q(x, t)$ – распределенная нагрузка; ρ – линейная плотность; $(\dots)'$ – частная производная по координате x , $0 \leq x \leq l$, l – длина стержня; $(\dots)'$ – частная производная по времени t ; $k = EA$ – жесткость стержня на растяжение.

В работе доказано, что постановка (31) – (33) равносильна следующей вариационной задаче о поиске точки стационарности функционала $L(N)$:

$$L(N(x,t)) \rightarrow \text{стац.}, \quad x=l: \quad N(l,t)=P(t), \quad t=0: \begin{cases} N(x,0)=N_0(x), \\ \dot{N}(x,0)=\dot{N}_0(x), \end{cases} \quad (34)$$

где

$$L(N) = \int_0^l \int_0^t \left(\frac{1}{2} \frac{1}{k} \dot{N}^2 - \frac{1}{2} \frac{1}{\rho} N'^2 - \frac{1}{\rho} q N' \right) dx dt. \quad (35)$$

Первое граничное условие (32) является естественным для вариационной задачи (34).

На примере задачи об изгибе стержня (рис.4) приведем разработанные формы постановок этой динамической задачи в усилиях.

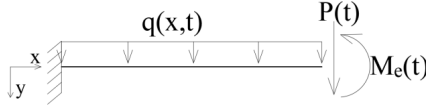


Рисунок 4 – Задача об изгибных колебаниях стержня

Уравнение движения:

$$\frac{1}{\rho} M^{IV} + \frac{1}{\rho} q'' + \frac{1}{k} \ddot{M} = 0, \quad (36)$$

граничные условия:

$$x=l: \quad \begin{cases} M(l,t) = M_e(t), \\ M'(l,t) = P(t). \end{cases} \quad (37)$$

$$x=0: \quad \begin{cases} M''(0,t) + q(0,t) = 0, \\ M'''(0,t) + q'(0,t) = 0. \end{cases} \quad (38)$$

начальные условия:

$$t=0: \quad \begin{cases} M(x,0) = M_0(x), \\ \dot{M}(x,0) = \dot{M}_0, \end{cases} \quad (39)$$

где $M(x,t)$ – изгибающий момент, $k = EI$ – изгибная жесткость стержня, $M_e(t)$, $P(t)$ – заданная краевая нагрузка.

В работе доказано, что постановка (36) – (39) равносильна следующей вариационной задаче о поиске точки стационарности функционала $L(M)$:

$$L(M(x,t)) \rightarrow \text{стац.}, \quad x=l: \quad \begin{cases} M(l,t) = M_e(t), \\ M'(l,t) = P(t), \end{cases} \quad t=0: \quad \begin{cases} M(x,0) = M_0(x), \\ \dot{M}(x,0) = \dot{M}_0(x), \end{cases} \quad (40)$$

где

$$L(M) = \int_0^l \int_0^t \left(\frac{1}{2} \frac{1}{k} \dot{M}^2 - \frac{1}{2} \frac{1}{\rho} M'^2 - \frac{1}{\rho} q M'' \right) dx dt. \quad (41)$$

Граничные условия (38) являются естественными для вариационной задачи (40).

Отметим, что приведенные вариационные постановки имеют определенный физический смысл. Поскольку слагаемые функционалов (35) и (41) имеют размерность мощности, то предложенные вариационные постановки можно сформулировать следующим образом: «на действительном движении суммарная мощность инерционных сил, упругих сил и внешних воздействий стационарна».

Далее на основе вариационных постановок стандартными алгоритмами метода конечных элементов строятся матрицы конечных элементов в усилиях. При этом для задачи о продольных колебаниях используется линейная аппроксимация продольной силы N на конечном элементе; для задачи об изгибных колебаниях используется кубическая аппроксимация изгибающего момента M . После объединения отдельных конечных элементов в единую систему решение задачи динамики сводится к решению системы обыкновенных дифференциальных уравнений:

$$V\ddot{F} + ZF = P(t), \quad (42)$$

где $F(t)$ – столбец зависящих от времени узловых усилий, Z – имеет смысл обратной матрицы масс, V – имеет смысл матрицы податливости, $P(t)$ – внешнее динамическое воздействие, приведенное к узлам.

