

Министерство науки и высшего образования Российской Федерации

Федеральное государственное автономное образовательное учреждение высшего
образования «Санкт-Петербургский государственный политехнический
университет»

На правах рукописи

Нго Хыу Хиеу

**МЕТОД СИЛ В ЗАДАЧАХ СТАТИКИ, ДИНАМИКИ И УСТОЙЧИВОСТИ
СТЕРЖНЕВЫХ СИСТЕМ**

2.1.9. Строительная механика

Диссертация на соискание ученой степени кандидата технических наук

Научный руководитель:
Доктор технических наук,
профессор Лалин Владимир Владимирович

Санкт-Петербург – 2025

ОГЛАВЛЕНИЕ

ВВЕДЕНИЕ.....	5
Глава 1. ОБЗОР СУЩЕСТВУЮЩИХ МЕТОДИК РАСЧЕТА	
СТЕРЖНЕВЫХ СИСТЕМ МЕТОДОМ СИЛ.....	11
1.1. Краткая история расчета строительных конструкций методом сил.....	11
1.2. Проблема алгоритмизации метода сил.....	13
1.3. Интегральный метод сил.....	16
1.4. Силовой метод.....	17
1.5. Выводы по главе 1.....	18
Глава 2. МЕТОД КОНЕЧНЫХ ЭЛЕМЕНТОВ В УСИЛИЯХ В ФОРМЕ	
МЕТОДА КОНТУРНЫХ УСИЛИЙ В ЗАДАЧАХ СТАТИКИ	20
2.1. Матрицы податливости конечных элементов в усилиях для плоских стержневых систем	21
2.2. Уравнения совместности деформаций для статически неопределимых контуров	27
2.3. Алгоритм расчета методом сил	29
2.4. Примеры расчета на температурные воздействия и неравномерную осадку опор.....	32
2.4.1. Базовые контуры	32
2.4.2. Комбинация двух базовых контуров	33
2.4.3. Комбинация трех и четырех базовых контуров.....	36
2.4.4. Расчет на неравномерную осадку опор	39
2.5. Пример расчета на силовые воздействия	41
2.6. Расчет плоско-пространственной рамы.....	46
2.7. Выводы по главе 2.....	53
Глава 3. МЕТОД КОНЕЧНЫХ ЭЛЕМЕНТОВ В УСИЛИЯХ В ЗАДАЧАХ	
ДИНАМИКИ	55
3.1. Постановка задачи динамики о растяжении стержней в усилиях	55
3.2. Вариационная постановка задачи динамики о растяжении стержней в усилиях	57

3.3. Постановка в усилиях для динамических задач изгиба стержней.....	58
3.4. Вариационная постановка в усилиях для динамических задач изгиба стержней.....	60
3.5. Численное решение задач динамики стержней в форме метода конечных элементов в усилиях	61
3.5.1. Реализация МКЭ в усилиях для динамических задач растяжения стержней.....	61
3.5.2. Реализация МКЭ в усилиях для динамических задач изгиба стержней .	65
3.6. Примеры вычисления собственных частот стержневых конструкций	70
3.6.1. Пример плоской стержневой системы.....	72
3.6.2. Пример пространственной стержневой системы	73
3.7. Примеры решения задач о вынужденных колебаниях стержневых конструкций.....	75
3.8. Постановка в усилиях задач расчета на сейсмическое воздействие	85
3.9. Учет демпфирования при постановке и решении задач динамики в усилиях	90
3.10. Примеры расчета стержневых конструкций на сейсмическое воздействие	93
3.11. Выводы по главе 3.....	100
Глава 4. МЕТОД КОНЕЧНЫХ ЭЛЕМЕНТОВ В УСИЛИЯХ В ЗАДАЧАХ УСТОЙЧИВОСТИ.....	101
4.1. Постановка в усилиях задач устойчивости стержней	101
4.2. Вариационная постановка в усилиях задач устойчивости стержней	103
4.3. Численное решение задач устойчивости стержней в форме метода конечных элементов в усилиях	104
4.3.1. Реализация МКЭ в усилиях в задачах устойчивости	104
4.3.2. Примеры решения задач устойчивости для отдельного стержня.....	106
4.4. Расчет на устойчивость стержневых систем.....	108
4.4.1. Примеры расчета на устойчивость плоских рам	109
4.4.2. Пример расчета на устойчивость пространственной рамы.....	114

4.5. Расчет на устойчивость металлической конструкции в Социалистической Республике Вьетнам	117
4.5.1. Описание нагрузок.....	119
4.5.2. Алгоритм проверки устойчивости колонн (А-Б-В-Г-Д).....	122
4.5.3. Результат проверки устойчивости колонн	123
4.6. Выводы по главе 4.....	129
ЗАКЛЮЧЕНИЕ	130
СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ	132
Приложение А. Чертежи металлического каркаса жилого здания в Социалистической Республике Вьетнам	142
Приложение Б. Публикации по теме диссертации	151
Приложение В. Справки о внедрении.....	153

ВВЕДЕНИЕ

Актуальность темы исследования. При расчете напряженно-деформированного состояния строительных конструкций от статических, температурных или динамических воздействий, необходимо иметь возможность определять перемещения и усилия (напряжения) с достаточной точностью. В настоящее время промышленные программные комплексы по расчету конструкций основаны на методе конечных элементов в форме метода перемещений. При этом для нахождения усилий приходится использовать процедуры численного дифференцирования перемещений, что приводит к снижению точности определения усилий по сравнению с точностью определения перемещений.

Одним из способов повышения точности определения усилий при решении задач строительной механики является переход к постановке задач непосредственно в усилиях, то есть использование тех или иных вариантов метода сил. Однако, метод сил не реализован в программных комплексах даже для простейших конструкций - стержневых систем. Поэтому, разработка новых вариантов метода сил, которые обладали аналогичными по сравнению с методом перемещений положительными свойствами, делающими алгоритм метода сил сравнимым по сложности с алгоритмом метода перемещений является **актуальной задачей**.

Степень разработанности темы диссертации. В первоначальный период развития метода конечных элементов (60-е – 80-е годы XX века) различными проблемами в области алгоритмизации метода сил для стержневых систем занималось большое количество ученых как в СССР, так и за рубежом. Можно отметить таких исследователей как: Розин Л.А., Резников Р.А., Филин А.П., Шулькин Ю.Б., Шварц М.А., Тананайко О.Д., Гибшман М.Е., Argyris J.H., Robinson J., Petyt M., Gallagher R.H., Patnaik N., Domaszewski M., Borkowski A., Felippa C.A., Joseph K.T., Zwing A., и др. Более подробный анализ работ этих, а также других ученых будет приведен в первой главе. Уже здесь можно отметить, что большинство работ было посвящено только задачам статики. Однако, все

предложенные способы алгоритмизации метода сил были сложнее стандартного алгоритма метода перемещений, что и привело к тому, что в существующих программных комплексах по расчету строительных конструкций реализован только метод перемещений.

Таким образом можно констатировать, что разработка новых вариантов метода сил для решения задач статики, динамики и устойчивости стержневых конструкций, сравнимых по сложности реализации с методом перемещений, продолжает оставаться одной из актуальных задач строительной механики.

Целью диссертационной работы является разработка новых алгоритмов и конечных элементов метода сил для задач статики, динамики и устойчивости стержневых строительных конструкций.

В соответствии с поставленной целью решались следующие задачи:

1. Разработать новые постановки в усилиях для решения задач статики, динамики и устойчивости стержневых систем.
2. Разработать новые конечные элементы для решения задач статики, динамики и устойчивости стержневых систем с неизвестными функциями - усилиями.
3. Провести тестирование и апробацию построенных конечных элементов в усилиях.
4. Привести примеры расчетов конструкций разработанными методами.

Объектом исследования являются методы расчета стержневых конструкций.

Предметом исследования являются методы расчета стержневых конструкций с неизвестными - усилиями.

Научная новизна работы состоит в следующем:

1. Построены для плоских и пространственных задач статики в явном виде невырожденные матрицы податливости и жесткости для всех типов элементов-стержней (с шарнирами и без шарниров) произвольно ориентированных по отношению к глобальной системе координат.
2. Разработаны новые постановки задач динамики и устойчивости стержневых систем, в которых неизвестными функциями являются усилия. Новые

постановки представлены в дифференциальной и вариационной формах. Доказана эквивалентность двух форм постановок.

3. Построены новые конечные элементы в усилиях для решения задач динамики и устойчивости стержневых систем – получены матрицы масс и геометрической жесткости конечных элементов в усилиях.
4. Выполнен анализ точности построенных конечных элементов при решении модельных задач; проведено сопоставление с точными решениями, а также с результатами, полученными с помощью верифицированных программных комплексов.
5. Разработан алгоритм и составлена в среде MATLAB программа решения задач статики, динамики и устойчивости стержневых строительных конструкций с использованием построенных конечных элементов.

Соответствие темы диссертации требованиям паспорта специальности ВАК. Диссертация соответствует паспорту специальности 2.1.9 - «Строительная механика»:

- п. №2 «Линейная и нелинейная механика конструкций, зданий и сооружений, разработка физико-математических моделей их расчета»;
- п. №4 «Численные и численно-аналитические методы расчета зданий, сооружений и их элементов на прочность, жесткость, устойчивость при статических, динамических, температурных нагрузках и других воздействиях».

Теоретическая и практическая значимость работы заключается в разработке методов, алгоритмов и программ для расчета на ЭВМ стержневых конструкций в задачах статики, динамики и устойчивости с использованием постановок в усилиях. При этом точность определения усилий в предлагаемом методе повышается по сравнению с результатами метода конечных элементов в перемещениях при аналогичных вычислительных затратах.

С помощью разработанных алгоритмов и программ выполнен расчет и проведен анализ напряженно-деформированного состояния металлического каркаса жилого здания в Социалистической Республике Вьетнам.

Практическая значимость работы подтверждается справками о внедрении результатов диссертационного исследования, приведенными в Приложении В.

Методология и методы исследования. В диссертационной работе использовались классические положения строительной механики, динамики и устойчивости конструкций, теории расчета стержневых систем. Численная реализация построена на применении метода конечных элементов.

Личный вклад автора диссертации состоит в: разработке и численной реализации конечных элементов, для которых узловыми неизвестными являются непосредственно усилия; разработке в среде MATLAB программы для решения задач статики, динамики и устойчивости стержневых строительных конструкций; анализе точности разработанных конечных элементов для модельных задач; получении и анализе результатов для реальной строительной конструкции в Социалистической Республике Вьетнам.

Степень достоверности полученных результатов. Достоверность и обоснованность результатов исследований подтверждается использованием строгих математических подходов строительной механики, динамики и устойчивости сооружений; применением теории метода конечных элементов для построения матриц жесткости, масс и геометрической жесткости; верификацией построенных конечных элементов на решении модельных задач; согласованностью полученных результатов с решениями, полученными при использовании верифицированных программных комплексов.

Апробация работы. Основные теоретические положения и численные результаты диссертационной работы подтверждены апробацией на следующих конференциях и семинарах:

1. Научный семинар, посвященного 110-летию доктора технических наук, профессора Олега Александровича Савинова, СПб, ПГУПС и ВНИИГ им. Б.Е. Веденеева (г. Санкт-Петербург, 2020 г.);
2. IX Международная научная конференция «Задачи и методы компьютерного моделирования конструкций и сооружений», «Золотовские чтения» (г. Москва, 2021 г.);

3. VII Международная научная конференция «Вопросы науки и практики 2022» (г. Москва, 2022 г.);
4. International Conference on Materials Physics, Building Structures and Technologies in Construction, Industrial and Production Engineering «MPCPE-2022» (г. Владимир, 2022 г.);
5. XIV Международная конференция по прикладной математике и механике в аэрокосмической отрасли «АММАГ'2022» (г. Алушта, 2022 г.);
6. 1-я международная научная конференция «Соломинские чтения» (г. Челябинск, 2022 г.);
7. XXIII Зимней школы по механике сплошных сред (г. Пермь, 2023 г.);
8. VIII Международный симпозиум «Актуальные проблемы компьютерного моделирования конструкций и сооружений» (г. Тамбов, 2023 г.);
9. XXIII Международная конференция по Вычислительной механике и современным прикладным программным системам «ВМСППС'2023» (в п. Дивноморское, Краснодарский край, 2023 г.);
10. Международный научно-практический симпозиум «Будущее строительной отрасли: Вызовы и перспективы развития» (г. Москва, 2023 г.);
11. XVII Международная научно-техническая конференция «Актуальные вопросы архитектуры и строительства» (г. Новосибирск, 2024 г.);
12. 10th International Conference on Advanced Engineering and Technology «10th ICAET» (г. Инчхон, Корея, 2024 г.);
13. VI Международная научно-практическая конференция «Проектирование и расчет строительных конструкций и оснований», «DeCaBuS'2024» (г. Санкт-Петербург, 2024 г.).

Публикации. Результаты выполненного исследования приведены в 13 публикациях. Из них: 1 статья в издании, представленном в базе данных Scopus и Web of Science, 5 статей в журналах, входящих в Перечень ВАК, 4 статьи и 3 тезиса докладов в сборниках трудов научно-технических конференций.

Положения, выносимые на защиту

1. Метод конечных элементов в усилиях в форме метода контурных усилий для статического расчета статически неопределимых стержневых систем.
2. Постановки и реализация методом конечных элементов в усилиях задач динамики и устойчивости стержневых систем.
3. Численное исследование точности решения задач статики, динамики и устойчивости стержневых систем с помощью разработанных конечных элементов и алгоритмов.
4. Результаты решения модельных задач и задач расчета реальных строительных конструкций.

Структура и объем диссертации

Диссертационная работа состоит из введения, четырёх глав, заключения и списка литературы (107 наименований). Общий объём диссертации составляет 154 страниц, в него входят 58 рисунков и 69 таблиц.

Благодарности

Автор считает своим долгом выразить искреннюю благодарность научному руководителю, профессору В.В. Лалину, за всестороннюю помощь и поддержку.

Глава 1. ОБЗОР СУЩЕСТВУЮЩИХ МЕТОДИК РАСЧЕТА СТЕРЖНЕВЫХ СИСТЕМ МЕТОДОМ СИЛ

В этой главе дан обзор методов расчета стержневых строительных конструкций, в которых усилия являются одними из неизвестных, относительно которых формируется разрешающая система уравнений. Особенное внимание уделяется методу сил и вопросам его алгоритмизации.

1.1. Краткая история расчета строительных конструкций методом сил

Основы классического метода сил строительной механики были заложены в XIX веке: ¹Eytelwein J.A., ²Navier C.L.M., ³Clapeyron B.P.E., ⁴Bress J.A.C. Постепенно был сформирован четкий алгоритм метода сил при ручном расчете:

1. Определить степень статической неопределимости.
2. Определить лишние связи, усилия в которых (силы или моменты) будут рассматриваться как неизвестные – лишние неизвестные. Удаление лишних связей превращает заданную систему в статически определимую – основную систему метода сил.
3. Рассчитать перемещения основной системы по направлениям удаленных лишних связей от заданных воздействий и единичных лишних неизвестных.
4. Сформировать и решить систему уравнений метода сил.
5. Вычислить значения внутренних усилий в исходной конструкции.

На этом этапе и в первой половине XX века в докомпьютерную эпоху метод сил, наряду с методом перемещений, был одним из равноправных методов расчета статически неопределимых стержневых систем.

Положение дел стало меняться после появления компьютеров и развития матричных методов расчета сооружений [1-5]. Быстро был сформулирован матричный алгоритм метода перемещений, допускавший сравнительно простое

¹ Eytelwein J.A. Handbuch der Statik fester Körper, Berlin: Realschulbuchhandlung, 1808. (In Ger.).

² Navier C.L.M. Résumé des leçons données à l'École royale des ponts et chaussées sur l'application de la mécanique à l'établissement des constructions et des machines, Paris: Firmin Didot père et fils, etc., 1826. (In Fr.).

³ Clapeyron B.P.E. Calcul d'une poutre élastique reposant librement sur des appuis inégalement espacés, Ibid., 1857. (In Fr.).

⁴ Bress J.A.C. Cours de mécanique appliquée par Bresse Troisième partie. Calcul des moments de flexion dans une poutre à plusieurs travées solidaires, Paris: Gauthier Villars, 1865. (In Fr.).

программирование и обладавший существенными положительными свойствами [6,7,8]. Применительно к стержневым системам существо этого алгоритма можно изложить следующим образом [9,10,11].

Запишем в матричном виде основные уравнения статики стержневых систем: уравнения равновесия узлов:

$$A^T \sigma = P, \quad (1.1)$$

связь деформаций с перемещениями:

$$AU = e, \quad (1.2)$$

физические уравнения (закон Гука):

$$\sigma = K_d e, \quad (1.3)$$

где P - столбец узловых нагрузок,

e - столбец упругих деформаций,

σ - столбец узловых усилий,

$K_d = \text{diag}(K_i)$ - блочно - диагональная матрица жесткости отдельных элементов-стержней,

верхний индекс «Т» означает операцию транспонирования матрицы.

Исключая из системы (1.1) – (1.3) столбцы σ и e , получим разрешающее уравнение относительно перемещений:

$$KU = P, \quad (1.4)$$

$$\text{где} \quad K = A^T K_d A \quad (1.5)$$

- матрица жесткости стержневой системы.

Полученная таким способом матрица разрешающей системы уравнений метода перемещений – матрица жесткости системы K - обладает следующими положительными свойствами:

матрица K является ленточной и слабо заполненной,

структура матрицы K , то есть расположение в ней нулевых и ненулевых блоков, однозначно определяется после нумерации узлов и элементов системы.

Именно последнее свойство обеспечивает сравнительно простую алгоритмизацию и программирование метода перемещений.

Несмотря на усилия многих ученых сформулировать аналогичный по свойствам и простоте алгоритмизации вариант метода сил в то время не удалось. Основные трудности алгоритмизации метода сил будут изложены в следующем параграфе.

1.2. Проблема алгоритмизации метода сил

Основная система метода сил может быть выбрана неединственным способом, следовательно, и разрешающая система уравнений может быть разной – в этом главное отличие от метода перемещений и основная трудность алгоритмизации метода сил. На алгебраическом языке это может быть сформулировано следующим образом.

Для статически неопределимых задач матрица $A^T(n \times m)$ уравнений равновесия

$$A^T \sigma = P, \quad (1.6)$$

является прямоугольной – число строк n (число уравнений в системе (1.6)) в ней меньше числа столбцов m (числа неизвестных усилий σ); при этом число $m - n$ равно степени статической неопределимости системы. В таком случае полное решение системы уравнений (1.6) может быть представлено, как сумма общего решения σ_0 однородных уравнений и частного решения σ_q .

Для такого представления необходимо путем анализа матрицы A^T найти в ней n линейно независимых столбцов и сформировать из них невырожденный квадратный блок $A_1^T(n \times n)$. После перенумерации при необходимости элементов столбца σ можно считать, что матрица A^T имеет вид

$$A^T = (A_1^T A_2^T), \quad (1.7)$$

где матрица $A_2^T(n \times (m - n))$ – матрица из остальных столбцов матрицы A^T .

После этого общее решение системы (1.6) можно представить в виде

$$\sigma = \sigma_0 + \sigma_q = B^T \sigma_n + \begin{pmatrix} A_1^{-T} P \\ 0 \end{pmatrix}, \quad (1.8)$$

$$\text{где } (n \times (m - n)) \text{ матрица } B^T = \begin{pmatrix} -A_1^{-T} A_2^T \\ I \end{pmatrix}, \quad (1.9)$$

I – единичная $(m - n) \times (m - n)$ матрица,

0 – нулевой $((m - n) \times 1)$ столбец,

$\sigma_{\text{л}}$ – столбец из $(m - n)$ неизвестных метода сил (лишних неизвестных по терминологии классической строительной механики).

Разрешающая система уравнений метода сил получается следующим образом. Так как по определению общего решения однородных уравнений равенство $A^T B^T \sigma_{\text{л}} = 0$ выполняется при любом столбце $\sigma_{\text{л}}$, то справедливо тождество $A^T B^T \equiv 0$, транспонируя которое, получим $BA \equiv 0$. Тогда, умножив на матрицу B равенство (1.2), придем к уравнению

$$Be = 0 \quad (1.10)$$

или

$$BK_d^{-1} \sigma = 0. \quad (1.11)$$

Подставив в (1.11) выражение (1.8), получим разрешающую систему уравнений метода сил

$$BK_d^{-1} B^T \sigma_{\text{л}} + BK_d^{-1} \sigma_{\text{ч}} = 0. \quad (1.12)$$

Матрица $\Lambda = BK_d^{-1} B^T$ разрешающей системы уравнений метода сил (которую можно назвать матрицей податливости системы) зависит от матрицы A_1^T , то есть от выбора линейно-независимых столбцов матрицы A^T . Поскольку такой выбор можно сделать разными способами, то матрица Λ определена неоднозначно, что соответствует множественности основных систем в «ручном» варианте метода сил.

Было предложено много способов построения матрицы A_1^T общего решения однородных уравнений равновесия: от прямого анализа столбцов матрицы A^T с целью выбора линейно независимых [12-22] до решения проблемы собственных значений матрицы $A^T A$ [23,24]. Для некоторых частных видов стержневых систем были предложены более эффективные алгоритмы: использование симметрии конструкции [25,26]; анализ матрицы инцидентий графа конструкции для стержневых систем без шарниров [27]. Очевидная аналогия между схемой плоской стержневой системы и графом вызвало к жизни попытки использования

основных положений теории графов для анализа и расчета конструкций [28–32], причем такие работы продолжают появляться и в настоящее время [33–34].

Общим свойством всех упомянутых работ является необходимость хранения в памяти компьютера матрицы уравнений равновесия A^T (для простых систем – ее логического аналога – матрицы инцидентий) и выполнения операций по ее анализу. Уже один этот факт делает любой подобный алгоритм метода сил более сложным по сравнению со стандартным алгоритмом метода перемещений. Еще одну значительную проблему в алгоритмах метода сил представляет трудность обеспечения таких свойств матрицы разрешающей системы уравнений, как ленточный характер и слабая заполненность. Указанные проблемы и трудности продолжают обсуждаться и в работах, опубликованных в XXI веке [35–38].

Тем не менее удобство формулировки некоторых задач строительной механики в усилиях приводит к тому, что до настоящего времени продолжают появляться соответствующие публикации. К таким задачам, например, относятся: задачи расчета на заданные начальные деформации и осадку опор [39]; задачи пластичности и разрушения (условия пластичности и прочности формулируются в усилиях, а не в перемещениях) [40–49]; некоторые задачи оптимизации [50–54]. Разумеется, удобство формулировки некоторых условий в усилиях не снимает упомянутых выше проблем алгоритмизации метода сил.

Обратим внимание, что условие (1.10) имеет очевидный физический смысл – это условие совместности деформаций. В приведенном алгоритме метода сил матрица B уравнений совместности деформаций строилась с использованием матрицы A_1^T (см. формулу (1.9)), то есть для ее построения требовался анализ матрицы уравнений равновесия A^T . С целью избежать этого в некоторых работах были предложены способы прямого построения матрицы совместности деформаций [55–58]. Однако, при этом требовалось в численном алгоритме строить матрицы совместности для отдельных контуров системы, то есть проводить дополнительные вычисления, которых нет в методе перемещений. Другими словами, и здесь получался алгоритм более сложный по сравнению с алгоритмом метода перемещений.

Упомянутые выше работы посвящены статическим задачам расчета стержневых систем. Значительное меньшее количество работ посвящено вопросам использования метода сил в задачах динамики и устойчивости [59-65]. Перечисленные сложности алгоритмизации метода сил, разумеется, остаются в силе и в задачах динамики и устойчивости.

Изложенные проблемы алгоритмизации метода сил и привели к тому, что в существующих промышленных программных комплексах по расчету строительных конструкций реализован только метод перемещений. Пессимизм по поводу возможности удобной алгоритмизации метода сил приводит к тому, что иногда появляются работы с характерным названием [66]: «Вернется ли метод сил?».

1.3. Интегральный метод сил

Одним из достаточно распространенных в зарубежной научной литературе методом решения задач строительной механики в усилиях является интегральный метод сил (the integrated force method), который был предложен в работе [67]. До сих пор название этого метода не имеет общепринятого перевода на русский язык. Как будет видно из дальнейшего изложения этот метод имеет лишь формальное отношение к классическому методу сил строительной механики – основными неизвестными в этих методах являются усилия (напряжения).

В интегральном методе сил предлагается разрешающую систему уравнений относительно всех неизвестных усилий (не выделяя из них лишних неизвестных) получать простым присоединением к уравнениям равновесия уравнений совместности деформаций, выраженных через усилия. В итоге разрешающая система уравнений будет иметь вид

$$C\sigma = F, \quad (1.13)$$

где $C = \begin{pmatrix} A^T \\ B \end{pmatrix} K_d^{-1}$, $F = \begin{pmatrix} P \\ 0 \end{pmatrix}$.

Работы по интегральному методу сил продолжают появляться вплоть до настоящего времени [68–73]. Этот метод применяют не только для задач статики,

но и для задач динамики, пластичности, оптимизации и других, причем как для стержневых систем, так и для других математических моделей строительной механики.

Применительно к расчету стержневых систем очевидны недостатки интегрального метода сил: количество неизвестных в системе (1.13) превышает количество неизвестных как метода перемещений, так и метода сил. Матрица S системы (1.13) не является симметричной и не обладает слаботыпной и ленточной структурой, к тому же не известен удобный алгоритм формирования матрицы совместности деформаций для произвольной (в том числе – с шарнирами) статически неопределимой стержневой системы. Все это приводит к выводу, что интегральный метод сил, по крайней мере для стержневых систем, не может составить конкуренцию методу перемещений.

1.4. Силовой метод

Еще одним достаточно интенсивно развивающимся за рубежом методом решения задач строительной механики в усилиях является «силовой метод» (force based method). Как и для интегрального метода сил название этого метода не имеет общепринятого перевода на русский язык, поэтому, чтобы отличать его от классического метода сил, будем использовать название «силовой метод». Как и интегральный метод сил силовой метод имеет лишь формальное отношение к классическому методу сил строительной механики.

Силовой метод может быть применен к любым задачам строительной механики [74,75]. Применительно к стержневым системам его можно изложить следующим образом [76,77]. Рассмотрим вариационную постановку задачи в виде принципа Кастильяно [7,22,78]:

$$L(\sigma) = \frac{1}{2} \sigma^T K_d^{-1} \sigma \rightarrow \min., \quad (1.14)$$

при условии $A^T \sigma = P. \quad (1.15)$

В силовом методе условно экстремальную постановку (1.14), (1.15) преобразуют в безусловную постановку с помощью метода неопределенных множителей Лагранжа

$$L_1(\sigma, \mu) = \frac{1}{2} \sigma^T K_d^{-1} \sigma + \mu^T (A^T \sigma - P) \rightarrow \text{стац.}, \quad (1.16)$$

где μ - столбец неопределенных множителей Лагранжа.

Все дальнейшие вычислительные алгоритмы в силовом методе строятся [77,79] на основе вариационной постановки (1.16). Таким образом, количество неизвестных в этом методе значительно больше количества неизвестных метода сил.

Фактически использование постановки (1.16) означает переход к смешанному методу строительной механики. Если отождествить множители μ с перемещениями, то постановка (1.16) совпадет с одной из форм смешанной вариационной постановки в виде принципа Рейсснера [7,78]. Смешанные вариационные постановки хорошо изучены и давно применяются для решения задач строительной механики [80-84].

Отметим, что переход к смешанному методу расчета стержневых систем с целью обойти трудности автоматизированного выбора основной системы метода сил был в отечественной литературе предложен еще в работе [6]. Скорей всего эта работа осталась неизвестной за рубежом.

1.5. Выводы по главе 1

На основе приведенного анализа можно сделать следующие выводы:

1. Разработка алгоритма метода сил, аналогичного по трудности автоматизации и программирования алгоритму метода перемещений, остаётся актуальной задачей строительной механики.
2. Разработка способа построения матрицы податливости конструкции, обеспечивающего ее слабую заполненность и ленточный характер, остаётся актуальной задачей строительной механики.

3. Указанные в предыдущих пунктах проблемы являются актуальными, как для задач статики, так и для задач динамики и устойчивости стержневых строительных конструкций.

Глава 2. МЕТОД КОНЕЧНЫХ ЭЛЕМЕНТОВ В УСИЛИЯХ В ФОРМЕ МЕТОДА КОНТУРНЫХ УСИЛИЙ В ЗАДАЧАХ СТАТИКИ

Основная проблема в алгоритмизации метода сил для статически неопределимых систем заключается в разработке простого алгоритма построения общего решения однородных уравнений равновесия. Это можно сделать неединственным способом, что на языке строительной механики соответствует возможности выбора различных основных систем метода сил. В работе [85] было предложено получать матрицу общего решения однородных уравнений равновесия путем транспонирования матрицы совместности деформаций, предложен способ вывода уравнений совместности деформаций для плоских статически неопределимых стержневых систем и построена матрица податливости для стержня с двумя жесткими узлами.

В настоящей главе дается дальнейшее развитие изложенного подхода.

В разделе 2.1 рассмотрены три основных вида конечных элементов в усилиях для плоских стержневых систем, как с жесткими, так и с шарнирными узлами. В явном виде построены соответствующие матрицы податливости с учетом всех жесткостей – на изгиб, сдвиг и растяжение, а также – обратные им матрицы – новые не вырожденные матрицы жесткости. Все матрицы получены в явном виде для конечных элементов произвольно расположенных по отношению к глобальной системе координат.

В разделе 2.2 дан вывод уравнений совместности деформаций для отдельных статически неопределимых контуров. В разделе 2.3 изложен алгоритм разработанного варианта метода сил – метода контурных усилий.

В разделах 2.4 и 2.5 приводятся примеры расчета статически неопределимых систем на силовые и температурные воздействия, а также на кинематические воздействия в виде неравномерной осадки опор.

В разделе 2.6 рассмотрен метод контурных усилий для расчета плоской стержневой системы, нагруженной перпендикулярной нагрузкой (балочный ростверк).

Основные положения главы приведены в публикациях [86 – 88].

2.1. Матрицы податливости конечных элементов в усилиях для плоских стержневых систем

Конечный элемент-стержень метода перемещений в плоской задаче имеет шесть узловых усилий. Эти усилия не являются независимыми – они связаны уравнениями равновесия элемента. Именно поэтому матрица жесткости конечного элемента метода перемещений является вырожденной и такой конечный элемент не имеет однозначно определенной матрицы податливости.

Напряженно-деформированное состояние элемента-стержня можно выразить через три независимых параметра. В качестве этих параметров выбираются три усилия F_x , F_y , M , приложенные к концам абсолютно жестких консолей, проведенных из концов стержня к произвольной точке A (рисунок 2.1).

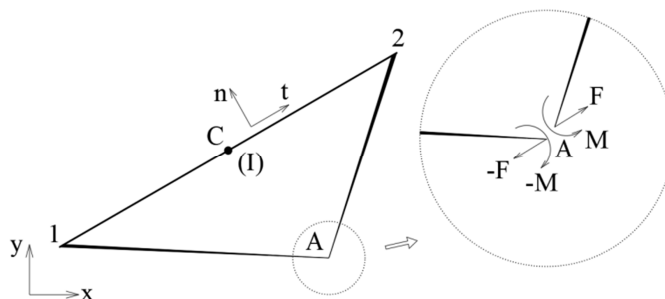


Рисунок 2.1. Первый вид конечных элементов в усилиях (КЭУ)

Как будет показано в дальнейшем, уравнения совместности деформаций принимают простейший вид, если точка A – любая, но одна и та же для всех элементов стержневой системы.

Рассматриваемый элемент-стержень длиной l_s (м) имеет касательный и нормальный единичные векторы $t = [t_x \ t_y]^T$, $n = [n_x \ n_y]^T$, эти векторы связаны между собой: $t = cn$, здесь матрица $c = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}$. Точка C – центральная точка стержня.

Внутренние усилия в любой точке стержня, соответствующей координате s , следующим образом выражаются через параметры F_x , F_y , M :

$$N(s) = F^T t, \quad (2.1)$$

$$Q(s) = F^T n, \quad (2.2)$$

$$M(s) = F^T [(-y_{As}) \ x_{As}]^T + M, \quad (2.3)$$

где $F = [F_x \ F_y]^T$ и M – усилия и момент в точке A ; x_{As} и y_{As} – координаты вектора $\overrightarrow{As}$; $(\dots)^T$ – операция транспонирования матрицы, s – координата точки стержня ($0 \leq s \leq l_s$).

При любых значениях параметров F_x , F_y , M усилия (2.1) – (2.3) тождественно удовлетворяют дифференциальным уравнениям равновесия стержня.

Энергия деформации стержня выражается следующей формулой:

$$W = \frac{1}{2} \int_0^{l_s} \left(\frac{N^2(s)}{k_1} + \frac{M^2(s)}{k_2} + \frac{Q^2(s)}{k_3} \right) ds, \quad (2.4)$$

где $k_1 = EA$, $k_2 = EI$, $k_3 = \kappa GA$ (для прямоугольных сечений $\kappa = 5/6$) – продольная, изгибная и сдвиговая жесткости соответственно.

Подставив выражения (2.1) - (2.3) в формулу (2.4), получим:

$$\begin{aligned} W = & \frac{1}{2} \left\{ \frac{1}{k_1} (F_x^2 \int_0^{l_s} t_x^2 ds + F_x F_y \int_0^{l_s} t_x t_y ds + F_x F_y \int_0^{l_s} t_x t_y ds + F_y^2 \int_0^{l_s} t_y^2 ds) + \right. \\ & + \frac{1}{k_2} (F_x^2 \int_0^{l_s} y_{As}^2 ds + F_x F_y \int_0^{l_s} (-x_{As} y_{As}) ds + F_x M \int_0^{l_s} (-y_{As}) ds + F_x F_y \int_0^{l_s} (-x_{As} y_{As}) ds + \\ & + F_y^2 \int_0^{l_s} x_{As}^2 ds + F_y M \int_0^{l_s} x_{As} ds + F_x M \int_0^{l_s} (-y_{As}) ds + F_y M \int_0^{l_s} x_{As} ds + M^2 \int_0^{l_s} ds) + \\ & \left. + \frac{1}{k_3} (F_x^2 \int_0^{l_s} n_x^2 ds + F_x F_y \int_0^{l_s} n_x n_y ds + F_x F_y \int_0^{l_s} n_x n_y ds + F_y^2 \int_0^{l_s} n_y^2 ds) \right\}. \end{aligned} \quad (2.5)$$

Перепишем выражение (2.5) в матричном виде:

$$W = \frac{1}{2} \sigma^T \Lambda \sigma, \quad (2.6)$$

где $\sigma^T = (F_x, F_y, M)$ – столбец усилий, Λ – матрица податливости.

Соответствующие усилиям σ кинематические параметры e , которые мы будем называть деформациями, можно определить по формуле:

$$e = \frac{\partial W(\sigma)}{\partial \sigma}. \quad (2.7)$$

Подставив выражение (2.6) в формулу (2.7), получим

$$e = \Lambda \sigma. \quad (2.8)$$

Введенный столбец деформаций e имеет простой геометрический смысл [85]: это взаимные смещения и взаимный поворот концов жестких консолей в точке A . При движении элемента как жесткого целого столбец e тождественно равен нулю.

Выполнив интегрирование, получим матрицу податливости $\Lambda(3 \times 3)$ с учетом продольной, изгибной и сдвиговой деформаций:

$$\Lambda = \begin{bmatrix} \left(\frac{l_3}{k_1} t_x^2 + \frac{l_3}{k_3} n_x^2 + \frac{l_3^3}{12k_2} t_y^2 + \frac{l_3}{k_2} y_{AC}^2 \right) & (сим.) & \\ \left(\frac{l_3}{k_1} t_x t_y + \frac{l_3}{k_3} n_x n_y + \frac{-l_3^3}{12k_2} t_x t_y + \frac{-l_3}{k_2} x_{AC} y_{AC} \right) & \left(\frac{l_3}{k_1} t_y^2 + \frac{l_3}{k_3} n_y^2 + \frac{l_3^3}{12k_2} t_x^2 + \frac{l_3}{k_2} x_{AC}^2 \right) & \\ \frac{l_3}{k_2} y_{AC} & \frac{-l_3}{k_2} x_{AC} & \frac{l_3}{k_2} \end{bmatrix}, \quad (2.9)$$

где $x_{AC} = x_A - x_C$, $y_{AC} = y_A - y_C$.

Используя связь векторов t и n , можно получить другое выражение матрицы податливости лишь с касательным вектором t :

$$\Lambda = \begin{bmatrix} \left(\frac{l_3}{k_1} t_x^2 + \frac{l_3}{k_3} t_y^2 + \frac{l_3^3}{12k_2} t_y^2 + \frac{l_3}{k_2} y_{AC}^2 \right) & (сим.) & \\ \left(\frac{l_3}{k_1} t_x t_y + \frac{-l_3}{k_3} t_x t_y + \frac{-l_3^3}{12k_2} t_x t_y + \frac{-l_3}{k_2} x_{AC} y_{AC} \right) & \left(\frac{l_3}{k_1} t_y^2 + \frac{l_3}{k_3} t_x^2 + \frac{l_3^3}{12k_2} t_x^2 + \frac{l_3}{k_2} x_{AC}^2 \right) & \\ \frac{l_3}{k_2} y_{AC} & \frac{-l_3}{k_2} x_{AC} & \frac{l_3}{k_2} \end{bmatrix}, \quad (2.10)$$

Так как полученная матрица податливости не вырождена, то можно получить обратную матрицу податливости (новую матрицу жесткости) $\Lambda_{ПД,ИД,СД}^{-1}(3 \times 3)$ с учетом продольной, изгибной и сдвиговой деформаций (ПД, ИД, СД):

$$\Lambda_{ПД,ИД,СД}^{-1} = \frac{1}{l_3(12k_2 + k_3 l_3^2)} \begin{bmatrix} O\Lambda_{ПД,ИД,СД}^{11} & O\Lambda_{ПД,ИД,СД}^{12} & O\Lambda_{ПД,ИД,СД}^{13} \\ (сим.) & O\Lambda_{ПД,ИД,СД}^{22} & O\Lambda_{ПД,ИД,СД}^{23} \\ & & O\Lambda_{ПД,ИД,СД}^{33} \end{bmatrix}, \quad (2.11a)$$

где $O\Lambda_{ПД,ИД,СД}^{11} = k_1 k_3 l_3^2 t_x^2 + 12k_1 k_2 t_x^2 + 12k_2 k_3 t_y^2$;

$O\Lambda_{ПД,ИД,СД}^{12} = (k_1 k_3 l_3^2 + 12k_1 k_2 - 12k_2 k_3) t_x t_y$;

$O\Lambda_{ПД,ИД,СД}^{13} = (12k_1 k_2 t_x^2 + 12k_2 k_3 t_y^2 + l_3^2 k_1 k_3 t_x^2) y_{AC} - (12k_1 k_2 - 12k_2 k_3 + l_3^2 k_1 k_3) t_x t_y x_{AC}$;

$O\Lambda_{ПД,ИД,СД}^{22} = k_1 k_3 l_3^2 t_y^2 + 12k_2 k_3 t_x^2 + 12k_1 k_2 t_y^2$;

$O\Lambda_{ПД,ИД,СД}^{23} = -(12k_1 k_2 t_y^2 + 12k_2 k_3 t_x^2 + l_3^2 k_1 k_3 t_y^2) x_{AC} + (12k_1 k_2 - 12k_2 k_3 + l_3^2 k_1 k_3) t_x t_y y_{AC}$;

$O\Lambda_{ПД,ИД,СД}^{33} = 12k_2^2 + l_3^2 k_2 k_3 + 12k_2 k_3 (t_x x_{AC} + t_y y_{AC})^2 + (l_3^2 k_1 k_3 + 12k_1 k_2) (t_y x_{AC} - t_x y_{AC})^2$.

Обратная матрица податливости $\Lambda_{ПД,ИД}^{-1}(3 \times 3)$ с учетом только изгибной и продольной деформаций:

$$\Lambda_{\text{ПД,ИД}}^{-1} = \frac{1}{l_3^3} \begin{bmatrix} O\Lambda_{\text{ПД,ИД}}^{11} & O\Lambda_{\text{ПД,ИД}}^{12} & O\Lambda_{\text{ПД,ИД}}^{13} \\ & O\Lambda_{\text{ПД,ИД}}^{22} & O\Lambda_{\text{ПД,ИД}}^{23} \\ \text{(сим.)} & & O\Lambda_{\text{ПД,ИД}}^{33} \end{bmatrix}, \quad (2.116)$$

где $O\Lambda_{\text{ПД,ИД}}^{11} = k_1 l_3^2 t_x^2 + 12k_2 t_y^2$;

$O\Lambda_{\text{ПД,ИД}}^{12} = (k_1 l_3^2 - 12k_2) t_x t_y$;

$O\Lambda_{\text{ПД,ИД}}^{13} = k_1 l_3^2 t_x (y_{AC} t_x - x_{AC} t_y) + 12k_2 t_y (t_x x_{AC} + t_y y_{AC})$;

$O\Lambda_{\text{ПД,ИД}}^{22} = k_1 l_3^2 t_y^2 + 12k_2 t_x^2$;

$O\Lambda_{\text{ПД,ИД}}^{23} = k_1 l_3^2 t_y (y_{AC} t_x - x_{AC} t_y) - 12k_2 t_x (x_{AC} t_x + y_{AC} t_y)$;

$O\Lambda_{\text{ПД,ИД}}^{33} = k_1 l_3^2 (y_{CA} t_x - x_{CA} t_y)^2 + 12k_2 (t_x x_{CA} + t_y y_{CA})^2 + k_2 l_3^2$.

Легко видеть, что матрица податливости первого типа $\Lambda_I(3 \times 3)$ состоит из двух частей: постоянная, не зависящая от произвольной точки A , $\Lambda_C(3 \times 3)$ и зависящая от этой точки часть $\Lambda_A(3 \times 3)$. Выражение (2.9) может переписать в следующем общем виде:

$$\Lambda_I = \Lambda_C + \Lambda_A = Q \tilde{\Lambda} Q^T + \Lambda_A, \quad (2.12)$$

где $Q = \begin{bmatrix} t_x & n_x & 0 \\ t_y & n_y & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$ - ортогональная матрица (3×3) ;

$$\tilde{\Lambda} = \begin{bmatrix} \frac{l_3}{k_1} & 0 & 0 \\ & \left(\frac{l_3}{k_3} + \frac{l_3^3}{12k_2}\right) & 0 \\ \text{(сим.)} & & \frac{l_3}{k_2} \end{bmatrix} (3 \times 3); \quad \Lambda_A = \frac{l_3}{k_2} \begin{bmatrix} y_{AC}^2 & -x_{AC} y_{AC} & -y_{AC} \\ & x_{AC}^2 & x_{AC} \\ \text{(сим.)} & & 0 \end{bmatrix} (3 \times 3).$$

Если точку A выбрать совпадающей с точкой C , то матрица податливости первого типа примет вид:

$$\Lambda_I = Q \tilde{\Lambda} Q^T = \begin{bmatrix} \left(\frac{l_3}{k_1} t_x^2 + \frac{l_3}{k_3} n_x^2 + \frac{l_3^3}{12k_2} t_y^2\right) & \text{(сим.)} & \\ \left(\frac{l_3}{k_1} t_x t_y + \frac{l_3}{k_3} n_x n_y + \frac{-l_3^3}{12k_2} t_x t_y\right) & \left(\frac{l_3}{k_1} t_y^2 + \frac{l_3}{k_3} n_y^2 + \frac{l_3^3}{12k_2} t_x^2\right) & \\ 0 & 0 & \frac{l_3}{k_2} \end{bmatrix}. \quad (2.13)$$

Остальные типы матриц податливости для других видов КЭУ будем получать с использованием выражения для энергии деформаций:

$$W_I = \frac{1}{2} \sigma_I^T \Lambda_I \sigma_I, \quad (2.14)$$

и столбца внутренних усилий рассмотренного элемента первого типа с двумя жесткими узлами:

$$\sigma_I = [F_x \quad F_y \quad M]^T. \quad (2.15)$$

Рассмотрим второй тип конечного элемента: конечный элемент-стержень с одним жестким и одним шарнирным узлом (рисунок 2.2).