При определении собственных частот ω конструкции необходимо искать корни частотного уравнения $|Z - \omega^2 V| = 0$. В диссертации на примерах показано, что МКЭУ дает погрешность определения собственным частот несколько меньшую, чем МКЭП.

Для решения задач динамики при произвольной зависимости воздействия $P(t)$ от времени использовался неявный метод Ньюмарка прямого интегрирования по времени (метод 2); при решении задач на гармоническое воздействие $P(t) = P_0 \sin(\theta t)$ использовался также способ прямого обращения (метод 1) динамической матрицы $D = Z - \theta^2 V$. Для решения задач с помощью МКЭУ была разработана программа в системе MATLAB.

В качестве примера приведем результаты решения одной из задач. Дана пространственная стержневая система (рис.5) с частотой вынуждающей нагрузки $\theta = 1.2\omega_1$ (рад/с), где ω_1 – первая собственная частота колебаний.

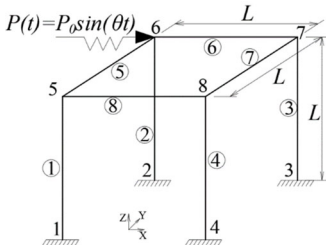


Рисунок 5 – Пространственная рама с гармонической вынуждающей нагрузкой

В таблице 1 приведены значения максимальных изгибающих моментов, полученные с помощью программы SCAD при разбивке рамы на 40 конечных элементов и учете от 30 до 50 форм собственных колебаний (СФК). Эти значения можно считать точным решением.

Таблица 1. Изгибающие моменты в сечениях 1 и 5 элемента 1 (Нм)

SCAD (МКЭП)		Количество собственных форм колебаний (СФК)				
		30 СФК	35 СФК	40 СФК	45 СФК	50 СФК
40 КЭ	M_{1y}	734808.69	735636.00	735636.00	735636.00	735636.00
	M_{5y}	487098.25	487769.31	487769.31	487769.31	487769.31

Первые пять собственных частот рассматриваемой системы: $\omega_1 = 355.32$, $\omega_2 = 458.83$, $\omega_3 = 793.82$, $\omega_4 = 1288.24$, $\omega_5 = 1457.39$ (Гц). Период колебаний для первой моды колебаний: $T_1 = 2\pi/\omega_1 \approx 0.002814$ (с). Решение задачи методом прямого интегрирования по времени (метод 2) было получено для двух временных шагов $\Delta t = 0.00028$ (с) и $\Delta t = 0.00047$ (с), при этом максимальная разница результатов составила 0.16 %.

На рис.6 приведены графики изменения изгибающих моментов в сечениях 1 и 5 элемента 1 во времени. На графиках видно, что после завершения переходного процесса решение выходит на стационарный режим.

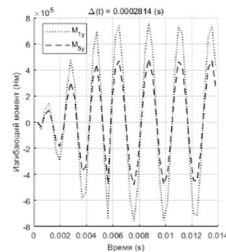


Рисунок 6 – Графики изгибающих моментов M_{1y} и M_{5y}

В таблице 2 приведено сравнение результатов расчетов по двум методам: МКЭП и МКЭУ (приведены значения моментов и их относительная погрешность).

Таблица 2. Сравнение результатов, максимальные изгибающие моменты (Нм)

				Методы			Точное решение
				МКЭУ (8 КЭ)	МКЭП (8 КЭ, 10 СФК)	МКЭП (16 КЭ, 10 СФК)	
Метод 1	M_{1y}			720523 2.05 %			
Метод 2	Временной шаг Δt	0.0004691(s)	$M_{1y\max}$	764297 3.90 %	638633 13.2 %	712226 3.18 %	735636
		0.0002814(s)		759766 3.28 %			
Метод 1	M_{5y}			489287 0.31 %			
Метод 2	Временной шаг Δt	0.0004691(s)	$M_{5y\max}$	485414 0.48 %	557496 14.3 %	486400 0.28 %	487769
		0.0002814(s)		482536 1.07 %			

Приведенные результаты показывают, что метод конечных элементов в усилиях уже при минимальном количестве конечных элементов (8 КЭ) позволяет найти значения максимальных усилий с погрешностью меньше 4 %. Метод конечных элементов в перемещениях дает такую же погрешность при увеличении количества конечных элементов в два раза. Похожие результаты были получены и при решении других задач.