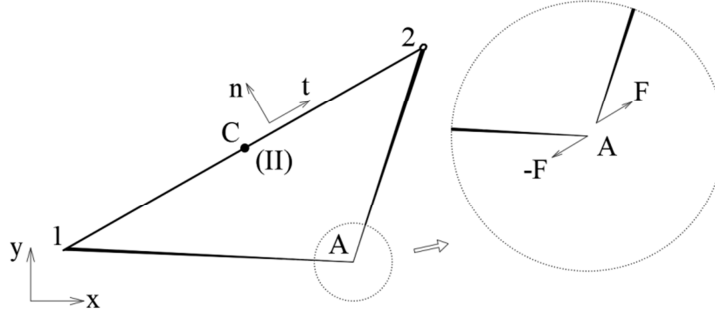


Рисунок 2.2. Второй вид КЭУ

Напряженно-деформированное состояние такого элемента полностью определяется двумя параметрами, в качестве которых можно взять усилия F_x, F_y :

$$\sigma_{II} = [F_x \quad F_y]^T. \quad (2.16)$$

Параметр M выражается через эти усилия таким образом, чтобы изгибающий момент в шарнирном узле 2 был равен нулю. Согласно формуле (2.3), получаем

$$M = -y_{A2}F_x + x_{A2}F_y. \quad (2.17)$$

Подставляя формулу (2.17) в выражение (2.15), получим:

$$\sigma_I = [F_x \quad F_y \quad (-y_{A2}F_x + x_{A2}F_y)]^T, \quad (2.18)$$

или в матричном виде:

$$\sigma_I = H_1 \sigma_{II}, \quad (2.19)$$

где $H_1 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -y_{A2} \\ 0 & 1 & x_{A2} \end{bmatrix}^T$.

Подставляя выражение (2.19) в формулу (2.14), получим:

$$W_I = \frac{1}{2} (H_1 \sigma_{II})^T \Lambda_I (H_1 \sigma_{II}) = \frac{1}{2} \sigma_{II}^T (H_1^T \Lambda_I H_1) \sigma_{II}. \quad (2.20)$$

Таким образом, энергия деформации второго вида КЭУ имеет вид:

$$W_{II} = \frac{1}{2} \sigma_{II}^T \Lambda_{II} \sigma_{II}, \quad (2.21)$$

где $\Lambda_{II} = H_1^T \Lambda_I H_1$ - матрица податливости (2×2) КЭУ второго типа.

$$\Lambda_{II} = \begin{bmatrix} \left(\frac{l_2}{k_1} t_x^2 + \frac{l_2}{k_3} t_y^2 + \frac{l_2^3}{3k_2} t_y^2 \right) & \left(\frac{l_2}{k_1} t_x t_y - \frac{l_2}{k_3} t_x t_y - \frac{l_2^3}{3k_2} t_x t_y \right) \\ (сим.) & \left(\frac{l_2}{k_1} t_y^2 + \frac{l_2}{k_3} t_x^2 + \frac{l_2^3}{3k_2} t_x^2 \right) \end{bmatrix}. \quad (2.22)$$

Матрица податливости элемента второго типа не зависит от положения произвольной точки A .

Рассмотрим стержень с двумя шарнирными узлами (рисунок 2.3).

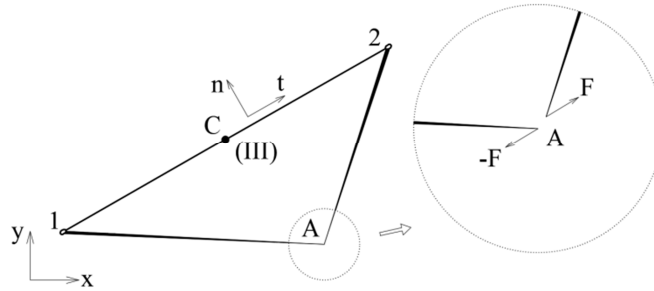


Рисунок 2.3. Третий вид КЭУ

Напряженно-деформированное состояние такого элемента полностью определяется одним параметром, в качестве которого удобно взять усилие

$$\sigma_{III} = F^T t. \quad (2.23)$$

Из условия обращения в нуль изгибающего момента в узлах 1 и 2 получим связь параметров первого и третьего видов КЭУ:

$$\sigma_I = H_2 \sigma_{III}, \quad (2.24)$$

где $H_2^T = [t_x \quad t_y \quad x_{AC} t_y - y_{AC} t_x]$.

Подставляя выражение (2.24) в формулу (2.14), получим:

$$W_{III} = \frac{1}{2} (H_2 \sigma_{III})^T \Lambda_I (H_2 \sigma_{III}) = \frac{1}{2} \sigma_{III}^T (H_2^T \Lambda_I H_2) \sigma_{III}. \quad (2.25)$$

Таким образом, энергия деформации третьего вида КЭУ имеет вид

$$W_{III} = \frac{1}{2} \sigma_{III}^T \Lambda_{III} \sigma_{III}, \quad (2.26)$$

где $\Lambda_{III} = H_2^T \Lambda_I H_2$.

Выполнив перемножение, получим что, матрица податливости (1×1) конечного элемента третьего типа имеет вид:

$$\Lambda_{III} = H_2 \Lambda_I H_2^T = \begin{bmatrix} l_3 \\ k_1 \end{bmatrix}, \quad (2.27)$$

то есть не зависит от положения произвольной точки A .

Отметим, что полученные матрицы податливости являются всегда невырожденными несмотря на то, что элементы не закреплены от жестких перемещений.

2.2. Уравнения совместности деформаций для статически неопределимых контуров

Рассмотрим контур, состоящий из 4-х стержней (рисунок 2.4).

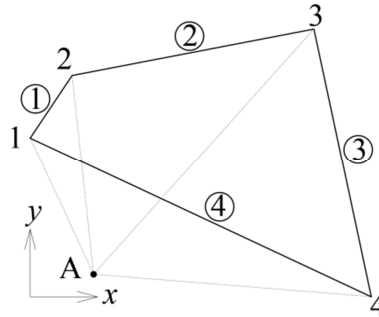


Рисунок 2.4. Базовый контур (цифрами обозначены номера узлов, цифрами в кружках – номера стержней)

Из концов каждого стержня проведены жесткие консоли в одну и ту же точку A . Для каждого i -го стержня на концах консолей действуют усилия σ_i и $-\sigma_i$. Тогда однородные уравнения равновесия для всех узлов на концах консолей можно записать в виде:

$$A^T \sigma = 0, \quad (2.28)$$

где $\sigma^T = (\sigma_1^T \quad \sigma_2^T \quad \sigma_3^T \quad \sigma_4^T)$ - (12×1) - столбец параметров усилий для контура;

$$A^T = \begin{pmatrix} -I & 0 & 0 & -I \\ I & -I & 0 & 0 \\ 0 & I & -I & 0 \\ 0 & 0 & I & I \end{pmatrix}, \quad (2.29)$$

где I – единичная (3×3) матрица, 0 – нулевая (3×3) матрица.

При записи матрицы A мы считаем, что второй узел элемента – это всегда узел с большим номером, чем номер первого узла,

Так как столбец деформаций e_i для i -го стержня – это взаимные перемещения концов консолей, то столбец деформаций контура e (12×1) можно выразить через перемещения концов консолей:

$$e = AU, \quad (2.30)$$

где $e^T = (e_1^T \ e_2^T \ e_3^T \ e_4^T)$, $U^T = (U_1^T \ U_2^T \ U_3^T \ U_4^T)$, U_1 – столбец (3×1) перемещений конца консоли, проведенной из узла 1 в точку А (эта консоль является общей для элементов 1 и 4).

Так как для замкнутого контура первая консоль для первого элемента совпадает с последней консолью для четвёртого элемента, то суммарное относительное перемещение концов консолей будет равно нулю. Таким образом, уравнение совместности деформаций для рассматриваемого контура будет выглядеть следующим образом:

$$e_1 + e_2 + e_3 - e_4 = 0, \quad (2.31)$$

или в матричном виде:

$$Be = 0, \quad (2.32)$$

где $B = (I \ I \ I \ -I)$ – матрица (3×12) совместности деформаций.

Таким образом, благодаря введению жестких консолей и использованию одной и той же точки А для всех стержней, матрица совместности деформаций для любого контура будет иметь простейший вид – состоять из нулей и единиц. Отметим, что количество уравнений совместности равно степени статической неопределимости системы – в данном случае равно трем.

Так как условие (2.32) должно выполняться для любых перемещений, то из (2.30) следует, что

$$BA \equiv 0. \quad (2.33)$$

Транспонируя тождество (2.33), получим

$$A^T B^T \equiv 0. \quad (2.34)$$

Из (2.34) и (2.28) следует, что для любого столбца X будет выполняться равенство $A^T B^T X = 0$, то есть выражение

$$\sigma = B^T X \quad (2.35)$$

дает общее решение однородных уравнений равновесия, а столбец $X(3 \times 1)$ является по терминологии классической строительной механики – столбцом лишних неизвестных.

Если контур имеет один шарнир, то в матрице совместности деформаций для соответствующего элемента блок I заменяется на H_1^T , где H_1^T – матрица (2.19).

Если контур имеет два шарнира, то в матрице совместности деформаций для соответствующего элемента блок I заменяется на H_2^T , где H_2 – матрица (2.24).

2.3. Алгоритм расчета методом сил

Алгоритм расчета методом сил изложим на примере рассмотренного контура (рисунок 2.4).

Полная система уравнений строительной механики для этой системы имеет вид:

$$A^T \sigma = P \quad - \text{уравнения равновесия,} \quad (2.36)$$

$$AU = e_y + e_0 \quad - \text{связь деформаций с перемещениями,} \quad (2.37)$$

$$e_y = \Lambda \sigma \quad - \text{физические уравнения (закон Гука),} \quad (2.38)$$

где P - столбец узловых нагрузок,

e_0 - заданные начальные деформации (например, температурные или от неравномерной осадки опор),

e_y - упругие деформации,

$\Lambda = \text{diag}(\Lambda_i)$ - блочно-диагональная матрица податливости элементов.

Согласно изложенному выше выполняется равенство

$$B(e_y + e_0) = 0, \quad (2.39)$$

откуда

$$B\Lambda\sigma = -Be_0. \quad (2.40)$$

Общее решение уравнений равновесия (2.36) запишем в виде

$$\sigma = B^T X + \sigma_q, \quad (2.41)$$

где σ_q – любое частное решение уравнений (2.36).

Способ нахождения частного решения будет рассмотрен дальше.

Подставив (2.41) в (2.40), получим разрешающую систему уравнений метода сил относительно неизвестных контурных усилий X :

$$B\Lambda B^T X = -Be_0 - B\Lambda\sigma_{\text{ч}}, \quad (2.42)$$

$$L = B\Lambda B^T = \Lambda_1 + \Lambda_2 + \Lambda_3 + \Lambda_4 - \text{матрица податливости контура.} \quad (2.43)$$

После решения системы уравнений (2.42) усилия в отдельных стержнях находятся по формуле (2.41).

Если стержневая система содержит несколько статически неопределимых контуров, то полная матрица совместности деформаций будет содержать столько блочных строк, сколько контуров есть в системе. Тогда матрица податливости системы L будет на главной диагонали содержать матрицы податливости отдельных контуров, а недиагональные элементы матрицы L будут состоять из матриц податливости элементов общих для двух контуров. Отсюда вытекают следующие положительные свойства этой матрицы, аналогичные свойствам матрицы жесткости конструкции в методе перемещений:

- а) матрица податливости системы автоматически получается ленточной и слабо заполненной, так как каждый контур имеет общие стержни только с соседними контурами;
- б) структура матрицы податливости системы становится полностью определенной после нумерации контуров и элементов.

Указанные свойства делают процедуру построения матрицы податливости системы аналогичной по сложности процедуре построения матрицы жесткости системы в методе перемещений.

Таким образом, основной особенностью изложенного метода контурных усилий является то, что стержневая система предварительно разбивается на некоторое количество статически неопределимых контуров, соблюдая следующий ряд условий:

- сумма всех степеней статической неопределимости контуров $\sum n_{\text{СТ}}^i$ должна быть равна общей степени статической неопределимости $n_{\text{СТ}}$ всей конструкции:

$$n_{\text{СТ}} = \sum_i n_{\text{СТ}}^i = n_{\text{СТ}}^1 + n_{\text{СТ}}^2 + \dots + n_{\text{СТ}}^i. \quad (2.44)$$

- контуры могут как иметь ряд общих элементов-стержней, так и не иметь их вообще, но должно выполняться условие независимости каждого контура, т. е. наличие хотя бы одного стержня, не входящего в другие контуры.
- каждый стержень системы должен входить в состав хотя бы одного контура.

В итоге алгоритм расчета предлагаемым вариантом метода сил может быть представлен совокупностью следующих шагов:

Шаг 1. Выбрать базовые контуры. Пронумеровать контуры и стержни.

Шаг 2. Сформировать матрицы податливости стержней Λ_i .

Шаг 3. Вычислить по формулам типа (2.43) матрицы податливости контуров.

Шаг 4. Сформировать матрицу податливости стержневой системы.

Шаг 5. Сформировать столбец правых частей системы уравнений.

Шаг 6. Решить систему уравнений.

Шаг 7. Вычислить усилия в отдельных стержнях.

Подчеркнем, что изложенный алгоритм метода сил, обладает следующими особенностями:

- 1) не требуется выбирать основную систему метода сил и лишние неизвестные;
- 2) не требуется формировать, хранить в памяти компьютера и анализировать матрицу уравнений равновесия узлов;
- 3) не требуется нумерации и координат узлов стержневой системы;
- 4) матрица податливости системы будет неособенной даже для конструкции, не закрепленной от жестких перемещений.

Указанное свойство 4) делает изложенный подход удобным для расчетов не только наземных строительных конструкций, но и для конструкций, незакрепленных от жесткого смещения: кораблей, самолетов, ракет, космических систем и т. п.

2.4. Примеры расчета на температурные воздействия и неравномерную осадку опор

Применим предлагаемый алгоритм для расчета следующих конструкций (см. рисунок 2.5) с исходными данными: длина стержней $l_3 = 2$ (м), площадь поперечного сечения $A = 0.04$ (м²), модуль Юнга $E = 3 \times 10^{10}$ (Па), момент инерции сечений $I = 1.33 \times 10^{-4}$ (м⁴), температурные нагрузки $t_1 = 15^\circ\text{C}$, $t_2 = 5^\circ\text{C}$ и коэффициент линейного теплового расширения $\alpha = 10^{-5}$ (C⁻¹).

2.4.1. Базовые контуры

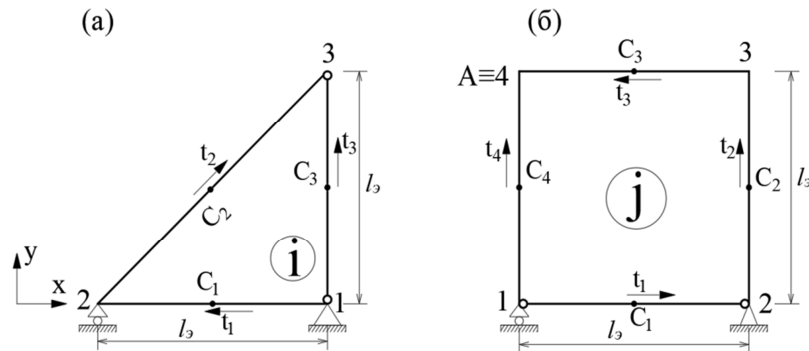


Рисунок 2.5. Различные виды контуров: (а) треугольный; (б) квадратный

Рассмотрим элемент-стержень, подвергающийся температурной нагрузке [86,87].

Продольная деформация элемента-стержня может быть выражена как

$$\Delta_n = l_3 \cdot t \cdot \alpha, \quad (2.45)$$

где t - средняя температура поперечного сечения.

Изгибная деформация элемента-стержня может быть выражена в следующем виде

$$\theta_n = l_3 \cdot \tau \cdot \alpha, \quad (2.46)$$

где τ - температурный градиент.

Матрица начальных деформаций на каждом элементе-стержне может быть выражена в матричной форме как

$$e_0 = [\Delta_1 \quad \theta_1 \quad \Delta_2 \quad \theta_2 \quad \dots \quad \Delta_n \quad \theta_n]. \quad (2.47)$$

Матрицы совместности деформаций базовых контуров «i» и «j»:

$$B_i = [0 \ 1 \ 0 \ 1 \ -1]_{(1 \times 5)} \text{ и } B_j = [-1 \ -1 \ 0 \ -1 \ 0 \ 2 \ 1 \ 0]_{(1 \times 8)}.$$

Матрицы податливости базовых контуров «i» и «j»:

$$L_i = 10^{-6} [1.61]_{(1 \times 1)} \text{ и } L_j = 10^{-6} [3.33]_{(1 \times 1)}.$$

Матрица начальных деформаций при температурном воздействии на стержень C_1 (контур «i»): $e_0^i = [\Delta_1 \ \theta_1 \ 0 \ 0 \ 0]_{(1 \times 5)}$.

Матрица начальных деформаций при температурном воздействии на стержень C_2 (контур «j»): $e_0^j = [0 \ \Delta_2 \ \theta_2 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0]_{(1 \times 8)}$.

В таблице 2.1 приведены результаты расчета изгибающих моментов в базовых контурах «i» и «j» соответственно.

Таблица 2.1

Изгибающие моменты (Нм)

Номер стержня	Контур «i»	Контур «j»
1н	0.00	0.00
1к	+1242.0	0.00
2н	-1242.0	0.00
2к	0.00	+600.0
3н,3к	0.00	+600.0
4н	...	0.00
4к	...	-600.0

Примечание: значения изгибающего момента в начальных и конечных узлах элемента-стержня обозначены «н» и «к» соответственно.

2.4.2. Комбинация двух базовых контуров

На рисунке 2.6 первая стержневая система собрана из треугольного и квадратного контуров, вторая стержневая система имеет два квадратных контура, третья стержневая система включает два треугольных контура.

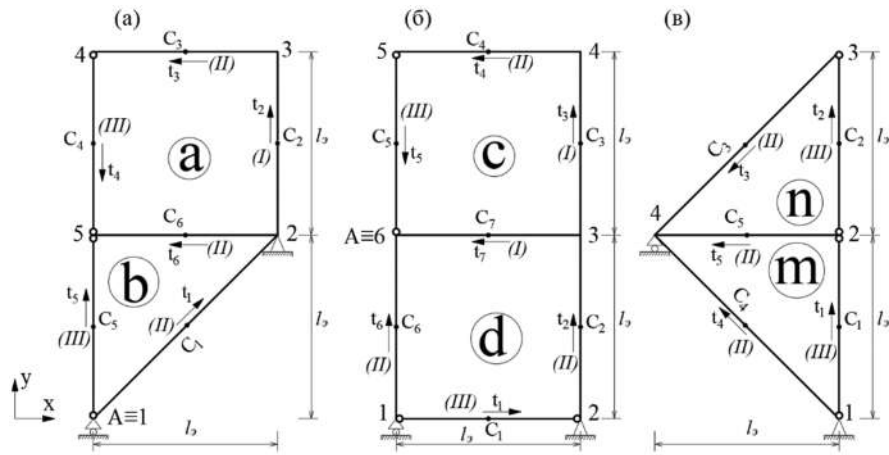


Рисунок 2.6. Плоские рамы: (а) 6 стержней; (б) 7 стержней; (в) 5 стержней

Для плоской рамы «а»:

Матрица совместности деформаций:

$$B_a = \begin{bmatrix} 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & -1 & 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}_{(2 \times 11)}.$$

Матрица податливости рамы: $L_a = 10^{-6} \begin{bmatrix} 1.60 & 0.67 \\ (сум.) & 3.33 \end{bmatrix}_{(2 \times 2)}.$

Матрица начальных деформаций при температурном воздействии на C_3 (вариант 1): $e_0^3 = [0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ \Delta_3 \ \theta_3 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0]_{(1 \times 11)}.$

Матрица начальных деформаций при температурном воздействии на C_6 (вариант 2): $e_0^6 = [0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ \Delta_6 \ \theta_6]_{(1 \times 11)}.$

Матрица начальных деформаций при температурном воздействии на C_3 и C_6 (вариант 3): $e_0^{3,6} = [0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ \Delta_3 \ \theta_3 \ 0 \ 0 \ \Delta_6 \ \theta_6]_{(1 \times 11)}.$

В таблице 2.2 показаны результаты расчета изгибающих моментов для стержневой системы «а».

Таблица 2.2

Изгибающие моменты (Нм)

Номер стержня	Вариант 1	Вариант 2	Вариант 3
1н	0.00	0.00	0.00
1к	-270.97	-1083.90	-1354.88
2н,2к	+654.19	-383.218	+270.976
3н	+654.19	-383.218	+270.976
3к,4н,4к,5н,5к	0.00	0.00	0.00
6н	-383.21	+1467.12	+1083.90
6к	0.00	0.00	0.00

Для плоской рамы «б»:

Матрица совместности деформаций:

$$B_{\sigma} = \begin{bmatrix} -1 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & -1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & -1 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 \end{bmatrix}_{(2 \times 14)}.$$

Матрица податливости рамы: $L_{\sigma} = 10^{-6} \begin{bmatrix} 3.33 & 1 \\ (\text{сим.}) & 3.33 \end{bmatrix}_{(2 \times 2)}.$

Матрица начальных деформаций при температурном воздействии на C_2 (вариант 1): $e_0^2 = [0 \ \theta_2 \ \Delta_2 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0]_{(1 \times 14)}.$

Матрица начальных деформаций при температурном воздействии на C_6 (вариант 2): $e_0^6 = [0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ \theta_6 \ \Delta_6 \ 0 \ 0 \ 0]_{(1 \times 14)}.$

Матрица начальных деформаций при температурном воздействии на C_2 и C_4 (вариант 3): $e_0^{2,4} = [0 \ \theta_2 \ \Delta_2 \ 0 \ 0 \ 0 \ \Delta_4 \ \theta_4 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0]_{(1 \times 14)}.$

Матрица начальных деформаций при температурном воздействии на C_3 и C_6 (вариант 4): $e_0^{3,6} = [0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ \Delta_3 \ \theta_3 \ 0 \ \theta_6 \ \Delta_6 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0]_{(1 \times 14)}.$

Матрица начальных деформаций при температурном воздействии на C_2 , C_3 и C_6 (вариант 5): $e_0^{2,3,6} = [0 \ \theta_2 \ \Delta_2 \ 0 \ 0 \ 0 \ \Delta_3 \ \theta_3 \ 0 \ \theta_6 \ \Delta_6 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0]_{(1 \times 14)}.$

В таблице 2.3 приведены результаты расчета изгибающих моментов в стержневой системе «б».

Таблица 2.3

Изгибающие моменты (Нм)

Номер стержня	Вариант 1	Вариант 2	Вариант 3	Вариант 4	Вариант 5
1н,1к,2н	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00
2к	+659.34	-659.34	+857.14	-461.53	+197.80
3н,3к	+197.80	-197.84	+857.14	+461.53	+659.34
4н	+197.80	-197.84	+857.14	+461.53	+659.34
4к,5н,5к	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00
6н	-659.34	+659.34	-857.14	+461.53	-197.80
6к	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00
7н	+461.53	-461.53	0.00	-923.07	-461.53
7к	+659.34	-659.34	+857.14	-461.53	+197.80

Для плоской рамы «в»:

Матрица совместности деформаций: $B_{\sigma} = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & -1 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}_{(2 \times 8)}.$

Матрица податливости рамы: $L_6 = 10^{-7} \begin{bmatrix} 16.1 & -6.67 \\ (сим.) & 16.1 \end{bmatrix}_{(2 \times 2)}$.

Матрица начальных деформаций при температурном воздействии на C_5 :
 $e_0^5 = [0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ \Delta_5 \ \theta_5]_{(1 \times 8)}$.

В таблице 2.4 показаны результаты расчета изгибающих моментов для стержневой системы «в».

Таблица 2.4

Изгибающие моменты (Нм)

Номер стержня	Изгибающий момент
1н,1к,2н,2к,3н	0.00
3к	-878.679
4н	-878.679
4к,5н	0.00
5к	+1757.35

2.4.3. Комбинация трех и четырех базовых контуров

Рассмотрим следующие задачи (рисунок 2.7):

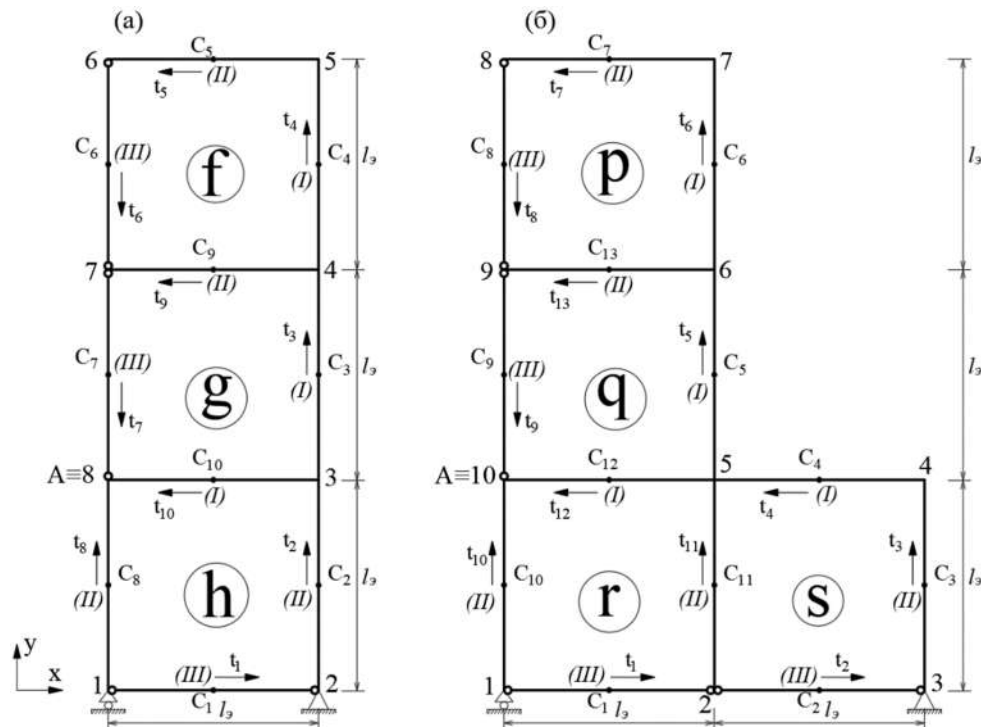


Рисунок 2.7. Плоские рамы: (а) 10 стержней; (б) 13 стержней

Матрицы совместности деформаций рам «а» и «б»:

$$B_a = \begin{bmatrix} -1 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}_{(3 \times 20)},$$

$B_{\sigma} = [b_{1\sigma} \quad b_{2\sigma}]_{(4 \times 26)}$, где

$$b_{1\sigma} = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & -1 & 0 & -1 & 0 & 2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}_{(4 \times 13)},$$

$$b_{2\sigma} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & -1 & 0 & -1 & 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}_{(4 \times 13)}.$$

Матрицы податливости рам «а» и «б»:

$$L_a = 10^{-6} \begin{bmatrix} 3.33 & 1 & 0 \\ & 3.33 & -0.67 \\ (сим.) & & 3.33 \end{bmatrix}_{(3 \times 3)}, L_b = 10^{-6} \begin{bmatrix} 3.33 & -0.67 & 1 & 0 \\ & 3.33 & 0 & 0 \\ (сим.) & & 3.33 & -0.67 \\ & & & 3.33 \end{bmatrix}_{(4 \times 4)}.$$

Матрицы начальных деформаций для рамы «а»:

Вариант 1:

$$e_0^5 = [0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ \Delta_5 \ \theta_5 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0]_{(1 \times 20)}.$$

Вариант 2:

$$e_0^{5,9} = [0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ \Delta_5 \ \theta_5 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ \Delta_9 \ \theta_9 \ 0 \ 0 \ 0]_{(1 \times 20)}.$$

Вариант 3:

$$e_0^{2,5,9} = [0 \ \theta_2 \ \Delta_2 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ \Delta_5 \ \theta_5 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ \Delta_9 \ \theta_9 \ 0 \ 0 \ 0]_{(1 \times 20)}.$$

В таблице 2.5 приведены результаты расчета изгибающих моментов в стержневой системе «а».

Таблица 2.5

Изгибающие моменты (Нм)

Номер стержня	Вариант 1	Вариант 2	Вариант 3
1н, 1к, 2н	0.00	0.00	0.00
2к	+41.380	+206.90	+868.97
3н, 3к	+137.93	+689.66	+896.55
4н, 4к	+627.59	+137.93	+179.31
5н	+627.59	+137.93	+179.31
5к, 6н, 6к, 7н, 7к, 8н	0.00	0.00	0.00
8к	-41.38	-206.90	-868.97
9н	0.00	0.00	0.00

9к	-489.66	551.72	717.24
10н	-96.550	-482.76	-27.59
10к	41.380	206.90	868.97

Матрицы начальных деформаций для рамы «б»:

Вариант 1: $e_0^{3,7} = [e_{1\epsilon 1} \quad e_{2\epsilon 1}]_{(1 \times 26)}$, где

$$e_{1\epsilon 1} = [0 \quad 0 \quad \theta_3 \quad \Delta_3 \quad 0 \quad 0 \quad 0 \quad 0 \quad 0 \quad 0 \quad 0 \quad 0 \quad 0]_{(1 \times 13)};$$

$$e_{2\epsilon 1} = [\Delta_7 \quad \theta_7 \quad 0 \quad 0 \quad 0 \quad 0 \quad 0 \quad 0 \quad 0 \quad 0 \quad 0 \quad 0 \quad 0]_{(1 \times 13)}.$$

Вариант 2: $e_0^{7,13} = [e_{1\epsilon 2} \quad e_{2\epsilon 2}]_{(1 \times 26)}$, где

$$e_{1\epsilon 2} = [0 \quad 0 \quad 0 \quad 0 \quad 0 \quad 0 \quad 0 \quad 0 \quad 0 \quad 0 \quad 0 \quad 0 \quad 0]_{(1 \times 13)};$$

$$e_{2\epsilon 2} = [\Delta_7 \quad \theta_7 \quad 0 \quad 0 \quad 0 \quad 0 \quad 0 \quad 0 \quad 0 \quad 0 \quad 0 \quad \Delta_{13} \quad \theta_{13}]_{(1 \times 13)}.$$

Вариант 3: $e_0^{7,11,13} = [e_{1\epsilon 3} \quad e_{2\epsilon 3}]_{(1 \times 26)}$, где

$$e_{1\epsilon 3} = [0 \quad 0 \quad 0 \quad 0 \quad 0 \quad 0 \quad 0 \quad 0 \quad 0 \quad 0 \quad 0 \quad 0 \quad 0]_{(1 \times 13)};$$

$$e_{2\epsilon 3} = [\Delta_7 \quad \theta_7 \quad 0 \quad 0 \quad 0 \quad 0 \quad \theta_{11} \quad \Delta_{11} \quad 0 \quad 0 \quad 0 \quad \Delta_{13} \quad \theta_{13}]_{(1 \times 13)}.$$

В таблице 2.6 показаны результаты расчета изгибающих моментов для стержневой системы «б».

Таблица 2.6

Изгибающие моменты (Нм)

Номер стержня	Вариант 1	Вариант 2	Вариант 3
1н, 1к, 2н, 2к, 3н	0.00	0.00	0.00
3к	+636.36	+43.29	-445.89
4н, 4к	+636.36	+43.29	-445.89
5н, 5к	+181.82	+692.64	+865.80
6н, 6к	+636.36	+138.53	+173.16
7н	+636.36	+138.53	+173.16
7к, 8н, 8к, 9н, 9к, 10н	0.00	0.00	0.00
10к	-181.82	-216.45	-770.56
11н	0.00	0.00	0.00
11к	-454.55	+173.16	+1216.45
12н	0.00	-476.19	-95.230
12к	181.82	+216.45	+770.56
13н	-454.55	+554.11	+692.64
13к	0.00	0.00	0.00

2.4.4. Расчет на неравномерную осадку опор

Рассмотрим примеры решения задач на неравномерную осадку опор (рисунок 2.8) с исходными данными: длина стержней $l_3 = 2(\text{м})$, квадратное сечение стержня со стороной $0.2(\text{м})$, модуль Юнга $E = 3 \times 10^{10}(\text{Па})$.

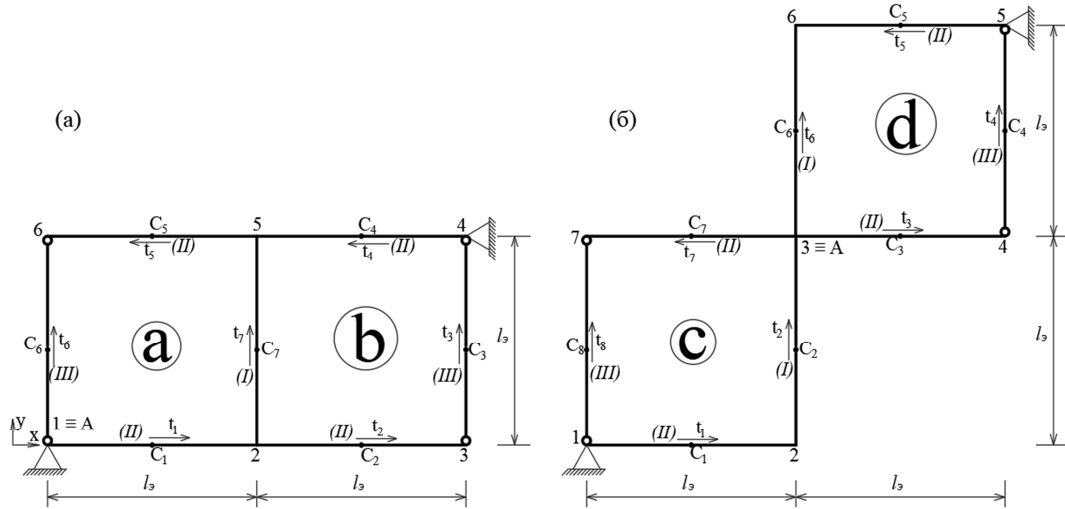


Рисунок 2.8. Плоские рамы: (а) 7 стержней; (б) 8 стержней

Матрицы совместности деформаций рам «а» и «б»:

$$B_a = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 4 \end{bmatrix}_{(2 \times 13)},$$

$$B_b = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 1 & 2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & -1 & 2 & 0 & 0 \end{bmatrix}_{(2 \times 16)}.$$

Матрицы податливости рам «а» и «б»:

$$L_a = 10^{-6} \begin{bmatrix} 3.33 & (\text{сим.}) \\ -6.0 & 19.3 \end{bmatrix}_{(2 \times 2)}, \quad L_b = 10^{-6} \begin{bmatrix} 3.33 & (\text{сим.}) \\ 0 & 3.33 \end{bmatrix}_{(2 \times 2)}.$$

Матрицы начальных деформаций для рамы «а»:

Вариант 1 - смещение опоры 1 по оси x : $u_{x1} = -0.2(\text{м})$, и угол поворота стержня C_6 : $\alpha_{x1} \approx 0.095(\text{рад})$, матрица начальных деформаций в этом случае имеет вид: $e_0^1 = [\delta_{x1} \ 0 \ \delta_{x1} \ 0 \ \delta_{x1} \ \delta_{x1} \ 0 \ \delta_{x1} \ 0 \ \delta_{x1} \ 0 \ 0 \ \delta_{x1}]_{(1 \times 13)}$, где

$$\delta_{x1} = u_{x1} + \alpha_{x1} \times l_3.$$

Вариант 2 - смещение опоры 1 по оси y : $u_{y1} = -0.4(\text{м})$, и угол поворота стержня C_1 : $\alpha_{y1} \approx 0.001(\text{рад})$, матрица начальных деформаций:

$$e_0^2 = [\delta_{y1} \ 0 \ \delta_{y1} \ 0 \ \delta_{y1} \ \delta_{y1} \ 0 \ \delta_{y1} \ 0 \ \delta_{y1} \ 0 \ 0 \ \delta_{y1}]_{(1 \times 13)}, \text{ где } \delta_{y1} = u_{y1} + \alpha_{y1} \times l_3.$$

Вариант 3 - смещение опоры 1 по осям x и y: $u_{x1} = -0.2$ (м), $u_{y1} = -0.4$ (м), и угол поворота стержней C_6 и C_1 : $\alpha_{xy1} \approx 0.095$ (рад), матрица начальных деформаций: $e_0^3 = \begin{bmatrix} \delta_{xy1} & 0 & \delta_{xy1} & 0 & \delta_{xy1} & \delta_{xy1} & 0 & \delta_{xy1} & 0 & \delta_{xy1} & 0 & 0 & \delta_{xy1} \end{bmatrix}_{(1 \times 13)}$, где

$$\delta_{xy1} = u_{x1} + \alpha_{xy1} \times l_9 + u_{y1}.$$

В таблице 2.7 приведены результаты расчета изгибающих моментов в стержневой системе «а».

Таблица 2.7

Изгибающие моменты (Нм)

Номер стержня	Вариант 1	Вариант 2	Вариант 3
1н	0.00	0.00	0.00
1к	-292500.0	-300000.0	-592500.0
2н	+292500.0	+300000.0	+592500.0
2к,3н,3к,4н	0.00	0.00	0.00
4к	+292500.0	+300000.0	+592500.0
5н	-292500.0	-300000.0	-592500.0
5к,6н,6к	0.00	0.00	0.00
7н	+585000.0	+600000.0	+1185000.0
7к	-585000.0	-600000.0	-1185000.0

Матрицы начальных деформаций для рамы «б»:

Вариант 1 - смещение опоры 1 по оси x: $u_{x1} = -0.2$ (м), и угол поворота стержня C_8 : $\alpha_{x1} \approx 0.019$ (рад), матрица начальных деформаций:

$$e_0^x = \begin{bmatrix} 0 & \delta_{x1} & 0 & \delta_{x1} & 0 & 0 & \delta_{x1} & \delta_{x1} & 0 & \delta_{x1} & 0 & \delta_{x1} & 0 & 0 & \delta_{x1} & \delta_{x1} \end{bmatrix}_{(1 \times 16)}, \text{ где } \delta_{x1} = u_{x1} + \alpha_{x1} \times l_9.$$

Вариант 2 - смещение опоры 1 по оси y: $u_{y1} = -0.4$ (м), и угол поворота стержня C_1 : $\alpha_{y1} \approx 0.037$ (рад), матрица начальных деформаций:

$$e_0^y = \begin{bmatrix} 0 & \delta_{y1} & 0 & \delta_{y1} & 0 & 0 & \delta_{y1} & \delta_{y1} & 0 & \delta_{y1} & 0 & \delta_{y1} & 0 & 0 & \delta_{y1} & \delta_{y1} \end{bmatrix}_{(1 \times 16)}, \text{ где}$$

$$\delta_{y1} = u_{y1} + \alpha_{y1} \times l_9.$$

Вариант 3 - смещение опоры 1 по осям x и y: $u_{x1} = -0.2$ (м), $u_{y1} = -0.4$ (м), и угол поворота стержней C_8 и C_1 : $\alpha_{xy1} \approx 0.055$ (рад), матрица начальных деформаций: $e_0^{xy} = \begin{bmatrix} 0 & \delta_{xy1} & 0 & \delta_{xy1} & 0 & 0 & \delta_{xy1} & \delta_{xy1} & 0 & \delta_{xy1} & 0 & \delta_{xy1} & 0 & 0 & \delta_{xy1} & \delta_{xy1} \end{bmatrix}_{(1 \times 16)}$,

где $\delta_{xy1} = u_{xy1} + \alpha_{xy1} \times l_9$.

В таблице 2.8 приведены результаты расчета изгибающих моментов в стержневой системе «б».

Таблица 2.8

Изгибающие моменты (Нм)

Номер стержня	Вариант 1	Вариант 2	Вариант 3
1н	0.00	0.00	0.00
1к	-194400.0	-391200.0	-588000.0
2н	+194400.0	+391200.0	+588000.0
2к	-194400.0	-391200.0	-588000.0
3н	+194400.0	+391200.0	+588000.0
3к,4н,4к,5н	0.00	0.00	0.00
5к	+194400.0	+391200.0	+588000.0
6н	-194400.0	-391200.0	-588000.0
6к	+194400.0	+391200.0	+588000.0
7н	-194400.0	-391200.0	-588000.0
7к,8н,8к	0.00	0.00	0.00

2.5. Пример расчета на силовые воздействия

При наличии силовых воздействий помимо общего решения однородных уравнений равновесия необходимо использовать частное решение этих уравнений. В этом разделе изложен способ построения частного решения, основанный на расчете отдельных статически определимых контуров на самоуравновешенную нагрузку.

Рассмотрим задачу, приведенную на рисунке 2.9. Рама семь раз статически неопределима. Исходные данные: изгибная жесткость EI постоянна, модуль Юнга $E = 3 \times 10^7$ (кН/м²), размеры прямоугольного сечения $b = 200$ (мм), $h = 200$ (мм), длина всех элементов-стержней $l_3 = 2$ (м). Заданы внешние нагрузки $P_1 = 8$ (кН), $P_2 = 4$ (кН).

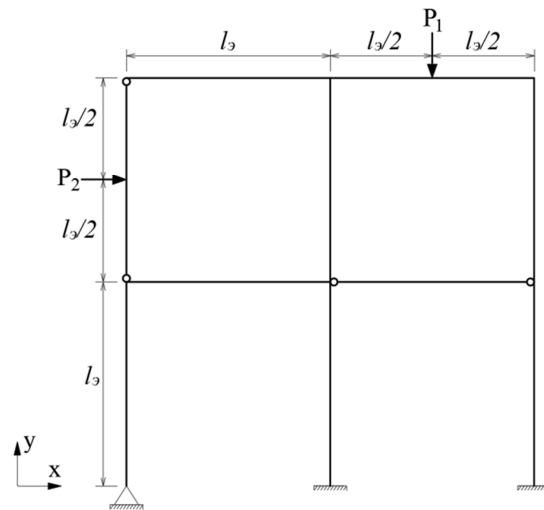
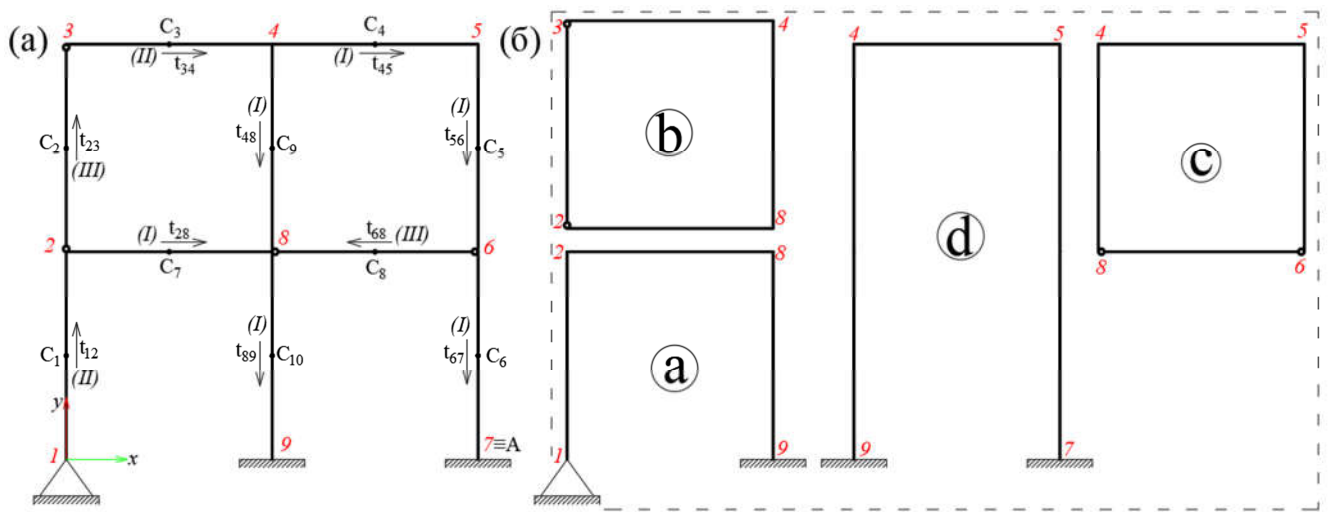
Рисунок 2.9. Схема рамы с нагрузками P_1 и P_2 [88]

Рисунок 2.10. Разбиение конструкции на контуры: (а) исходная рама; (б) разбиение на 4 контура

Четыре контура «а», «b», «с» и «d» могут быть выбраны как показаны на рисунке 2.10б, контуры имеют степень статической неопределимости $n_{CT}^a = 2$, $n_{CT}^b = 1$, $n_{CT}^c = 1$, $n_{CT}^d = 3$, соответственно.

Матрица совместности деформаций $B(7 \times 30)$ имеет вид:

$$B = \begin{bmatrix} I_2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & H_1^T & 0 & 0 & H_1^T \\ 0 & 1 & H_2^T & 0 & 0 & 0 & H_2^T & 0 & H_2^T & 0 \\ 0 & 0 & 0 & H_2^T & H_2^T & 0 & 0 & 1 & H_2^T & 0 \\ 0 & 0 & 0 & I_3 & I_3 & I_3 & 0 & 0 & I_3 & I_3 \end{bmatrix}, \quad (2.48)$$

где I_n - единичная матрица размера $n \times n$, H_1 , H_2 – матрицы (2.19) и (2.24).

Для получения начальных деформаций, эквивалентных заданной нагрузке, сделаем следующие операции. Если контур не закреплен от жесткого смещения, то действующую на него внешнюю нагрузку уравниваем любыми

узловыми усилиями, таким образом, чтобы при «сложении» контуров введенные усилия взаимно уничтожались. Далее каждый контур превращаем в статически определимый, отбрасывая нужное число связей. После этого находим перемещения по направлениям отброшенных связей от заданной нагрузки. В итоге для рассматриваемой системы получим 7 обобщенных перемещений. Эти обобщенные перемещения будут представлять собой столбец несовместности деформаций $В\Delta\sigma_{\epsilon}$, который входит в правую часть разрешающей системы уравнений (2.42) метода сил. Таким образом, изложенный подход позволяет вместо нахождения частного решения уравнений равновесия находить сразу несовместность деформаций, соответствующую частному решению.

Эпюры изгибающих моментов M_{Pi} , построенные в статически определимых контурах, приведены на рисунке 2.11.

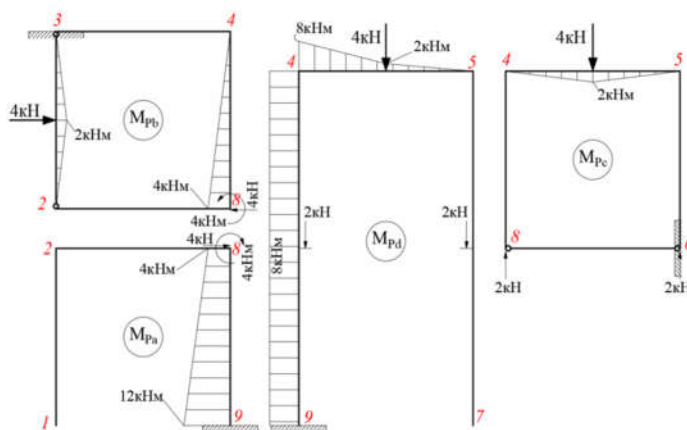


Рисунок 2.11. Эпюры изгибающих моментов базовых контуров M_{Pi}

На рисунке 2.12 показаны единичные усилия по направлению искомых обобщенных перемещений, на рисунке 2.13 – соответствующие эпюры моментов.

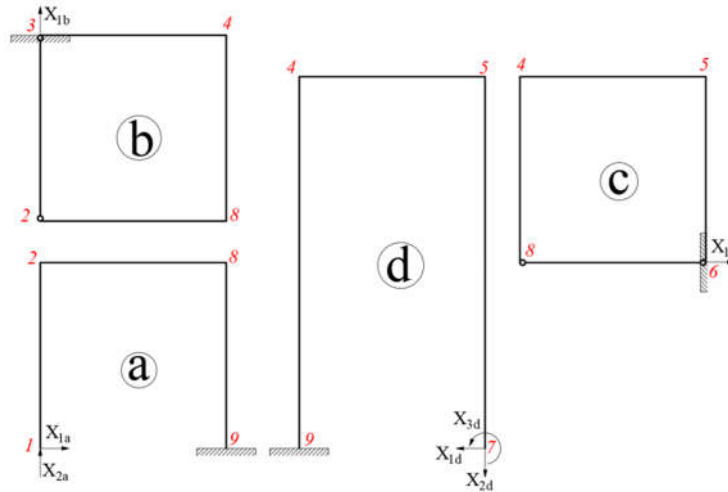


Рисунок 2.12. Базовые контуры под действием единичных усилий

После вычисления обобщенных перемещений получаем следующий столбец несовместности деформаций $Ve_0 = B\Lambda\sigma_\epsilon$, соответствующий частному решению уравнений равновесия:

$$Ve_0 = \frac{1}{k_2} [-29.3 \quad 64 \quad 40 \quad -26.7 \quad 104 \quad 110.7 \quad -56]^T. \quad (2.49)$$

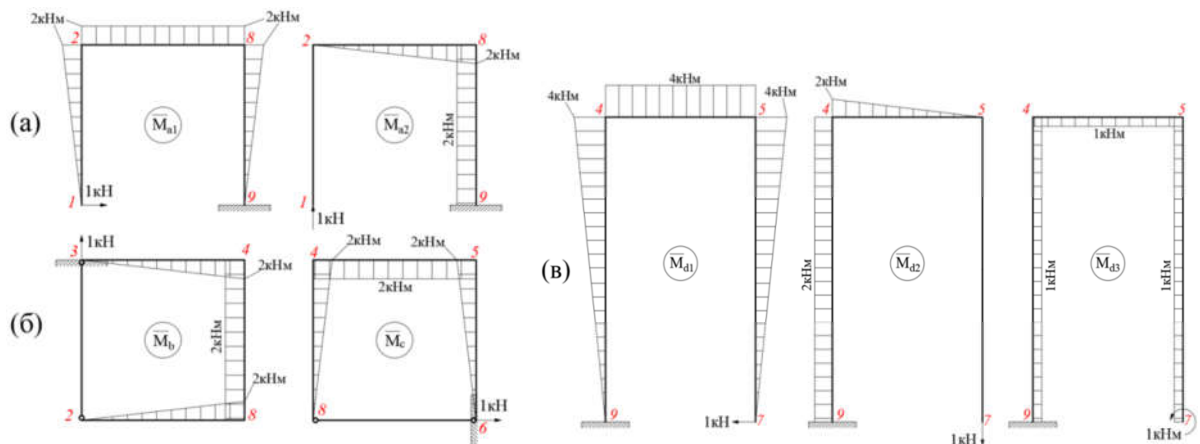


Рисунок 2.13. Эпюры моментов от единичных усилий: (а) контур «а»; (б) контуры «б» и «с»;
(в) контур «д»

Будем учитывать для этой рамы только жесткость на изгиб, т. е. продольная ($1/k_1$) и сдвиговая податливости ($1/k_3$) равны нулю. Соответствующие матрицы податливости отдельных элементов в этом случае будут рассчитаны по следующим формулам:

$$\Lambda_{III} = [0], \Lambda_{II} = \frac{l_3^3}{3k_2} \begin{bmatrix} t_y^2 & -t_x t_y \\ (сим.) & t_x^2 \end{bmatrix}, \Lambda_I = \frac{l_3}{k_2} \begin{bmatrix} (\frac{l_3^2}{12} t_y^2 + y_{AC}) & -(\frac{l_3^2}{12} t_x t_y + x_{AC} y_{AC}) & -y_{AC} \\ & (\frac{l_3^2}{12} t_x^2 + x_{AC}) & x_{AC} \\ (сим.) & & 1 \end{bmatrix}.$$

Матрицы податливости всех стержней этой рамы будут равны:

$$\Lambda_1 = \begin{bmatrix} 2.7 & 0.0 \\ (сим.) & 0.0 \end{bmatrix}, \Lambda_2 = [0], \Lambda_3 = \begin{bmatrix} 0.0 & 0.0 \\ (сим.) & 2.7 \end{bmatrix}, \Lambda_4 = \begin{bmatrix} 32 & 8.0 & -8.0 \\ & 2.7 & -2.0 \\ (сим.) & & 2.0 \end{bmatrix},$$

$$\Lambda_5 = \begin{bmatrix} 18.7 & 0.0 & -6.0 \\ & 0.0 & 0.0 \\ (сим.) & & 2.0 \end{bmatrix}, \Lambda_6 = \begin{bmatrix} 2.7 & 0.0 & -2.0 \\ & 0.0 & 0.0 \\ (сим.) & & 2.0 \end{bmatrix}, \Lambda_7 = \begin{bmatrix} 8.0 & 12.0 & -4.0 \\ & 18.7 & -6.0 \\ (сим.) & & 2.0 \end{bmatrix},$$

$$\Lambda_8 = [0], \Lambda_9 = \begin{bmatrix} 18.7 & 12.0 & -6.0 \\ & 8.0 & -4.0 \\ (сим.) & & 2.0 \end{bmatrix}, \Lambda_{10} = \begin{bmatrix} 2.7 & 4.0 & -2.0 \\ & 8.0 & -4.0 \\ (сим.) & & 2.0 \end{bmatrix}.$$

После того, как матрицы податливости всех стержней вычислены, по формуле $L = B\Lambda B^T$ вычисляем матрицу податливости рамы, где B – матрица совместности деформаций (2.48), Λ – следующая блочно-диагональная матрица податливостей отдельных стержней:

$$\Lambda = \frac{1}{k_2} \text{diag}\{\Lambda_1, \Lambda_2, \Lambda_3, \Lambda_4, \Lambda_5, \Lambda_6, \Lambda_7, \Lambda_8, \Lambda_9, \Lambda_{10}\}. \quad (2.50)$$

В итоге получим:

$$L = \frac{1}{k_2} \begin{bmatrix} 13.33 & -8.00 & 4.00 & 0.00 & -2.67 & -4.00 & 2.00 \\ & 10.67 & -2.67 & 0.00 & 4.00 & 8.00 & -4.00 \\ & & 13.33 & -4.00 & 12.0 & 8.00 & -4.00 \\ & & & 13.33 & -29.3 & -8.00 & 8.00 \\ & & & & 74.7 & 24.0 & -24.0 \\ & (сим.) & & & & 18.67 & -10.0 \\ & & & & & & 10.0 \end{bmatrix}. \quad (2.51)$$

Решение системы уравнений $LX = -Be_0$ приводит к следующим результатам.

Значения контурных усилий:

$$X = 10^{-2} [-7.94 \quad -26.87 \quad -6.78 \quad -2.83 \quad 9.26 \quad -49.38 \quad 19.23]. \quad (2.52)$$

Согласно формуле $\sigma = B^T X$ получаем усилия в стержнях:

$$\sigma = 10^{-2} \begin{bmatrix} -7.94 & -26.87 & -6.78 & 0.00 & -6.78 & 12.09 & -49.38 & 24.90 \\ 12.09 & -49.38 & 24.90 & 9.26 & -49.38 & 19.23 & -7.94 & -20.10 \\ 80.38 & 2.83 & -12.09 & 42.60 & -52.02 & -17.19 & 22.50 & -12.67 \end{bmatrix}. \quad (2.53)$$

Окончательные значения изгибающих моментов, приведенные в таблице 2.9, получаются суммированием значений (2.53) и моментов M_{Pi} от заданной нагрузки в отдельных контурах (рисунок 2.11).

Таблица 2.9

Изгибающие моменты (кНм)

Номер стержня	M_{Pi}	M(s)	M(s) _{окон}
1н	0.00	0.00	0.00
1к	0.00	-1.59	-1.59
2н, 2к	0.00	0.00	0.00
2с	-2.00	0.00	-2.00
3н	0.00	0.00	0.00
3к	0.00	-1.36	-1.36
4н	-8.00	+7.53	+0.47
4с	0.00	+2.59	+2.59
4к	0.00	-2.35	-2.35
5н	0.00	-2.35	-2.35
5к	0.00	+0.07	+0.07
6н	0.00	+0.07	+0.07
6к	0.00	+1.92	+1.92
7н	0.00	+1.59	+1.59
7к	0.00	-2.43	-2.43
8н, 8к	0.00	0.00	0.00
9н	+8.00	-8.88	-0.88
9к	+12.0	-11.30	+0.70
10н	+12.0	-13.73	-1.73
10к	+20.0	-17.17	+2.83

Примечание: значения изгибающих моментов в начале, середине и конце стержня обозначены «н», «с» и «к» соответственно.

2.6. Расчет плоско-пространственной рамы

Для того, чтобы иметь возможность рассчитывать любую пространственную стержневую систему необходимо обобщить изложенный метод для расчета плоско-пространственных рам. Плоско-пространственной рамой будем называть плоскую стержневую систему, нагруженную нагрузкой, перпендикулярной плоскости рамы. Координатная плоскость x, y лежит в плоскости рамы.

Единичные касательный и нормальный к оси стержня векторы t , n лежат в плоскости x, y .

Как и в плоской задаче напряженно-деформированное состояние элемента стержня можно выразить через три независимых параметра. В качестве этих параметров выбираются три усилия M_x , M_y , Q , приложенные к концам абсолютно жестких консолей, проведенных из концов стержня к произвольной точке A (рисунок 2.14).

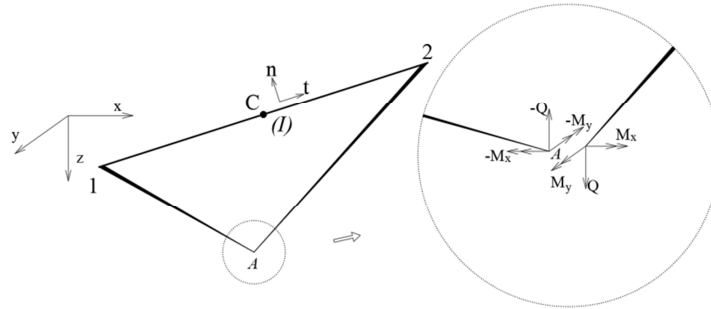


Рисунок 2.14. Первый вид конечных элементов в усилиях (КЭУ)

Энергия деформации стержня выражается следующей формулой:

$$W = \frac{1}{2} \int_0^{l_3} \left(\frac{(M^{\text{изг}}(s))^2}{k_2} + \frac{Q^2(s)}{k_3} + \frac{(M^{\text{кр}}(s))^2}{k_4} \right) ds, \quad (2.54)$$

где $k_2 = EI_n$, $k_3 = \kappa GA$ – изгибная и сдвиговая жесткости; $k_4 = GJ$ – жесткость кручения, $M^{\text{изг}}$ – изгибающий момент, $M^{\text{кр}}$ – крутящий момент, Q – перерезывающая сила.

Внутренние усилия в любой точке стержня, соответствующей координате s , следующим образом выражаются через параметры M_x , M_y , Q :

$$M^{\text{изг}}(s) = M_x t_y + M_y t_x - Q(x_{As} t_x + y_{As} t_y), \quad (2.55)$$

$$M^{\text{кр}}(s) = M_x t_x - M_y t_y - Q(y_{As} t_x - x_{As} t_y), \quad (2.56)$$

$$Q(s) = Q, \quad (2.57)$$

Подставив выражения (2.55) - (2.57) в формулу (2.54), получим:

$$\begin{aligned}
W = & \frac{1}{2} \left\{ \frac{1}{k_2} (M_x^2 \int_0^{l_2} t_y^2 ds + M_y^2 \int_0^{l_2} t_x^2 ds + M_x M_y \int_0^{l_2} t_x t_y ds + M_x M_y \int_0^{l_2} t_x t_y ds \right. \\
& - 2M_x Q \int_0^{l_2} t_y (x_{As} t_x + y_{As} t_y) ds - 2M_y Q \int_0^{l_2} t_x (x_{As} t_x + y_{As} t_y) ds + Q^2 \int_0^{l_2} (x_{As} t_x + y_{As} t_y)^2 ds) \\
& + \frac{1}{k_4} (M_x^2 \int_0^{l_2} t_x^2 ds + M_y^2 \int_0^{l_2} t_y^2 ds - 2M_x M_y \int_0^{l_2} t_x t_y ds - 2M_x Q \int_0^{l_2} t_x (y_{As} t_x - x_{As} t_y) ds \\
& \left. + 2M_y Q \int_0^{l_2} t_y (y_{As} t_x - x_{As} t_y) ds + Q^2 \int_0^{l_2} (y_{As} t_x - x_{As} t_y)^2 ds) + \frac{1}{k_3} Q^2 \int_0^{l_2} ds \right\}.
\end{aligned} \tag{2.58}$$

Перепишем выражение (2.58) в матричном виде:

$$W = \frac{1}{2} \sigma_I^T \Lambda \sigma_I, \quad (2.59)$$

где $\sigma_I = [M_x \quad M_y \quad Q]^T$ – столбец усилий, Λ – матрица податливости.

Из формулы (2.58) получим

$$\Lambda = \begin{bmatrix} \frac{1}{k_4} \int_0^{l_2} t_x^2 ds + \frac{1}{k_2} \int_0^{l_2} t_y^2 ds & & & & (\text{сум.}) \\ \frac{1}{k_4} \int_0^{l_2} t_x t_y ds + \frac{-1}{k_2} \int_0^{l_2} t_x t_y ds & \frac{1}{k_4} \int_0^{l_2} t_y^2 ds + \frac{1}{k_2} \int_0^{l_2} t_x^2 ds & & & \\ \frac{1}{k_4} \int_0^{l_2} t_x y_{As} ds - \frac{1}{k_2} \int_0^{l_2} -t_y x_{As} ds & \frac{1}{k_4} \int_0^{l_2} t_y y_{As} ds - \frac{1}{k_2} \int_0^{l_2} t_x x_{As} ds & \frac{1}{k_4} \int_0^{l_2} y_{As}^2 ds + \frac{1}{k_2} \int_0^{l_2} x_{As}^2 ds + \frac{1}{k_3} \int_0^{l_2} ds & & \end{bmatrix} \quad (2.60)$$

Выполнив интегрирование, получим первый тип матрицы податливости Λ (3×3) стержня с двумя жесткими узлами:

$$\Lambda_I = \begin{bmatrix} (\frac{l_3}{GJ}t_x^2 + \frac{l_3}{EI}t_y^2) & & (cum.) \\ (\frac{l_3}{GJ} + \frac{-l_3}{EI})t_xt_y & (\frac{l_3}{GJ}t_y^2 + \frac{l_3}{EI}t_x^2) & \\ (\frac{l_3}{GJ}t_xy_{CA} + \frac{l_3}{EI}t_yx_{CA}) & (\frac{l_3}{GJ}t_yy_{CA} + \frac{-l_3}{EI}t_xx_{CA}) & (\frac{l_3}{GJ}y_{CA}^2 + \frac{l_3}{EI}x_{CA}^2 + \frac{l_3^3}{12EI} + \frac{l_3}{\kappa GA}) \end{bmatrix}. \quad (2.61)$$

Рассмотрим второй тип конечного элемента: конечный элемент-стержень с одним жестким и одним шарнирным узлом (рисунок 2.15). Рассмотрим случай шарового шарнира, в этом случае в шарнире обращаются в нуль и крутящий и изгибающий моменты.

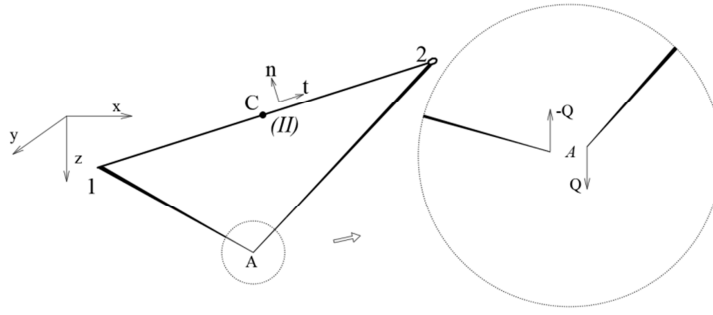


Рисунок 2.15. Второй вид КЭУ

Напряженно-деформированное состояние такого элемента полностью определяется одним параметром, в качестве которого можно взять усилие Q :

$$\sigma_{II} = [Q]. \quad (2.62)$$

Параметры M_x , M_y выражаются через это усилие таким образом, чтобы изгибающий и крутящий моменты в шарнирном узле 2 были равны нулю. Согласно формулам (2.55) и (2.56), получаем

$$\begin{cases} M_x = Q y_{A2}, \\ M_y = Q x_{A2}, \end{cases} \quad (2.63)$$

Подставляя формулы (2.63) в выражение для σ_I , получим:

$$\sigma_I = [Q y_{A2} \quad Q x_{A2} \quad Q]^T, \quad (2.64)$$

или в матричном виде:

$$\sigma_I = H \sigma_{II}, \quad (2.65)$$

где $H = [y_{A2} \quad x_{A2} \quad 1]^T$.

Подставляя выражение (2.65) в формулу (2.59), получаем:

$$W_{II} = \frac{1}{2} (H \sigma_{II})^T \Lambda_I (H \sigma_{II}) = \frac{1}{2} \sigma_{II}^T (H^T \Lambda_I H) \sigma_{II}. \quad (2.66)$$

Таким образом, энергия деформации второго вида КЭУ имеет вид:

$$W_{II} = \frac{1}{2} \sigma_{II}^T \Lambda_{II} \sigma_{II}, \quad (2.67)$$

где $\Lambda_{II} = H^T \Lambda_I H$ - матрица податливости (1×1) КЭУ второго типа.

$$\Lambda_{II} = \frac{l_3}{GJ} (\alpha + y_{CA})^2 + \frac{l_3}{EI} (\beta + x_{CA})^2 + \frac{l_3^3}{12EI} + \frac{l_3}{\kappa GA}, \quad (2.68)$$

где $\alpha = x_{A2} t_y - y_{A2} t_x$, $\beta = y_{A2} t_y + x_{A2} t_x$.

Рассмотрим пример расчета рамы, показанной на рисунке 2.16. Исходные данные: изгибная жесткость EI постоянна, модуль Юнга $E = 2.7 \times 10^7$ (кН/м²),

квадратное сечение стержня со стороной $b = 250$ (мм), коэффициент Пуассона $\nu = 0.3$, длина стержня $l_3 = 2$ (м). Задана нагрузка $P = 4$ (кН). Система два раза статически неопределима.

На рисунке 2.17 показаны отдельные контуры и дополнительные усилия, уравнивающие заданную нагрузку.

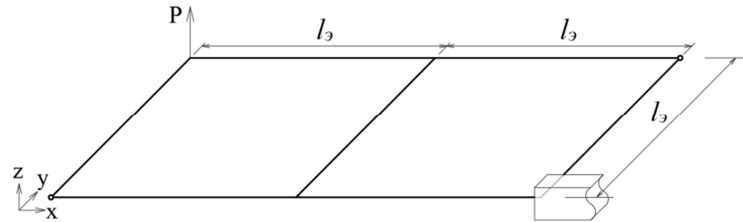


Рисунок 2.16. Рама с нагрузкой P

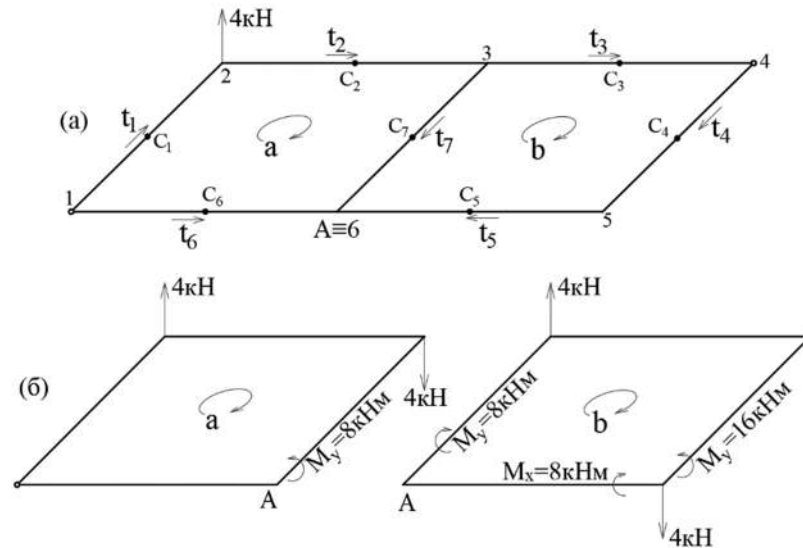
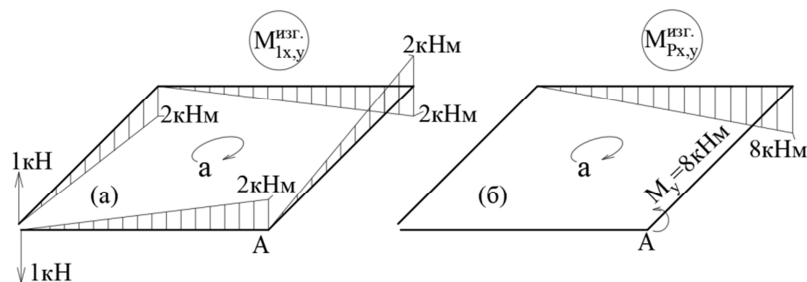


Рисунок 2.17. Разбивка на контуры: (а) исходная рама; (б) базовые контуры

На рисунках 2.18 – 2.20 приведены эпюры моментов в статически определимых контурах от нагрузки и от единичных усилий по направлениям связей, которые были удалены при превращении контуров в статически определимые.



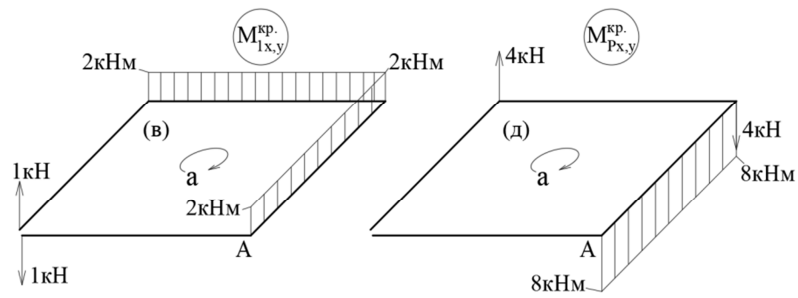


Рисунок 2.18. Базовый контур «а»: (а) и (в) эпюры изгибающих и крутящих моментов для единичной силы; (б) и (д) эпюры изгибающих и крутящих моментов для внешних сил

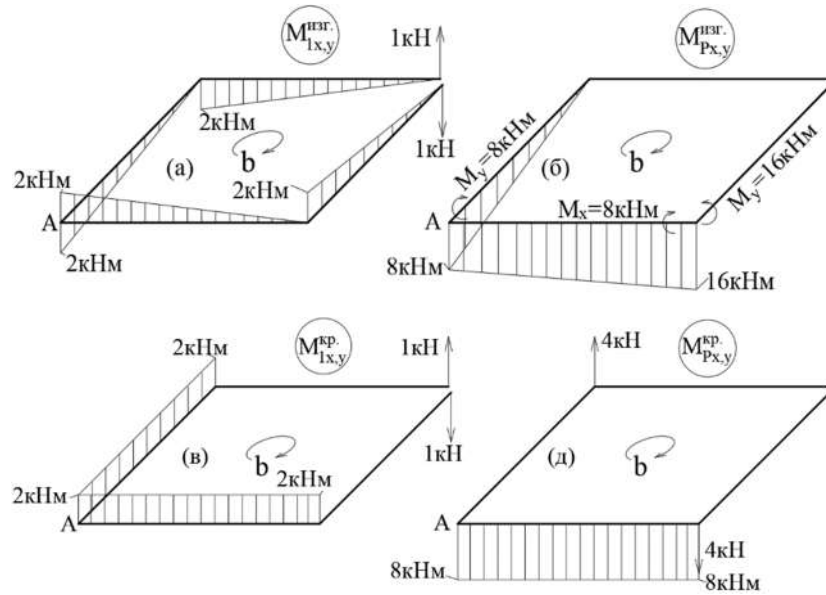


Рисунок 2.19. Базовый контур «б»: (а) и (в) эпюры изгибающих и крутящих моментов для единичной силы; (б) и (д) эпюры изгибающих и крутящих моментов для внешних сил

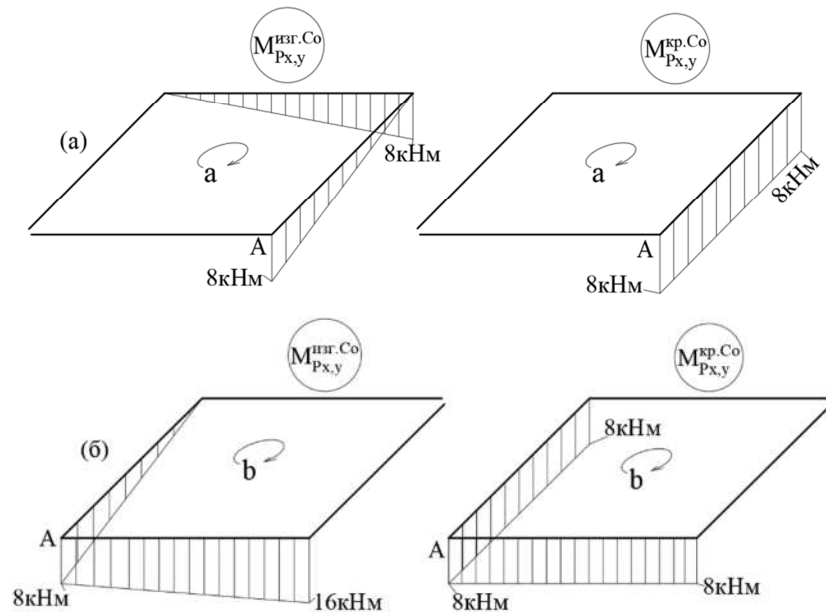


Рисунок 2.20. Суммарные эпюры изгибающих и крутящих моментов: (а) для контура «а»; (б) для контура «б»

Матрица несовместности деформаций равна $Be_0 = B\Lambda\sigma_q = [\Delta_{1a,Pa} \quad \Delta_{1b,Pb}]^T$,

где

$$\Delta_{1a,Pa} = \sum \int_0^{l_3} \left(\frac{M_{1x,y}^{изг.} M_{Px,y}^{изг.Co}}{EI} + \frac{M_{1x,y}^{кр.} M_{Px,y}^{кр.Co}}{GJ} \right) ds = 2 \left(\frac{16}{3EI} + \frac{-8}{3EI} + \frac{-16}{GJ} \right) = -5.07 \times 10^{-6},$$

$$\Delta_{1b,Pb} = \sum \int_0^{l_3} \left(\frac{M_{1x,y}^{изг.} M_{Px,y}^{изг.Co}}{EI} + \frac{M_{1x,y}^{кр.} M_{Px,y}^{кр.Co}}{GJ} \right) ds = 2 \left(\frac{16}{3EI} + \frac{-32}{3EI} + \frac{-16}{GJ} + \frac{-16}{GJ} \right) = -1.26 \times 10^{-5},$$

$$J = \frac{9}{64} b^4 = 0.00055 \text{ м}^4, I = I_x = I_y = \frac{b^4}{12} = 0.00033 \text{ м}^4,$$

$$G = \frac{E}{2(1+\nu)} \approx 0.38E \approx 1.03 \times 10^7 \left(\frac{\text{кН}}{\text{м}^2} \right).$$

Будем учитывать только жесткости на изгиб и кручение, то есть положим податливость на сдвиг $\frac{1}{\kappa GA} \rightarrow 0$. Тогда матрицы податливости стержней примут вид:

$$\Lambda_1 = \frac{8}{3EI}, \Lambda_2 = \begin{bmatrix} \frac{2}{GJ} & & (\text{сим.}) \\ 0 & \frac{2}{EI} & \\ -\frac{4}{GJ} & -\frac{2}{EI} & \left(\frac{8}{GJ} + \frac{8}{3EI} \right) \end{bmatrix}, \Lambda_3 = \frac{8}{3EI}, \Lambda_4 = \frac{8}{3EI}, \Lambda_5 = \begin{bmatrix} \frac{2}{GJ} & & (\text{сим.}) \\ 0 & \frac{2}{EI} & \\ 0 & -\frac{2}{EI} & \frac{8}{3EI} \end{bmatrix},$$

$$\Lambda_6 = \frac{8}{3EI}, \Lambda_7 = \begin{bmatrix} \frac{2}{EI} & & (\text{сим.}) \\ 0 & \frac{2}{GJ} & \\ \frac{2}{EI} & 0 & \frac{8}{3EI} \end{bmatrix}.$$

Уравнения совместности деформаций:

$$\begin{cases} e_1 + H^T e_2 - e_6 + H^T e_7 = 0 \text{ (для контура «а»),} \\ e_3 + e_4 + H^T e_5 - H^T e_7 = 0 \text{ (для контура «b»).} \end{cases}$$

где H – матрица (2.65).

Матрица совместности деформаций имеет вид:

$$B = \begin{bmatrix} 1 & H^T & 0_{1 \times 1} & 0_{1 \times 1} & 0_{1 \times 3} & -1 & H^T \\ 0_{1 \times 1} & 0_{1 \times 3} & 1 & 1 & H^T & 0_{1 \times 1} & -H^T \end{bmatrix}_{(2 \times 13)}.$$

Матрица податливости системы: $L = B\Lambda B^T = 10^{-6} \begin{bmatrix} 4.05 & 0.66 \\ (\text{sym.}) & 7.69 \end{bmatrix}$, где

$$\Lambda = \text{diag}\{\Lambda_1, \Lambda_2, \Lambda_3, \Lambda_4, \Lambda_5, \Lambda_6, \Lambda_7\}.$$

Из уравнения (2.42) находим контурные неизвестные: $X = [0.9989 \quad 1.5480]^T$.

Соответствующие усилия находим по формуле $\sigma = B^T X$:

$$\sigma = \begin{bmatrix} 0.999 & 0.000 & 1.998 & 0.999 & 1.548 & 1.548 & 3.096 & -3.096 & 1.548 & -0.999 \\ -3.096 & 5.094 & -0.549 \end{bmatrix}$$

Окончательные значения усилий, приведенные в таблице 2.10, находим суммируя эти усилия с усилиями в отдельных контурах от заданной нагрузки (рисунок 2.20).

Таблица 2.10

Изгибающие моменты плоской рамы, 7 стержней (кНм)

Номер стержня	$M_{Px,y}^{изгCo}$	$M(s)^{изг}$	$M(s)^{изг}_{окон}$	$M_{Px,y}^{крCo}$	$M(s)^{кр}$	$M(s)^{кр}_{окон}$
1н	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000
1к	0.000	+1.998	+1.998	0.000	0.000	0.000
2н	0.000	0.000	0.000	0.000	+1.998	+1.998
2к	-8.000	+1.998	-6.002	0.000	+1.998	+1.998
3н	0.000	+3.096	+3.096	0.000	0.000	0.000
3к	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000
4н	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000
4к	0.000	+3.096	+3.096	0.000	0.000	0.000
5н	-16.000	0.000	-16.000	-8.000	-3.096	-11.096
5к	-8.000	+3.096	-4.904	-8.000	-3.096	-11.096
6н	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000
6к	0.000	-1.998	-1.998	0.000	0.000	0.000
7н	0.000	-0.549	-0.549	-8.000	+5.094	-2.906
7к	-8.000	-3.096	-11.096	-8.000	+5.094	-2.906

2.7. Выводы по главе 2

В главе 2 дан метод расчета статически неопределимых стержневых конструкций с использованием уравнений совместности деформаций с неизвестными, являющимися усилиями в контурах.

Предложенный алгоритм метода сил обладает следующими положительными особенностями:

- не требуется выбирать основную систему и лишние неизвестные;
- не требуется хранить в памяти ЭВМ матрицу уравнений равновесия и выполнять ее анализ;
- структура (расположение нулевых и не нулевых блоков) разрешающей матрицы системы уравнений – матрицы податливости конструкции – полностью определяется после нумерации элементов и контуров;

- матрица податливости конструкции автоматически имеет ленточный и слабозаполненный характер;
- матрица податливости конструкции является не особенной даже для не закрепленной от жестких перемещений системы.
- наличие в системе очень жестких элементов, в том числе – абсолютно жестких, не ведет к ухудшению обусловленности системы уравнений и не требует использования специальных алгоритмов.

Глава 3. МЕТОД КОНЕЧНЫХ ЭЛЕМЕНТОВ В УСИЛИЯХ В ЗАДАЧАХ ДИНАМИКИ

В этой главе предлагается постановка задач динамики стержневых систем в усилиях. Выводятся дифференциальные уравнения в усилиях динамических задач изгиба и растяжения-сжатия стержней. Дается вариационная постановка в усилиях, доказываемая эквивалентность двух форм постановок. На основе вариационной постановки строятся конечные элементы в усилиях. На ряде задач о собственных и вынужденных колебаниях исследуется точность построенных конечных элементов, проводится сравнение с решениями, получаемыми на основе традиционного метода конечных элементов в перемещениях. Приводится способ задания демпфирования по Рэлею для постановки в усилиях. Предлагается постановка в усилиях для задач расчета на сейсмические воздействия, приводятся примеры расчета на сейсмическое воздействие плоской и пространственной стержневых систем.

3.1. Постановка задачи динамики о растяжении стержней в усилиях

Рассмотрим классическую постановку задачи динамики о растяжении стержней в перемещениях. Искомые функции: $N(x, t)$ – продольное усилие, $u(x, t)$ – продольное перемещение. Уравнение движения:

$$N' + q = \rho \ddot{u}, \quad (3.1)$$

где $q(x, t)$ – распределенная нагрузка; ρ – линейная плотность; $(...)'$ – частная производная по координате x , $0 \leq x \leq l$, l – длина стержня; $(...)'$ – частная производная по времени t , $0 \leq t$.

Физическое уравнение:

$$N = ku', \quad (3.2)$$

где $k = EA$ – жесткость на растяжение.

Граничные условия сформулируем для задачи, приведённой на рис. 3.1.

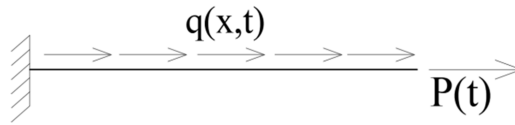


Рисунок 3.1. Динамическая задача о растяжении стержня

$$x = 0: \quad u(0, t) = 0. \quad (3.3)$$

$$x = l: \quad N(l, t) = P(t). \quad (3.4)$$

Начальные условия:

$$t = 0: \quad \begin{cases} u(x, 0) = u_0(x), \\ \dot{u}(x, 0) = v_0(x). \end{cases} \quad (3.5)$$

Уравнения (3.1), (3.2) вместе с граничными и начальными условиями (3.3)-(3.5) составляют классическую постановку задачи динамики.

Для формулировки задачи в усилиях сделаем следующие операции. Продифференцировав по x уравнения (3.1) и используя (3.2), получим уравнение

$$\frac{1}{\rho} N'' + \frac{1}{\rho} q' = \frac{1}{k} \ddot{N}, \quad (3.6)$$

здесь и далее будем считать, что $\rho = \text{const}$, $k = \text{const}$.

Из условия (3.3) следует, что $\ddot{u}(0, t) = 0$, тогда положив в (3.1) $x = 0$, сформулируем новое граничное условие

$$x = 0: \quad N'(0, t) + q(0, t) = 0. \quad (3.7)$$

В качестве второго граничного условия возьмём условия (3.4):

$$x = l: \quad N(l, t) = P(t). \quad (3.8)$$

Продифференцировав по x условия (3.5) и используя (3.2), получим начальные условия в усилиях:

$$t = 0: \quad \begin{cases} N(x, 0) = N_0(x), \\ \dot{N}(x, 0) = \dot{N}_0(x), \end{cases} \quad (3.9)$$

где обозначено: $N_0(x) = ku'_0$, $\dot{N}_0(x) = kv'_0$.

Уравнение (3.6) с граничными и начальными условиями (3.7) - (3.9) и представляют собой предлагаемую постановку задачи динамики в усилиях. Как будем видно из дальнейшего, граничное условие (3.7) необходимо для формулировки вариационной постановки задачи, что позволяет использовать алгоритм метода конечных элементов для численного решения.

3.2. Вариационная постановка задачи динамики о растяжении стержней в усилиях

Для задачи, рассмотренной в предыдущем параграфе (рис.3.1), сформулируем вариационную постановку.

Рассмотрим функционал

$$L(N) = \int_0^t \int_0^l \left(\frac{1}{2} \frac{1}{k} \dot{N}^2 - \frac{1}{2} \frac{1}{\rho} N'^2 - \frac{1}{\rho} q N' \right) dx dt. \quad (3.10)$$

Докажем, что вариационная задача поиска точки стационарности функционала (3.10) на множестве функций $N(x, t)$, удовлетворяющих главному граничному условию (3.8) и начальным условиям (3.9) равносильна сформулированной выше задаче (3.6)-(3.9).

Кратко, вариационную постановку можно записать в виде

$$\begin{cases} L(N) \rightarrow \text{стац.}, \\ x = l: N(l, t) = P(t), \\ t = 0: \begin{cases} N(x, 0) = N_0(x), \\ \dot{N}(x, 0) = \dot{N}_0(x). \end{cases} \end{cases} \quad (3.11)$$

Проварьируем функционал (3.10):

$$\delta L = \int_0^t \int_0^l \left(\frac{1}{k} \dot{N} \delta \dot{N} - \frac{1}{\rho} N' \delta N' - \frac{1}{\rho} q \delta N' \right) dx dt. \quad (3.12)$$

В дальнейшем будем считать, как принято при рассмотрении функционала Гамильтона, что

$$\delta N(x, 0) = \delta N(x, t) = 0. \quad (3.13)$$

С учетом (3.13) после интегрирования по частям вариация функционала (3.12) примет вид

$$\delta L = - \int_0^t \left(\frac{1}{\rho} N' + \frac{1}{\rho} q \right) \bigg|_0^l \delta N dt + \int_0^t \int_0^l \left(\frac{1}{\rho} N'' + \frac{1}{\rho} q' - \frac{1}{k} \ddot{N} \right) \delta N dx dt. \quad (3.14)$$

При условии (3.8) будет $\delta N(l, t) = 0$ и окончательное выражение для вариации δL примет вид

$$\delta L = \int_0^t \frac{1}{\rho} (N' + q) \bigg|_{x=0} \delta N(0, t) dt + \int_0^t \int_0^l \left(\frac{1}{\rho} N'' + \frac{1}{\rho} q' - \frac{1}{k} \ddot{N} \right) \delta N dx dt. \quad (3.15)$$

Согласно (3.15), условие стационарности $\delta L = 0$ приводим к уравнению Эйлера

$$\frac{1}{\rho} N'' + \frac{1}{\rho} q' = \frac{1}{k} \ddot{N}, \quad (3.16)$$

и естественному граничному условию

$$x = 0: N' + q = 0, \quad (3.17)$$

что совпадает с уравнением (3.6) и граничным условием (3.7).