Далее в главе изложен разработанный способ задания демпфирования по Релею для постановок задач динамики в усилиях. Доказано, что если для постановки в перемещениях $M\ddot{U} + C\dot{U} + KU = 0$ матрица демпфирования C задается в виде $C = \alpha M + \beta K$, где M – матрица масс, K – матрица жесткости, α, β – числовые коэффициенты, то для постановки в усилиях

$$V\ddot{F} + D\dot{F} + ZF = 0, \quad (43)$$

матрицу демпфирования D нужно задавать в виде $D = \alpha V + \beta Z$, (44)

где V и Z – матрицы из уравнения движения системы в усилиях (42).

Конкретные значения коэффициентов α и β определяются так же, как и в методе перемещений в зависимости от требуемых значений модального демпфирования.

Далее приведены разработанные в диссертации постановки в усилиях задач расчета на вертикальное и горизонтальное сейсмические воздействия. Приведем пример такой постановки для горизонтального сейсмического воздействия (рис.7). Закон движения основания конструкции задан акселерограммой $a(t)$.

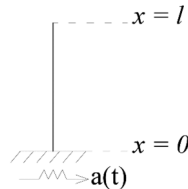


Рисунок 7 – Расчетная схема при горизонтальном сейсмическом воздействии

В диссертации для искомой функции $M(x, t)$ обоснована следующая постановка (45) – (47):

Уравнения движения:
$$\frac{1}{\rho} M^{IV} + \frac{1}{k} \ddot{M} = 0, \quad (45)$$

начальные условия:
$$t = 0: \begin{cases} M(x, 0) = 0, \\ \dot{M}(x, 0) = 0. \end{cases} \quad (46)$$

граничные условия: $x = 0: \begin{cases} M''(0, t) = \rho a(t), \\ M'''(0, t) = 0, \end{cases} \quad x = l: \begin{cases} M(l, t) = 0, \\ M'(l, t) = 0. \end{cases} \quad (47)$

Как известно, при стандартной постановке задачи расчета на сейсмическое воздействие методом перемещений, в уравнениях движения появляется дополнительное распределенное инерционное воздействие $\rho a(t)$. При численном решении задачи методом конечных элементов это приводит к необходимости задания дополнительных инерционных нагрузок во всех узлах конечно-элементной схемы. В постановке в усилиях дополнительных инерционных нагрузок не появляется. Сейсмическое ускорение $a(t)$ необходимо учитывать только в точке $x = 0$, примыкающей к основанию.

Соответствующая задаче (45) – (47) вариационная постановка выглядит следующим образом:

$$L(M(x, t)) \rightarrow \text{стац.}, \quad x = l: \begin{cases} M(l, t) = 0, \\ M'(l, t) = 0, \end{cases} \quad t = 0: \begin{cases} M(x, 0) = 0, \\ \dot{M}(x, 0) = 0, \end{cases} \quad (48)$$

где функционал $L(M)$ равен

$$L(M) = \int_0^l \int_0^t \left(\frac{1}{2} \frac{1}{k} \dot{M}^2 - \frac{1}{2} \frac{1}{\rho} M''^2 \right) dx dt + \int_0^t M'(0, t) a(t) dt. \quad (49)$$

Граничные условия (47) в точке $x = 0$ являются естественными граничными условиями для вариационной задачи (48).

Приведем пример расчета на сейсмическое воздействие, заданное акселерограммой, изображенной на рис.8. Расчетная схема конструкции и направление сейсмического воздействия приведено на рис.9.