Тем самым доказано, что вариационная задача (3.11) равносильна задаче (3.6) - (3.9).

Отметим, что вариационной постановке (3.11) можно придать физический смысл. Поскольку слагаемые функционала (3.10) имеют размерность мощности ($\frac{ДЖ}{с} = Вт$), то предложенную вариационную постановку можно сформулировать следующим образом: “на действительном движении суммарная мощность инерционных сил, упругих сил и внешних воздействий стационарна”.

3.3. Постановка в усилиях для динамических задач изгиба стержней

Рассмотрим классическую постановку динамических задач изгиба стержней на примере задачи, приведенной на рис.3.2.

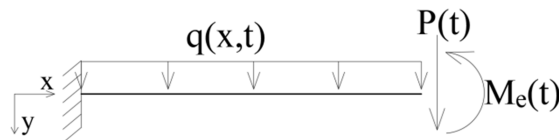


Рисунок 3.2. Задача об изгибных колебаниях стержня

Уравнение движения и физическое уравнение имеют вид:

$$M'' + q(x, t) = \rho \ddot{v}, \quad (3.18)$$

$$M = -k v', \quad (3.19)$$

где $M(x, t)$ – изгибающий момент, $v(x, t)$ - перемещение (прогиб) стержня, $k = EI$ - жесткость на изгиб, ρ - линейная плотность.

Граничные условия:

$$x = 0: \begin{cases} v(0, t) = 0, \\ v'(x, t) = 0, \end{cases} \quad (3.20)$$

$$x = l: \begin{cases} -kv''(l, t) = M_e(t), \\ -kv'''(l, t) = P(t), \end{cases} \quad (3.21)$$

где l – длина стержня; $M_e(t), P(t)$ – заданная краевая нагрузка.

Начальные условия:

$$t = 0: \begin{cases} v(x, 0) = v_0(x), \\ \dot{v}(x, 0) = \dot{v}_0(x), \end{cases} \quad (3.22)$$

Уравнения (3.18), (3.19) с граничными и начальными условиями (3.20) – (3.22) и составляют классическую постановку динамической задачи изгиба стержней.

Для получения постановки в усилиях сделаем следующее: дифференцируя два раза по x уравнение (3.18) и, используя (3.19), получим уравнение

$$\frac{1}{\rho} M^{IV} + \frac{1}{\rho} q'' + \frac{1}{k} \ddot{M} = 0, \quad (3.23)$$

здесь и далее, считаем, что $\rho = const.$, $k = const.$

Для дифференциального уравнения 4-го порядка (3.23) необходимо поставить четыре граничных условия. Два условия при $x = l$ дают условия (3.21), записанные через функцию $M(x, t)$:

$$x = l: \begin{cases} M(l, t) = M_e(t), \\ M'(l, t) = P(t). \end{cases} \quad (3.24)$$

Еще два граничных условия при $x = 0$ получим, потребовав выполнения уравнения (3.18) в этой точке. Из граничных условий (3.20) следуем, что $\ddot{v}(0, t) = 0$, $\ddot{v}'(0, t) = 0$, тогда из уравнения (3.18) следуют следующие условия:

$$x = 0: \begin{cases} M''(0, t) + q(0, t) = 0, \\ M'''(0, t) + q'(0, t) = 0. \end{cases} \quad (3.25)$$

Начальные условия для постановки в усилиях получим, дифференцируя два раза начальные условия (3.22):

$$t = 0: \begin{cases} M(x, 0) = M_0(x), \\ \dot{M}(x, 0) = \dot{M}_0(x), \end{cases} \quad (3.26)$$

где обозначено $M_0 = -kv_0''$, $\dot{M}_0 = -k\dot{v}_0''$.

Дифференциальное уравнение (3.23) с граничными условиями (3.24), (3.25) и начальными условиями (3.26) и представляют собой постановку в усилиях

динамических задач изгиба стержней. Как будет показано далее, именно граничные условия (3.25) позволяют сформулировать эквивалентную вариационную постановку задач динамики для изгибных колебаний стержней.

3.4. Вариационная постановка в усилиях для динамических задач изгиба стержней

Рассмотрим функционал

$$L(M) = \int_0^t \int_0^l \left(\frac{1}{2} \frac{1}{k} \dot{M}^2 - \frac{1}{2} \frac{1}{\rho} M''^2 - \frac{1}{\rho} q M'' \right) dx dt. \quad (3.27)$$

Поставим задачу о поиске точки стационарности функционала (3.27) на множестве функций $M(x, t)$, удовлетворяющих начальным условиям (3.26) и главным граничным условиям (3.24). Кратко вариационную задачу запишем следующим образом:

$$\begin{aligned} L(M(x, t)) &\rightarrow \text{стац.}, \\ x = l: &\begin{cases} M(l, t) = M_e(t), \\ M'(l, t) = P(t), \end{cases} \\ t = 0: &\begin{cases} M(x, 0) = M_0(x), \\ \dot{M}(x, 0) = \dot{M}_0(x). \end{cases} \end{aligned} \quad (3.28)$$

Докажем эквивалентность вариационной задачи (3.28) и сформулированной ранее задачи (3.23) - (3.26).

Проварьируем функционал (3.27):

$$\delta L = \int_0^t \int_0^l \left(\frac{1}{k} \dot{M} \delta \dot{M} - \frac{1}{\rho} M'' \delta M'' - \frac{1}{\rho} q \delta M'' \right) dx dt. \quad (3.29)$$

Первое слагаемое в (3.29) после интегрирования по частям с учетом условий $\delta M(x, t) = \delta M(x, 0) = 0$ примет вид

$$- \int_0^t \int_0^l \frac{1}{k} \ddot{M} \delta M dx dt. \quad (3.30)$$

Оставшиеся два слагаемых в (3.29) интегрируем по частям два раза:

$$\int_0^t \left[- \left(\frac{1}{\rho} M'' + \frac{1}{\rho} q \right) \delta M' \right]_0^l + \left(\frac{1}{\rho} M''' + \frac{1}{\rho} q' \right) \delta M \Big|_0^l dt - \int_0^t \int_0^l \left(\frac{1}{\rho} M'' + \frac{1}{\rho} q' \right) \delta M dx dt. \quad (3.31)$$

Учтем, что согласно главным граничным условиям (3.24) $\delta M(l, t) = 0$, $\delta M'(l, t) = 0$. Тогда (3.31) примет вид:

$$\int_0^t \left[\frac{1}{\rho} (M''(0, t) + q(0, t)) \delta M'(0, t) - \frac{1}{\rho} (M'''(0, t) + q'(0, t)) \delta M(0, t) \right] dt - \int_0^t \int_0^l \frac{1}{\rho} (M'''' + q'') \delta M dx dt. \quad (3.32)$$

Подставляя (3.30) и (3.32) в (3.29), получим

$$\delta L = - \int_0^t \int_0^l \left(\frac{1}{k} \ddot{M} + \frac{1}{\rho} M'''' + \frac{1}{\rho} q'' \right) \delta M dx dt + \int_0^t \frac{1}{\rho} (M''(0, t) + q(0, t)) \delta M'(0, t) dt - \int_0^t \frac{1}{\rho} (M'''(0, t) + q'(0, t)) \delta M(0, t) dt. \quad (3.33)$$

Из формулы (3.33) получаем, что условие стационарности $\delta L(M) = 0$ приводит к уравнению Эйлера (3.23) и естественным граничным условиям (3.25). Тем самым доказана эквивалентность вариационной постановки (3.28) и постановки в усилиях (3.23) - (3.26).

Обратим внимание, что, как и в задаче о растяжении стержня, слагаемые функционала (3.27) имеют размерность мощности (Вт). Таким образом, физический смысл вариационной постановки в усилиях остается прежним: на решении динамической задачи суммарная мощность инерционных сил, упругих сил и внешних воздействий стационарна.

3.5. Численное решение задач динамики стержней в форме метода конечных элементов в усилиях

3.5.1. Реализация МКЭ в усилиях для динамических задач растяжения стержней

Рассмотрим функционал (3.10) для одного конечного элемента:

$$L(N) = \int_0^t \int_0^{l_3} \left(\frac{1}{2} \frac{1}{EA} \dot{N}^2 - \frac{1}{2} \frac{1}{\rho} N'^2 - \frac{1}{\rho} q N' \right) dx dt. \quad (3.34)$$

Для продольных колебаний стержня функция $N(x, t)$ принимается в виде [89-91]:

$$N(x, t) = N_1(t) \left(1 - \frac{x}{l_3}\right) + N_2(t) \frac{x}{l_3} = \begin{bmatrix} \left(1 - \frac{x}{l_3}\right) & \frac{x}{l_3} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} N_1 \\ N_2 \end{Bmatrix} \quad (3.35)$$

$$= H(x)N(t),$$

где $H(x) = \begin{bmatrix} \left(1 - \frac{x}{l_3}\right) & \frac{x}{l_3} \end{bmatrix}$; $N(t) = \{N_1(t) \quad N_2(t)\}^T$; l_3 - длина элемента.

Подставив выражение (3.35) в каждое слагаемое функционала (3.34), получим

$$\int_0^t \int_0^{l_3} \left(\frac{1}{2} \frac{1}{\rho} \dot{N}^2 \right) dx dt = \int_0^t \int_0^{l_3} \left(\frac{1}{2} \dot{N}^T \frac{1}{\rho} (H')^T H' \dot{N} \right) dx dt, \quad (3.36)$$

$$\int_0^t \int_0^{l_3} \left(\frac{1}{2} \frac{1}{EA} \dot{N}^2 \right) dx dt = \int_0^t \int_0^{l_3} \left(\frac{1}{2} \dot{N}^T \frac{1}{EA} H^T H \dot{N} \right) dx dt, \quad (3.37)$$

$$\int_0^t \int_0^{l_3} \left(\frac{1}{\rho} q \dot{N}' \right) dx dt = \int_0^t \int_0^{l_3} \left(\dot{N}^T \frac{1}{\rho} H^T H q \dot{N} \right) dx dt. \quad (3.38)$$

Обозначим $Z^{\text{пр}} = \int_0^{l_3} \frac{1}{\rho} (H')^T H' dx$ - обратная матрица масс (ОММ), $V^{\text{пр}} = \int_0^{l_3} \frac{1}{EA} H^T H dx$ - матрица податливости (МП) и $P = \int_0^{l_3} \frac{1}{\rho} H^T H q dx$. Тогда не сложно

получить: $Z^{\text{пр}} = \frac{1}{\rho} \begin{bmatrix} \frac{1}{l_3} & \frac{-1}{l_3} \\ (\text{сим.}) & \frac{1}{l_3} \end{bmatrix}, \quad V^{\text{пр}} = \frac{1}{EA} \begin{bmatrix} \frac{l_3}{3} & \frac{l_3}{6} \\ (\text{сим.}) & \frac{l_3}{3} \end{bmatrix}.$

Теперь перепишем функционал (3.34), как показано ниже:

$$L(N) = \int_0^t \left(\frac{1}{2} \dot{N}^T V^{\text{пр}} \dot{N} - \frac{1}{2} N^T Z^{\text{пр}} N - N^T P N \right) dt. \quad (3.39)$$

Уравнение продольных движений получим, приравняв нулю вариацию функционала (3.39):

$$V^{\text{пр}} \ddot{N} + Z^{\text{пр}} N = P, \quad (3.40)$$

где $\det(Z^{\text{пр}}) = 0$; $\det(V^{\text{пр}}) \neq 0$.

Для определения собственных частот положим $P = 0$, $N(t) = N \sin(\omega t)$, $N = \text{const}$. Тогда из уравнения (3.40) получим

$$Z^{\text{пр}} N - \omega^2 V^{\text{пр}} N = 0, \quad (3.41)$$

или

$$(Z^{\text{пр}} - \omega^2 V^{\text{пр}})N = 0, \quad (3.42)$$

Уравнение для нахождения собственных частот получается из условия обращения в нуль определителя системы (3.42):

$$|Z^{\text{пр}} - \omega^2 V^{\text{пр}}| = 0. \quad (3.43)$$

Точное решение для собственных частот стержня с различными граничными условиями определяется формулами [91,92]:

$$\text{Для консольного стержня: } \omega_i = \frac{(2i+1)\pi}{2L} \sqrt{\frac{E}{\rho}}, \quad i=0,1,2,\dots$$

$$\text{Для стержня с двумя заделками: } \omega_i = \frac{i\pi}{L} \sqrt{\frac{E}{\rho}}, \quad i=1,2,3,\dots$$

$$\text{Для свободного стержня: } \omega_i = \frac{i\pi}{L} \sqrt{\frac{E}{\rho}}, \quad i=0,1,2,3,\dots$$

Точные значения i -ой собственной частоты продольных колебаний этих стержней указан в последнем столбце таблиц 3.1-3.3 с исходными данными: модуль Юнга $E = 2.1 \times 10^{11}$ (Н/м²); длина стержня $L = 1$ (м); площадь поперечного сечения стержня $A = 0.01$ (м²) и плотностью материала стержня $\rho = 7830$ (кг/м³).

Для сеток от одного до двадцати конечных элементов в таблицах 3.1-3.3 дается сравнение результатов по разработанному методу конечных элементов в усилиях (МКЭУ) [89,90] и результатов, полученных по стандартному МКЭ в перемещениях (МКЭП) с использованием программного комплекса SCAD. Погрешность между численным и точным результатами определена по формуле: $\varepsilon_i = |z_{\text{чис.}} - z_{\text{точ.}}|/z_{\text{точ.}}$, здесь $z_{\text{чис.}}$ - значения, полученные МКЭУ и МКЭП; $z_{\text{точ.}}$ - значения точных решений.

Таблица 3.1

Частоты собственных продольных колебаний для консольного стержня (Гц), $\times 10^3$

№	Методы	Количество конечных элементов					Точное решение	
		1КЭ	3КЭ	5КЭ	10КЭ	20КЭ		
1	МКЭУ	ω_1	1.428	1.310	1.300	1.296	1.295	1.295
		ε_1	0.103	0.012	0.004	0.001	0.000	
	МКЭП	ω_1	1.155	1.268	1.277	1.281	1.282	
		ε_1	0.108	0.021	0.014	0.011	0.010	
2	МКЭУ	ω_2	-	4.283	4.029	3.920	3.893	3.884

3	МКЭП	ε_2	-	0.103	0.037	0.009	0.002	6.474
		ω_2	-	3.464	3.706	3.812	3.838	
		ε_2	-	0.108	0.046	0.019	0.012	
	МКЭУ	ω_3	-	7.770	7.138	6.641	6.515	
		ε_3	-	0.200	0.103	0.026	0.006	
	МКЭП	ω_3	-	4.731	5.773	6.641	6.371	
		ε_3	-	0.269	0.108	0.026	0.016	
	4	МКЭУ	ω_4	-	-	10.70	9.523	9.063
			ε_4	-	-	0.181	0.051	
		МКЭП	ω_4	-	-	7.274	8.531	
			ε_4	-	-	0.197	0.059	
5	МКЭУ	ω_5	-	-	13.77	12.63	11.90	11.65
		ε_5	-	-	0.182	0.084	0.021	
	МКЭП	ω_5	-	-	8.063	10.60	11.90	
		ε_5	-	-	0.308	0.090	0.021	

Таблица 3.2

Частоты собственных продольных колебаний для стержня с двумя заделками (Гц), $\times 10^3$

№	Методы	Количество конечных элементов						Точное решение
			1КЭ	3КЭ	5КЭ	10КЭ	20КЭ	
1	МКЭУ	ω_1	-	2.709	2.632	2.600	2.592	2.589
		ε_1	-	0.046	0.017	0.004	0.001	
	МКЭП	ω_1	-	2.449	2.523	2.554	2.562	
		ε_1	-	0.054	0.026	0.013	0.010	
2	МКЭУ	ω_2	-	6.057	5.522	5.264	5.200	5.179
		ε_2	-	0.170	0.066	0.016	0.004	
	МКЭП	ω_2	-	4.242	4.798	5.045	5.108	
		ε_2	-	0.181	0.073	0.026	0.014	
3	МКЭУ	ω_3	-	-	8.882	8.058	7.840	7.768
		ε_3	-	-	0.143	0.037	0.009	
	МКЭП	ω_3	-	-	6.605	7.412	7.623	
		ε_3	-	-	0.150	0.046	0.019	
4	МКЭУ	ω_4	-	-	12.44	11.04	10.53	10.36
		ε_4	-	-	0.201	0.066	0.016	
	МКЭП	ω_4	-	-	7.764	9.597	10.09	
		ε_4	-	-	0.251	0.074	0.026	
5	МКЭУ	ω_5	-	-	-	14.28	13.28	12.95
		ε_5	-	-	-	0.103	0.025	
	МКЭП	ω_5	-	-	-	11.55	12.50	
		ε_5	-	-	-	0.108	0.035	

Таблица 3.3

Частоты собственных продольных колебаний для свободного стержня (Гц), $\times 10^3$

№	Метод	Количество конечных элементов						Точное решение
			1КЭ	3КЭ	5КЭ	10КЭ	20КЭ	
1	МКЭУ	ω_1	0	0	0	0	0	0
		ε_1	0	0	0	0	0	
2	МКЭУ	ω_2	2.855	2.709	2.632	2.600	2.592	2.589
		ε_2	0.103	0.046	0.017	0.004	0.001	

3	ω_3	-	6.057	5.522	5.264	5.200	5.179
	ε_3	-	0.169	0.066	0.016	0.004	
4	ω_4	-	-	8.882	8.058	7.840	7.768
	ε_4	-	-	0.143	0.037	0.009	
5	ω_5	-	-	12.44	11.04	10.53	10.36
	ε_5	-	-	0.201	0.066	0.016	

Из таблиц 3.1-3.3 можно сделать следующий вывод:

- скорость сходимости частот в МКЭП меньше по сравнению с МКЭУ (например, значения $\varepsilon_{1(\text{МКЭП})} = 0.014$, $\varepsilon_{1(\text{МКЭУ})} = 0.004$ при использовании 5КЭ для консольного стержня).

3.5.2. Реализация МКЭ в усилиях для динамических задач изгиба стержней

Рассмотрим функционал (3.27) для одного конечного элемента:

$$L(M) = \int_0^t \int_0^{l_3} \left(\frac{1}{2} \frac{1}{EI} \dot{M}^2 - \frac{1}{2} \frac{1}{\rho} M^{//2} - \frac{1}{\rho} q M^{//} \right) dx dt. \quad (3.44)$$

Так как функционал содержит вторые производные функции $M(x)$, то необходимо использовать кубическую аппроксимацию [10,11]:

$$M(x) = Q_1 \mathcal{E}_1(x) + M_1 \mathcal{E}_2(x) + Q_2 \mathcal{E}_3(x) + M_2 \mathcal{E}_4(x), \quad (3.45)$$

где $\mathcal{E}_i(x)$ - многочлены Эрмита ($i = 1, 2, 3, 4$).

Можно представить выражение (3.45) в матричном виде:

$$M(x, t) = [\mathcal{E}_1(x) \quad \mathcal{E}_2(x) \quad \mathcal{E}_3(x) \quad \mathcal{E}_4(x)] \begin{Bmatrix} Q_i(t) \\ M_i(t) \end{Bmatrix} = HF, \quad (3.46)$$

где $H = [\mathcal{E}_1(x) \quad \mathcal{E}_2(x) \quad \mathcal{E}_3(x) \quad \mathcal{E}_4(x)]$, $F = [Q_1(t) \quad M_1(t) \quad Q_2(t) \quad M_2(t)]^T$,

Q_i, M_i – узловые усилия конечного элемента.

Подставив выражение (3.46) в каждое слагаемое функционала (3.44), получим

$$\int_0^t \int_0^{l_3} \left(\frac{1}{2} \frac{1}{\rho} M^{//2} \right) dx dt = \int_0^t \int_0^{l_3} \left(\frac{1}{2} F^T \frac{1}{\rho} (H^{//})^T H^{//} F \right) dx dt, \quad (3.47)$$

$$\int_0^t \int_0^{l_3} \left(\frac{1}{2} \frac{1}{EI} \dot{M}^2 \right) dx dt = \int_0^t \int_0^{l_3} \left(\frac{1}{2} \dot{F}^T \frac{1}{EI} H^T H \dot{F} \right) dx dt, \quad (3.48)$$

$$\int_0^t \int_0^{l_3} \left(\frac{1}{\rho} q M'' \right) dx dt = \int_0^t \int_0^{l_3} \left(F^T \frac{1}{\rho} H^T H q F \right) dx dt. \quad (3.49)$$

Введем обозначения: $Z^{\text{изг}} = \int_0^{l_3} \frac{1}{\rho} (H'')^T H'' dx$ - ОММ,

$V^{\text{изг}} = \int_0^{l_3} \frac{1}{EI} H^T H dx$ - МП, и $P = \int_0^{l_3} \frac{1}{\rho} H^T H q$, где

$$V^{\text{изг}} = \frac{1}{EI} \begin{bmatrix} \frac{13l_3}{35} & \frac{11l_3^2}{210} & \frac{9l_3}{70} & \frac{-13l_3^2}{420} \\ & \frac{l_3^3}{105} & \frac{13l_3^2}{420} & \frac{-l_3^3}{140} \\ & & \frac{13l_3}{35} & \frac{-11l_3^2}{210} \\ & & & \frac{l_3^3}{105} \end{bmatrix}, \quad Z^{\text{изг}} = \frac{1}{\rho} \begin{bmatrix} \frac{12}{l_3^3} & \frac{6}{l_3^2} & \frac{-12}{l_3^3} & \frac{6}{l_3^2} \\ & \frac{4}{l_3} & \frac{-6}{l_3^2} & \frac{2}{l_3} \\ & & \frac{12}{l_3^3} & \frac{-6}{l_3^2} \\ & & & \frac{4}{l_3} \end{bmatrix}. \quad (\text{сим.})$$

Теперь функционал (3.44) примет вид:

$$L(M) = \int_0^t \left(\frac{1}{2} \dot{F}^T V^{\text{изг}} \dot{F} - \frac{1}{2} F^T Z^{\text{изг}} F - F^T P F \right) dt. \quad (3.50)$$

Уравнение изгибных движений можно получить из условия стационарности функционала (3.50):

$$V^{\text{изг}} \ddot{F} + Z^{\text{изг}} F = P, \quad (3.51)$$

где $\det(Z^{\text{изг}}) = 0$; $\det(V^{\text{изг}}) \neq 0$.

Для определения собственных частот нужно положить: $P = 0$, $F(t) = F \sin(\omega t)$, $F = \text{const}$. Тогда уравнение (3.51) примет вид

$$Z^{\text{изг}} F - \omega^2 V^{\text{изг}} F = 0, \quad (3.52)$$

или

$$(Z^{\text{изг}} - \omega^2 V^{\text{изг}}) F = 0. \quad (3.53)$$

Уравнение для нахождения собственных частот получается из условия обращения в нуль определителя системы (3.53):

$$|Z^{\text{изг}} - \omega^2 V^{\text{изг}}| = 0. \quad (3.54)$$

Точные значения собственных частот стержня с различными граничными условиями определяются по формулам [91,92]:

Для шарнирно-опертого стержня: $\omega_i = \left(\frac{i\pi}{L}\right)^2 \sqrt{\frac{EI}{\rho A}}$, где $i = 1, 2, 3, \dots$.

Для стержня с двумя заделками: $\omega_i = \left(\frac{\lambda_i}{L}\right)^2 \sqrt{\frac{EI}{\rho A}}$, где $\lambda_1 = 4.730$, $\lambda_2 = 7.853$, $\lambda_3 = 10.996$, $\lambda_4 = 14.137$, $\lambda_5 = 17.279$, $\lambda_i = \frac{2i+1}{2}\pi$ ($i > 5$).

Для консольного стержня: $\omega_i = \left(\frac{\lambda_i}{L}\right)^2 \sqrt{\frac{EI}{\rho A}}$, где $\lambda_1 = 1.8751$, $\lambda_2 = 4.6941$, $\lambda_3 = 7.8547$, $\lambda_4 = 10.9956$, $\lambda_i = \frac{2i-1}{2}\pi$ ($i > 4$).

Для стержня с заделкой и шарнирной опорой: $\omega_i = \left(\frac{\lambda_i}{L}\right)^2 \sqrt{\frac{EI}{\rho A}}$, где $\lambda_1 = 3.9266$, $\lambda_2 = 7.0686$, $\lambda_3 = 10.2102$, $\lambda_4 = 13.3518$, $\lambda_i = \frac{(4i+1)\pi}{4}$ ($i > 4$).

Для свободного стержня: $\omega_i = \left(\frac{\lambda_i}{L}\right)^2 \sqrt{\frac{EI}{\rho A}}$, где $\lambda_1 = 0$, $\lambda_2 = 4.730$, $\lambda_3 = 7.853$, $\lambda_4 = 10.996$, $\lambda_5 = 14.137$, $\lambda_6 = 17.279$, $\lambda_i = \frac{2i+1}{2}\pi$ ($i > 6$).

Точные значения i -ой собственной частоты изгибных колебаний этих стержней указан в последнем столбце таблиц 3.4-3.8 с исходными данными: модуль Юнга $E = 2.1 \times 10^{11}$ (Н/м²); длина стержня $L = 1$ (м); стержень квадратного поперечного сечения со стороной квадрата 0.1 (м) и плотностью материала стержня $\rho = 7830$ (кг/м³).

Для сеток от одного до двадцати конечных элементов результаты вычисления собственных частот представлены в таблицах 3.4-3.8. В этих таблицах дается сравнение результатов по разработанному методу конечных элементов в усилиях (МКЭУ) [89,90] и результатов, полученных по стандартному МКЭ в перемещениях (МКЭП) с использованием программного комплекса SCAD.

Таблица 3.4

Частоты собственных изгибных колебаний для шарнирно-опертого стержня (Гц), $\times 10^3$

№	Методы	Количество конечных элементов					Точное решение
		2КЭ	3КЭ	5КЭ	10КЭ	20КЭ	
1	МКЭУ	ω_1	0.236	0.235	0.235	0.235	0.235
		ε_1	0.004	0.000	0.000	0.000	

	МКЭП	ω_1	0.231	0.232	0.233	0.233	0.233	
		ε_1	0.017	0.011	0.010	0.010	0.010	
2	МКЭУ	ω_2	-	0.950	0.941	0.939	0.939	0.939
		ε_2	-	0.012	0.002	0.000	0.000	
	МКЭП	ω_2	-	0.900	0.928	0.930	0.930	
		ε_2	-	0.042	0.012	0.009	0.009	
3	МКЭУ	ω_3	-	-	2.130	2.115	2.114	2.114
		ε_3	-	-	0.008	0.000	0.000	
	МКЭП	ω_3	-	-	2.054	2.092	2.093	
		ε_3	-	-	0.028	0.010	0.010	
4	МКЭУ	ω_4	-	-	3.844	3.764	3.758	3.757
		ε_4	-	-	0.023	0.002	0.000	
	МКЭП	ω_4	-	-	3.383	3.712	3.721	
		ε_4	-	-	0.100	0.012	0.010	
5	МКЭУ	ω_5	-	-	-	5.894	5.872	5.871
		ε_5	-	-	-	0.004	0.000	
	МКЭП	ω_5	-	-	-	5.773	5.813	
		ε_5	-	-	-	0.017	0.010	

Таблица 3.5

Частоты собственных изгибных колебаний для стержня с двумя заделками (Гц), $\times 10^3$

№	Методы	Количество конечных элементов						Точное решение
		2КЭ	3КЭ	5КЭ	10КЭ	20КЭ		
1	МКЭУ	ω_1	0.541	0.535	0.533	0.532	0.532	0.532
		ε_1	0.017	0.006	0.002	0.000	0.000	
	МКЭП	ω_1	0.462	0.520	0.527	0.527	0.527	
		ε_1	0.132	0.023	0.010	0.009	0.009	
2	МКЭУ	ω_2	-	1.497	1.473	1.468	1.467	1.467
		ε_2	-	0.020	0.004	0.001	0.000	
	МКЭП	ω_2	-	1.207	1.436	1.453	1.453	
		ε_2	-	0.177	0.021	0.010	0.009	
3	МКЭУ	ω_3	-	-	2.917	2.880	2.877	2.877
		ε_3	-	-	0.014	0.001	0.000	
	МКЭП	ω_3	-	-	2.666	2.844	2.849	
		ε_3	-	-	0.073	0.011	0.010	
4	МКЭУ	ω_4	-	-	4.859	4.768	4.756	4.755
		ε_4	-	-	0.022	0.003	0.000	
	МКЭП	ω_4	-	-	3.719	4.683	4.709	
		ε_4	-	-	0.218	0.015	0.010	
5	МКЭУ	ω_5	-	-	-	7.144	7.106	7.104
		ε_5	-	-	-	0.006	0.000	
	МКЭП	ω_5	-	-	-	6.928	7.032	
		ε_5	-	-	-	0.025	0.010	

Таблица 3.6

Частоты собственных изгибных колебаний для консольного стержня (Гц), $\times 10^3$

№	Методы	Количество конечных элементов					Точное решение
		2КЭ	3КЭ	5КЭ	10КЭ	20КЭ	
1	МКЭУ ω_1	0.084	0.084	0.084	0.084	0.084	0.084

2	МКЭП	ε_1	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.524
		ω_1	0.074	0.079	0.081	0.082	0.083	
		ε_1	0.115	0.061	0.031	0.018	0.015	
	МКЭУ	ω_2	0.529	0.526	0.525	0.524	0.524	
		ε_2	0.010	0.004	0.002	0.000	0.000	
	МКЭП	ω_2	0.383	0.445	0.489	0.511	0.517	
		ε_2	0.269	0.151	0.068	0.025	0.013	
	3	МКЭУ	ω_3	-	1.486	1.473	1.468	1.468
			ε_3	-	0.012	0.003	0.000	
		МКЭП	ω_3	-	1.268	1.319	1.417	
			ε_3	-	0.136	0.102	0.035	
	4	МКЭУ	ω_4	-	-	2.910	2.879	2.877
			ε_4	-	-	0.011	0.001	
		МКЭП	ω_4	-	-	2.581	2.765	
			ε_4	-	-	0.145	0.045	
5	МКЭУ	ω_5	-	-	4.831	4.767	4.756	4.755
		ε_5	-	-	0.016	0.003	0.000	
	МКЭП	ω_5	-	-	3.706	4.492	4.655	
		ε_5	-	-	0.221	0.055	0.021	

Таблица 3.7

Частоты собственных изгибных колебаний для стержня с заделкой и шарнирной опорой (Гц), $\times 10^3$

№	Методы	Количество конечных элементов						Точное решение
		2КЭ	3КЭ	5КЭ	10КЭ	20КЭ		
1	МКЭУ	ω_1	0.370	0.368	0.367	0.367	0.367	0.367
		ε_1	0.008	0.003	0.000	0.000	0.000	
	МКЭП	ω_1	0.348	0.361	0.363	0.363	0.366	
		ε_1	0.053	0.017	0.011	0.010	0.003	
2	МКЭУ	ω_2	-	1.210	1.192	1.189	1.189	1.189
		ε_2	-	0.018	0.003	0.000	0.000	
	МКЭП	ω_2	-	1.071	1.166	1.176	1.189	
		ε_2	-	0.099	0.019	0.011	0.000	
3	МКЭУ	ω_3	-	-	2.507	2.482	2.481	2.480
		ε_3	-	-	0.011	0.001	0.000	
	МКЭП	ω_3	-	-	2.353	2.449	2.479	
		ε_3	-	-	0.051	0.013	0.000	
4	МКЭУ	ω_4	-	-	4.351	4.251	4.242	4.242
		ε_4	-	-	0.026	0.002	0.000	
	МКЭП	ω_4	-	-	3.706	4.170	4.193	
		ε_4	-	-	0.126	0.017	0.012	
5	МКЭУ	ω_5	-	-	-	6.503	6.475	6.473
		ε_5	-	-	-	0.005	0.000	
	МКЭП	ω_5	-	-	-	6.248	6.433	
		ε_5	-	-	-	0.035	0.006	

Таблица 3.8

Частоты собственных изгибных колебаний для свободного стержня (Гц), $\times 10^3$

№	Метод	Количество конечных элементов	Точное
---	-------	-------------------------------	--------

		2КЭ	3КЭ	5КЭ	10КЭ	20КЭ	решение
1	ω_1	0	0	0	0	0	0
	ε_1	0	0	0	0	0	
2	ω_2	0.534	0.534	0.533	0.532	0.532	0.532
	ε_2	0.003	0.003	0.001	0.001	0.001	
3	ω_3	1.670	1.475	1.472	1.468	1.467	1.467
	ε_3	0.138	0.005	0.003	0.001	0.000	
4	ω_4	4.175	3.235	2.904	2.879	2.877	2.877
	ε_4	0.451	0.125	0.010	0.001	0.000	
5	ω_5	6.670	5.807	4.803	4.767	4.756	4.755
	ε_5	0.403	0.221	0.010	0.002	0.000	

Из анализа результатов, представленных в таблицах 3.4-3.8 можно сделать следующий вывод:

- скорость сходимости частот в МКЭП меньше по сравнению с МКЭУ для большинства случаев от 2 до 20 КЭ (например, значения $\varepsilon_{1(\text{МКЭП})} = 0.011$, $\varepsilon_{1(\text{МКЭУ})} = 0.000$ при использовании 3 КЭ для шарнирно-опертого стержня).

3.6. Примеры вычисления собственных частот стержневых конструкций

Преобразование матриц Z_s^{pl} и V_s^{pl} в глобальную систему координат (см. рис.3.3) выполняется стандартным способом с помощью матриц направляющих косинусов R_i^{pl} .

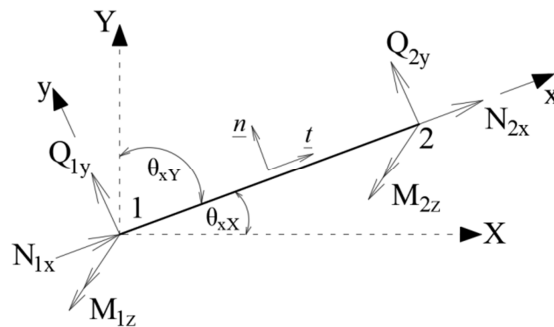


Рисунок 3.3. Элемент-стержень наклонен под углом θ к глобальным осям X, Y

На рисунке 3.3 показано разложение сил на компоненты по разным осям. Отсюда следует, что $N_{ix} = N_{iX} \cos\theta_{xX} + Q_{iY} \sin\theta_{xX}$; $Q_{iy} = -N_{iX} \sin\theta_{xX} + Q_{iY} \cos\theta_{xX}$; M_{iz}

= M_{iZ} , что можно представить в матричной форме как $\begin{Bmatrix} N_{ix} \\ Q_{iy} \\ M_{iz} \end{Bmatrix} = R_i^{pl} \begin{Bmatrix} N_{iX} \\ Q_{iY} \\ M_{iZ} \end{Bmatrix}$, здесь

$$R_i^{pl} = \begin{bmatrix} \cos \theta_{xX} & \sin \theta_{xX} & 0 \\ -\sin \theta_{xX} & \cos \theta_{xX} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Таким образом, для двух узлов получаем

$$\{N_{1x} \quad Q_{1y} \quad M_{1z} \quad N_{2x} \quad Q_{2y} \quad M_{2z}\}^T = R^{pl} \{N_{1X} \quad Q_{1Y} \quad M_{1Z} \quad N_{2X} \quad Q_{2Y} \quad M_{2Z}\}^T, \text{ здесь}$$

$$R^{pl} = \begin{bmatrix} R_1^{pl} & \\ & R_2^{pl} \end{bmatrix}.$$

Переведя пару матриц V_9^{pl} и Z_9^{pl} в глобальную систему координат (см. рис.3.4), получим $V^{pl} = (R^{pl})^{-1} V_9^{pl} R^{pl}$, $Z^{pl} = (R^{pl})^{-1} Z_9^{pl} R^{pl}$.

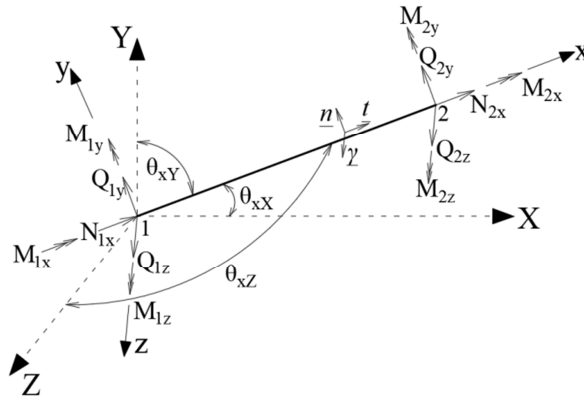


Рисунок 3.4. Элемент-стержень в пространстве под углами θ_{xX} , θ_{xY} , θ_{xZ} с глобальными осями X, Y и Z

Аналогичным образом можно показать, что

$$\{N_{ix} \quad Q_{iy} \quad Q_{iz} \quad M_{ix} \quad M_{iy} \quad M_{iz}\}^T = \begin{bmatrix} R \\ R \end{bmatrix} \{N_{iX} \quad Q_{iY} \quad Q_{iZ} \quad M_{iX} \quad M_{iY} \quad M_{iZ}\}^T \text{ или}$$

$$\{F_{ixyz}\} = \begin{bmatrix} R \\ R \end{bmatrix} \{F_{iXYZ}\}, \text{ здесь } R = \begin{bmatrix} \cos(x, X) & \cos(x, Y) & \cos(x, Z) \\ \cos(y, X) & \cos(y, Y) & \cos(y, Z) \\ \cos(z, X) & \cos(z, Y) & \cos(z, Z) \end{bmatrix}.$$

Таким образом, для двух узлов

$$\begin{Bmatrix} F_{1xyz} \\ F_{2xyz} \end{Bmatrix} = R^{sp} \begin{Bmatrix} F_{1XYZ} \\ F_{2XYZ} \end{Bmatrix}, \text{ здесь } R^{sp} = \begin{bmatrix} R & & \\ & R & \\ & & R \end{bmatrix}.$$

Переведя пару матриц V_9^{sp} и Z_9^{sp} в глобальную систему координат, получим $V^{sp} = (R^{sp})^T V_9^{sp} R^{sp}$, $Z^{sp} = (R^{sp})^T Z_9^{sp} R^{sp}$.

Ниже приведены примеры исследования собственных колебаний стержневых систем с использованием разработанной программы МКЭУ с помощью программного обеспечения MATLAB.

3.6.1. Пример плоской стержневой системы

Дана плоская конструкция (см. рис.3.5).

Исходные данные: модуль упругости $E = 2.0 \times 10^8$ (кН/м²); площадь квадратного поперечного сечения стержня $A = 0.0225$ (м²); плотность $\rho = 2750$ (кг/м³); коэффициент Пуассона $\nu = 0.2$; длины стержней $L = 1$ (м).

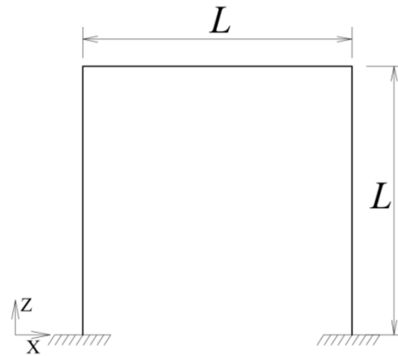


Рисунок 3.5. Плоская рама, 3 стержня

Для КЭ в усилиях учитываются продольные и изгибные деформации.

Результаты вычисления собственных частот приведены в таблицах 3.9 и 3.10.

Таблица 3.9

Первые пять собственных частот плоской рамы (Гц)

№		МКЭУ			МКЭП			Точное решение
		Количество конечных элементов						
		3КЭ	6КЭ	9КЭ	3КЭ	6КЭ	9КЭ	
1	ω_1	72.733	72.588	72.573	65.530	71.377	72.062	72.567
	ε_1	0.0023	0.0003	0.0001	0.0970	0.0164	0.0070	
2	ω_2	321.54	276.70	275.40	525.67	272.75	275.57	275.07
	ε_2	0.1690	0.0059	0.0012	0.9111	0.0084	0.0018	
3	ω_3	683.93	468.63	463.46	528.04	410.58	451.65	461.90
	ε_3	0.4807	0.0146	0.0034	0.1432	0.1111	0.0222	
4	ω_4	713.46	472.85	468.57	735.37	420.51	455.62	467.02
	ε_4	0.5277	0.0125	0.0033	0.5746	0.0996	0.0244	
5	ω_5	796.34	678.32	665.28	819.11	657.46	656.57	660.53

ε_5	0.2056	0.0269	0.0072	0.2401	0.0046	0.0060	
-----------------	--------	--------	--------	--------	--------	--------	--

Примечание: точные решения получены программой SCAD с 320 КЭ (таблица 3.10).

Таблица 3.10

Первые пять собственных частот плоской рамы (Гц)

ω_i	Количество конечных элементов						
	12КЭ	120КЭ	180КЭ	240КЭ	300КЭ	310КЭ	320КЭ
1	72.287	72.569	72.568	72.568	72.567	72.567	72.567
2	275.52	275.11	275.08	275.07	275.07	275.07	275.07
3	459.63	462.05	461.95	461.92	461.90	461.90	461.90
4	459.70	467.27	467.12	467.06	467.04	467.02	467.02
5	658.74	660.55	660.54	660.53	660.53	660.53	660.53

Из анализа таблицы 3.9 можно сделать следующие выводы:

- скорость сходимости МКЭУ выше, чем у МКЭП для большинства частот (например, значения $\varepsilon_{1(\text{МКЭУ})} = 0.0023, 0.0003$ и 0.0001 ; $\varepsilon_{1(\text{МКЭП})} = 0.0970, 0.0164$ и 0.0070 при использовании 3, 6 и 9 КЭ соответственно).
- при использовании 6 и 9 КЭ максимальные погрешности для МКЭП на 3-й и 4-й частотах равны 0.1111 и 0.0244 соответственно, тогда как для МКЭУ на 5-й частоте только 0.0269 и 0.0072.

3.6.2. Пример пространственной стержневой системы

Дана пространственная конструкция (см. рис.3.6).

Исходные данные: модуль упругости $E = 3 \times 10^7$ (кН/м²); площадь квадратного поперечного сечения стержня $A = 0.01$ (м²); плотность $\rho = 24517$ (Н/м³); коэффициент Пуассона $\nu = 0,2$; длины стержней $L = 1$ (м).

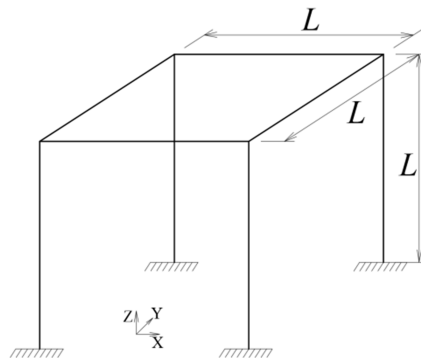


Рисунок 3.6. Пространственная рама, 8 стержней

Для КЭ в усилиях учитываются продольные, изгибные и крутильные деформации.

При расчете пространственной системы с учетом крутящих моментов можно использовать следующую пару матриц:

$$Z^{kp} = \frac{1}{\rho} \begin{bmatrix} \frac{1}{l_3} & -1 \\ (сим.) & \frac{1}{l_3} \end{bmatrix}, \quad V^{kp} = \frac{1}{GJ} \begin{bmatrix} \frac{l_3}{3} & \frac{l_3}{6} \\ (сим.) & \frac{l_3}{3} \end{bmatrix}, \quad \text{где } G = \frac{E}{2(1+\nu)} \text{ и } \nu - \text{коэффициент Пуассона.}$$

Результаты вычисления собственных частот приведены в таблицах 3.11 и 3.12.