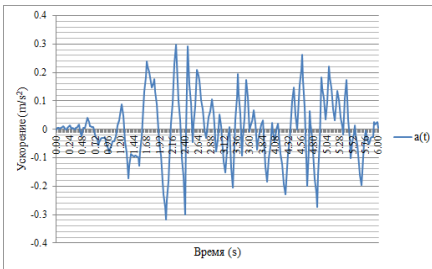


Рисунок 8 – Сейсмическое воздействие в виде ускорений поверхности земли (Имперская долина, Калифорния, землетрясение 18 мая 1940 г.)

В таблице 3 приведены значения максимальных изгибающих моментов, полученные с помощью метода прямого интегрирования по времени в программе SCAD при разбивке рамы на 120 конечных элементов, для различных значений шага по времени. Последние значения можно считать точным решением.

Таблица 3. Изгибающие моменты в сечениях 1 и 5 элемента 1 (Нм)

МКЭП SCAD	Временной шаг Δt (с)				
	0.02	0.01	0.005	0.0025	0.00125
$M_{1\max}$ (Нм)	-16136	-16099	-15868	-15868	-15868
$M_{5\max}$ (Нм)	33455	33394	32940	32940	32940

Решение задачи в усилиях (МКЭУ) методом прямого интегрирования по времени было получено для двух временных шагов $\Delta t = 0.02$ (с) и $\Delta t = 0.01$ (с), при этом максимальная разница результатов составила 0.10%. В таблице 4 приведено сравнение результатов расчетов по двум методам: МКЭП и МКЭУ (приведены значения моментов и их относительная погрешность).

Таблица 4. Сравнение результатов, максимальные изгибающие моменты

		Методы		Точное решение
		МКЭУ (8 КЭ)	МКЭП (120 КЭ)	
Временной шаг Δt	0.02 (с)	-15908 0.25 %	-16136 1.69 %	-15868
	0.01 (с)	-15892 0.15 %	-16099 1.46 %	
	0.02 (с)	33347 1.24 %	33455 1.56 %	32940
	0.01 (с)	33314 1.14 %	33394 1.38 %	

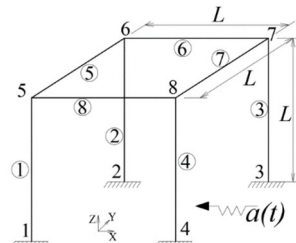


Рисунок 9 – Пространственная рама, горизонтальное сейсмическое воздействие

Приведенные результаты показывают, что метод конечных элементов в усилиях уже при минимальном количестве конечных элементов (8 КЭ) позволяет найти значения максимальных усилий с погрешностью меньше 2%. Метод конечных элементов в перемещениях дает такую же погрешность при 120 конечных элементах. Похожие результаты были получены и при решении других задач.

Четвертая глава посвящена решению задач устойчивости по методу конечных элементов в усилиях (МКЭУ).

Рассмотрим консольный стержень, подвергнутый осевому сжатию силой P , представленный на рис.10.

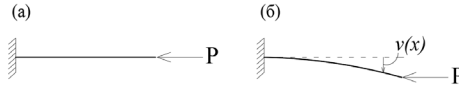


Рисунок 10 - Задача устойчивости для консольного стержня:

(а) недеформированное состояние, (б) деформированное состояние.

В диссертации сформулирована следующая постановка этой задачи в усилиях:

Уравнение устойчивости:
$$M^{IV} + \frac{P}{EJ} M'' = 0, \quad (50)$$

граничные условия:
$$x = 0: \begin{cases} M'(0) = 0, \\ M'''(0), \end{cases} \quad (51)$$

$$x = l: \begin{cases} M(l) = 0, \\ M''(l) = 0. \end{cases} \quad (52)$$

Для задачи устойчивости шарнирно опертого в точках $x = 0$ и $x = l$ стержня к уравнению (50) необходимо добавить следующие граничные