Таблица 3.11

Первые пять собственных частот пространственной рамы (Гц)

№		МКЭУ			МКЭП			Точное решение
		Количество конечных элементов						
		8КЭ	16КЭ	24КЭ	8КЭ	16КЭ	24КЭ	
1	ω_1	40.064	39.972	39.967	37.533	40.047	40.032	39.969
	ε_1	0.0024	0.0001	0.0001	0.0609	0.0020	0.0016	
2	ω_2	50.932	50.852	50.843	41.189	51.074	50.979	50.785
	ε_2	0.0029	0.0013	0.0011	0.1890	0.0057	0.0038	
3	ω_3	88.196	87.777	87.724	74.362	89.633	88.808	87.704
	ε_3	0.0056	0.0008	0.0002	0.1521	0.0220	0.0126	
4	ω_4	185.47	165.99	165.42	407.78	177.58	171.94	165.79
	ε_4	0.1187	0.0012	0.0022	1.4596	0.0711	0.0371	
5	ω_5	225.36	193.87	192.96	448.46	203.77	200.46	193.83
	ε_5	0.1627	0.0002	0.0045	1.3137	0.0513	0.0342	

Примечание: точные решения получены программой SCAD с 960 КЭ (таблица 3.12).

Таблица 3.12

Первые пять собственных частот пространственной рамы (Гц)

ω_i	Количество конечных элементов							
	400КЭ	480КЭ	560КЭ	640КЭ	720КЭ	800КЭ	880КЭ	960КЭ
1	39.969	39.969	39.969	39.969	39.969	39.969	39.969	39.969
2	50.785	50.785	50.785	50.785	50.785	50.785	50.785	50.785
3	87.708	87.707	87.706	87.705	87.705	87.705	87.704	87.704
4	165.81	165.80	165.80	165.79	165.79	165.79	165.79	165.79
5	193.86	193.85	193.84	193.84	193.83	193.83	193.83	193.83

Из анализа таблицы 3.11 можно сделать следующие выводы:

- скорость сходимости МКЭУ выше, чем у МКЭП для большинства частот (например, значения $\varepsilon_{1(МКЭУ)} = 0.0024, 0.0001$ и 0.0001 ; $\varepsilon_{1(МКЭП)} = 0.0609, 0.0020$ и 0.0016 при использовании 8, 16 и 24КЭ соответственно). Особенно

для первых трех частот самая большая погрешность для МКЭП составляет 18.9%, а для МКЭУ - всего 0.56%.

- при использовании 16 и 24 КЭ максимальные погрешности для МКЭП на 4-й и 5-й частотах составляют 7.11% и 3.42% соответственно, а для МКЭУ на 2-й и 5-й частотах- соответственно всего 0.13% и 0.45%.

3.7. Примеры решения задач о вынужденных колебаниях стержневых конструкций

Известны начальные значения вектора силы F и вектора $\dot{F}$ в момент времени $t = 0$. Вектор $\ddot{F}$ при $t = 0$ получается из уравнения (3.51).

Подход 1: гармоническое воздействие $P(t) = P_0 \sin(\theta t)$.

Ищем решение в виде $F(t) = A \sin(\theta t)$, где $A = \text{const}$. Поэтому $\dot{F} = \theta A \cos(\theta t)$ и $\ddot{F}(t) = -\theta^2 A \sin(\theta t)$.

Тогда уравнение (3.51) можно переписать следующим образом:

$$(Z - \theta^2 V)A = P_0 \quad (3.55)$$

или

$$A = D^{-1}P_0, \quad (3.56)$$

где $D = Z - \theta^2 V$.

Подход 2: для интегрирования по времени используется неявный метод Ньюмарка [93,94].

Параметры предиктора $\tilde{F}$ и $\dot{\tilde{F}}$ в момент времени $(n+1)\Delta t$ в терминах известных векторов в момент времени $n\Delta t$:

$$\tilde{F}_{n+1} = F_n + \Delta t \dot{F}_n + 0.5\Delta t^2(1 - 2\beta)\ddot{F}_n; \quad (3.57)$$

$$\dot{\tilde{F}}_{n+1} = \dot{F}_n + \Delta t(1 - \gamma)\ddot{F}_n. \quad (3.58)$$

Вектор $\ddot{F}$ получается из следующего уравнения при $(n+1)\Delta t$:

$$(V + \beta\Delta t^2 Z)\ddot{F}_{n+1} = P_{n+1} - Z\tilde{F}_{n+1}. \quad (3.59)$$

Вектор F и вектор $\dot{F}$ в момент времени $(n+1)\Delta t$ получают из следующих соотношений:

$$F_{n+1} = \tilde{F}_{n+1} + \beta\Delta t^2 \ddot{F}_{n+1}; \quad (3.60)$$

$$\dot{F}_{n+1} = \ddot{F}_{n+1} + \gamma \Delta t \ddot{F}_{n+1}, \quad (3.61)$$

где константы $\beta = 0.25$ и $\gamma = 0.5$.

Пример1: Дана плоская система с вынужденной частотой колебаний $\theta = 0.8\omega_1$ (рад/с), см. рис.3.7.

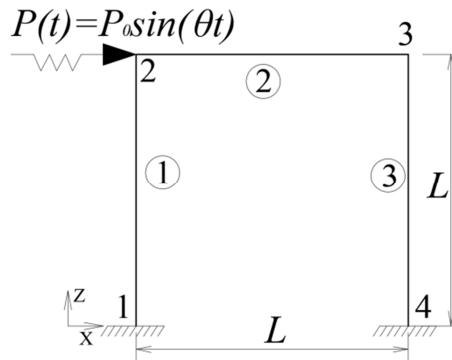


Рисунок 3.7. Плоская рама, 3 стержня

Исходные данные: модуль упругости $E = 26.69 \times 10^7$ (кН/м²); длины стержней $L = 1$ (м); размеры поперечного сечения стержней: ширина $b = 0.4$ (м), высота $h = 0.4$ (м); величина амплитуды вынуждающей силы $P_0 = 890$ (кН); плотность $\rho = 2500$ (кг/м³).

Первые пять собственных частот: $\omega_1 = 195.78, \omega_2 = 554.47, \omega_3 = 787.20, \omega_4 = 1014.50, \omega_5 = 1560.37$ (Гц).

Период колебаний для первой моды колебаний: $T = \frac{2\pi}{\omega_1} \approx 0.005108$ (с).

При использовании прямого интегрирования по времени временной шаг Δt выбирается достаточно малым, чтобы находиться в диапазоне от $T/10$ до $T/5$, чтобы получить наиболее точные результаты внутренних усилий. В этом примере значения внутренних усилий показаны для двух временных шагов 0.0005108 (с) и 0.0010216 (с).

Результаты решения динамической задачи методом перемещений с помощью разложения по собственным формам колебаний (СФК) в программном комплексе SCAD приведены в таблице 3.13 (коэффициент неупругого сопротивления 0.00001).

Таблица 3.13

Изгибающие моменты в сечениях 1 и 2 элемента 1 (Нм)

МКЭП	Количество собственных форм колебаний (СФК)
------	---

		3СФК	6СФК	12СФК	18СФК	24СФК
Количество конечных элементов	3КЭ	M ₁	799489.75	812728.31	-	-
		M ₂	551061.63	558056.38	-	-
	6КЭ	M ₁	866997.13	866997.13	844491.06	-
		M ₂	514751.88	514751.88	543138.19	-
	9КЭ	M ₁	850451.75	870925.06	833270.00	847734.94
		M ₂	514738.06	500801.56	522433.38	536688.75
	18КЭ	M ₁	891585.88	848436.50	832321.50	860124.63
		M ₂	503191.16	509779.94	506562.56	516696.59
	24КЭ	M ₁	891152.69	847796.88	839028.94	860362.56
		M ₂	502187.44	508772.59	507099.97	513859.06
	30КЭ	M ₁	890905.50	847487.00	839883.63	860275.56
		M ₂	501701.44	508267.22	506830.66	512582.28
					512582.28	515195.22

Продолжение таблицы 3.13

Изгибающие моменты в сечениях 1 и 2 элемента 1 (Нм)

МКЭП		Количество собственных форм колебаний (СФК)				
		30СФК	36СФК	42СФК	60СФК	63СФК
Количество конечных элементов	3КЭ	M ₁	-	-	-	-
		M ₂	-	-	-	-
	6КЭ	M ₁	-	-	-	-
		M ₂	-	-	-	-
	9КЭ	M ₁	-	-	-	-
		M ₂	-	-	-	-
	18КЭ	M ₁	851131.88	-	-	-
		M ₂	527357.88	-	-	-
	24КЭ	M ₁	844733.63	853116.44	849983.31	-
		M ₂	518279.38	523517.91	528430.06	-
	30КЭ	M ₁	843598.00	849468.00	850801.75	849732.06
		M ₂	516532.22	519092.88	521501.47	530634.56

В таблице 3.13 показаны результаты внутренних усилий, соответствующие 63 СФК и 30 КЭ, которые можно считать точными результатами.

Результаты решения динамической задачи методом конечных элементов в усилиях (МКЭУ) приведены в таблицах 3.14 и 3.15.

Таблица 3.14

Изгибающие моменты в сечениях 1 и 2 элемента 1

№	t (с)	P(t) (Н)	M ₁ (Нм)	M ₂ (Нм)
1	0.0010216	828031.35	0.00210	0.00133
2	0.0020432	887286.91	-48066.28	-30522.36
3	0.0030648	122751.55	25839.73	16408.38
4	0.0040864	-755751.02	115362.24	73255.67
5	0.0051080	-932585.59	16372.89	10396.88
...	...	...	...	...

15	0.0153240	575774.53	-195208.74	-123958.65
16	0.0163456	-361798.29	-137355.67	-87221.62
17	0.0173672	-963463.81	219454.39	139354.77
18	0.0183888	-670612.89	211660.24	134405.44
19	0.0194104	244860.55	-242729.26	-154134.45
...	...	...	...	...
37	0.0377992	-470712.80	458553.77	291184.22
38	0.0388208	474209.81	855640.10	543336.27
39	0.0398424	978857.99	458317.60	291034.26
40	0.0408640	574697.19	-364524.39	-231475.04
41	0.0418856	-363034.35	-848928.07	-539074.10
42	0.0429072	-963710.98	-545154.63	-346176.26
...	...	...	...	...
46	0.0469936	754052.85	-160833.19	-102129.98
47	0.0480152	-125390.62	-795759.20	-505311.57
MAX =			855640.10	543336.27
MIN =			-848928.07	-539074.10

Примечание: результаты получены МКЭУ с шагом $\Delta t = 0.0010216(c)$.

На рисунке 3.8 приведены графики изменения изгибающих моментов в сечениях 1 и 2 элемента 1 плоской рамы при действии гармонической возмущающей силы с частотой $\theta = 0.8\omega_1$. Показаны результаты на интервале времени от 0 (с) до 9T (с) с шагом $\Delta t = 0.0010216(c)$.

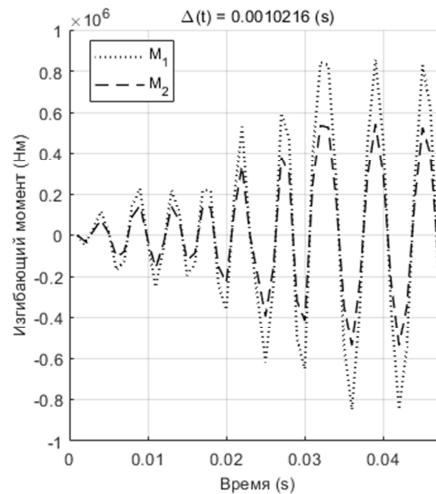


Рисунок 3.8. Графики изгибающих моментов M_1 и M_2

Таблица 3.15

Изгибающие моменты в сечениях 1 и 2 элемента 1

№	t (с)	P(t) (Н)	M_1 (Нм)	M_2 (Нм)
1	0.0005108	472462.28	0.01674	0.01063
2	0.0010216	828031.35	34241.19	21743.35
3	0.0015324	978734.89	-4689.68	-2977.97
4	0.0020432	887286.91	-49654.91	-31531.14
5	0.002554	576312.80	-63900.09	-40576.92
...	...	...	...	...

43	0.0219644	359942.96	-142058.19	-90207.75
44	0.0224752	-124071.20	-530703.58	-336999.76
45	0.0229860	-577388.55	-788046.11	-500413.71
46	0.0234968	-887852.60	-850415.96	-540018.92
47	0.0240076	-978650.57	-702382.04	-446016.54
48	0.0245184	-827317.88	-380569.81	-241663.97
49	0.0250292	-471296.18	35400.24	22479.35
50	0.0255400	1330.23	442611.83	281061.00
51	0.0260508	473627.52	740315.59	470104.56
52	0.0265616	828743.30	854855.81	542838.25
53	0.0270724	978817.41	757893.78	481266.81
54	0.0275832	886719.58	473419.13	300623.81
55	0.0280940	575235.99	71814.54	45602.64
...	...	...	...	...
67	0.0342236	754477.91	281186.52	178555.02
68	0.0347344	359324.18	-142630.10	-90570.92
MAX =			854855.81	542838.25
MIN =			-850415.96	-540018.92

Примечание: результаты получены МКЭУ с шагом $\Delta t = 0.0005108(\text{с})$.

На рисунке 3.9 приведены графики изменения изгибающих моментов в сечениях 1 и 2 элемента 1 плоской рамы при действии гармонической возмущающей силы с частотой $\theta = 0.8\omega_1$. Показаны результаты на интервале времени от 0 (с) до 7T (с) с шагом $\Delta t = 0.0005108(\text{с})$.

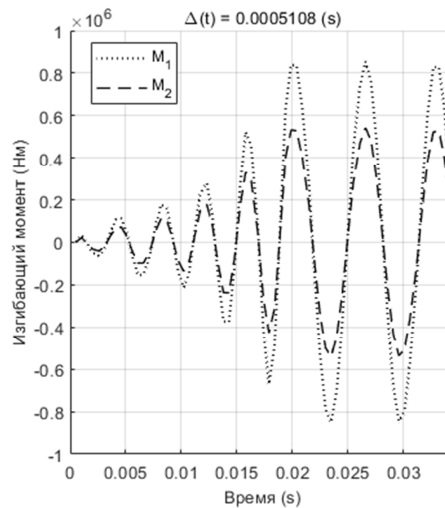


Рисунок 3.9. Графики изгибающих моментов M_1 и M_2

Таблица 3.16

Сравнение результатов

Изгибающие моменты (Нм)	Методы			Точное решение
	МКЭУ (ЗКЭ)	МКЭП (ЗКЭ, ЗСФК)	МКЭП (6КЭ, 6СФК)	

Подход 1	M_1	885996.42 4.27%			
Подход 2	Временной шаг Δt	0.0010216(s)	855640.10 0.70 %	799489.75 5.91%	866997.13 2.03%
		0.0005108(s)	854855.81 0.60 %		849732.06
Подход 1	M_2	530367.70 0.05%			
Подход 2	Временной шаг Δt	0.0010216(s)	543336.27 2.39 %	551061.63 3.85 %	514751.88 2.99 %
		0.0005108(s)	533023.35 2.30 %		530634.56

Таблица 3.16 показывает, что различия в результатах МКЭУ при использовании временных шагов $\Delta t = 0.0010216$ (с) и 0.0005108 (с) незначительна и составляют около 0.5%. Кроме того, максимальная погрешность между результатом МКЭУ и точным результатом для подхода 1 составляет 4.27%, а для подхода 2 – 2.39%.

При использовании того же количества конечных элементов (например, 3 КЭ) МКЭУ по-прежнему дает достаточно точные результаты (так наибольшая погрешность для подхода 2 составляет 2.39%), а наибольшая погрешность для МКЭП составляет 5.91%.

Пример2: Дана пространственная система с вынужденной частотой колебаний $\theta = 1.2\omega_1$ (рад/с), см. рис. 3.10.

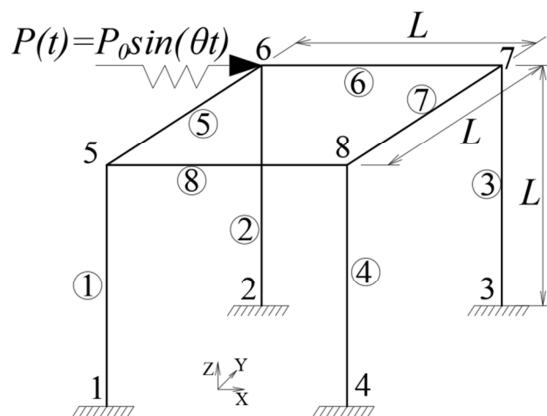


Рисунок 3.10. Пространственная рама, 8 стержней

Исходные данные: модуль упругости $E = 26.69 \times 10^7$ (кН/м²); коэффициент Пуассона $\nu = 0.2$; длина стержня $L = 1$ (м); размеры поперечного сечения стержней: ширина $b = 0.3$ (м); высота $h = 0.3$ (м); величина амплитуды $P_0 = 800$ (кН); плотность $\rho = 2500$ (кг/м³).

Первые пять собственных частот: $\omega_1 = 355.32, \omega_2 = 458.83, \omega_3 = 793.82, \omega_4 = 1288.24, \omega_5 = 1457.39$ (Гц).

Период колебаний для первой моды колебаний: $T_1 = \frac{2\pi}{\omega_1} \approx 0.002814$ (с). В этом примере значения внутренних усилий получены для двух временных шагов 0.0002814(с) и 0.0004691(с).

Результаты решения динамической задачи методом перемещений с помощью разложения по собственным формам колебаний (СФК) в программном комплексе SCAD приведены в таблице 3.17 (коэффициент неупругого сопротивления 0.00001).

Таблица 3.17

Изгибающие моменты в сечениях 1 и 5 элемента 1 (Нм)

МКЭП		Количество собственных форм колебаний (СФК)					
		5СФК	10СФК	15СФК	20СФК	25СФК	
Количество конечных элементов	8КЭ	M _{1y}	629995.10	638633.20	626068.00	626245.00	-
		M _{5y}	529557.10	557496.00	528517.00	528550.30	-
	16КЭ	M _{1y}	718423.44	712225.50	718404.81	719882.19	720512.94
		M _{5y}	486143.41	486399.66	489437.84	483637.84	483378.63
	24КЭ	M _{1y}	729066.94	722358.00	728651.19	729709.56	722627.81
		M _{5y}	484414.84	485032.63	488360.63	482664.69	489539.94
	32КЭ	M _{1y}	733251.81	737144.63	737144.63	734266.38	733165.69
		M _{5y}	484314.06	484760.56	484760.56	483317.31	487078.09
	40КЭ	M _{1y}	735877.50	740649.38	740649.38	736061.00	735988.38
		M _{5y}	484675.53	484429.47	484429.47	484292.09	487355.81

Продолжение таблицы 3.17

Изгибающие моменты в сечениях 1 и 5 элемента 1 (Нм)

SCAD		Количество собственных форм колебаний (СФК)				
		30СФК	35СФК	40СФК	45СФК	50СФК
Количество конечных элементов	8КЭ	M_{1y}	-	-	-	-
		M_{5y}	-	-	-	-
	16КЭ	M_{1y}	-	-	-	-
		M_{5y}	-	-	-	-
	24КЭ	M_{1y}	728005.19	726763.06	728569.44	727889.06
		M_{5y}	486429.06	486640.34	486678.13	486960.59
	32КЭ	M_{1y}	732037.00	732037.00	731408.19	731408.19
		M_{5y}	486785.97	486785.97	486225.06	486225.06
	40КЭ	M_{1y}	734808.69	735636.00	735636.00	735636.00
		M_{5y}	487098.25	487769.31	487769.31	487769.31

В таблице 3.17 показаны результаты внутренних усилий, соответствующие 50 СФК и 40 КЭ, которые можно считать точными результатами.

Результаты решения динамической задачи методом конечных элементов в усилиях (МКЭУ) приведены в таблицах 3.18 и 3.19.

Таблица 3.18

Изгибающие моменты в сечениях 1 и 5 элемента 1

№	t (с)	P(t) (Н)	M _{1y} (Нм)	M _{5y} (Нм)
1	0.0004691	839430.64	0.0055	0.0035
2	0.0009382	518623.43	149516.75	94959.71
3	0.0014073	-519010.77	-240852.29	-152967.90
4	0.0018764	-839282.61	-220720.77	-140182.15
5	0.0023455	478.79	371066.70	235668.48
...	...	...	...	...
9	0.0042219	-839134.34	230977.87	146696.55
10	0.0046910	957.59	742228.30	471397.23
11	0.0051601	839725.96	14284.74	9072.39
12	0.0056292	517848.30	-745792.19	-473660.70
13	0.0060983	-519784.98	-500324.61	-317761.58
14	0.0065674	-838985.81	427259.81	271357.33
15	0.0070365	1436.38	764297.68	485413.74
16	0.0075056	839873.25	44944.69	28544.86
17	0.0079747	517460.50	-736529.59	-467777.92
18	0.0084438	-520171.86	-499993.29	-317551.16
...	...	...	...	...
27	0.0126657	-736839.41	-467974.69	516684.46
28	0.0131348	-499330.22	-317130.03	-520945.15
29	0.0136039	428339.22	272042.88	-838538.76
30	0.014073	763970.18	485205.74	2872.75
31	0.0145421	43662.95	27730.81	840313.63
MAX =			764297.68	485413.74
MIN =			-745792.19	-473660.70

Примечание: результаты получены МКЭУ с шагом $\Delta t = 0.0004691$ (с).

На рисунке 3.11 приведены графики изменения изгибающих моментов в сечениях 1 и 5 элемента 1 пространственной рамы при действии гармонической возмущающей силы с частотой $\theta = 1.2\omega_1$. Показаны результаты на интервале времени от 0 (с) до $5T$ (с) с шагом $\Delta t = 0.0004691$ (с).

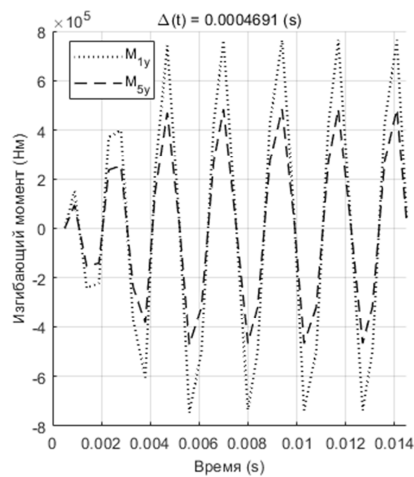
Рисунок 3.11. Графики изгибающих моментов M_{1y} и M_{5y}

Таблица 3.19

Изгибающие моменты в сечениях 1 и 5 элемента 1

№	t (с)	P(t) (Н)	M_{1y} (Нм)	M_{5y} (Нм)
1	0.0002814	604118.71	-0.0104	-0.0066
2	0.0005628	880846.28	-56511.22	-35890.89
3	0.0008442	680215.23	89346.60	56745.00
4	0.0011256	110953.92	141156.17	89649.81
5	0.001407	-518436.85	1798.20	1142.06
...	...	...	...	...
24	0.0067536	-605655.55	424924.14	269873.92
25	0.0070350	-2110.42	-121572.60	-77212.07
26	0.0073164	602578.42	-602185.30	-382454.40
27	0.0075978	880710.84	-756454.73	-480432.59
28	0.0078792	681558.05	-500777.41	-318049.16
29	0.0081606	113047.28	26287.03	16695.18
30	0.0084420	-516727.41	539105.70	342391.87
31	0.0087234	-866471.08	759765.93	482535.57
32	0.0090048	-746646.52	568684.97	361177.98
33	0.0092862	-222190.46	69415.63	44086.62
34	0.0095676	422677.68	-467472.24	-296896.68
...	...	...	...	...
45	0.012663	521846.82	-343952.42	-218447.91
46	0.0129444	-106765.32	213183.13	135394.91
47	0.0132258	-677517.94	654788.00	415862.95
48	0.0135072	-881102.04	741542.53	470961.69
49	0.0137886	-607188.92	426431.71	270831.40
MAX =			759765.93	482535.57
MIN =			-756454.73	-480432.59

Примечание: результаты получены МКЭУ с шагом $\Delta t = 0.0002814$ (с).

На рисунке 3.12 приведены графики изменения изгибающих моментов в сечениях 1 и 5 элемента 1 пространственной рамы при действии гармонической

возмущающей силы с частотой $\theta = 1.2\omega_1$. Показаны результаты на интервале времени от 0 (с) до 5T (с) с шагом $\Delta t = 0.0002814$ (с).

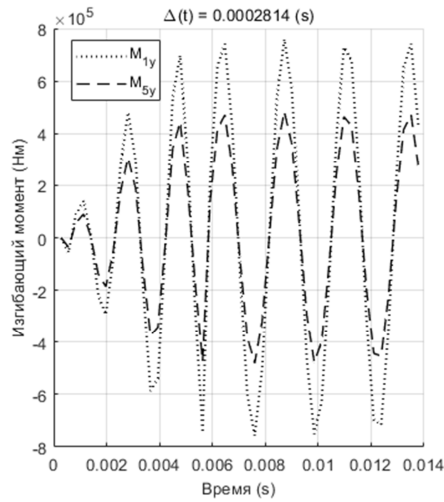


Рисунок 3.12. Графики изгибающих моментов M_{1y} и M_{5y}

Таблица 3.20

Сравнение результатов

Изгибающие моменты (Нм)		Методы			Точное решение
		МКЭУ (8КЭ)	МКЭП (8КЭ, 5СФК)	МКЭП (16КЭ, 10СФК)	
Подход 1	M_{1y}	720523.42 2.05 %			
Подход 2	Временной шаг Δt	0.0004691(с)	629995.1 14.4 %	712225.50 3.18 %	735636.00
		0.0002814(с)			
		$M_{1y\max}$			
		764297.68 3.90 %			
		759765.93 3.28 %			
Подход 1	M_{5y}	489286.64 0.31 %			
Подход 2	Временной шаг Δt	0.0004691(с)	529557.1 8.57 %	486399.66 0.28 %	487769.31
		0.0002814(с)			
		$M_{5y\max}$			
		485413.74 0.48 %			
		482535.57 1.07 %			

Таблица 3.20 показывает, что различия в результатах МКЭУ при использовании временных шагов $\Delta t = 0.0004691$ (с) и 0.0002814 (с) незначительна и составляет около 0.16%. Максимальная погрешность между результатом МКЭУ и точным результатом для подхода 1 составляет 2.05%, а для подхода 2 – 3.90%.

При использовании того же количества конечных элементов (например, 8 КЭ) МКЭУ по-прежнему дает достаточно точные результаты (так наибольшая

погрешность составляет 3.90%), а наибольшая погрешность для МКЭП составляет 14.4%.

3.8. Постановка в усилиях задач расчета на сейсмическое воздействие

Рассмотрим классическую постановку задачи расчета стержня на вертикальное сейсмическое воздействие (рис.3.13).

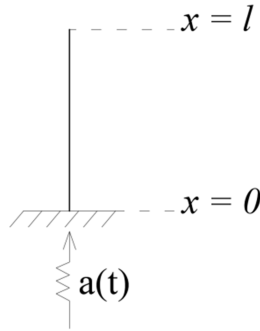


Рисунок 3.13. Расчетная схема при вертикальном сейсмическом воздействии

Стержень с линейной плотностью ρ (кг/м) заделан в основание, вертикальные колебания которого заданы акселерограммой $a(t)$, (м/с²).

Уравнение движения:

$$N' - \rho g = \rho \ddot{U}. \quad (3.62)$$

Закон Гука:

$$N = EA U'. \quad (3.63)$$

Начальные условия:

$$t = 0: \begin{cases} U(x, 0) = 0, \\ \dot{U}(x, 0) = 0. \end{cases} \quad (3.64)$$

$$(3.65)$$

Граничные условия:

$$x = 0: U(0, t) = v(t); \quad (3.66)$$

$$x = l: EA U'(l, t) = 0, \quad (3.67)$$

где $U(x, t)$ – продольные перемещения, $N(x, t)$ – продольное усилие, g – ускорение свободного падения, EA – жесткость стержня на растяжение, $v(t)$ – перемещения основания, соответствующие ускорению $a(t)$.

При стандартной постановке задачи делается замена искомой функции:

$$U(x, t) = v(t) + u(x, t), \quad (3.68)$$

где $u(x, t)$ – новая искомая функция, $v(t)$ – любая функция, удовлетворяющая условиям:

$$v(0) = 0, \dot{v}(0) = 0, \quad (3.69)$$

$$\ddot{v}(t) = a(t). \quad (3.70)$$

Подстановка (3.68) в условия (3.62) – (3.67) приводит к задаче:

$$\begin{cases} N' - \rho g - \rho a = \rho \ddot{u}, \\ N = EAu', \end{cases} \quad (3.71)$$

$$t = 0: \begin{cases} u(x, 0) = 0, \\ \dot{u}(x, 0) = 0, \end{cases} \quad (3.72)$$

$$\begin{aligned} x = 0: & \begin{cases} u(0, t) = 0, \\ EAu'(l, t) = 0. \end{cases} \end{aligned} \quad (3.73)$$

Таким образом, при стандартной постановке задачи появляется дополнительная инерционная распределенная нагрузка ρa . При численном решении задач методом конечных элементов это приводит к необходимости задания дополнительных инерционных нагрузок во всех узлах конечно-элементной схемы.

Сформулируем постановку задачи (3.71)-(3.73) в усилиях, при этом ограничимся случаем $\rho = const., EA = const.$ Продифференцируем по x первое уравнение (3.71) и используем второе уравнение (3.71). Так как $\rho' = 0, a' = 0$, получим

$$\frac{1}{\rho} N'' = \frac{1}{EA} \ddot{N}. \quad (3.74)$$

Из первого условия (3.73) следует $\ddot{u}(0, t) = 0$, тогда, положив в первом уравнении (3.71) $x = 0$, получим граничное условие:

$$x = 0: N'(0, t) = \rho(g + a(t)). \quad (3.75)$$

Второе граничное условие – это условие (3.73):

$$x = l: N(l, t) = 0. \quad (3.76)$$

Дифференцируя по x начальные условия (3.72), получим начальные условия для функции $N(x, t)$:

$$t = 0: \begin{cases} N(x, 0) = 0, \\ \dot{N}(x, 0) = 0. \end{cases} \quad (3.77)$$

Дифференциальное уравнение (3.74) с граничными условиями (3.75), (3.76) и начальными условиями (3.77) представляют собой постановку в усилиях для задач расчета на вертикальное сейсмическое воздействие. В отличие от классической постановки в перемещениях здесь дополнительных распределенных инерционных нагрузок не появляется. Сейсмическое ускорение $a(t)$ необходимо учитывать только в точке $x = 0$, примыкающей к основанию.

Функционал для вариационной формулировки задачи (3.74) - (3.77):

$$L(N) = \int_0^t \int_0^l \left(\frac{1}{2} \frac{1}{EA} \dot{N}^2 - \frac{1}{2} \frac{1}{\rho} N'^2 + N' g \right) dx dt - \int_0^t N(0, t) a(t) dt. \quad (3.78)$$

Соответствующая вариационная задача может быть кратко записана следующим образом:

$$\begin{aligned} L(N) &\rightarrow \text{стац.}, \\ x = l: N(l, t) &= 0, \\ t = 0: \begin{cases} N(x, 0) = 0, \\ \dot{N}(x, 0) = 0. \end{cases} \end{aligned} \quad (3.79)$$

Граничное условие (3.75) является естественным для вариационной задачи (3.79).

Рассмотрим классическую постановку задачи расчета стержня на горизонтальное сейсмическое воздействие (рис.3.14).

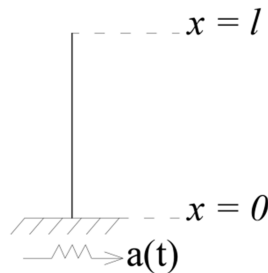


Рисунок 3.14. Расчетная схема при горизонтальном сейсмическом воздействии

Стержень с линейной плотностью ρ заделан в основание, горизонтальные колебания которого заданы акселерограммой $a(t)$.

Обозначим $v(t)$ – сейсмограмму, соответствующую акселерограмме $a(t)$:

$$\ddot{v}(t) = a(t), \quad (3.80)$$

$$v(0) = 0, \dot{v}(0) = 0.$$

Уравнение движения:

$$\begin{cases} M'' = \rho \ddot{U}, \\ M = -kU', \end{cases} \quad (3.81)$$

$$(3.82)$$

где $M(x, t)$ – изгибающий момент, $U(x, t)$ – перемещение (прогиб) стержня, $k = EI$ – изгибная жесткость.

Граничные условия:

$$x = 0: \begin{cases} U(0, t) = v(t), \\ U'(0, t) = 0, \end{cases} \quad (3.83)$$

$$x = l: \begin{cases} -kU''(l, t) = 0, \\ -kU'''(l, t) = 0. \end{cases} \quad (3.84)$$

Начальные условия:

$$t = 0: \begin{cases} U(x, 0) = 0, \\ \dot{U}(x, 0) = 0. \end{cases} \quad (3.85)$$

В классической постановке задачи расчета на сейсмическое воздействие в уравнениях (3.81) – (3.85) делается замена искомой функции:

$$U(x, t) = v(t) + u(x, t), \quad (3.86)$$

где $u(x, t)$ – новая искомая функция.

Подставляя (3.86) в (3.81) – (3.85) и учитывая условия (3.80), получаем

$$\begin{cases} M'' - \rho a = \rho \ddot{u}, \\ M = -ku', \end{cases} \quad (3.87)$$

$$x = 0: \begin{cases} u(0, t) = 0, \\ u'(0, t) = 0, \end{cases} \quad (3.88)$$

$$(3.89)$$

$$x = l: \begin{cases} -ku''(l, t) = 0, \\ -ku'''(l, t) = 0, \end{cases} \quad (3.90)$$

$$t = 0: \begin{cases} u(x, 0) = 0, \\ \dot{u}(x, 0) = 0, \end{cases} \quad (3.91)$$

Как видно, в классической постановке задачи появляется дополнительная инерционная распределенная нагрузка ρa . Как отмечалось, это приводит при решении задачи методом конечных элементов к необходимости задавать

дополнительную инерционную нагрузку во всех узлах конечно-элементной схемы.

Сформулируем задачу (3.87) - (3.91) в усилиях. Дважды дифференцируя первое уравнение (3.87) и используя второе уравнение, получим уравнение для функции $M(x, t)$:

$$\frac{1}{\rho} M^{IV} + \frac{1}{k} \ddot{M} = 0. \quad (3.92)$$

Дифференцируя два раза начальные условия (3.91), получим начальные условия:

$$t = 0: \begin{cases} M(x, 0) = 0, \\ \dot{M}(x, 0) = 0. \end{cases} \quad (3.93)$$

Граничные условия в точке $x = l$ – это условия (3.84), записанные для $M(x, t)$:

$$x = l: \begin{cases} M(l, t) = 0, \\ M'(l, t) = 0. \end{cases} \quad (3.94)$$

Потребуем выполнения первого уравнения (3.87) в точке $x = 0$. Так как из условия (3.88) следует, что $\ddot{u}(0, t) = 0$, то из (3.87) получим

$$x = 0: M''(0, t) = \rho a(t). \quad (3.95)$$

Продифференцируем первое уравнение (3.88) по x и положим $x = 0$. Так как $a' = 0$, а из условия (3.89) следует $\ddot{u}'(0, t) = 0$, то получим

$$x = 0: M'''(0, t) = 0. \quad (3.96)$$

Окончательно запишем граничные условия для постановки в усилиях в точке $x = 0$:

$$x = 0: \begin{cases} M''(0, t) = \rho a(t), \\ M'''(0, t) = 0. \end{cases} \quad (3.97)$$

Уравнение (3.92) с начальными условиями (3.93) и граничными условиями (3.94), (3.97) и представляют собой постановку в усилиях для задачи расчета на горизонтальное сейсмическое воздействие. В отличие от классической постановки здесь нет дополнительной инерционной распределённой нагрузки. Сейсмическое ускорение $a(t)$ необходимо учитывать только в точке $x = 0$, примыкающей к основанию.

Функционал для вариационной постановки задачи (3.92) - (3.97) выглядит так:

$$L(M) = \int_0^t \int_0^l \left(\frac{1}{2} \frac{1}{k} \dot{M}^2 - \frac{1}{2} \frac{1}{\rho} M'^2 \right) dx dt + \int_0^t M'(0, t) a(t) dt. \quad (3.98)$$

Соответствующая вариационная постановка задачи может быть записана следующим образом:

$$\begin{aligned} L(M) &\rightarrow \text{стац.}, \\ x = l: \quad &\begin{cases} M(l, t) = 0, \\ M'(l, t) = 0, \end{cases} \\ t = 0: \quad &\begin{cases} M(x, 0) = 0, \\ \dot{M}(x, 0) = 0. \end{cases} \end{aligned} \quad (3.99)$$

Граничные условия (3.97) являются естественными граничными условиями для вариационной задачи (3.99).

3.9. Учет демпфирования при постановке и решении задач динамики в усилиях

Для анализа способов задания демпфирования вид внешних воздействий не играет роли, поэтому можно ограничиться рассмотрением уравнения свободных колебаний:

$$M\ddot{U} + C\dot{U} + KU = 0. \quad (3.100)$$

Для того, чтобы можно было воспользоваться методом разложения по собственным формам колебаний, Рэлей предложил использовать матрицу демпфирования в виде [93, 94]:

$$C = \alpha M + \beta K, \quad (3.101)$$

где α, β – числовые коэффициенты.

Способы задания конкретных значений коэффициентов α и β рассмотрены ниже.

С использованием представления (3.101) система уравнений (3.100) может быть представлена в виде n несвязанных уравнений, которые можно записать в виде

$$M_k \ddot{\eta}_k + (\alpha + \beta \omega_k^2) M_k \dot{\eta}_k + K_k \eta_k = 0, \quad (3.102)$$

где функции $\eta_k(t)$ – коэффициенты разложения перемещений $U(t)$ по формам колебаний $\phi_k(n \times 1)$:

$$U(t) = \sum_{k=1}^n \phi_k \eta_k(t), \quad (3.103)$$

формы колебаний ϕ_k и собственные частоты ω_k определяются из уравнения собственных колебаний недемпфированной системы:

$$(K - \omega_k^2 M) \phi_k = 0. \quad (3.104)$$

В уравнении (3.102) коэффициенты M_k и K_k определяются с учетом ортогональности собственных форм колебаний:

$$\begin{aligned} \phi_i^T M \phi_j &= \begin{cases} 0, & i \neq j, \\ M_i, & i = j, \end{cases} \\ \phi_i^T K \phi_j &= \begin{cases} 0, & i \neq j, \\ K_i = \omega_i^2 M_i, & i = j. \end{cases} \end{aligned} \quad (3.105)$$

При решении динамических задач демпфирование удобно задавать в виде коэффициента демпфирования ξ , определяемого в долях от критического значения $\xi_{кр} = 1$. При таком задании уравнение колебаний системы с одной степенью свободы можно записать в виде [93-94]:

$$\ddot{u} + 2\xi\omega\dot{u} + \omega^2 u = 0, \quad (3.106)$$

где $u(t)$ – перемещение, ω - собственная частота без учета демпфирования.

С учётом (3.105) уравнение (3.102) можно записать в виде:

$$\ddot{\eta}_k + (\alpha + \beta \omega_k^2) \dot{\eta}_k + \omega_k^2 \eta_k = 0. \quad (3.107)$$

Сопоставляя уравнения (3.106) и (3.107), придем к выводу, что модальный коэффициент демпфирования ξ_k должен удовлетворять уравнению $2\xi_k \omega_k = \alpha + \beta \omega_k^2$, откуда

$$\xi_k = \frac{1}{2} \left(\frac{\alpha}{\omega_k} + \beta \omega_k \right). \quad (3.108)$$

На основе формулы (3.108) определяются конкретные значения коэффициентов α и β .

Перейдѣт к рассмотрению постановки в усилиях. После учета условий закрепления матрица жѣсткости K в уравнении (3.100) будет невырожденной. Тогда, введя обозначение усилий $F = KU$, получим

$$\dot{U} = K^{-1}\dot{F}, \ddot{U} = K^{-1}\ddot{F}. \quad (3.109)$$

Подставим (3.109) в (3.100) и умножим слева на матрицу M^{-1} (матрица масс всегда невырожденная), получим

$$K^{-1}\ddot{F} + M^{-1}CK^{-1}\dot{F} + M^{-1}F = 0. \quad (3.110)$$

После подстановки выражения Рэлея (3.101) уравнение (3.110) примет вид

$$K^{-1}\ddot{F} + (\alpha K^{-1} + \beta M^{-1})\dot{F} + M^{-1}F = 0. \quad (3.111)$$

Отсюда получаем, что при постановке в усилиях задач динамики коэффициент α должен умножаться на матрицу податливости K^{-1} , а коэффициент β – на обратную матрицу масс M^{-1} . С учетом используемых в настоящей работе обозначений уравнение (3.111) будет записываться в виде:

$$V\ddot{F} + D\dot{F} + ZF = 0, \quad (3.112)$$

где матрица демпфирования D будет задаваться в виде

$$D = \alpha V + \beta Z. \quad (3.113)$$

Коэффициенты α и β в (3.113) будут определяться следующим образом. Допустим, что необходимо точно учесть в расчете заданные коэффициенты демпфирования: ξ_1 – для 1-ой формы колебаний и ξ_m – для m -ой формы колебаний ($m > 1$).

Тогда, согласно (3.108) коэффициенты α и β должны быть определены из следующей системы уравнений:

$$\begin{pmatrix} \xi_1 \\ \xi_m \end{pmatrix} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} \frac{1}{\omega_1} & \omega_1 \\ 1 & \omega_m \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \end{pmatrix}, \quad (3.114)$$

где ω_1, ω_m – соответствующие собственные частоты.

В этом случае модальные коэффициенты демпфирования ξ_k ($k = 2, 3, \dots, m - 1$) будут определяться следующим выражением

$$\xi_k = \frac{1}{2} \left(\frac{\alpha}{\omega_k} + \beta \omega_k \right). \quad (3.115)$$

3.10. Примеры расчета стержневых конструкций на сейсмическое воздействие

Пример1: Дана плоская система под сейсмической нагрузкой (см. рис.3.15) с заданной акселерограммой движения грунта $a(t)$, приведенной на рисунке 3.16.

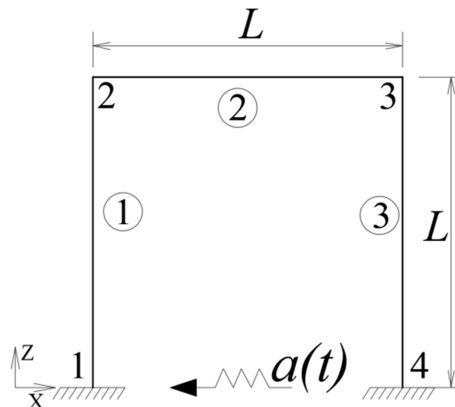


Рисунок 3.15. Плоская рама, 3 стержня

Исходные данные: модуль упругости $E = 26.69 \times 10^7$ (кН/м²); коэффициент Пуассона $\nu = 0.2$; длина стержня $L = 1$ (м); размеры поперечного сечения стержня: ширина $b = 0.4$ (м), высота $h = 0.4$ (м); плотность $\rho = 2500$ (кг/м³).

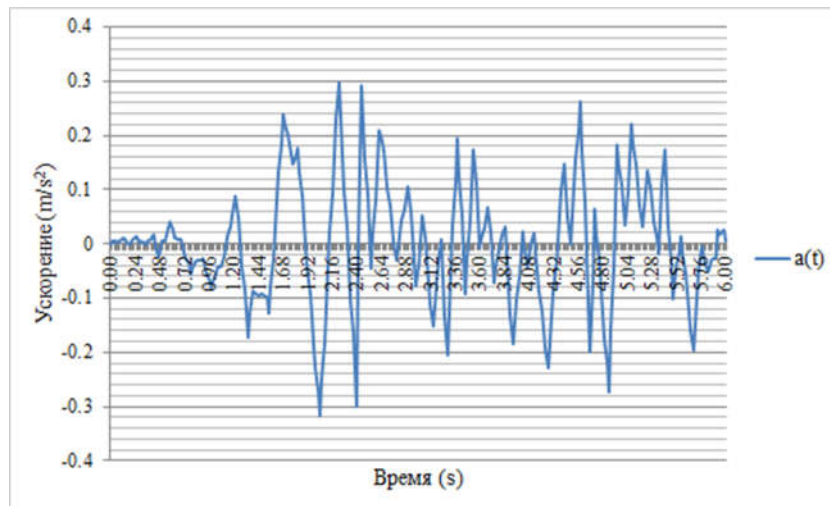


Рисунок 3.16. Сейсмическое воздействие в виде ускорений поверхности земли (Имперская долина, Калифорния, землетрясение 18 мая 1940 г.) [96]

Решение динамической задачи методом перемещений в программном комплексе SCAD с помощью прямого интегрирования уравнений движения

приведено в таблицах 3.21-3.23 (коэффициент модального демпфирования 0.0001).

Таблица 3.21

Изгибающие моменты в сечениях 1 и 2 элемента 1 (Нм)

МКЭП	Количество конечных элементов				
	3КЭ	6КЭ	9КЭ	12КЭ	15КЭ
$M_{1\max}$	-12788.41	-12872.77	-12875.15	-12875.86	-12876.18
$M_{2\max}$	27238.018	27379.911	27399.23	27405.97	27409.13

Продолжение таблицы 3.21

Изгибающие моменты в сечениях 1 и 2 элемента 1 (Нм)

МКЭП	Количество конечных элементов				
	18КЭ	21КЭ	24КЭ	27КЭ	30КЭ
$M_{1\max}$	-12876.36	-12876.47	-12876.54	-12876.58	-12876.62
$M_{2\max}$	27410.86	27411.91	27412.59	27413.06	27413.40

Примечание: результаты получены в программе SCAD с шагом $\Delta t = 0.02(c)$.

Таблица 3.22

Изгибающие моменты в сечениях 1 и 2 элемента 1 (Нм)

МКЭП	Количество конечных элементов				
	3КЭ	6КЭ	9КЭ	12КЭ	15КЭ
$M_{1\max}$	-12788.614	-12699.694	-12683.1	-12676.3	-12673.11
$M_{2\max}$	27237.796	27140.747	27127.75	27122.46	27119.941

Продолжение таблицы 3.22

Изгибающие моменты в сечениях 1 и 2 элемента 1 (Нм)

МКЭП	Количество конечных элементов				
	18КЭ	21КЭ	24КЭ	27КЭ	30КЭ
$M_{1\max}$	-12671.3	-12670.2	-12669.52	-12669	-12668.68
$M_{2\max}$	27118.56	27117.72	27117.172	27116.8	27116.528

Примечание: результаты получены в программе SCAD с шагом $\Delta t = 0.01(c)$.

Таблица 3.23

Изгибающие моменты в сечениях 1 и 2 элемента 1 с использованием 45 КЭ

МКЭП	Временной шаг Δt (с)				
	0.02	0.01	0.005	0.0025	0.00125
$M_{1\max}$ (Нм)	-12876.76	-12667.28	-12574.91	-12574.91	-12574.91
$M_{2\max}$ (Нм)	27414.75	27115.45	26847.64	26847.64	26847.64

В таблице 3.23 результаты внутренних усилий соответствуют 45 КЭ и временному шагу $\Delta t = 0.00125$ (с), и их значения можно считать точными результатами.

Решение динамической задачи методом конечных элементов в усилиях приведено в таблицах 3.24 и 3.25.

Таблица 3.24

Изгибающие моменты в сечениях 1 и 2 элемента 1

№	t (с)	a(t) (м/с ²)	M ₁ (Нм)	M ₂ (Нм)
1	0.00	0.0000	0.00000	0.00000
2	0.02	0.0063	-0.00014	0.00029
3	0.04	0.00364	0.00001	-0.00002
4	0.06	0.00099	0.00056	-0.00116
5	0.08	0.00428	-0.00144	0.00299
...	...	...	...	...
101	2.00	-0.22863	-9476.88	19728.31
102	2.02	-0.27372	10974.07	-22845.06
103	2.04	-0.31882	-12707.79	26454.19
104	2.06	-0.25024	9995.29	-20807.51
105	2.08	-0.18166	4708.38	-9801.59
...	...	...	...	...
243	4.84	-0.22369	6175.43	-12855.59
244	4.86	-0.27177	10906.48	-22704.35
245	4.88	-0.15851	12644.26	-26321.94
246	4.90	-0.04525	10911.85	-22715.53
247	4.92	0.06802	6184.71	-12874.90
...	...	...	...	...
299	5.96	0.02213	-11883.93	24739.14
300	5.98	0.02656	-8069.80	16799.16
MAX =			12644.26	26454.19
MIN =			-12707.79	-26321.94

Примечание: результаты получены с помощью МКЭУ с шагом $\Delta t = 0.02$ (с).

Таблица 3.25

Изгибающие моменты в сечениях 1 и 2 элемента 1

№	t (с)	a(t) (м/с ²)	M ₁ (Нм)	M ₂ (Нм)
1	0.00	0.0000	0.00000	0.00000
2	0.01	0.00315	-0.00064	-0.00131
3	0.02	0.0063	0.00085	0.00172
4	0.03	0.00497	-0.00100	-0.00202
5	0.04	0.00364	0.00073	0.00149
...	...	...	...	...
163	1.62	0.05474	8293.98	16850.72
164	1.63	0.13350	-4999.25	-10156.88
165	1.64	0.10725	-1166.91	-2370.79
166	1.65	0.18600	8036.06	16326.72
167	1.66	0.15975	-12698.39	-25799.08

168	1.67	0.23850	12647.47	26830.65
169	1.68	0.21225	12162.52	24710.36
170	1.69	0.21993	10829.29	22001.66
171	1.70	0.22922	8739.84	17756.57
172	1.71	0.20135	8293.98	16850.72
...	...	...	...	...
596	5.95	0.02213	11886.94	24150.48
597	5.96	0.01992	10340.45	21008.51
598	5.97	0.02656	8071.85	16399.43
599	5.98	0.02435	5239.61	10645.22
600	5.99	0.00419	2041.45	4147.59
MAX =			12647.47	26830.65
MIN =			-12698.39	-25799.08

Примечание: результаты получены с помощью МКЭУ с шагом $\Delta t = 0.01$ (с).

Таблица 3.26

Сравнение результатов

Изгибающие моменты (Нм)		Методы		Точное решение
		МКЭУ (3 КЭ)	МКЭП (45 КЭ)	
Временной шаг Δt	0.02 (с)	-12708	-12877	-12574.91
	$M_{1\max}$	1.1 %	2.4 %	
		-12698	-12667	
	0.01 (с)	0.98 %	0.73 %	
	0.02 (с)	26454	27415	26847.64
	$M_{2\max}$	1.47 %	2.1%	
		26831	27115	
	0.01 (с)	0.063 %	0.99 %	

Таблица 3.26 показывает, что различие в результатах МКЭУ при использовании временных шагов $\Delta t = 0.02$ (с) и 0.01 (с) незначительно и составляет около 1.40%. При этом метод конечных элементов в усилиях уже при минимальном количестве конечных элементов (3 КЭ) позволяет найти значения максимальных усилий с погрешностью меньше 2%. Метод конечных элементов в перемещениях дает погрешность меньше 2,5% при 45 конечных элементах.

Пример 2: Дана пространственная система под сейсмической нагрузкой (см. рис.3.17).

Исходные данные: модуль упругости $E = 26.69 \times 10^7$ (кН/м²); коэффициент Пуассона $\nu = 0.2$; длина стержня $L = 1$ (м); размеры поперечного сечения стержня: ширина $b = 0.3$ (м), высота $h = 0.3$ (м); удельный собственный вес $\rho = 2700$ (кг/м³).

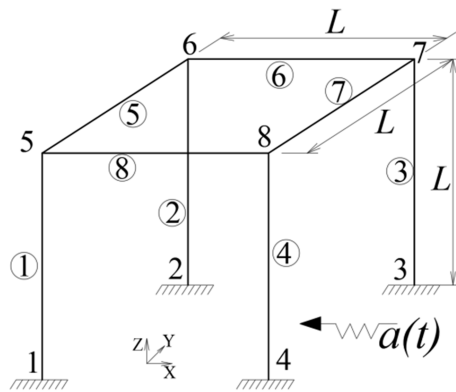


Рисунок 3.17. Пространственная рама, 8 стержней

Движение грунта задано акселерограммой $a(t)$, приведенной на рисунке 3.16.

Решение динамической задачи методом перемещений в программном комплексе SCAD с помощью прямого интегрирования уравнений движения приведено 3.27-3.29 (коэффициент модального демпфирования 0.0001).

Таблица 3.27

Изгибающие моменты в сечениях 1 и 5 элемента 1 (Нм)

МКЭП	Количество конечных элементов				
	8КЭ	16КЭ	24КЭ	32КЭ	40КЭ
$M_{1\max}$	-16068.09	-16127.81	-16132.46	-16134.01	-16134.72
$M_{5\max}$	33351.48	33437.2	33447.4	33450.99	33452.67

Продолжение таблицы 3.27

Изгибающие моменты в сечениях 1 и 5 элемента 1 (Нм)

МКЭП	Количество конечных элементов				
	48КЭ	56КЭ	64КЭ	72КЭ	80КЭ
$M_{1\max}$	-16135.12	-16135.35	-16135.51	-16135.61	-16135.69
$M_{5\max}$	33453.59	33454.15	33454.51	33454.76	33454.94

Примечание: результаты получены в программе SCAD с шагом $\Delta t = 0.02(c)$.

Таблица 3.28

Изгибающие моменты в сечениях 1 и 5 элемента 1 (Нм)

МКЭП	Количество конечных элементов				
	8КЭ	16КЭ	24КЭ	32КЭ	40КЭ
$M_{1\max}$	-16069.66	-16094.88	-16097.33	-16098.17	-16098.56
$M_{5\max}$	33352.45	33386.54	33390.51	33391.92	33392.59

Продолжение таблицы 3.28

Изгибающие моменты в сечениях 1 и 5 элемента 1 (Нм)

МКЭП	Количество конечных элементов				
	48КЭ	56КЭ	64КЭ	72КЭ	80КЭ
$M_{1\max}$	-16098.78	-16098.91	-16098.99	-16099.05	-16099.09
$M_{5\max}$	33392.95	33393.17	33393.32	33393.41	33393.48

Примечание: результаты получены в программе SCAD с шагом $\Delta t = 0.01(\text{с})$.

Таблица 3.29

Изгибающие моменты в сечениях 1 и 5 элемента 1 с использованием 120 КЭ

МКЭП	Временной шаг Δt (с)				
	0.02	0.01	0.005	0.0025	0.00125
$M_{1\max}$ (Нм)	-16135.87	-16099.19	-15867.95	-15867.95	-15867.95
$M_{5\max}$ (Нм)	33455.37	33393.65	32940.42	32940.42	32940.42

В таблице 3.29 результаты внутренних усилий соответствуют 120 КЭ и временному шагу $\Delta t = 0.00125$ (с), и их значения можно считать точными результатами.

Решение динамической задачи методом конечных элементов в усилиях приведено в таблицах 3.30 и 3.31.

Таблица 3.30

Изгибающие моменты в сечениях 1 и 5 элемента 1

№	t (с)	a(t) (м/с ²)	M_{1y} (Нм)	M_{5y} (Нм)
1	0.00	0.0000	0.00000	0.00000
2	0.02	0.0063	-0.00002	0.00004
3	0.04	0.00364	0.00006	-0.00012
4	0.06	0.00099	-0.00005	0.00011
5	0.08	0.00428	0.00001	-0.00003
...	...	...	...	...
97	1.92	-0.04824	-10998.24	23055.42
98	1.94	-0.09334	13227.21	-27727.97
99	1.96	-0.13843	-15907.92	33347.49
100	1.98	-0.18353	15516.84	-32527.67
101	2.00	-0.22863	10002.26	-20967.56
...	...	...	...	...
296	5.90	-0.02699	12462.09	-26124.06
297	5.92	0.02515	15907.89	-33347.42
298	5.94	0.0177	12502.60	-26208.97
299	5.96	0.02213	3712.78	-7783.03
300	5.98	0.02656	-6676.03	13994.85
MAX =			15907.89	33347.49
MIN =			-15907.92	-33347.42

Примечание: результаты получены с помощью МКЭУ с шагом $\Delta t = 0.02(\text{с})$.

Таблица 3.31

Изгибающие моменты в сечениях 1 и 5 элемента 1

№	t (с)	a(t) (м/с ²)	M_{1y} (Нм)	M_{5y} (Нм)
1	0.00	0.0000	0.00000	0.00000

2	0.01	0.00315	0.00009	-0.00019
3	0.02	0.0063	-0.00038	0.00079
4	0.03	0.00497	0.00070	-0.00148
5	0.04	0.00364	-0.00084	0.00175
...	...	...	...	...
197	1.96	-0.11589	-4651.65	9751.16
198	1.97	-0.18353	11771.17	-24675.68
199	1.98	-0.16098	-15891.73	33313.56
200	1.99	-0.22863	15501.05	-32494.57
201	2.00	-0.20608	-13493.66	28286.52
...	...	...	...	...
592	5.91	0.02515	12449.41	-26097.47
593	5.92	-0.00092	-15001.12	31446.57
594	5.93	0.0177	15891.70	-33313.48
595	5.94	0.021425	-15022.53	31491.47
596	5.95	0.02213	12489.87	-26182.29
...	...	...	...	...
599	5.98	0.024345	1566.87	-3284.60
600	5.99	0.00419	-6669.24	13980.60
MAX =			15891.70	33313.56
MIN =			-15891.73	-33313.48

Примечание: результаты получены с помощью МКЭУ с шагом $\Delta t = 0.01$ (с).

Таблица 3.32

Сравнение результатов, максимальные изгибающие моменты

		Методы		Точное решение
		МКЭУ (8 КЭ)	МКЭП (120 КЭ)	
Временной шаг Δt	0.02 (с)	-15908	-16136	-15868
		0.25 %	1.69 %	
	0.01 (с)	-15892	-16099	
		0.15 %	1.46 %	
	0.02 (с)	33347	33455	32940
		1.24 %	1.56 %	
	0.01 (с)	33314	33394	
		1.14 %	1.38 %	

Таблица 3.32 показывает, что различия в результатах МКЭУ при использовании временных шагов $\Delta t = 0.02$ (с) и 0.01 (с) незначительны и составляют около 0.10%. При этом метод конечных элементов в усилиях уже при минимальном количестве конечных элементов (8 КЭ) позволяет найти значения максимальных усилий с погрешностью меньше 2%. Метод конечных элементов в перемещениях дает такую же погрешность при 120 конечных элементах.

3.11. Выводы по главе 3

На основании результатов, полученных методом конечных элементов в усилиях (МКЭУ), и их сравнению с точными решениями и решениями, полученными методом конечных элементов в перемещениях (МКЭП) с использованием программного комплекса SCAD, можно сделать следующие выводы:

1. При вычислении собственных частот колебаний при одинаковом количестве степеней свободы погрешность результатов МКЭУ, как правило, незначительно меньше погрешности результатов МКЭП.
2. При решении задач о вынужденных колебаниях МКЭУ уже при небольшом количестве конечных элементов позволяет найти значения внутренних усилий с меньшей погрешностью по сравнению с МКЭП.

Глава 4. МЕТОД КОНЕЧНЫХ ЭЛЕМЕНТОВ В УСИЛИЯХ В ЗАДАЧАХ УСТОЙЧИВОСТИ

Оценка устойчивости зданий и сооружений и их конструктивных элементов при проектировании чрезвычайно важна, критическая нагрузка (или расчетные длины элементов) и формы потери устойчивости являются важными параметрами, которые необходимо учитывать. В настоящее время инженеры используют часто формулы устойчивости, рекомендованные в стандартах TCVN (Вьетнам) [95], SP (Россия) [96,97], EC (Евросоюз) [98,99], AISC (США) [100], поскольку они удобны и дают быстрые результаты, однако надежность этого подхода постоянно пересматривается и дополняется. В этой главе будут представлены постановки и решения задач устойчивости методом конечных элементов в усилиях (МКЭУ).

4.1. Постановка в усилиях задач устойчивости стержней

Рассмотрим классическую постановку задачи устойчивости для консольного стержня (рис.4.1), сжимаемого силой P [101 - 104]:

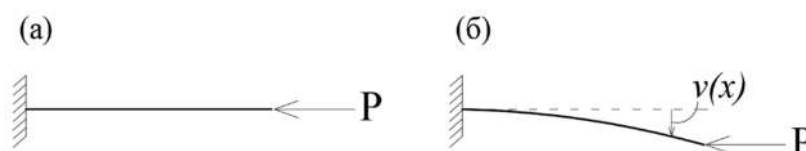


Рисунок 4.1. Задача устойчивости для консольного стержня: (а) недеформированное состояние, (б) деформированное состояние

В задаче устойчивости уравнения равновесия составляются для деформированного состояния (рис.4.1б).

Уравнения равновесия ($0 \leq x \leq l$):

$$Q' = 0, \quad (4.1)$$

$$M' - Q - Pv' = 0. \quad (4.2)$$

Физическое уравнение:

$$M = -kv'''. \quad (4.3)$$

Граничные условия:

$$x = 0: \begin{cases} v(0) = 0, \\ v'(0) = 0, \end{cases} \quad (4.4)$$

(4.5)

$$x = l: \begin{cases} M(l) = -kv''(l) = 0, \\ Q(l) = M'(l) - Pv'(l) = 0, \end{cases} \quad (4.6)$$

(4.7)

где $M(x)$ – изгибающий момент, $Q(x)$ – поперечная сила, $v(x)$ – перемещение (прогиб) стержня, $k = EI$ – изгибная жесткость.

В дальнейшем ограничимся случаем $k = \text{const}$.

Для получения уравнения относительно функции $M(x)$ выразим Q из уравнения (4.2), поставим в уравнение (4.1) и используем закон Гука (4.3). После двойного дифференцирования получим

$$M^{IV} + \frac{P}{k}M'' = 0. \quad (4.8)$$

Для уравнения (4.8) необходимо сформулировать четыре граничных условия. Одно условие повторяет условие (4.6):

$$M(l) = 0. \quad (4.9)$$

Потребуем выполнения при $x = l$ уравнения (4.1), выраженного через M :

$$M''(l) + \frac{P}{k}M(l) = 0,$$

откуда с учетом (4.9):

$$M''(l) = 0. \quad (4.10)$$

В точке $x = 0$ потребуем выполнения продифференцированного уравнения (4.1):

$$M'''(0) + \frac{P}{k}M'(0) = 0. \quad (4.11)$$

Последнее условие при $x = 0$ получим следующим образом. Согласно рис.1б должно выполняться равенство $Q(0) = 0$. Тогда из (4.2) и (4.5) получим

$$M'(0) = 0. \quad (4.12)$$

Уравнение (4.8) с граничными условиями (4.9) - (4.12) представляет собой постановку в усилиях задачи устойчивости стержня. В дальнейшем будет показано, что сформулированные граничные условия позволяют получить эквивалентную вариационную постановку задачи.

Для задачи устойчивости шарнирно опертого в точках $x = 0$ и $x = l$ стержня к уравнению (4.8) необходимо добавить следующие граничные условия:

$$\begin{aligned} x = 0: \quad & \begin{cases} M(0) = 0, \\ M''(0) = 0, \end{cases} \\ x = l: \quad & \begin{cases} M(l) = 0, \\ M''(l) = 0. \end{cases} \end{aligned} \quad (4.13)$$

4.2. Вариационная постановка в усилиях задач устойчивости стержней

Рассмотрим функционал:

$$L(M) = \int_0^l \left(\frac{1}{2} M'^2 - \frac{1}{2} \frac{P}{k} M^2 \right) dx. \quad (4.14)$$

Для задачи, приведенной на рис.4.1, сформулируем следующую вариационную задачу: найти функцию $M(x)$, дающую стационарное значение функционалу (4.14), из множества функций, удовлетворяющих главным граничным условиям (4.9) и (4.12). Поставленную вариационную задачу кратко будем записывать в виде:

$$\begin{cases} L(M) \rightarrow \text{стац.}, \\ M'(0) = 0; M(l) = 0. \end{cases} \quad (4.15)$$

Докажем эквивалентность задачи (4.15) и задачи (4.8) - (4.12). Вариация функционала (4.14) равна

$$\delta L = \int_0^l \left(M' \delta M' - \frac{P}{k} M \delta M \right) dx. \quad (4.16)$$

Первое слагаемое в (4.16) интегрируем по частям два раза, второе – один раз:

$$\begin{aligned} \delta L = & \int_0^l \left(M'' + \frac{P}{k} M \right) \delta M dx + M'(l) \delta M'(l) - M'(0) \delta M'(0) \\ & - \left[M'''(l) + \frac{P}{k} M'(l) \right] \delta M(l) + \left[M'''(0) + \frac{P}{k} M'(0) \right] \delta M(0). \end{aligned} \quad (4.17)$$

Учтём, что согласно главным граничным условиям из (4.15): $\delta M'(0) = 0$, $\delta M(l) = 0$. Тогда (4.17) принимает вид:

$$\delta L = \int_0^l \left(M^{IV} + \frac{P}{k} M'' \right) \delta M dx + M''(l) \delta M'(l) + \left[M'''(0) + \frac{P}{k} M'(0) \right] \delta M(0). \quad (4.18)$$

Из формулы (4.18) следует, что условие стационарности $\delta L = 0$ приводит к уравнению Эйлера (4.8) и естественным граничным условиям (4.10) и (4.11). Тем самым доказана эквивалентность вариационной задачи (4.15) и задачи (4.8) - 4.12). Для задачи устойчивости шарнирно опертого стержня главные граничные условия для функционала (4.14) имеют вид:

$$M(0) = M(l) = 0. \quad (4.19)$$

Тогда из выражения (4.17) при учете условий $\delta M(0) = \delta M(l) = 0$ следует, что условие стационарности $\delta L = 0$ приводим к уравнению (4.8) и естественным граничным условиям $M''(0) = M''(l) = 0$. Тем самым и здесь вариационная задача равносильна задаче (4.8), (4.13).

4.3. Численное решение задач устойчивости стержней в форме метода конечных элементов в усилиях

4.3.1. Реализация МКЭ в усилиях в задачах устойчивости

Рассмотрим конечный элемент-стержень, подвергнутый осевому сжатию, представленный на рисунке 4.2.

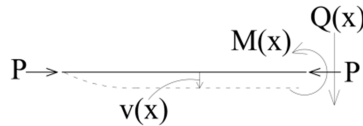


Рисунок 4.2. Свободный элемент-стержень

Как показано в предыдущем разделе вариационная постановка задачи основана на следующем функционале:

$$L(M) = \frac{1}{2} \int_0^{l_3} \left((M'')^2 - \frac{P}{EI} (M')^2 \right) dx. \quad (4.20)$$

Так как функционал содержит вторые производные функции $M(x)$, то необходимо использовать кубическую аппроксимацию [10,11]:

$$M(x) = Q_1 \mathcal{E}_1(x) + M_1 \mathcal{E}_2(x) + Q_2 \mathcal{E}_3(x) + M_2 \mathcal{E}_4(x), \quad (4.21)$$

где $\mathcal{E}_i(x)$ - многочлены Эрмита ($i = 1, 2, 3, 4$).

Выражение (4.21) можно представить в матричной форме:

$$M(x) = [\vartheta_1(x) \quad \vartheta_2(x) \quad \vartheta_3(x) \quad \vartheta_4(x)] \begin{Bmatrix} Q_i \\ M_i \end{Bmatrix} = HF, \quad (4.22)$$

где $H = [\vartheta_1(x) \quad \vartheta_2(x) \quad \vartheta_3(x) \quad \vartheta_4(x)]$ и $F = \{Q_i \quad M_i\}^T = \{Q_1 \quad M_1 \quad Q_2 \quad M_2\}^T$, где Q_i, M_i – узловые усилия конечного элемента.

Подставив выражение (4.22) в каждое слагаемое функционала (4.20), получим

$$\frac{1}{2} \int_0^{l_3} (M'')^2 dx = \frac{1}{2} \int_0^{l_3} F^T (H'')^T H'' F dx, \quad (4.23)$$

и

$$\frac{1}{2} \int_0^{l_3} \frac{P}{EI} (M')^2 dx = \frac{1}{2} \int_0^{l_3} \frac{P}{EI} F^T (H')^T H' F dx. \quad (4.24)$$

Из выражений (4.23) и (4.24) положив $Z = \int_0^{l_3} (H'')^T H'' dx$,

$$V = \int_0^{l_3} \frac{1}{EI} (H')^T H' dx,$$

получим $Z = \begin{bmatrix} \frac{12}{l_3^3} & \frac{6}{l_3^2} & \frac{-12}{l_3^3} & \frac{6}{l_3^2} \\ & \frac{4}{l_3} & \frac{-6}{l_3^2} & \frac{2}{l_3} \\ (сим.) & & \frac{12}{l_3^3} & \frac{-6}{l_3^2} \\ & & & \frac{4}{l_3} \end{bmatrix}$ и $V = \frac{1}{EI} \begin{bmatrix} \frac{6}{5l_3} & \frac{1}{10} & \frac{-6}{5l_3} & \frac{1}{10} \\ & \frac{2l_3}{15} & \frac{-1}{10} & \frac{-l_3}{30} \\ (сим.) & & \frac{6}{5l_3} & \frac{-1}{10} \\ & & & \frac{2l_3}{15} \end{bmatrix}$.

Функционал (4.20) можно переписать в виде:

$$L(F) = \frac{1}{2} F^T Z F - \frac{1}{2} P F^T V F. \quad (4.25)$$

Уравнение устойчивости получим из условия стационарности функционала (4.25):

$$ZF - PVF = 0, \quad (4.26)$$

или

$$(Z - PV)F = 0. \quad (4.27)$$

Значение критической силы P определяется из условия обращения в нуль определителя системы (4.27):

$$|Z - PV| = 0. \quad (4.28)$$

4.3.2. Примеры решения задач устойчивости для отдельного стержня

Приведем результаты определения критической нагрузки на стержень при различных граничных условиях. Длина стержня $L = 2$ (м). Изгибная жесткость стержня равна $EI = 1.266$ (МНм²). Критические силы определяются путем использования от 1 до 20 конечных элементов для моделирования стержня (см. табл. 4.2).

Формулы точных значений критической силы стержня с различными граничными условиями представлены в таблице 4.1 [101 – 104].

Таблица 4.1

Формулы точных значений критической силы

Типы	Критическая сила	
1 консольный стержень	$P_n = \left(\frac{1 + 4nL}{2L} \pi \right)^2 EI,$	где $n = 0, 1, 2, \dots$
2 шарнирно-опертый стержень	$P_n = \left(\frac{1 + 2n}{L} \pi \right)^2 EI,$	где $n = 0, 1, 2, \dots$
3 стержень с закрепленным и шарнирно-опертым концами	$P_n = \left(\frac{tg b_n L}{L} \right)^2 EI,$	где $b_n = \sqrt{\frac{P}{EI}}.$
4 стержень с защемленными концами	$P_n = \left(\frac{2n\pi}{L} \right)^2 EI,$	где $n = 1, 2, \dots$

Необходимо выбрать наименьшее неотрицательное значение параметра n . Точные значения критической силы представлены в последнем столбце таблицы 4.2.

Для стержня с закрепленным и шарнирно-опертым концами точные значения критической силы получаются, из уравнения $b_n L = tg(b_n L)$. На рисунке 4.3

видно, что два графика функций y_1 и y_2 пересекаются в 4 точки в диапазоне $b_n L = [-12 \ 12]$. Соответствующие значения есть $-7.725; -4.493; 4.493; 7.725$. Выбираем наименьшее положительное значение $b_n L = 4.493$ (или $b_n = 2.247$) для первой формы потери устойчивости.

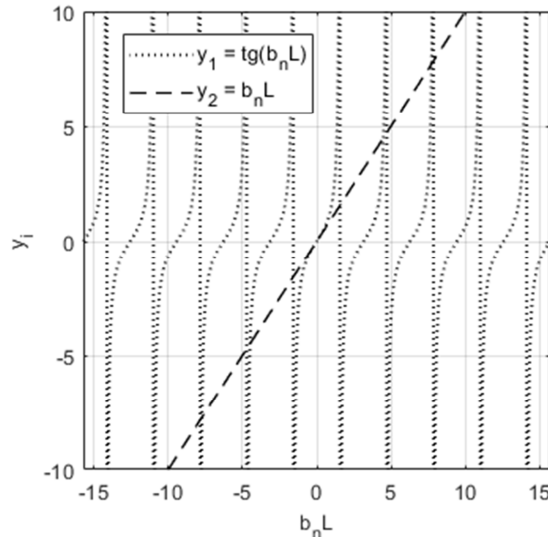


Рисунок 4.3. Графики функций y_1 и y_2 с переменной $b_n L$

Погрешность между численным и точным решениями вычисляется по формуле:

$\varepsilon_i = |z_i - z_{\text{точ.}}|/z_{\text{точ.}}$, здесь z_i - значения, полученные с помощью МКЭУ и МКЭП; $z_{\text{точ.}}$ - значения точных решений.

В таблице 4.2 решения, полученные с помощью разработанного метода конечных элементов в усилиях, сравниваются с решениями, полученными с помощью программного комплекса SCAD, где используются стандартные конечные элементы в перемещениях (МКЭП).

Таблица 4.2

Значения критических сил (МН)

Типы стержней	Количество конечных элементов					Точные решения
	1	5	10	15	20	
1	$P_{1(\text{МКЭУ})}$	0.787	0.781	0.781	0.781	0.781
	$\varepsilon_{1(\text{МКЭУ})}$	0.008	0.000	0.000	0.000	
	$P_{1(\text{МКЭП})}$	0.662	0.774	0.779	0.780	
	$\varepsilon_{1(\text{МКЭП})}$	0.152	0.009	0.003	0.001	
2	$P_{2(\text{МКЭУ})}$	3.797	3.123	3.123	3.123	3.123
	$\varepsilon_{2(\text{МКЭУ})}$	0.216	0.000	0.000	0.000	
	$P_{2(\text{МКЭП})}$	1.898	3.026	3.097	3.111	
	$\varepsilon_{2(\text{МКЭП})}$	0.392	0.031	0.008	0.004	

3	$P_{3(МКЭУ)}$	9.492	6.394	6.389	6.389	6.389	6.366
	$\varepsilon_{3(МКЭУ)}$	0.491	0.004	0.004	0.004	0.004	
	$P_{3(МКЭП)}$	3.845	6.005	6.284	6.341	6.362	
	$\varepsilon_{3(МКЭП)}$	0.396	0.057	0.013	0.004	0.001	
4	$P_{4(МКЭУ)}$	-	12.53	12.49	12.49	12.49	12.49
	$\varepsilon_{4(МКЭУ)}$	-	0.003	0.000	0.000	0.000	
	$P_{4(МКЭП)}$	-	11.15	12.10	12.31	12.39	
	$\varepsilon_{4(МКЭП)}$	-	0.107	0.031	0.014	0.008	

Из таблицы 4.2 можно сделать следующий вывод:

- результаты определения критической силы с использованием метода конечных элементов в усилиях очень близки к точным значениям при всех граничных условиях стержня. При использовании только 5 КЭ максимальная погрешность расчета критической силы $\varepsilon_{3(МКЭУ)} = 0.8\%$ (для стержня с закрепленным и шарнирно-опертым концами). При таком же количестве конечных элементов погрешность метода конечных элементов в перемещениях может достигать значения – $\varepsilon_{4(МКЭП)} = 10.7\%$ (для стержня с защемленными концами).

4.4. Расчет на устойчивость стержневых систем

Преобразование матриц Z_s^{pl} и V_s^{pl} в глобальную систему координат (см. рис.4.4) выполняется стандартным способом с помощью матриц направляющих косинусов R_i^{pl} .

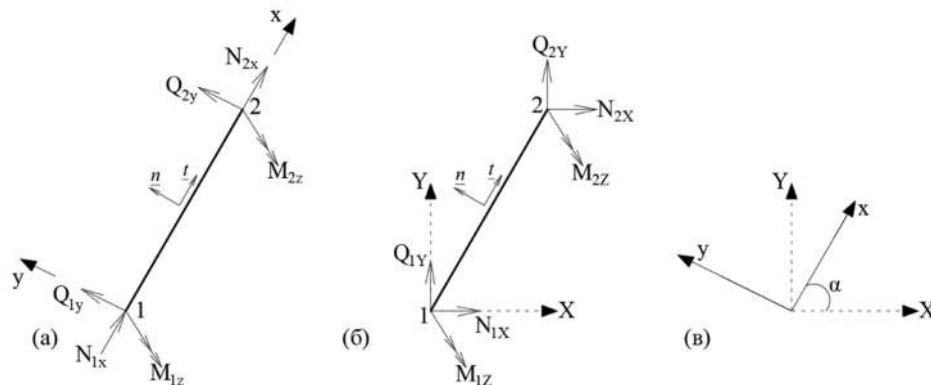


Рисунок 4.4. Элемент-стержень в плоскости: (а) внутренние усилия в локальных координатах; (б) внутренние усилия в глобальных координатах; (в) угол α между локальными и глобальными осями

Матрицы в локальных осях:

$$Z_{\circ}^{pl} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ & \frac{12}{l_{\circ}^3} & \frac{6}{l_{\circ}^2} & 0 & \frac{-12}{l_{\circ}^3} & \frac{6}{l_{\circ}^2} \\ & & \frac{4}{l_{\circ}} & 0 & \frac{-6}{l_{\circ}^2} & \frac{2}{l_{\circ}} \\ & & & 0 & 0 & 0 \\ (сим.) & & & & \frac{12}{l_{\circ}^3} & \frac{-6}{l_{\circ}^2} \\ & & & & & \frac{4}{l_{\circ}} \end{bmatrix}, V_{\circ}^{pl} = \begin{bmatrix} \frac{1}{l_{\circ}EA} & 0 & 0 & \frac{-1}{l_{\circ}EA} & 0 & 0 \\ & \frac{6}{5l_{\circ}EI} & \frac{1}{10EI} & 0 & \frac{-6}{5l_{\circ}EI} & \frac{1}{10EI} \\ & & \frac{2l_{\circ}}{15EI} & 0 & \frac{-1}{10EI} & \frac{-l_{\circ}}{30EI} \\ & & & \frac{1}{l_{\circ}EA} & 0 & 0 \\ & & & & \frac{6}{5l_{\circ}EI} & \frac{-1}{10EI} \\ (сим.) & & & & & \frac{2l_{\circ}}{15EI} \end{bmatrix}.$$

Преобразование узловых усилий выполняется по формуле

$$\{N_{1x} \quad Q_{1y} \quad M_{1z} \quad N_{2x} \quad Q_{2y} \quad M_{2z}\}^T = R^{pl} \{N_{1X} \quad Q_{1Y} \quad M_{1Z} \quad N_{2X} \quad Q_{2Y} \quad M_{2Z}\}^T, \text{ где}$$

$$R^{pl} = \begin{bmatrix} R_1^{pl} & \\ & R_2^{pl} \end{bmatrix}, \text{ и } R_i^{pl} = \begin{bmatrix} \cos \alpha & \sin \alpha & 0 \\ -\sin \alpha & \cos \alpha & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Матрицы в глобальных осях вычисляются по формулам: $Z^{pl} = (R^{pl})^{-1} Z_{\circ}^{pl} R^{pl}$,
 $V^{pl} = (R^{pl})^{-1} V_{\circ}^{pl} R^{pl}$.

4.4.1. Примеры расчета на устойчивость плоских рам

В данном примере использованы следующие данные (рис.4.5): модуль упругости $E = 2.7 \times 10^7$ (кН/м²), длина каждого стержня $L = 1$ (м), стержни имеют квадратное сечение с площадью $A = 156.25$ (см²).

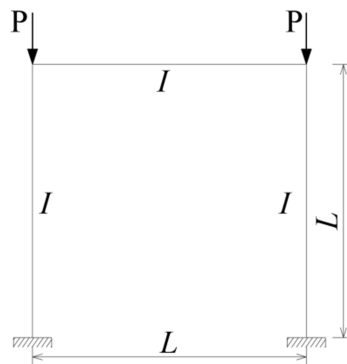


Рисунок 4.5. Рама портала

Значение коэффициента расчетной длины μ колонны можно рассчитать по формуле Свода Правил SP16 [96] (см. табл.4.3):

$$\mu_{SP16} = \sqrt{\frac{n + 0.56}{n + 0.14}}, \quad (4.29)$$

где $n = \frac{I_s L_c}{I_c L}$, I_s - момент инерции поперечного сечения горизонтального стержня; L - пролетной рамы; I_c и L_c - момент инерции поперечного сечения и длины колонны соответственно.

Таблица 4.3

Значения коэффициента расчетной длины μ

Значения	Методы					Точное решение
	МКЭУ		МКЭП		SP16	
	Количество конечных элементов					
	3 КЭ	6 КЭ	3 КЭ	6 КЭ		
μ	1.156	1.159	1.282	1.219	1.1698	1.161
ε	0.004	0.002	0.104	0.050	0.008	

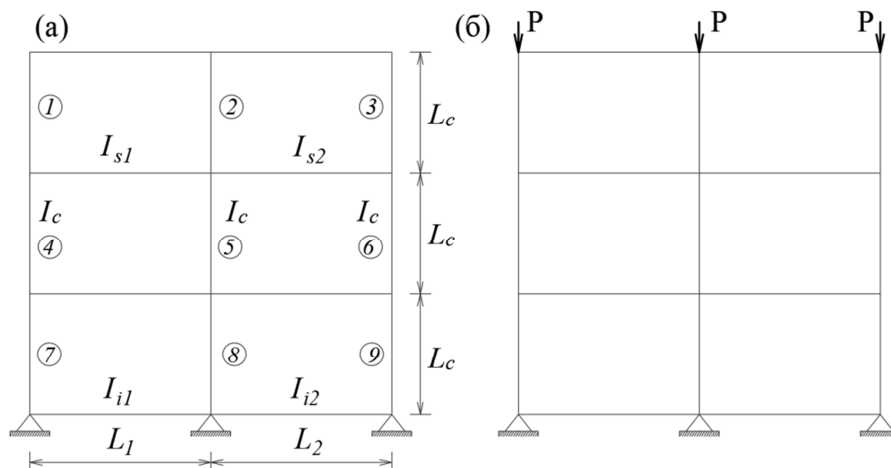
Примечание: точное решение получено программой SCAD с 60-ю КЭ (таблица 4.4).

Таблица 4.4

Значения коэффициента расчетной длины μ

Коэффициент	Количество конечных элементов						
	3 КЭ	6 КЭ	9 КЭ	12 КЭ	30 КЭ	51 КЭ	60 КЭ
μ	1.282	1.219	1.184	1.182	1.164	1.161	1.161

Следующий пример плоской системы показан на рисунке 4.6. Эта конструкция состоит из 17 стержней, все стержни имеют квадратное поперечное сечение и одинаковый модуль упругости $E = 2.7 \times 10^7$ (кН/м²). Площадь поперечного сечения всех стержней составляет 0.0625 (м²). Длина вертикальных стержней 4 (м) и горизонтальных стержней 6 (м).



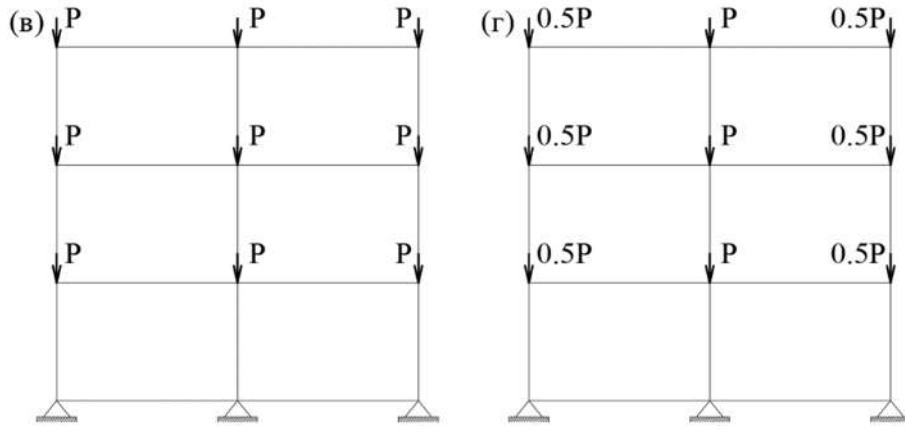


Рисунок 4.6. Трехэтажный каркас: (а) модель рамы; (б) вариант нагружения 1; (в) вариант нагружения 2; (г) вариант нагружения 3

Значение коэффициента расчетной длины μ колонны можно рассчитать по формуле SP16 [96] при $n > 2$:

$$\mu_{SP16} = \frac{(p + 0.63)\sqrt{n + 0.28}}{\sqrt{pn(p + 0.9) + 0.1n}}, \quad (4.30)$$

где $p = \frac{k(p_1+p_2)}{k+1}$, $n = \frac{2k(n_1+n_2)}{k+1}$ для верхнего этажа; $p = \frac{k(p_1+p_2)}{k+1}$, $n = \frac{k(n_1+n_2)}{k+1}$ для среднего этажа; $p = \frac{2k(p_1+p_2)}{k+1}$, $n = \frac{k(n_1+n_2)}{k+1}$ для первого этажа; и $p_1 = \frac{I_{i1}L_c}{I_cL_1}$, $p_2 = \frac{I_{i2}L_c}{I_cL_2}$, $n_1 = \frac{I_{s1}L_c}{I_cL_1}$, $n_2 = \frac{I_{s2}L_c}{I_cL_2}$.

Значение коэффициента расчетной длины для наружных колонн:

$$\mu_{SP16} = 2 \sqrt{1 + \frac{0.38}{n}}, \quad (4.31)$$

где $p = 0$ и $n = \frac{I_sL_c}{I_cL}$.

Значение коэффициента расчетной длины можно также рассчитать по формуле EC8 [99] (см. рис.4.7):

$$\mu_{EC8} = \sqrt{\frac{1 - 0.2(\eta_1 + \eta_2) - 0.12(\eta_1\eta_2)}{1 - 0.8(\eta_1 + \eta_2) + 0.6(\eta_1\eta_2)}}, \quad (4.32)$$

где $\eta_1 = \frac{K_c+K_1}{K_c+K_1+K_{11}+K_{12}}$, $\eta_2 = \frac{K_c+K_2}{K_c+K_2+K_{21}+K_{22}}$, $K_c = \frac{EI_c}{L_c}$, $K_i = \frac{EI_i}{L_i}$, $K_{ij} = \frac{EI_{ij}}{L_{ij}}$.

Значение коэффициента расчетной длины можно также рассчитать по формуле AISC360 [100] (см. рис.4.7):

$$\mu_{AISC360} = \sqrt{\frac{1.6\eta_1\eta_2 + 4(\eta_1 + \eta_2) + 1.75}{\eta_1 + \eta_2 + 7.5}}, \quad (4.33)$$

где $\eta_1 = \frac{K_c + K_1}{K_{11} + K_{12}}$, $\eta_2 = \frac{K_c + K_2}{K_{21} + K_{22}}$, $K_c = \frac{EI_c}{L_c}$, $K_i = \frac{EI_i}{L_i}$, $K_{ij} = \frac{EI_{ij}}{L_{ij}}$.