условия:
$$x = 0: \begin{cases} M(0) = 0, \\ M''(0) = 0, \end{cases} \quad x = l: \begin{cases} M(l) = 0, \\ M''(l) = 0. \end{cases} \quad (53)$$

В работе доказано, что постановка (50) – (52) равносильна вариационной задаче о поиске точки стационарности функционала $L(M)$:

$$\begin{cases} L(M) \rightarrow \text{стац.}, \\ M'(0) = 0; M(l) = 0, \end{cases} \quad (54)$$

где
$$L(M) = \frac{1}{2} \int_0^l \left((M'')^2 - \frac{P}{EI} (M')^2 \right) dx. \quad (55)$$

Вторые равенства в граничных условиях (51), (52) являются естественными граничными условиями для вариационной задачи (54).

Далее на основе вариационной постановки стандартными алгоритмами метода конечных элементов строятся матрицы конечных элементов в усилиях. При этом используется кубическая аппроксимация изгибающего момента $M(x)$. После объединения отдельных конечных элементов в единую систему решение задачи устойчивости сводится к решению системы однородных алгебраических уравнений: $(Z - PV)F = 0$, (56)

где F – столбец узловых усилий, Z – имеет смысл обратной матрицы геометрической жесткости, V – имеет смысл матрицы податливости.

Критическое значение нагрузки $P_{кр}$ находится как наименьший положительный корень, при котором обращается в нуль определитель матрицы системы (56): $|Z - PV| = 0$. (57)

Для решения задач с помощью МКЭУ была разработана программа в системе MATLAB.

Приведем пример решения задачи устойчивости для пространственной конструкции, приведенной на рис.11.

Исходные данные: модуль упругости $E = 3.0 \times 10^8$ (кН/м²), длина каждого стержня $L = 6$ (м), площадь квадратного поперечного сечения каждого стержня $A = 0.01$ (м²).

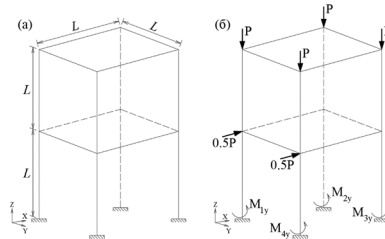


Рисунок 11 – Двухэтажный пространственный каркас:

(а) схема каркаса; (б) нагружение

В таблице 5 приведены значения критической силы P , полученные с помощью программы SCAD при разном количестве (от 16 до 320) конечных элементов. Последнее значение можно считать точным решением.

Таблица 5. Значения критической силы (МКЭП - SCAD)

	Количество конечных элементов						
	16 КЭ	32 КЭ	48 КЭ	64 КЭ	80 КЭ	160 КЭ	320 КЭ
$P_{кр}$ (Н)	42198.1	35165.1	35156.3	35125.7	35125.7	35099.5	35099.5

В таблице 6 приведено сравнение результатов расчетов по двум методам: МКЭП и МКЭУ (приведены значения критических сил и их относительная погрешность).

Таблица 6. Сравнение результатов двух методов: МКЭУ и МКЭП

	Методы				Точное решение
	МКЭУ		МКЭП		
	количество конечных элементов				
	16 КЭ	32 КЭ	16 КЭ	32 КЭ	

$P_{кр}$ (Н)	37875.8	35106.4	42198.1	35165.1	35099.5
ε (%)	7.90	0.02	20.2	0.20	

Приведенные результаты показывают, что метод конечных элементов в усилиях уже при минимальном количестве конечных элементов (16 КЭ) позволяет найти значения критической силы с погрешностью меньше 8%. Метод конечных элементов в перемещениях дает погрешность меньше 10% при увеличении количества конечных элементов в два раза. Похожие результаты были получены и при решении других задач.

Также в главе для нескольких задач приведено сопоставление с численным решением значений коэффициентов расчетной длины, найденных по правилам различных норм: России, Евросоюза и США. Показано, что нормативные методы могут давать погрешность в несколько десятков процентов.

Далее в главе приведены результаты расчета на прочность и устойчивость металлического каркаса жилого здания в г. Дананг, Социалистическая Республика Вьетнам (СРВ) (рис.12). Здание имеет габариты: высота 12.47(м), ширина 11.11(м), длина 24.40(м). Нагрузки задавались согласно нормам СРВ. Расчеты проводились с помощью, разработанной в среде MATLAB программы, реализующей метод конечных элементов в усилиях. Проверки прочности и устойчивости были выполнены не только по нормам СРВ, но и по перечисленным выше нормам других стран.

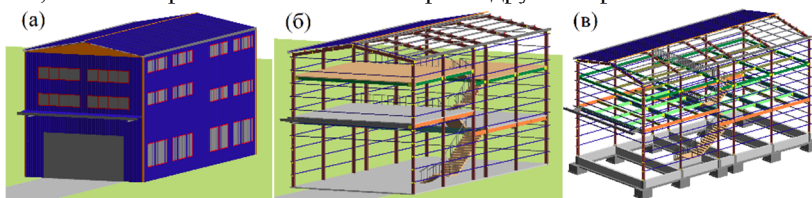


Рисунок 12 – Жилое здание: (а) внешний вид здания; (б) стержневая система несущих конструкций; (в) металлическая конструкция с железобетонным фундаментом

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Основные научные результаты, полученные при выполнении работы:

1. Обоснована недостаточная степень проработанности метода конечных элементов в усилиях для стержневых систем. Существующие методы значительно сложнее для алгоритмизации по сравнению с методом перемещений и разработаны, в основном, для решения задач расчета строительных конструкций на статические воздействия. Для задач динамики и устойчивости применение этих методов разработано недостаточно.

2. Для предложенного метода статического расчета стержневых систем методом сил построены в явном виде невырожденные матрицы податливости и жесткости отдельных стержней как с жесткими, так и с шарнирными узлами для всех видов деформации стержней: растяжение, кручение, изгиб в двух плоскостях. Сформулирован алгоритм статического расчета методом сил, который сравним по сложности программирования с методом перемещений и обладает аналогичными положительными свойствами (простая структура, ленточный характер и слабая заполненность матрицы податливости конструкции).

3. Сформулирована постановка задач динамики стержней в усилиях в двух формах: дифференциальной и вариационной. На основе вариационной постановки построены новые конечные элементы в усилиях для решения динамических задач. На примерах задач, имеющих аналитическое решение, а также для плоской и пространственной рам, нагруженных гармонической нагрузкой, исследована точность предлагаемого метода конечных элементов в усилиях. Разработана постановка в усилиях для расчета стержневых систем на горизонтальное и вертикальное сейсмические воздействия. Показано, что предложенный метод дает высокую точность определения усилий по сравнению с методом перемещений.

4. Сформулирована постановка задач устойчивости стержней в усилиях в двух формах: дифференциальной и вариационной. На основе вариационной постановки построены новые конечные элементы в усилиях для решения задач устойчивости. На примерах расчета на устойчивость плоских и пространственной рам исследована точность разработанного метода конечных элементов в усилиях. На конкретном примере расчета металлической конструкции в Социалистической Республике Вьетнам показано, что метод конечных элементов в усилиях позволяет получить достаточно точные результаты при существенном сокращении количества конечных элементов по сравнению с методом конечных элементов в перемещениях.

Рекомендации и перспективы дальнейшей разработки темы. Дальнейшие исследования предполагается проводить в направлении развития методики применения метода конечных элементов в усилиях к задачам расчета строительных конструкций с полужесткими соединениями, а также с учетом взаимодействия с основанием.

СПИСОК РАБОТ ПО ТЕМЕ ДИССЕРТАЦИИ

Публикации в изданиях, индексируемых в БД Scopus и Web of Science

1. Lalin V.V., **Ngo H.H.** The Loop Resultant Method for Static Structural Analysis // International Journal for Computational Civil and Structural Engineering. 2022. № 1. С. 72–81.