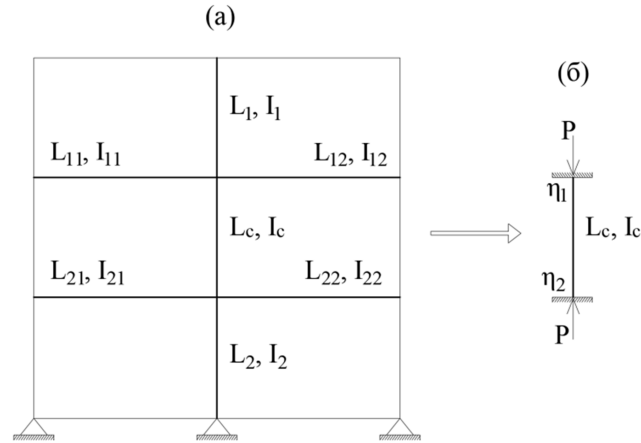


Рисунок 4.7. Модели расчета: (а) структурный каркас; (б) модель разделения колонн

Кроме того, по значению критической силы $P_{кр}$ в элементах можно найти коэффициент расчетной длины в колоннах несущего каркаса по следующей формуле:

$$\mu_{МКЭУ} = \frac{\pi}{L} \sqrt{\frac{EI}{P_{кр}}}. \quad (4.34)$$

Учитывая небольшую разницу критических сил между МКЭУ с 34 КЭ и МКЭП (SCAD) с 340 КЭ, которая составляет всего 0.11% для варианта 2, разумно использовать это значение критических сил для определения коэффициента расчетной длины.

Таблица 4.5

Значения критической силы (МН)

Методы		МКЭУ		МКЭП		Точное решение	
		количество конечных элементов					
		17КЭ	34КЭ	17КЭ	34КЭ		
Варианты	1	P ₁	2.342	2.159	2.188	2.173	2.158
		ε ₁	0.0853	0.0005	0.0139	0.0070	
	2	P ₂	0.895	0.890	0.891	0.890	0.889
		ε ₂	0.0067	0.0011	0.0022	0.0011	
	3	P ₃	1.329	1.326	1.333	1.328	1.325
		ε ₃	0.0030	0.0008	0.0060	0.0023	

Примечание: точные решения получены программой SCAD с 340 КЭ (таблица 4.6).

Таблица 4.6

Значения критической силы (МН)

Варианты	Количество конечных элементов					
	17КЭ	34КЭ	85КЭ	170КЭ	255КЭ	340КЭ
P ₁	2.1875	2.1725	2.1631	2.1585	2.1584	2.1584
P ₂	0.8906	0.8900	0.8896	0.8892	0.8892	0.8892
P ₃	1.3329	1.3284	1.3258	1.3249	1.3246	1.3246

Результаты представлены в таблице 4.7, здесь коэффициенты μ_1 , μ_2 и μ_3 определены с помощью МКЭУ по формуле (4.34) для вариантов 1, 2 и 3 (см. рис. 4.6 б, в и г). Значения для μ_{SP16} основаны на формулах (4.30) и (4.31). Значения μ_{EC8} и $\mu_{AISC360}$ рассчитаны по формулам (4.32) и (4.33) соответственно.

Таблица 4.7

Значения коэффициента расчетной длины для трехэтажного каркаса

Методы		$\mu_{МКЭУ}$			μ_{SP16}	$\mu_{AISC360}$	μ_{EC8}
Варианты		μ_1	μ_2	μ_3			
Порядковые номера стержней	1	1.584	2.469	2.861	2.506	1.499	1.886
	2	1.584	1.746	2.023	2.506	1.725	2.145
	3	1.584	1.425	1.652	2.506	1.499	1.886
	4	1.584	2.469	2.023	1.257	1.135	1.518
	5	1.584	1.746	1.430	1.340	1.285	1.673
	6	1.584	1.425	1.168	1.252	1.135	1.518
	7	1.584	2.469	2.861	2.506	1.499	1.886
	8	1.584	1.746	2.023	2.506	1.725	2.145
	9	1.584	1.425	1.652	2.506	1.499	1.886

Таблица 4.8

Относительные погрешности коэффициента расчетной длины

Погрешность		$ z_{МКЭУ} - z_{SP16} /z_{SP16}$			$ z_{МКЭУ} - z_{AISC360} /z_{AISC360}$			$ z_{МКЭУ} - z_{EC8} /z_{EC8}$		
Варианты		1	2	3	1	2	3	1	2	3
Порядковые номера стержней	1	0.368	0.015	0.142	0.057	0.647	0.909	0.160	0.309	0.517
	2	0.368	0.303	0.193	0.082	0.012	0.173	0.262	0.186	0.057
	3	0.368	0.431	0.341	0.057	0.049	0.102	0.160	0.244	0.124
	4	0.260	0.964	0.609	0.396	1.175	0.782	0.043	0.626	0.333
	5	0.182	0.303	0.067	0.233	0.359	0.113	0.053	0.044	0.145
	6	0.265	0.138	0.067	0.396	0.256	0.029	0.043	0.061	0.231
	7	0.368	0.015	0.142	0.057	0.647	0.909	0.160	0.309	0.517
	8	0.368	0.303	0.193	0.082	0.012	0.173	0.262	0.186	0.057
	9	0.368	0.431	0.341	0.057	0.049	0.102	0.160	0.244	0.124

Анализ результатов из таблицы 4.8 показывает, что

- наибольшие различия между коэффициентами, полученными из МКЭУ с различными нормами проектирования (SP16, AISC360, EC8), соответственно, составляют 36.8% (все колонны этажей 1 и 3), 39.6% (внешние колонны этажа 2), 26.2% (центральные колонны этажей 1 и 3) для варианта 1; 96.4%, 117.6%, 62.6% (колонна 4) для варианта 2; 60.9% (колонна 4), 90.9% (колонна 7), 51.7% (колонны 1 и 7) для варианта 3. При этом большие различия значений - для внешних колонн каркаса.

4.4.2. Пример расчета на устойчивость пространственной рамы

Преобразование матриц Z_9^{pl} и V_9^{pl} в глобальную систему координат выполняется стандартным способом с помощью матриц направляющих косинусов R_i^{pl} (см. рис.4.8).

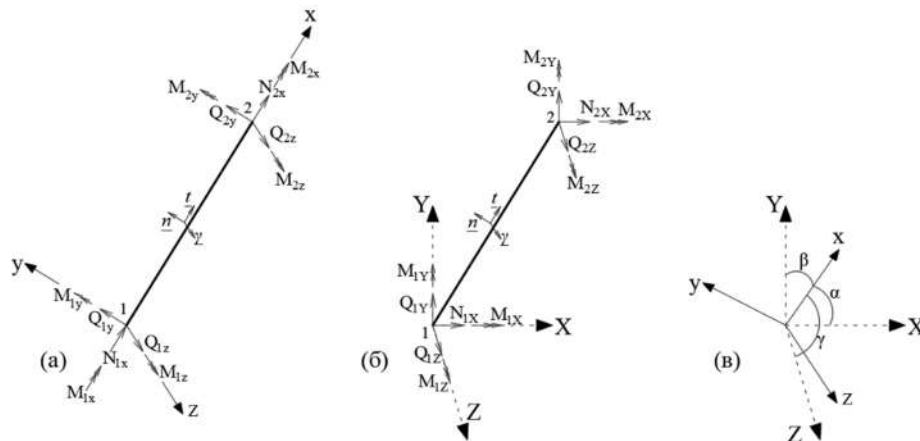


Рисунок 4.8. Элемент-стержень в пространстве: (а) внутренние усилия в локальных координатах; (б) внутренние усилия в глобальных координатах; (в) углы α , β , γ между локальными и глобальными осями

Матрицы в локальных осях:

$$Z_9^{sp} = \begin{bmatrix} Z_{11} & Z_{12} \\ Z_{12}^T & Z_{22} \end{bmatrix}, \quad V_9^{sp} = \begin{bmatrix} V_{11} & V_{12} \\ V_{12}^T & V_{22} \end{bmatrix}, \quad \text{где}$$

$$\begin{aligned}
Z_{11} &= \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ & \frac{12}{l_3^3} & 0 & 0 & 0 & \frac{6}{l_3^2} \\ & & \frac{12}{l_3^3} & 0 & \frac{-6}{l_3^2} & 0 \\ & & & 0 & 0 & 0 \\ & (сум.) & & & \frac{4}{l_3} & 0 \\ & & & & & \frac{4}{l_3} \end{bmatrix}; \quad V_{11} = \begin{bmatrix} \frac{1}{l_3 EA} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ & \frac{6}{5l_3 EI} & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{10EI} \\ & & \frac{6}{5l_3 EI} & 0 & \frac{-1}{10EI} & 0 \\ & & & \frac{1}{l_3 GJ} & 0 & 0 \\ & & & & \frac{2l_3}{15EI} & 0 \\ & (сум.) & & & & \frac{2l_3}{15EI} \end{bmatrix}; \\
Z_{12} &= \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ & \frac{-12}{l_3^3} & 0 & 0 & 0 & \frac{6}{l_3^2} \\ & & \frac{-12}{l_3^3} & 0 & \frac{-6}{l_3^2} & 0 \\ & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ & 0 & 0 & \frac{6}{l_3^2} & 0 & \frac{2}{l_3} \\ & 0 & \frac{-6}{l_3^2} & 0 & 0 & \frac{2}{l_3} \end{bmatrix}; \quad V_{12} = \begin{bmatrix} \frac{-1}{l_3 EA} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ & \frac{-6}{5l_3 EI} & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{10EI} \\ & & \frac{-6}{5l_3 EI} & 0 & \frac{-1}{10EI} & 0 \\ & 0 & 0 & \frac{-1}{l_3 GJ} & 0 & 0 \\ & 0 & 0 & \frac{1}{10EI} & 0 & \frac{-l_3}{30EI} \\ & 0 & \frac{-1}{10EI} & 0 & 0 & \frac{-l_3}{30EI} \end{bmatrix}; \\
Z_{22} &= \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ & \frac{12}{l_3^3} & 0 & 0 & 0 & \frac{-6}{l_3^2} \\ & & \frac{12}{l_3^3} & 0 & \frac{6}{l_3^2} & 0 \\ & & & 0 & 0 & 0 \\ & (сум.) & & & \frac{4}{l_3} & 0 \\ & & & & & \frac{4}{l_3} \end{bmatrix}; \quad V_{22} = \begin{bmatrix} \frac{1}{l_3 EA} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ & \frac{6}{5l_3 EI} & 0 & 0 & 0 & \frac{-1}{10EI} \\ & & \frac{6}{5l_3 EI} & 0 & \frac{1}{10EI} & 0 \\ & & & \frac{1}{l_3 GJ} & 0 & 0 \\ & (сум.) & & & \frac{2l_3}{15EI} & 0 \\ & & & & & \frac{2l_3}{15EI} \end{bmatrix}.
\end{aligned}$$

Преобразование к глобальным осям узловых усилий производится по формуле $\{F_{xyz}\} = R^{sp} \{F_{XYZ}\}$, где

$$\{F_{xyz}\} = \{N_{1x} \quad Q_{1y} \quad Q_{1z} \quad M_{1x} \quad M_{1y} \quad M_{1z} \quad N_{2x} \quad Q_{2y} \quad Q_{2z} \quad M_{2x} \quad M_{2y} \quad M_{2z}\};$$

$$\{F_{XYZ}\} = \{N_{1X} \quad Q_{1Y} \quad Q_{1Z} \quad M_{1X} \quad M_{1Y} \quad M_{1Z} \quad N_{2X} \quad Q_{2Y} \quad Q_{2Z} \quad M_{2X} \quad M_{2Y} \quad M_{2Z}\};$$

$$R^{sp} = \begin{bmatrix} R & & & \\ & R & & \\ & & R & \\ & & & R \end{bmatrix}; \quad R = \begin{bmatrix} \cos(x, X) & \cos(x, Y) & \cos(x, Z) \\ \cos(y, X) & \cos(y, Y) & \cos(y, Z) \\ \cos(z, X) & \cos(z, Y) & \cos(z, Z) \end{bmatrix}.$$

Матрицы в глобальных осях вычисляются по формулам:

$$Z^{sp} = (R^{sp})^T Z_g^{sp} R^{sp}, \quad V^{sp} = (R^{sp})^T V_g^{sp} R^{sp}.$$

На рисунке 4.9 показана 16-стержневая пространственная рама. В этом примере использованы следующие данные: модуль упругости Юнга $E = 3.0 \times 10^7$ (кН/м²), длина каждого стержня $L = 6$ (м), площадь квадратного поперечного сечения каждого стержня $A = 0.01$ (м²).

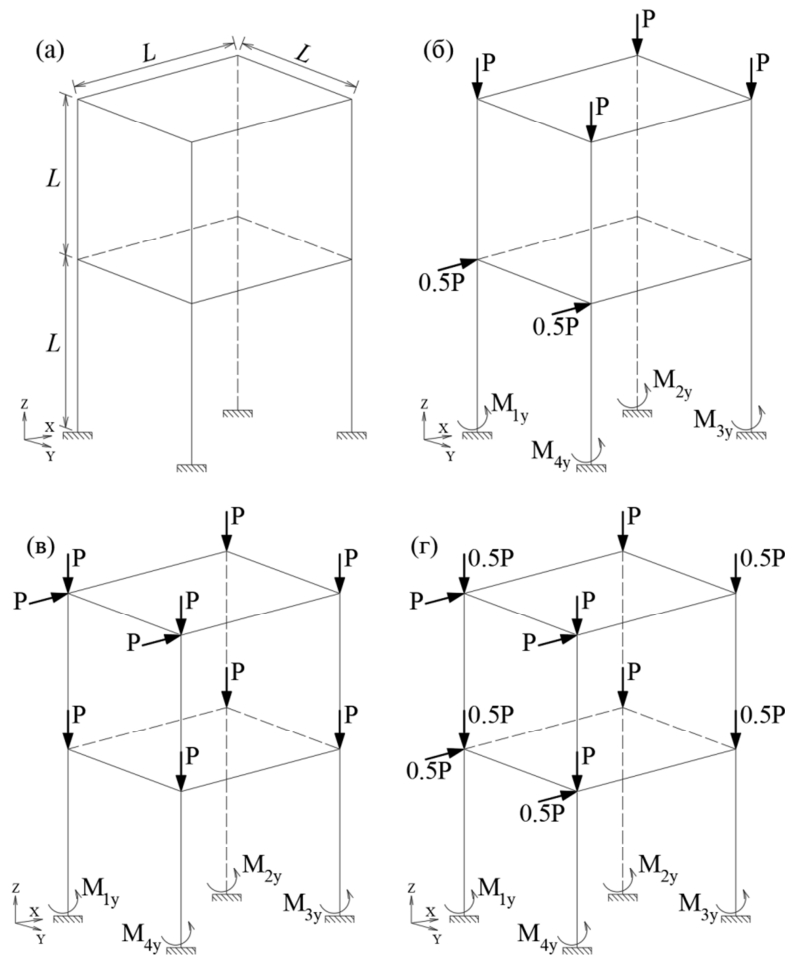


Рисунок 4.9. Двухэтажный пространственный каркас: (а) модель каркаса; (б) вариант нагружения 1; (в) вариант нагружения 2; (г) вариант нагружения 3

В таблице 4.9 приведено сравнение результатов двух методов: МКЭУ [105] и МКЭП (SCAD). В качестве точного решения принято решение, полученное в программе SCAD, при разбивке рамы на 320 КЭ (таблица 4.10).

Таблица 4.9

Значения критических сил (Н) для двухэтажного пространственного каркаса

Варианты		Методы				Точное решение
		МКЭУ		МКЭП		
		количество конечных элементов				
		16 КЭ	32 КЭ	16 КЭ	32 КЭ	
1	P ₁	37875.8	35106.4	42198.1	35165.1	35099.5
	ε ₁	0.079	0.0002	0.202	0.002	
2	P ₂	16375.0	15750.0	17830.0	16556.4	15597.5
	ε ₂	0.050	0.010	0.143	0.061	
3	P ₃	17466.5	16741.0	19139.8	16747.3	16673.7
	ε ₃	0.048	0.004	0.148	0.004	

Примечание: точные решения получены программой SCAD с 320 КЭ (таблица 4.10).

Таблица 4.10

Значения критической силы (Н)

Варианты	Количество конечных элементов						
	16 КЭ	32 КЭ	48 КЭ	64 КЭ	80 КЭ	160 КЭ	320 КЭ
P ₁	42198.1	35165.1	35156.3	35125.7	35125.7	35099.5	35099.5
P ₂	17830.0	17830.0	15760.4	15625.0	15598.3	15597.5	15597.5
P ₃	19139.8	16747.3	16867.2	16693.1	16674.0	16673.7	16673.7

Анализ результатов показывает, что постановка в усилиях при минимальном количестве 16 конечных элементов дает ответ с погрешностью менее 8%. Чтобы получить ответ с погрешностью менее 10% методом конечных элементов в перемещениях необходимо в два раза увеличить количество конечных элементов.

4.5. Расчет на устойчивость металлической конструкции в Социалистической Республике Вьетнам

На рисунке 4.10 изображено жилое здание (г. Дананг, Вьетнам) высотой 12.47 (м), шириной 11.11 (м) и длиной 24.40 (м). Его геометрические характеристики показаны на рисунках А.1-9 (см. приложение А).

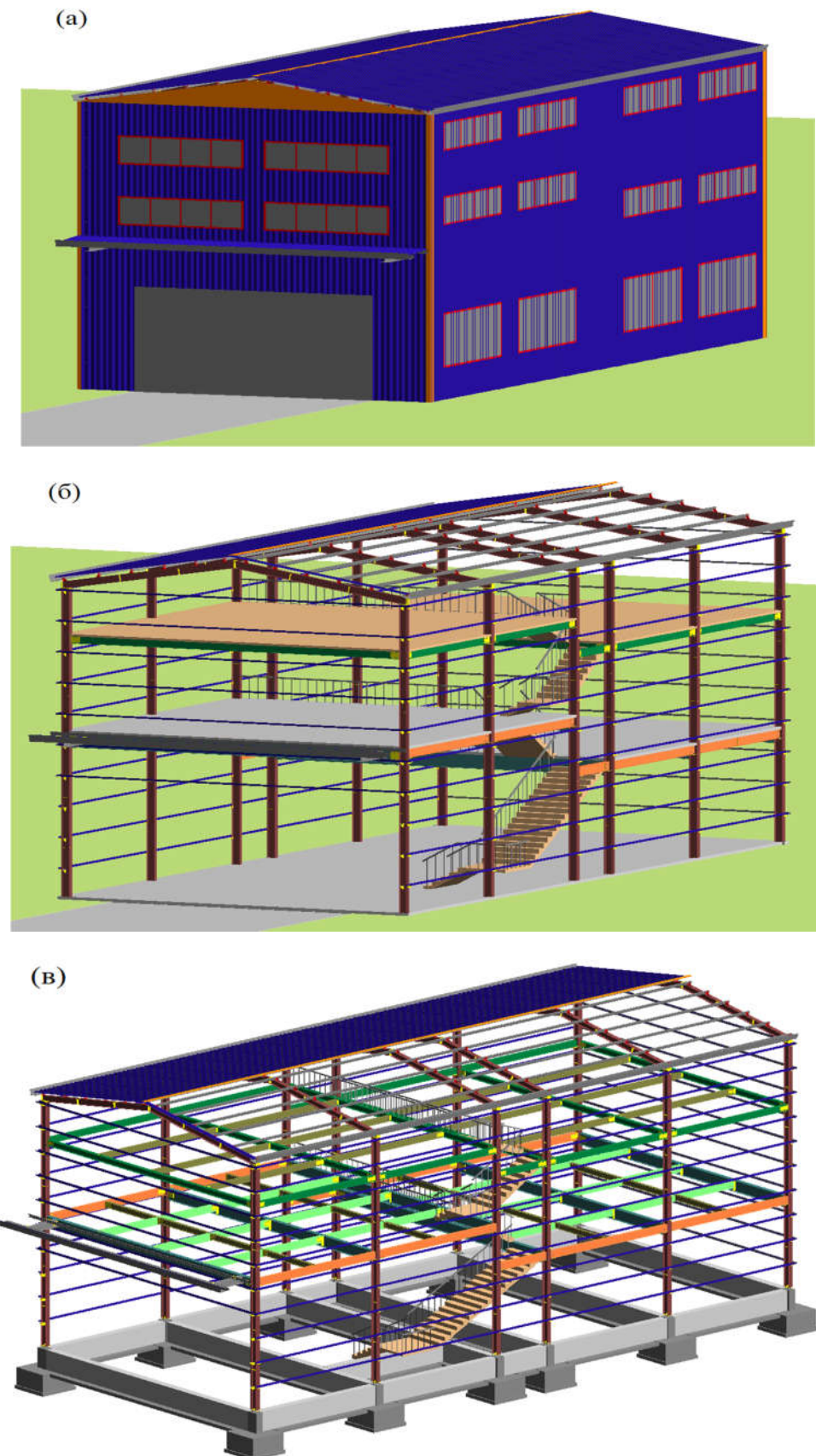


Рисунок 4.10. Жилое здание: (а) внешний вид здания; (б) стержневая система несущих конструкций; (в) металлическая конструкция с железобетонным фундаментом

На рисунке 4.11 представлены два варианта нагрузки. Устойчивость этого жилого здания рассматривается с использованием различных подходов, как показано в таблице 4.12.

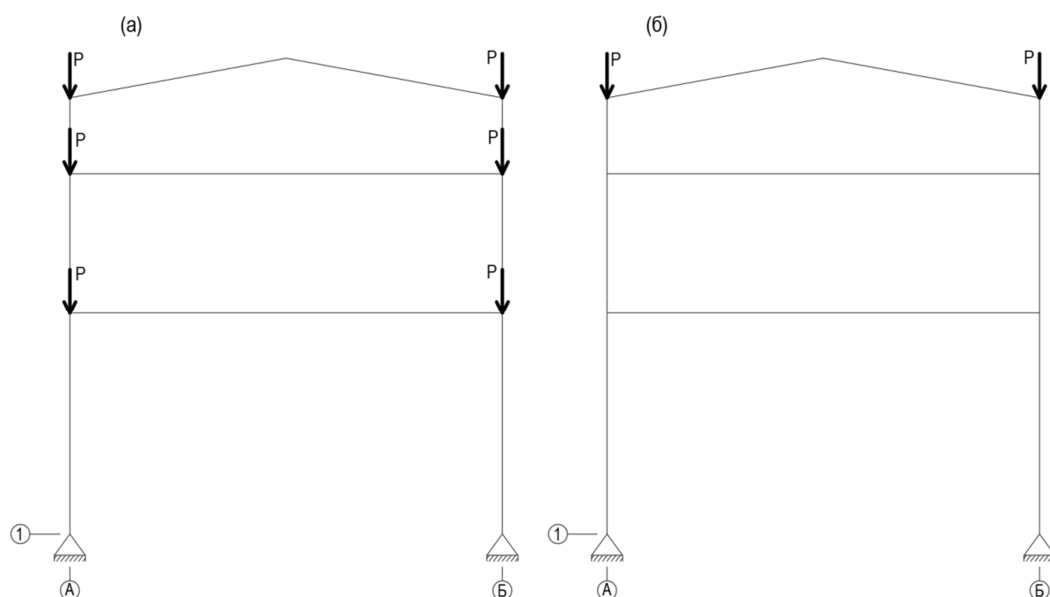


Рисунок 4.11. Типовая модель расчета несущих конструкций в поперечной раме: (а) вариант нагружения 1; (б) вариант нагружения 2

Таблица 4.12

Коэффициенты расчетной длины элементов μ

Методы		МКЭУ (20 КЭ)		МКЭП (20 КЭ)		SP16	EC8	AISC360
Варианты		1-ый	2-ой	1-ый	2-ой			
Колонны, м	верхние (L = 1.943)	10.479	6.1380	10.484	6.1421	3.7864	3.5000	2.8903
	средние (L = 3.575)	3.8483	3.2120	3.8503	3.2140	1.9667	2.2039	1.9169
	нижние (L = 5.650)	1.9171	1.9190	1.9180	1.9201	2.1939	2.5201	2.3596

4.5.1. Описание нагрузок

Параметры проекта представлены в таблицах 4.13 и 4.14, значения нагрузок показаны в таблицах 4.15-4.17, согласно вьетнамским стандартам [95,106,107].

Таблица 4.13

Параметры материала

№	Наименование	Значение
1	Нормативная прочность f_y (даН/см ²)	3450
2	Расчетная прочность f (даН/см ²)	3250
3	Прочность на сдвиг $f_v = 0.85f$ (даН/см ²)	1885
4	Модуль упругости E (даН/см ²)	2.1×10^6
5	Коэффициент условий работы γ_c	0.9

Таблица 4.14

Геометрические величины колонны К-С1 и К-С1А

№	Наименование	Значение
1	Длина колонны L , см	565.0
2	Расчетная высота стенки h_w , см	23.0
3	Толщина стенки t_w , см	1.0
4	Ширина сжатого пояса колонны b_f , см	18.6
5	Толщина сжатого пояса колонны t_f , см	1.0
6	Площадь поперечного сечения $A_n = h_w t_w + 2 b_f t_f$, см ²	60.2
7	Момент инерции по оси x $I_x = t_w h_w^3 / 12 + 2 b_f t_f^3 / 12 + 2 b_f t_f (h_w / 2 + t_f / 2)^2$, см ⁴	6373.82
8	Момент инерции по оси y $I_y = h_w t_w^3 / 12 + 2 t_f b_f^3 / 12$, см ⁴	1074.39
9	Момент сопротивления колонны $W_x = I_x / (h_w / 2 + t_f)$, см ³	509.91
10	Момент сопротивления пояса относительно его вертикальной оси $W_y = I_y / (b_f / 2)$, см ³	115.53
11	Площадь сечения пояса $A_f = t_f b_f$, см ²	18.60
12	Площадь сечения стенки $A_w = t_w h_w$, см ²	23.0
13	Радиус инерции сечения относительно осей $x-x$: $i_x = \sqrt{I_x / A_n}$, см	10.29
14	Радиус инерции сечения относительно осей $y-y$: $i_y = \sqrt{I_y / A_n}$, см	4.22

Таблица 4.15

Нагрузка на крышу

№	Наименование	Значение (g_i)
1	Собственный вес конструкции:	
1.1	Прогон и устройство стропильной системы g_{tm1} , (кг/м ²)	10
1.2	Потолок g_{tm2} , (кг/м ²)	5
	$\Sigma g_{tm} = (g_{tm1} + g_{tm2}) \times B = (10 + 5) \times 1.078$, (кг/м)	16.17
2	Нагрузка от массы людей и других: $g_{hm} = 20 \times 1.078$, (кг/м)	21.56

Таблица 4.16

Перекрытия 2 и 3

№	Наименование	Значение (g_i)
1	Собственный вес конструкции:	
1.1	Железобетонное перекрытие (100 мм) $g_{ts1} = 2500 \times 0.1$, (кг/м ²)	250
1.2	Потолок g_{ts2} , (кг/м ²)	5.5
1.3	Балки Б-D5 $g_{ts3} = (0.00772 \times 7850) / 2.77$, (кг/м ²)	21.88
	$\Sigma g_{ts} = (g_{ts1} + g_{ts2} + g_{ts3}) \times B = (250 + 5.5 + 21.88) \times 2.77$, (кг/м)	768.34
2	Нагрузка от массы людей и других: $g_{hs} = 350 \times 2.77$, (кг/м)	969.5

Таблица 4.17

Перекрытия 4 и 5

№	Наименование	Значение (g_i)
1	Собственный вес конструкции:	
1.1	Деревянное перекрытие (50 мм) $g_{ts1} = 860 \times 0.05$, (кг/м ²)	43
1.2	Потолок g_{ts2} , (кг/м ²)	5.5
1.3	Балки Б-D11 $g_{ts3} = (0.0038 \times 7850) / 2.78$, (кг/м ²)	10.73

1.4	Балки (50×100×1.4) $g_{ts4} = (0.05 - 0.0014 \times 2 + 0.1) \times 2 \times 0.0014 \times 7850 / 2.78, (\text{кг/м}^2)$	1.17
1.5	Балки (40×80×1.4) $g_{ts5} = (0.04 - 0.0014 \times 2 + 0.08) \times 2 \times 0.0014 \times 7850 / 2.78, (\text{кг/м}^2)$	0.93
	$\sum g_{ts} = (g_{ts1} + g_{ts2} + g_{ts3} + g_{ts4} + g_{ts5}) \times B =$ $= (43 + 5.5 + 10.73 + 1.17 + 0.93) \times 2.78, (\text{кг/м})$	170.50
2	Нагрузка от массы людей и других: $g_{hs} = 350 \times 2.78, (\text{кг/м})$	973

Ветровая нагрузка в таблице 4.19 определяется по территории Вьетнама (см. рис.4.12) в таблице 4.18 в соответствии с вьетнамским стандартом [106].

Таблица 4.18

Геометрические характеристики сооружения

№	Тип местности	В
1	Зона давления	II
2	Основное давление ветра $W_0, (\text{даН/м}^2)$	95
3	Наклон крыши $i = (1.415 \times 2) / 11.32, (\%)$	25
4	Шаг колонн $B_c, (\text{м})$	2.8

Таблица 4.19

Ветровая нагрузка

На высоте +11.05 м ($k_1 = 1.02$)	На высоте +9.35 м ($k_2 = 0.9844$)	На высоте +5.9 м ($k_3 = 0.9016$)
$c_e = 0.8, W_1 = 0.124 \text{ Т/м}$	$c_e = 0.8, W_1 = 0.120 \text{ Т/м}$	$c_e = 0.8, W_1 = 0.110 \text{ Т/м}$
$c_{e1} = -0.696, W_2 = -0.108 \text{ Т/м}$	-	-
$c_{e2} = -0.498, W_3 = -0.077 \text{ Т/м}$	-	-
$c_{e3} = -0.598, W_4 = -0.092 \text{ Т/м}$	$c_{e3} = -0.5, W_4 = -0.090 \text{ Т/м}$	$c_{e3} = -0.5, W_4 = -0.082 \text{ Т/м}$

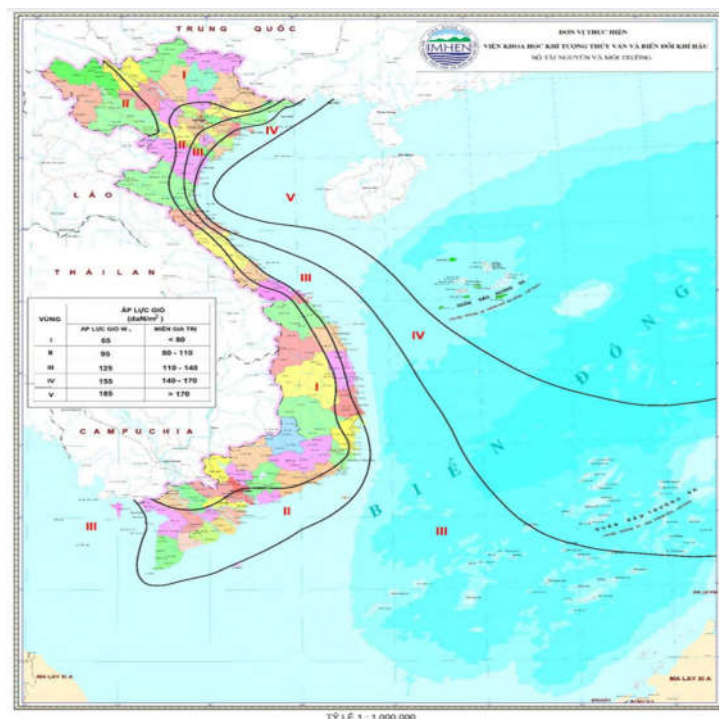


Рисунок 4.12. Карта зонирования ветрового давления на территории Вьетнама [107]

4.5.2. Алгоритм проверки устойчивости колонн (А-Б-В-Г-Д)

Основные этапы расчета по предлагаемому алгоритму показаны в таблицах 4.20-4.24.

Таблица 4.20

(А) Исходные данные

№	Шаг	Наименование	Значение
1	A1	Расчетная длина, (см)	L_{ox}
2	A2	Расчетная длина, (см)	L_{oy}
3	A3	Коэффициент влияния формы сечения	η
4	A4	Начальный эксцентриситет, (см)	$e_x = M_x/N$
5	A5	Относительный эксцентриситет, (см)	$m_x = e_x A_n / W_x$
6	A6	Статическое изменение эксцентриситета	$m_e = \eta m_x$
7	A7	Гибкость в плоскости	$\lambda_x = L_{ox} / i_x$
8	A8	Расчетная гибкость	$\lambda_{xp} = \lambda_x \sqrt{(f/E)}$

Таблица 4.21

(Б) Проверка на прочность

№	Шаг	Наименование	Значение
9	B1	Нормальное напряжение, (даН/см ²)	N/A_n
10	B2	Напряжения при изгибе, (даН/см ²)	$M_x/W_{x,min}$
11	B3	Формула проверки напряжений	$N/A_n + M_x/W_{x,min} \leq f_{yc}$ (Да или Нет, $\frac{N/A_n + M_x/W_{x,min}}{f_{yc}}$)
12	B4	Касательное напряжение, (даН/см ²)	$V/(h_w t_w) \leq f_v y_c$ (Да или Нет, $\frac{V/(h_w t_w)}{f_v y_c}$)
13	B5	Напряжения при изгибе, (даН/см ²)	$M_{xy}/J_x = M_x 0.5 h_w / I_x$
14	B6	Эквивалентное напряжение	$\sqrt{(N/A_n + M_x y/J_x)^2 + 3(V/(h_w t_w))^2} \leq 1.15 f_{yc}$ (Да или Нет, $\frac{\sqrt{(N/A_n + M_x y/J_x)^2 + 3(V/(h_w t_w))^2}}{1.15 f_{yc}}$)

Таблица 4.22

(В) Проверка устойчивости

№	Шаг	Наименование	Значение
	B1	<i>Проверка устойчивости в плоскости изгиба</i>	
15	B1.1	Коэффициент продольного изгиба	φ_e
16	B1.2	Формула проверки	$N/(\varphi_e A) \leq f_{yc}$ (Да или Нет, $\frac{N/(\varphi_e A)}{f_{yc}}$)
	B2	<i>Проверка устойчивости из плоскости изгиба</i>	
17	B2.1	Гибкость вне плоскости	$\lambda_y = L_{oy}/i_y$
18	B2.2	Расчетная гибкость	$\lambda_{yp} = \lambda_y \sqrt{(f/E)}$
19	B2.3	Коэффициент продольного изгиба вне плоскости	φ_y

20	B2.4	Гибкость	$\lambda_c = 3.14\sqrt{(E/f)}$
21	B2.5	Коэффициент	φ_c
22	B2.6	Коэффициент	φ_b
23	B2.7	Коэффициент	$\alpha = 8 \left(\frac{L_o t_w}{h_f b_f} \right)^2 \left(1 + \frac{0.5 h_f t_w^3}{b_f t_f} \right)$
24	B2.8	Коэффициент	$\psi = 2.25 + 0.07\alpha$
25	B2.9	Коэффициент	$\varphi_1 = \psi \frac{I_y}{I_x} \left(\frac{h}{L_o} \right)^2 \frac{E}{f}$
26	B2.10	Коэффициент	$c = \frac{1}{1 + m_x \varphi_y / \varphi_b}$
27	B2.11	Формула проверки	$N / (c \varphi_y A) \leq f_{y_c}$ (Да или Нет, $\frac{N / (c \varphi_y A)}{f_{y_c}}$)

Таблица 4.23

(Г) Проверка местной устойчивости стенки

№	Шаг	Наименование	Значение
28	Г1	Расчетная гибкость стенки	h_w/t_w
29	Г2	Предельная гибкость стенки	$\left[\frac{h_w}{t_w} \right] = 4.35 \sqrt{\frac{(2\alpha - 1)E}{\sigma(2 - \alpha + \sqrt{\alpha^2 + 4\beta^2})}}$
30	Г3	Формула проверки	$h_w/t_w \leq [h_w/t_w]$ (Да или Нет)

Таблица 4.24

(Д) Проверка устойчивости сжатого пояса

№	Шаг	Наименование	Значение
31	Д1	Значение соотношения	$\frac{b_o}{t_f} = \frac{b_f - t_w}{2t_f}$
32	Д2	Предельное значение соотношения	$\left[\frac{b_o}{t_f} \right] = (0.36 + 0.1\lambda) \sqrt{\frac{E}{f}}$
33	Д3	Формула проверки	$b_o/t_f \leq [b_o/t_f]$ (Да или Нет)

4.5.3. Результат проверки устойчивости колонн

Результаты, полученные с помощью алгоритма проверки устойчивости колонны (А-Б-В-Г-Д) на пункте 4.5.2, представлены в таблицах 4.25-4.27.

[illegible]

Таблица 4.26

Результаты для колонн К-С1 и К-С1А, L = 3.575 (м)

[illegible]

12	Б4	$232.73 \leq 1696.5$ (Да, 0.14)	$232.73 \leq 1696.5$ (Да, 0.14)	$232.73 \leq 1696.5$ (Да, 0.14)	$232.73 \leq 1696.5$ (Да, 0.14)	$232.73 \leq 1696.5$ (Да, 0.14)	$232.73 \leq 1696.5$ (Да, 0.14)	$232.73 \leq 1696.5$ (Да, 0.14)
13	Б5	1829.91	1829.91	1829.91	1829.91	1829.91	1829.91	1829.91
14	Б6	$2012.9 \leq 3363.8$ (Да, 0.60)	$2012.9 \leq 3363.8$ (Да, 0.60)	$2012.9 \leq 3363.8$ (Да, 0.60)	$2012.9 \leq 3363.8$ (Да, 0.60)	$2012.9 \leq 3363.8$ (Да, 0.60)	$2012.9 \leq 3363.8$ (Да, 0.60)	$2012.9 \leq 3363.8$ (Да, 0.60)
15	В1.1	0.058	0.088	0.058	0.088	0.088	0.088	0.088
16	В1.2	$2442.8 \leq 2925.0$ (Да, 0.84)	$1613.7 \leq 2925.0$ (Да, 0.55)	$2443.2 \leq 2925.0$ (Да, 0.84)	$1613.8 \leq 2925.0$ (Да, 0.55)	$1618.8 \leq 2925.0$ (Да, 0.55)	$1618.8 \leq 2925.0$ (Да, 0.55)	$1618.2 \leq 2925.0$ (Да, 0.55)
17	В2.1	84.6	84.6	84.6	84.6	84.6	84.6	84.6
18	В2.2	3.3	3.3	3.3	3.3	3.3	3.3	3.3
19	В2.3	0.57	0.57	0.57	0.57	0.57	0.57	0.57
20	В2.4	79.8	79.8	79.8	79.8	79.8	79.8	79.8
21	В2.5	0.6	0.6	0.6	0.6	0.6	0.6	0.6
22	В2.6	1.00	1.00	1.00	1.00	1.00	1.00	1.00
23	В2.7	8.44	8.44	8.44	8.44	8.44	8.44	8.44
24	В2.8	2.84	2.84	2.84	2.84	2.84	2.84	2.84
25	В2.9	0.79	1.51	1.51	1.51	1.51	1.51	1.51
26	В2.10	0.18	0.18	0.18	0.18	0.18	0.18	0.18
27	В2.11	$1412.5 \leq 2925.0$ (Да, 0.48)	$1412.5 \leq 2925.0$ (Да, 0.48)	$1412.5 \leq 2925.0$ (Да, 0.48)	$1412.5 \leq 2925.0$ (Да, 0.48)	$1412.5 \leq 2925.0$ (Да, 0.48)	$1412.5 \leq 2925.0$ (Да, 0.48)	$1412.5 \leq 2925.0$ (Да, 0.48)
28	Г1	23.0	23.0	23.0	23.0	23.0	23.0	23.0
29	Г2	78.8	78.8	78.8	78.8	78.8	78.8	78.8
30	Г3	$23.0 \leq 78.8$ (Да)	$23.0 \leq 78.8$ (Да)	$23.0 \leq 78.8$ (Да)	$23.0 \leq 78.8$ (Да)	$23.0 \leq 78.8$ (Да)	$23.0 \leq 78.8$ (Да)	$23.0 \leq 78.8$ (Да)
31	Д1	8.8	8.8	8.8	8.8	8.8	8.8	8.8
32	Д2	19.3	19.3	19.3	19.3	17.6	17.6	17.6
33	Д3	$8.8 \leq 19.3$ (Да)	$8.8 \leq 19.3$ (Да)	$8.8 \leq 19.3$ (Да)	$8.8 \leq 19.3$ (Да)	$8.8 \leq 17.6$ (Да)	$8.8 \leq 17.6$ (Да)	$8.8 \leq 17.6$ (Да)

Таблица 4.27

Результаты для колонн К-С1 и К-С1А, L = 1.943 (м)

№	Шаги	Методы
---	------	--------

27	В2.11	$947.2 \leq 2925.0$ (Да, 0.32)	$947.2 \leq 2925.0$ (Да, 0.32)	$947.2 \leq 2925.0$ (Да, 0.32)	$947.2 \leq 2925.0$ (Да, 0.32)	$947.2 \leq 2925.0$ (Да, 0.32)	$947.2 \leq 2925.0$ (Да, 0.32)	$947.2 \leq 2925.0$ (Да, 0.32)
28	Г1	23.0	23.0	23.0	23.0	23.0	23.0	23.0
29	Г2	78.8	78.8	78.8	78.8	78.8	78.8	71.5
30	Г3	$23.0 \leq 78.8$ (Да)	$23.0 \leq 78.8$ (Да)	$23.0 \leq 78.8$ (Да)	$23.0 \leq 78.8$ (Да)	$23.0 \leq 78.8$ (Да)	$23.0 \leq 78.8$ (Да)	$23.0 \leq 71.5$ (Да)
31	Д1	8.8	8.8	8.8	8.8	8.8	8.8	8.8
32	Д2	19.3	19.3	19.3	19.3	16.3	15.8	14.6
33	Д3	$8.8 \leq 19.3$ (Да)	$8.8 \leq 19.3$ (Да)	$8.8 \leq 19.3$ (Да)	$8.8 \leq 19.3$ (Да)	$8.8 \leq 16.3$ (Да)	$8.8 \leq 15.8$ (Да)	$8.8 \leq 14.6$ (Да)

- Полученные результаты в таблице 4.26 свидетельствуют о том что, средние колонны $H250 \times 186 \times 10 \times 10$ длиной $L = 3.575(\text{м})$ удовлетворяют всем условиям.
- Таблица 4.25 показывает что, нижние колонны $H250 \times 186 \times 10 \times 10$ длиной $L = 5.650(\text{м})$ не удовлетворяют условию В2.11, поэтому увеличение сечения колонн (или использование материала с большей прочностью) необходимо.
- Таблица 4.27 указывает что, верхние колонны $H250 \times 186 \times 10 \times 10$ длиной $L = 1.943(\text{м})$, удовлетворяют всем условиям, кроме условия В1.2 для первого нагружения, но поскольку превышение критерия составляет всего 5%, то сечение можно оставить без изменений.

4.6. Выводы по главе 4

На основании результатов, полученных методом конечных элементов в усилиях (МКЭУ), и их сравнению с точными решениями и решениями, полученными методом конечных элементов в перемещениях (МКЭП) с использованием программного комплекса SCAD, можно сделать следующие выводы:

1. При решении задач определения критических сил МКЭУ уже при небольшом количестве конечных элементов позволяет найти решение с меньшей погрешностью по сравнению с МКЭП.
2. Нормативные методы определения коэффициента расчетной длины стержней могут давать погрешность в несколько десятков процентов.