Публикации в изданиях, включенных в Перечень ВАК

2. Lalin V.V., **Ngo H.H.**, Vavilova A.M. A finite element force method applied to free vibration of rod systems // Системные технологии. 2024. № 1. С. 34-46.

3. Лалин В.В., Ле Т.К.Ч., **Нго Х.Х.** Способ статического учета высших форм колебаний в задачах динамики конструкций // Природные и техногенные риски. Безопасность сооружений. 2020. № 3. С. 39-42.

4. Lalin V.V., Lalina I.I., **Ngo H.H.**, Le T.M.D. The force method algorithm in the form of a loop resultant method // Строительство и реконструкция. 2024. № 4. С. 42-55.

5. **Ngo H.H.**, Lalin V.V., Le T.Q.T. Free vibration analysis of rod systems using the finite element force method with extended shape functions // Вестник инженерной школы Дальневосточного федерального университета. 2024. № 2. С. 127-141.

6. Lalin V.V., Lalina I.I., **Ngo H.H.**, Vavilova A.M. An element forces formulation of stability analysis using the finite element force method for rod systems // Инновации и Инвестиции. 2024. № 2. С. 270-275.

Статьи в сборниках трудов научно-технических конференций

7. **Ngo H.H.**, Lalin V.V., Lalina I.I., Vavilova A.M., Le T.Q.T., Le T.M.D. The Idea of a “Loop Fragment” of the Finite Element Force Method in the Loop Resultant Method for Static Structural Analysis // Materials Proceedings, ISSN: 2673-4605. 2024. № 18. 8 с.

8. Лалин В.В., Чуднова Е.П., **Нго Х.Х.** Алгоритм расчета статически неопределимых стержневых конструкций с помощью метода контурных усилий // Сборник трудов конференции «Неделя науки СПбПУ»: Материалы всероссийской конференции. Инженерно-строительный Институт. Санкт-Петербург. 2021. С. 446-448.

9. Лалин В.В., Лалина И.И., **Нго Х.Х.** Алгоритмизация метода сил для стержневых систем – метод контурных усилий // Сборник трудов конференции: Материалы XIV международной конференции по прикладной математике и механике в аэрокосмической отрасли (АММАГ'2022). Алушта. 2022. С. 205-206.

10. Лалин В.В., **Нго Х.Х.** Обобщенная точка Коссера – материальная точка с тензором инерции и тензором масс. Новые конечные элементы для задач динамики стержневых систем // Сборник трудов конференции:

Материалы XXIII международной конференции по вычислительной механике и современным прикладным программным системам (ВМСППС'2023). с. Дивноморское, Краснодарский край. 2023. С. 58-59.

Тезисы в сборниках трудов научно-технических конференций

11. Лалин В.В., **Нго Х.Х.** Материальная точка с разными массами по разным направлениям – новые конечные элементы в задачах динамики стержневых систем // Сборник тезисов научных докладов VIII-го Международного симпозиума «Актуальные проблемы компьютерного моделирования конструкций и сооружений». Тамбов. 2023. С. 151-152.

12. Лалин В.В., **Нго Х.Х.** Обобщенная точка Коссера. Новые конечные элементы для задач динамики стержневых систем // Сборник тезисов научных докладов XXIII Зимней школы по механике сплошных сред. Пермь. 2023. С. 191.

13. Lalin V.V., **Ngo H.H.**, Le T.Q.T. An element forces formulation of finite element force method applied to the vibration analysis // Сборник тезисов научных докладов XVII-го Международной научно-технической конференции «Актуальные проблемы компьютерного моделирования конструкций и сооружений». Новосибирск. 2024. С. 23.

Компьютерная верстка *В. С. Весниной*

Подписано к печати 04.04.2025. Формат 60×84 ¹/₁₆. Бумага офсетная.

Усл. печ. л. 1,6. Тираж 120 экз. Заказ 39.

Санкт-Петербургский государственный архитектурно-строительный университет.
190005, Санкт-Петербург, 2-я Красноармейская, д. 4.

Отпечатано на МФУ. 198095, Санкт-Петербург, ул. Розенштейна, д. 32, лит. А