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Основные научные результаты, полученные при выполнении работы:

1. Обоснована недостаточная степень проработанности метода конечных элементов в усилиях для стержневых систем. Существующие методы значительно сложнее для алгоритмизации по сравнению с методом перемещений и разработаны, в основном, для решения задач расчета строительных конструкций на статические воздействия. Для задач динамики и устойчивости применение этих методов разработано недостаточно.

2. Для предложенного метода статического расчета стержневых систем методом сил построены в явном виде невырожденные матрицы податливости и жесткости отдельных стержней как с жесткими, так и с шарнирными узлами для всех видов деформации стержней: растяжение, кручение, изгиб в двух плоскостях. Сформулирован алгоритм статического расчета методом сил, который сравним по сложности программирования с методом перемещений и обладает аналогичными положительными свойствами (простая структура, ленточный характер и слабая заполненность матрицы податливости конструкции).

3. Сформулирована постановка задач динамики стержней в усилиях в двух формах: дифференциальной и вариационной. На основе вариационной постановки построены новые конечные элементы в усилиях для решения динамических задач. На примерах задач, имеющих аналитическое решение, а также для плоской и пространственной рам, нагруженных гармонической нагрузкой, исследована точность предлагаемого метода конечных элементов в усилиях. Разработана постановка в усилиях для расчета стержневых систем на горизонтальное и вертикальное сейсмические воздействия. Показано, что предложенный метод дает высокую точность определения усилий по сравнению с методом перемещений.

4. Сформулирована постановка задач устойчивости стержней в усилиях в двух формах: дифференциальной и вариационной. На основе вариационной постановки построены новые конечные элементы в усилиях для решения задач

устойчивости. На примерах расчета на устойчивость плоских и пространственной рам исследована точность разработанного метода конечных элементов в усилиях. На конкретном примере расчета металлической конструкции в Социалистической Республике Вьетнам показано, что метод конечных элементов в усилиях позволяет получить достаточно точные результаты при существенном сокращении количества конечных элементов по сравнению с методом конечных элементов в перемещениях.

Рекомендации и перспективы дальнейшей разработки темы. Дальнейшие исследования предполагается проводить в направлении развития методики применения метода конечных элементов в усилиях к задачам расчета строительных металлических конструкций с полужесткими соединениями, а также с учетом взаимодействия с основанием.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Argyris, J.H. The matrix force method of structural analysis and some new applications / J.H. Argyris, S. Kelsey. - Aeronautical Research Council Reports & Memoranda. – 1956. - № 3034. – 42 с.
2. Масленников, А.М. Расчет статически неопределимых систем в матричной форме / А.М. Масленников. Л.: Стройиздат. - 1964. - 128 с.
3. de Veubeke, F. Matrix methods of structural analysis / F. de Veubeke. - Pergamon Press. The Macmillan Company, New York. – 1964. – 343 с.
4. Филин, А.П. Матрицы в статике стержневых систем и некоторые элементы использования ЭЦВМ / А.П. Филин. Л.-М.: Стройиздат. - 1966. – 118 с.
5. Przemieniecki, J.S. Theory of matrix structural analysis / J.S. Przemieniecki. - McGraw-Hill Inc. – 1968. – 465 с.
6. Резников, Р.А. Решение задач строительной механики на ЭЦВМ / Р.А. Резников. – М.: Стройиздат. - 1971. - 308 с.
7. Розин, Л.А. Стержневые системы как системы конечных элементов / Л.А. Розин. – Л.: ЛГУ. – 1976. – 237 с.
8. Ливсли, Р. Матричные методы строительной механики / Р. Ливсли. - М.: Стройиздат. – 1980. – 224 с.
9. Felippa, C.A. A historical outline of matrix structural analysis: a play in three acts / C.A. Felippa // Computers & Structures. – 2001. - Vol. 79. - С. 1313-1324.
10. Logan, D.L. A First Course in the Finite Element Method / D.L. Logan. - Nelson Education Ltd., University of Wisconsin–Platteville. – 2015. – 1002 с.
11. Розин, Л.А. Метод конечных элементов в применении к упругим системам / Л.А. Розин. – URSS. – 2021. – 130 с.
12. Wehle, L.B. A method for reducing the analysis of complex redundant structures to a routine procedure / L.B. Wehle, W. Lansing // Journal of The Aeronautical Sciences. – 1952. - Vol. 19. - С. 677-684

13. Robinson, J. Automatic selection of redundancies in the matrix force method: the rank technique / J. Robinson // Canadian Aero Space Journal. – 1965. - Vol. 11. - С. 9-12.
14. Prezemieniecki, J.S. Joining of complex structures by the matrix force method / J.S. Prezemieniecki, P.H. Denke // Journal of Aircraft. - 1966. - Vol. 3. - С. 236-243.
15. Гибшман, М.Е. Алгоритм анализа статической схемы сложных стержневых систем для ЭЦВМ / М.Е. Гибшман // СМиРС. – 1972. - № 1. - С. 39-42.
16. Розин, Л.А. О методе сил в строительной механике. Метод конечных элементов и строительная механика / Л.А. Розин // Ленинградский политехнический институт (Труды ЛПИ). – 1976. - С. 5-15.
17. Розин, Л.А. Автоматизация метода сил в строительной механике / Л.А. Розин // СМиРС. – 1976. - № 4. - С. 21-26.
18. Шварц, М.А. Построение разрешающих уравнений метода сил при использовании локализованных эпюр усилий в основной системе / М.А. Шварц, О.Д. Тананайко // Расчётно-теоретические исследования и применение ЭВМ в строительстве, Л. – 1977. - С. 34-39.
19. Domaszewski, M. On automatic selection of redundancies / M. Domaszewski, A. Borkowski // Computers & Structures. - 1979. - Vol. 10. - С. 577-582.
20. Kaneko, I. On computational procedures for the force methods / I. Kaneko, M. Lawo, G. Thierauf // International Journal for Numerical Methods in Engineering. – 1982. - Vol. 18. - С. 1469-1495.
21. Филин, А.П. Алгоритмы построения разрешающих уравнений механики стержневых систем / А.П. Филин и др. - Л.: Стройиздат. – 1983. – 232 с.
22. Шулькин, Ю.Б. Теория упругих стержневых конструкций / Ю.Б. Шулькин. - М.: Наука. – 1984. – 272 с.
23. Робинсон, Дж. Статический расчёт конструкций методом сил и перемещений как проблема собственных значений / Дж. Робинсон, Г.В. Хаггенмахер, Р. Контини // Расчёт упругих конструкций с использованием ЭВМ, Т. 2, Л. – 1974. - С. 91-102.

24. Kon, C.G. An eigen-force method for finite element analysis and reanalysis / C.G. Kon, K.K. Ang, R. Xu // International Journal for Numerical Methods in Engineering. – 1997. - Vol. 40. - С. 777-796.
25. Kangwai, R.D Symmetry-adapted equilibrium matrices / R.D Kangwai, S.D. Guest // International Journal of Solids and Structures. – 2000. – Vol. 37. – С. 1525-1548.
26. Koohestani, K. An orthogonal self-stress matrix for efficient analysis of cyclically symmetric space truss structures via force method / K. Koohestani // International Journal of Solids and Structures. - 2011. - Vol. 48. - С. 227-233.
27. Филин, А.П. Алгоритм построения матрицы при расчёте произвольных пространственных рамных (с жёсткими контурами) систем методом сил / А.П. Филин // Строительная механика, М. – 1966. - С. 181-187.
28. Spillers, W.R. Network analogy for the truss problem / W.R. Spillers // Journal of the Engineering Mechanics Division. – 1962. - Vol. 88. - С. 33-40.
29. Lind, N.C. Analysis of structures by system theory / N.C. Lind // Journal of the Structural Division. – 1962. - № 2. - С. 1-22.
30. Фенвес, С.Д. Формулировка методов расчёта конструкций с помощью топологической теории сетей / С.Д. Фенвес, Ф.Г. Бранин // Расчёт констр. с применением электронных машин, М. – 1967. - С. 368-399.
31. Клемперт, Ю.З. О связи между сетевым и матричным подходом в строительной механике / Ю.З. Клемперт, А.П. Филин // Расчёт пространственных конструкций на прочность и жёсткость, Л. – 1973. - С. 233-244.
32. Kaveh, A. Suboptimal cycle bases of graphs for the flexibility analysis of skeletal structures / A. Kaveh // Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering. – 1988. - № 71. - С. 259-271
33. Kaveh, A. Efficient finite element analysis using graph-theoretical force method; rectangular plane stress and plane strain serendipity family elements / A. Kaveh, M.S. Massoudi, M.J. Massoudi // Periodica Polytechnica Civil Engineering. – 2014. - № 58. - С. 3-22.

34. Dizaji, F.S. Novel computational mathematical algorithms for structural optimization using graph-theoretical methods / F.S. Dizaji, M.S. Dizaji // *Engineering Computations*. – 2022. - Vol. 39. - № 6. - C. 2391-2423.
35. Kawai, T. The force method revisited / T. Kawai // *International Journal for Numerical Methods in Engineering*. – 2000. - Vol. 47. - C. 275-286.
36. Soyer, E. Sparse self-stress matrices for the finite element force method / E. Soyer, A. Topcu // *International Journal for Numerical Methods in Engineering*. – 2001. - Vol. 50. - C. 2175-2194.
37. Fraeijs de Veubeke, B. Displacement and equilibrium models in the finite element method / B. Fraeijs de Veubeke // *International Journal for Numerical Methods in Engineering*. – 2001. – Vol. 52. - C. 287-342.
38. Sedaghati, R. Force Method Revisited / R. Sedaghati, A. Suleman // *AIAA Journal*. – 2003. - Vol. 41. - № 5. - C. 957-966.
39. Argyris, J.H. Initial Strains in the Matrix Force Method of Structural Analysis / J.H. Argyris, S. Kelsey // *The Aeronautical Journal*. - 1960. - Vol. 64. - P. 493-495.
40. Gallagher, R.H. Direct Flexibility Finite Element Elastoplastic Analysis / R.H. Gallagher, A.K. Dhalla // *IASMiRT, Berlin, Germany*. – 1971. - C. 443-462.
41. Besseling, J.F. The force method and its application in plasticity problem / J.F. Besseling // *Computers & Structures*. – 1978. - Vol. 8. - C. 323-330.
42. Spiliopoulos, K.V. On the automation of the force method in the optimal plastic design of frames / K.V. Spiliopoulos // *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*. – 1997. - Vol. 141. - C. 141-156.
43. Spiliopoulos, K.V. Automatic collapse load analysis of regular plane frames using the force method / K.V. Spiliopoulos, P.G. Souliotis // *Computers & Structures*. - 1997. - Vol. 64. - C. 531-540.
44. Stutz, L.T. A flexibility-based continuum damage identification approach / L.T. Stutz, D.A. Castello, F.A. Rochinha // *Journal of Sound and Vibration*. - 2005. – Vol. 279. - C. 641-667.

45. Stutz, L.T. The Differential Evolution method applied to continuum damage identification via flexibility matrix / L.T. Stutz, R.A. Tenenbaum, R.A.P. Corrêa // Journal of Sound and Vibration. – 2015. – Vol. 345. - C. 86-102.
46. Gala, P. Fictitious Forces Method and Its Application to the Nonlinear Analysis of Plane RC Skeletal Structures / P. Gala, R. Costa, M. Ferreira, P. Providência, A. Dias // Journal of Structural Engineering. - 2016. - Vol. 142. – 11 c.
47. Meleshko, V.A. Generalized Flexibility Method by the Example of Plane Elastoplastic Problem / V.A. Meleshko, Y.L. Rutman // Procedia Structural Integrity. - 2017. - Vol. 6. - C. 140-145.
48. Rezaiee-Pajand, M. Frame nonlinear analysis by force method / M. Rezaiee-Pajand, N. Gharaei-Moghaddam // International Journal of Steel Structures. – 2017. - Vol. 17. – C. 609–629.
49. du Pasquier, C. Validation of a nonlinear force method for large deformations in shape-morphing structures / C. du Pasquier, K. Shea // Structural and Multidisciplinary Optimization. - 2022. - Vol. 65. - № 87. – 17 c.
50. Joseph, K.T. A new implementation of the force method and the optimum design of large trusses / K.T. Joseph // International Journal for Numerical Methods in Engineering. - 1989. - Vol. 28. - C. 893-907.
51. Sedaghati, R. Structural Optimization with Frequency Constraints Using the Finite Element Force Method / R. Sedaghati, A. Suleman, B. Tabarrok // AIAA Journal. - 2002. - Vol. 40. - C. 382-388.
52. Sedaghati, R. Optimum design of structures with stress and displacement constraints using the force method / R. Sedaghati, E. Esmailzadeh // International Journal of Mechanical Sciences. – 2003. - C. 1369-1389.
53. Kaveh, A. Optimal Structural Analysis / A. Kaveh. - John Wiley & Sons, Ltd., ISBN: 978-0-470-03015-8. – 2006. – 532 c.
54. Kaveh, A. Nonlinear analysis and optimal design of structures via force method and genetic algorithm / A. Kaveh, H. Rahami // Computers and Structures. – 2006. - № 84. - C. 770-778.

55. Лалин, В.В. Уравнения совместности деформаций как основа алгоритмизации метода сил для стержневых систем / В.В. Лалин // Строительная механика и расчет сооружений. Сб. научных трудов. - СПб, Изд-во СПб ГТУ. – 1992. – С. 96 – 111.
56. Patnaik, S.N. Generation of the compatibility matrix in the integrated force method / S.N. Patnaik, K.T. Joseph // Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering. – 1986. - Vol. 55. - № 3. - С. 239-257.
57. Patnaik, S.N. Compatibility conditions of structural mechanics for finite element analysis / S.N. Patnaik, L. Berke, R.H. Gallagher // AIAA.J. – 1991. - Vol. 5. - С. 820-829.
58. Treibergs, A. Compatibility conditions for discrete planar structures / A. Treibergs, A. Cherkaev, P. Krtolica // International Journal of Solids and Structures. – 2019. – Vol. 184. – С. 248-278
59. Robinson, J. Dynamic analysis of structures using the rank force method / J. Robinson, M. Petyt // International Journal for Numerical Methods in Engineering. – 1971. - Vol. 3. - С. 103-117.
60. Abdul, J. Dynamic analysis of structures by the force method / J. Abdul. - The University of Arizona. – 1980. – 254 с.
61. Zweig, A. Force Method for Frame Buckling Analysis / A. Zweig // Journal of Structural Engineering. – 1984. - Vol. 110. - С. 1893-1912.
62. Mukhopadhyay, M. Free vibration of a free-free beam with rotary inertia affect - a flexibility matrix approach / M. Mukhopadhyay // Journal of Sound and Vibration. – 1988. – Vol. 125. - С. 565-569.
63. El-Saved, M.E.M. Force method formulations based on hamilton's principle / M.E.M. El-Saved, D. Marjadi, E. Sandgren // Computers & Structures. – 1991. - Vol. 38. - С. 301-316.
64. Fried, I. Improvable bounds on the largest eigenvalue of a completely positive finite element flexibility matrix / I. Fried, M. Coleman // Journal of Sound and Vibration. – 2005. - Vol. 283. - С. 487-494.

65. Lanzi, A. Caughey Damping Series in Terms of Products of the Flexibility Matrix / A. Lanzi, J. Enrique Luco // Journal of Engineering Mechanics. – 2017. - Vol. 143. – 9 c.
66. Felippa, C.A. Will the force method come back? / C.A. Felippa // Journal of Applied Mechanics. – 1987. - Vol. 54. - C. 728-729.
67. Patnaik, N. An integrated force method for discrete analysis / N. Patnaik // International Journal for Numerical Methods in Engineering. - 1973. - Vol. 6. - C. 237-251.
68. Patnaik, N. The integrated force method versus the standard force method / N. Patnaik // Computers & Structures. – 1986. - Vol. 22. - C. 151-163.
69. Patnaik, N. Recent advances in the method of forces: integrated force method of structural analysis / N. Patnaik, M. Coroneos, A. Hopkins // Advances in Engineering Software. – 1998. – Vol. 29. – C. 463-474.
70. Patnaik, N. Integrated force method solution to indeterminate structural mechanics problems / N. Patnaik, A. Hopkins, R. Halford. - National Aeronautics and Space Administration, Washington, DC 20546-0001. – 2004. – 180 c.
71. Kale, A. Finite Element Based Stress Analysis of Seat Belt Using Integrated Force Method / A. Kale, G.S. Doiphode // Journal of Engineering Research and Applications, ISSN: 2248-9622. – 2014. - Vol. 4. - C. 31-34.
72. Singh, A. Design optimization of stiffened panels using finite element integrated force method / A. Singh, F. Yang, R. Sedaghati // Engineering Structures. – 2018. - Vol. 159. - C. 99-109.
73. Wang, Y. Extended integrated force method for the analysis of prestress-stable statically and kinematically indeterminate structures / Y. Wang, G. Senatore // International Journal of Solids and Structures. - 2020. - Vol. 202. - C. 798-815.
74. Peng, Y. Base force element method (BFEM) of complementary energy principle for large rotation problems / Y. Peng, Y. Liu // Acta Mechanica Sinica. - 2009. – Vol. 25. - C. 507-515.
75. Santos, H.A.F.A. On a pure complementary energy principle and a force-based finite element formulation for nonlinear elastic cables / H.A.F.A. Santos, C.A.

- Paulo // International Journal of Non-Linear Mechanics. – 2011. – Vol. 46. – С. 395-406.
76. Biglari, A. Quasi-hinge beam element implemented within the hybrid force-based method / A. Biglari, P. Harrison, N. Bicanic // Computers & Structures. - 2014. - Vol. 137. - С. 31-46.
 77. Peng, Y. Advances in the Base Force Element Method / Y. Peng, Y. Liu. - Springer Nature Singapore Pte Ltd. – 2019. – 470 с.
 78. Васидзу, К. Вариационные методы в теории упругости и пластичности / К. Васидзу. - М.: Мир. – 1987. – 544 с.
 79. Nagabhushanam, J. A Force based Finite Element Method with Automated identification of the Redundant Forces / J. Nagabhushanam, D.R. Mahapatra // International Journal of Scientific & Engineering Research. – 2020. - Vol. 11. - С. 904-921.
 80. Brezzi, F. Mixed and Hybrid Finite Element Methods / F. Brezzi, M. Fortin. - Springer New York, NY. – 1991. – 350 с.
 81. Kemp, A.R. A mixed flexibility approach for simplifying elastic and inelastic structural analysis of frames / A.R. Kemp // Journal of Constructional Steel Research. – 2002. – Vol. 58. – С. 1297-1313.
 82. Hjelmstad, K.D. Mixed methods and flexibility approaches for nonlinear frame analysis / K.D. Hjelmstad, E. Taciroglu // Journal of Constructional Steel Research. – 2002. – Vol. 58. – С. 967-993.
 83. Falsone, G. A Mixed Force-Displacement Method for the Exact Solution of Plane Frames / G. Falsone, D. Settineri // American Journal of Civil Engineering and Architecture. – 2013. - № 4. - С. 82-91.
 84. Boffi, D. Mixed Finite Element Methods and Applications / D. Boffi, F. Brezzi, M. Fortin. - Springer Berlin, Heidelberg. – 2013. – 685 с.
 85. Лалин, В.В. Метод контурных усилий в статике стержневых систем / В.В. Лалин, Л.А. Розин, Т.Н. Бугаева // Изв. вузов. Строительство. – 1998. - С. 15-24.

86. Lalin, V.V. The Loop Resultant Method for Static Structural Analysis / V.V. Lalin, H.H. Ngo // International Journal for Computational Civil and Structural Engineering. – 2022. – № 1. - С. 72–81.
87. Ngo, H.H. The Idea of a “Loop Fragment” of the Finite Element Force Method in the Loop Resultant Method for Static Structural Analysis / H.H. Ngo, V.V. Lalin, I.I. Lalina, A.M. Vavilova, T.Q.T. Le, T.M.D. Le // Materials Proceedings. – 2024. - № 18. – 8 с.
88. Lalin, V.V. The force method algorithm in the form of a loop resultant method / V.V. Lalin, I.I. Lalina, H.H. Ngo, T.M.D. Le // Строительство и реконструкция. – 2024. - № 4. - С. 42-55.
89. Lalin, V.V. A finite element force method applied to free vibration of rod systems / V.V. Lalin, H.H. Ngo, A.M. Vavilova // Системные технологии. – 2024. - № 1. - С. 34-46.
90. Ngo, H.H. Free vibration analysis of rod systems using the finite element force method with extended shape functions / H.H. Ngo, V.V. Lalin, T.Q.T. Le // Вестник инженерной школы Дальневосточного федерального университета. - 2024. - № 2. - С. 127-141.
91. Бабаков, И.М. Теория колебаний / И.М. Бабаков. - Издательство: Дрофа. – 2004. - 593 с.
92. Ильин, М.М. Теория колебаний / М.М. Ильин, К.С. Колесников, Ю.С. Саратов. - М.: МГТУ им. Н.Э. Баумана. – 2003. - 272 с.
93. Kabe, A.M. Structural Dynamics. Fundamentals and Advanced Applications / A.M. Kabe, B.H. Sako. - Academic Press, Elsevier Inc. – 2020. - 960 с.
94. Chopra, A.K. Dynamics of structures: Theory and Applications to Earthquake Engineering / A.K. Chopra. - University of California at Berkeley, Pearson Education Limited; 6th edition. – 2022. – 994 с.
95. TCVN 5575: 2012 Steel structures – Design standard, Hanoi. – 2012. – 133 с.
96. SP 16.13330.2017: Steel structures. - 2017. – 140 с.
97. SP 294.1325800.2017: The construction of steel. Design rules. - 2017. – 158 с.

98. EN 1993-1-1 Eurocode 3: Design of steel structures – Part 1-1: General rules and rules for buildings. - 2005. – 91 с.
99. EN 1993-1-8 Eurocode 3: Design of steel structures – Part 1-8: Design of joints. - 2005. – 133 с.
100. AISC. Specification for Structural Steel Buildings. ANSI/AISC 360-16, American Institute of Steel Construction, Chicago, IL. - 2016. – 619 с.
101. Смирнов, А.Ф. Строительная механика. Динамика и устойчивость сооружений / А.Ф. Смирнов, А.В. Александров, Б.Я. Лашеников, Н.Н. Шапошников. - М.: Стройиздат. – 1984. – 416 с.
102. Александров, А.В. Строительная механика. В 2 кн. Кн. 2. Динамика и устойчивость упругих систем / А.В. Александров, В.Д. Потапов, В.Б. Зылев. - М.: Высшая школа. – 2008. – 384 с.
103. Перельмутер, А.В. Устойчивость равновесия конструкций и родственные проблемы. Т.1 / А.В. Перельмутер, В.И. Сливкер – М.: Изд-во СКАД СОФТ. – 2007. – 656 с.
104. Bažant, Z.P. Stability of structures: Elastic, inelastic, fracture and damage theories / Z.P. Bažant, L. Cedolin. - World Scientific Publishing Co. – 2010. – 1012 с.
105. Lalin, V.V. An element forces formulation of stability analysis using the finite element force method for rod systems / V.V. Lalin, I.I. Lalina, Н.Н. Ngo, А.М. Vavilova // Инновации и Инвестиции. – 2024. - № 2. - С. 270-275.
106. TCVN 2737 : 2023 Loads and Actions – Design standard, Hanoi. – 2023. – 88 с.
107. QCVN 02:2022/BXD National Technical Regulation on Natural Physical and Climatic Data for Construction, Hanoi. - 2022. – 618 с.

Приложение А. Чертежи металлического каркаса жилого здания в Социалистической Республике Вьетнам

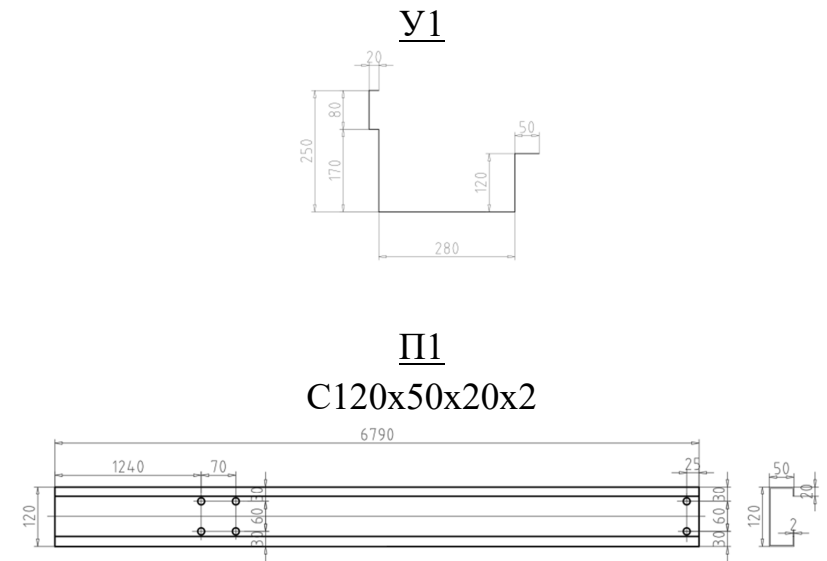
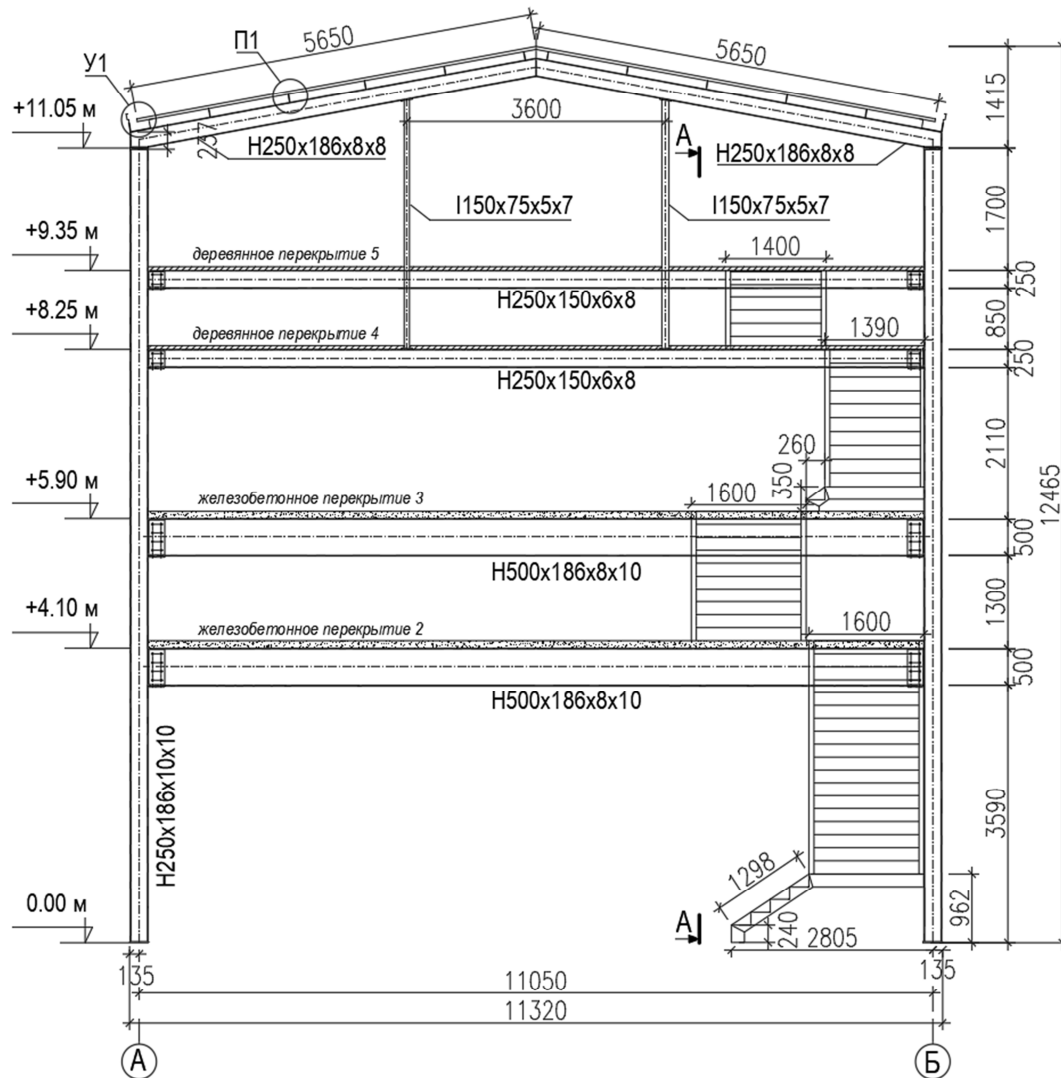


Рисунок А.1. Фасад здания и детали У1, П1

А - А

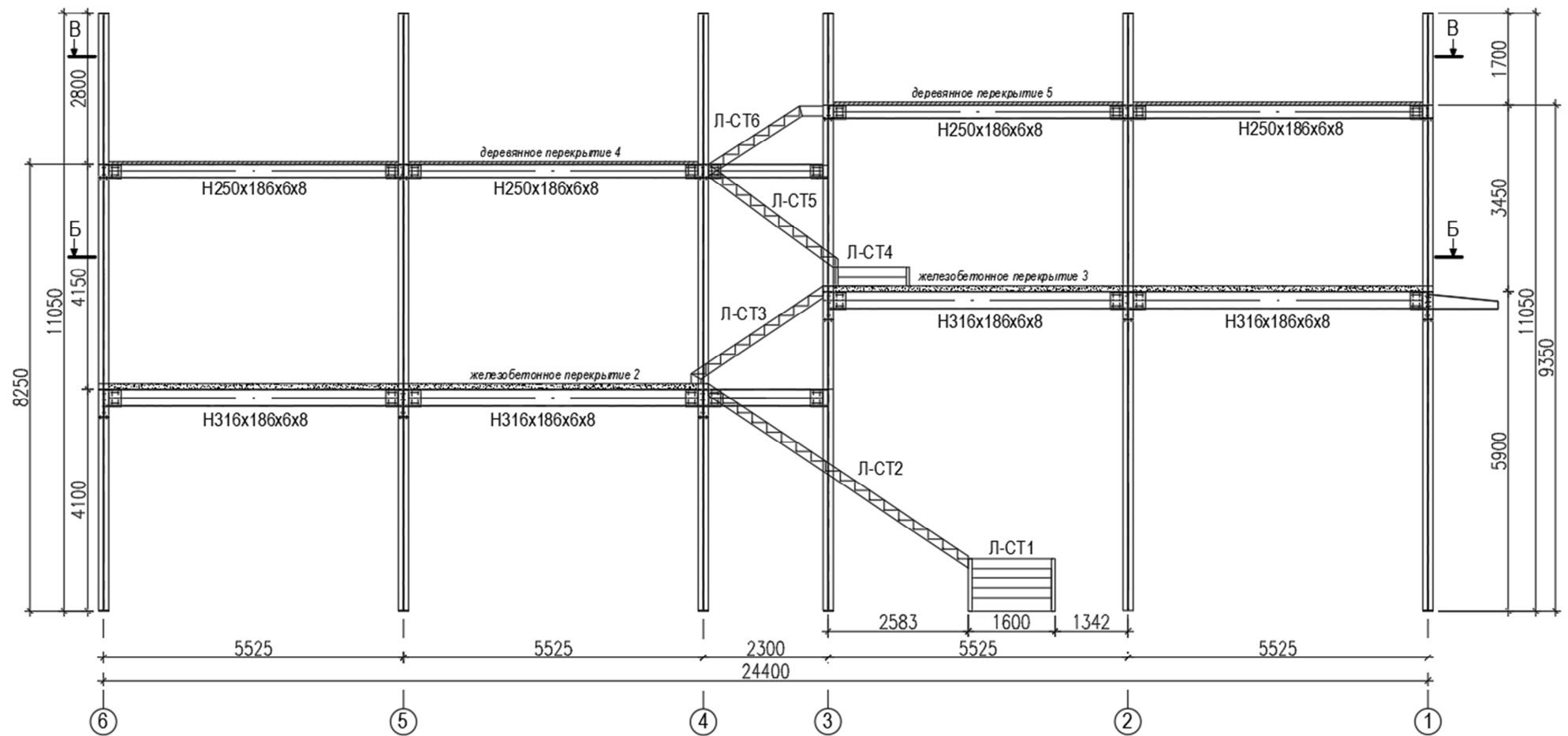


Рисунок А.2. Разрез А-А

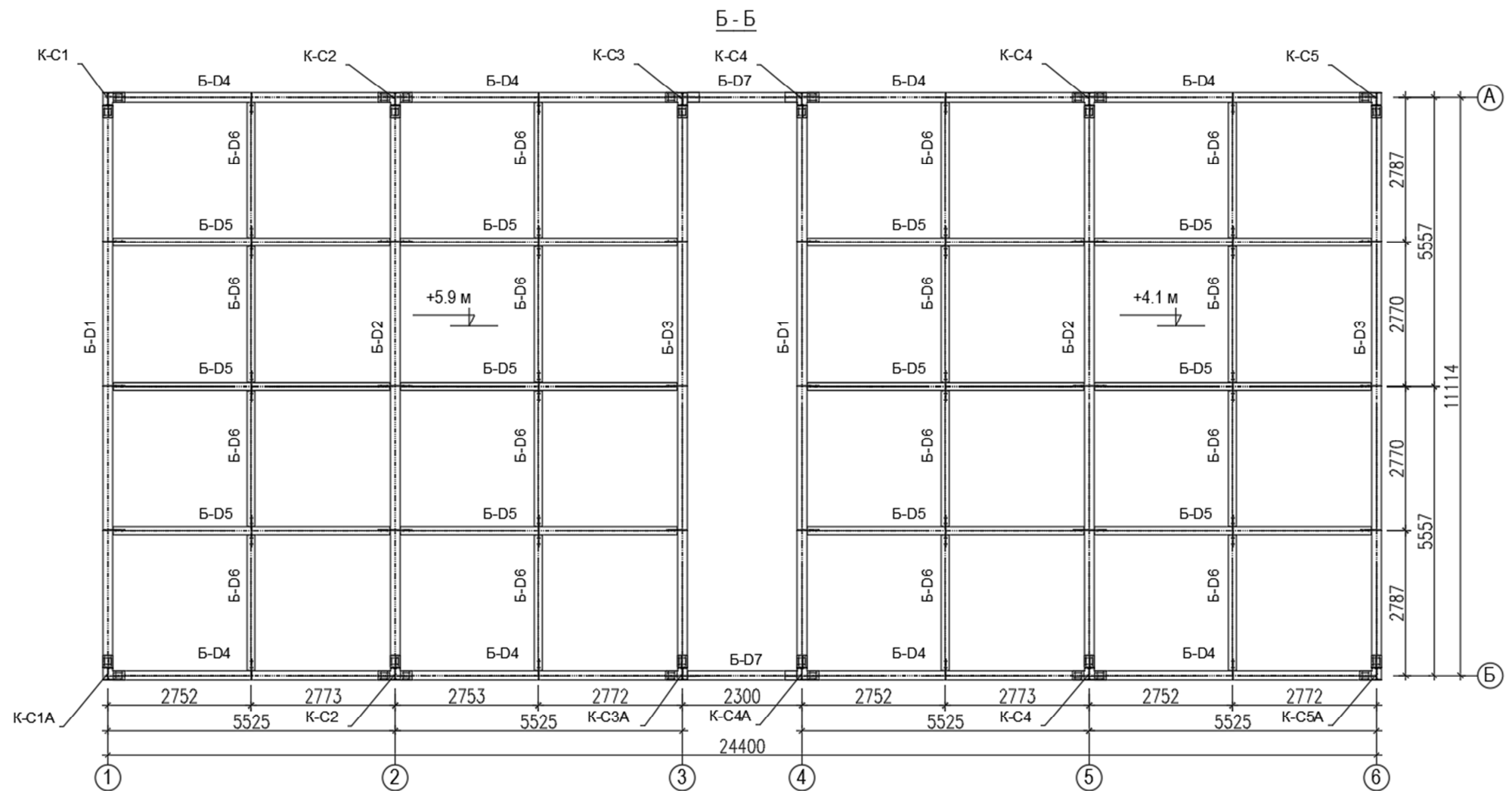


Рисунок А.3. Разрез Б-Б

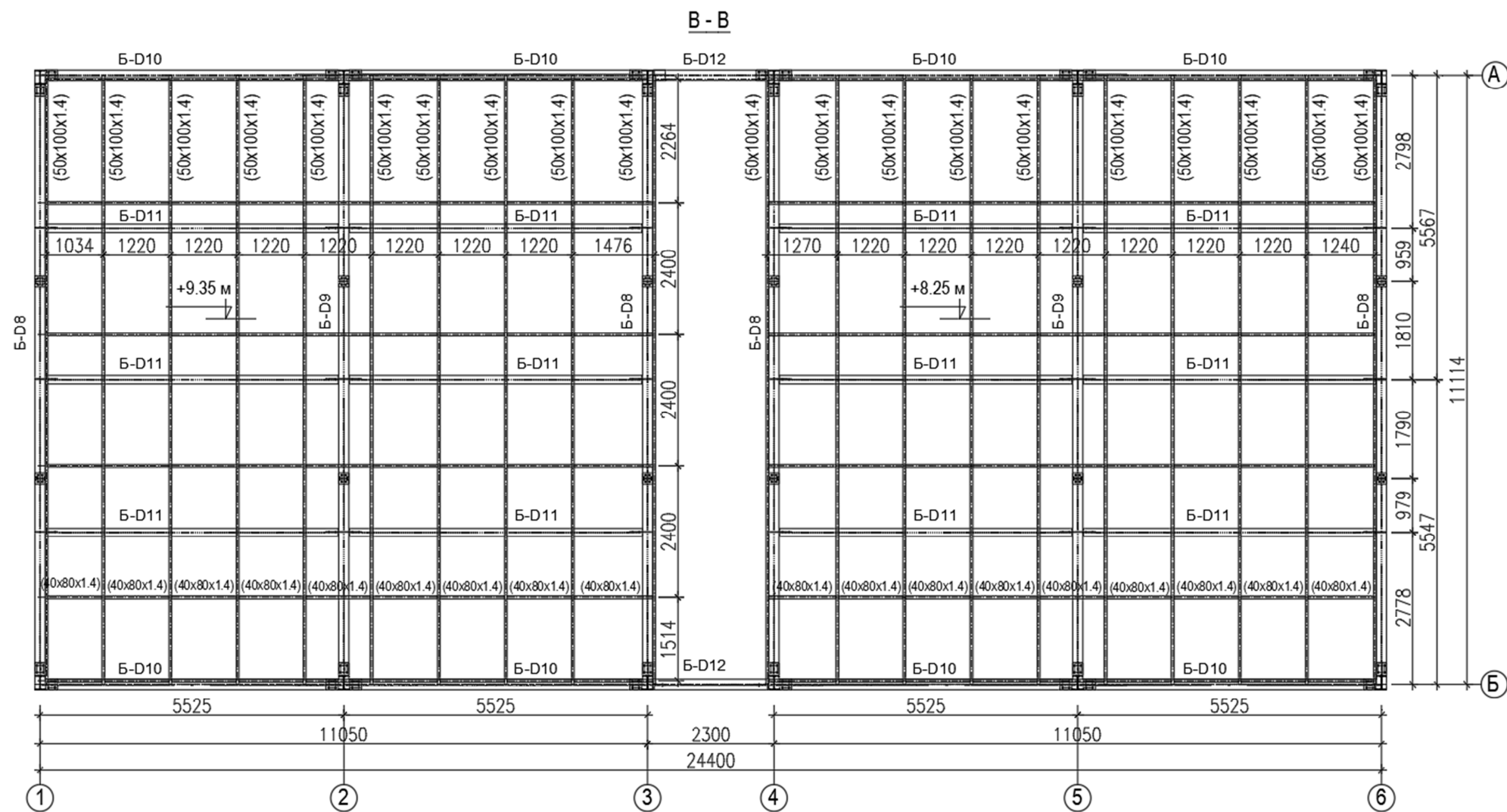


Рисунок А.4. Разрез В-В

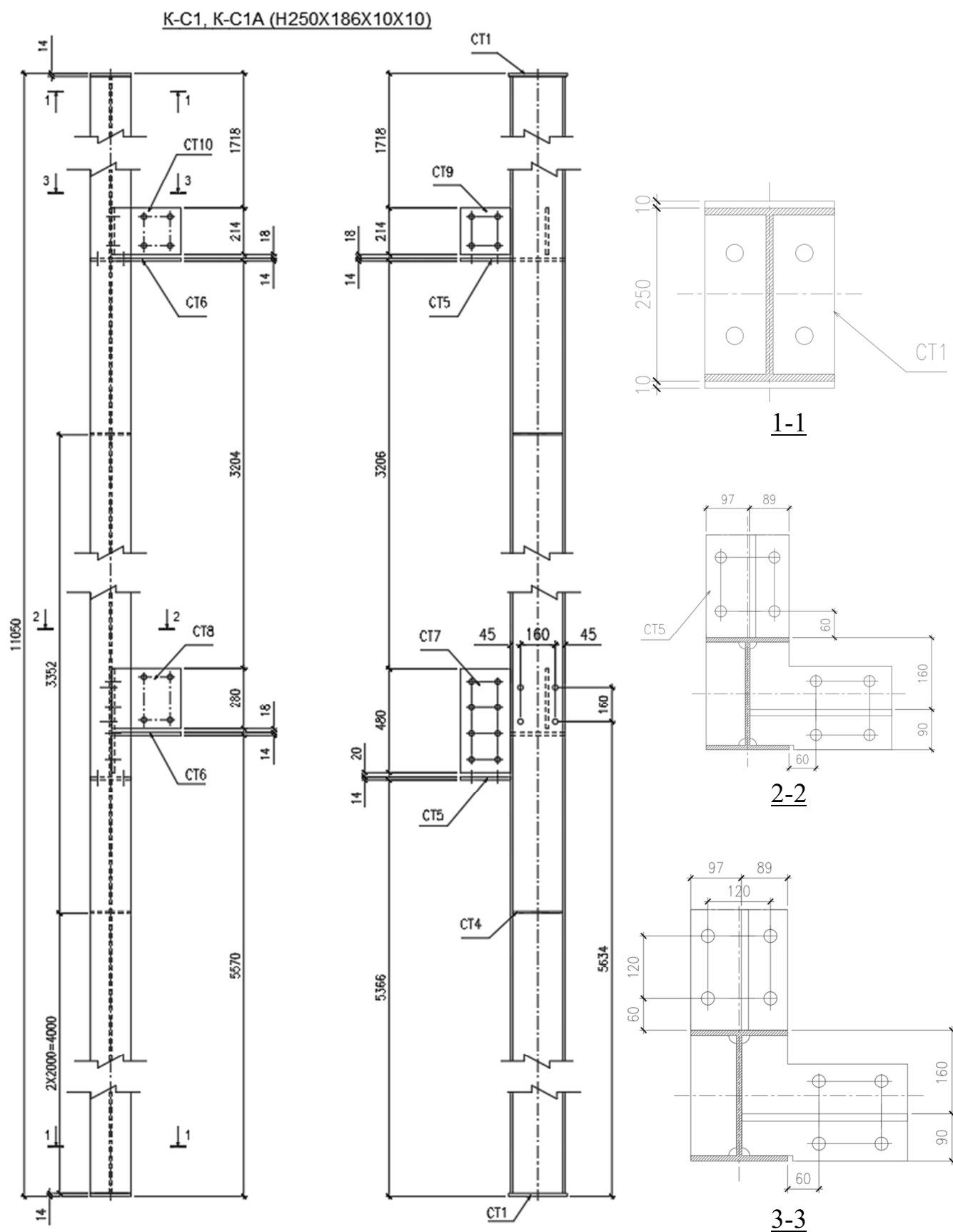


Рисунок А.5. Колонны К-С1, К-С1А; разрезы 1-1, 2-2 и 3-3

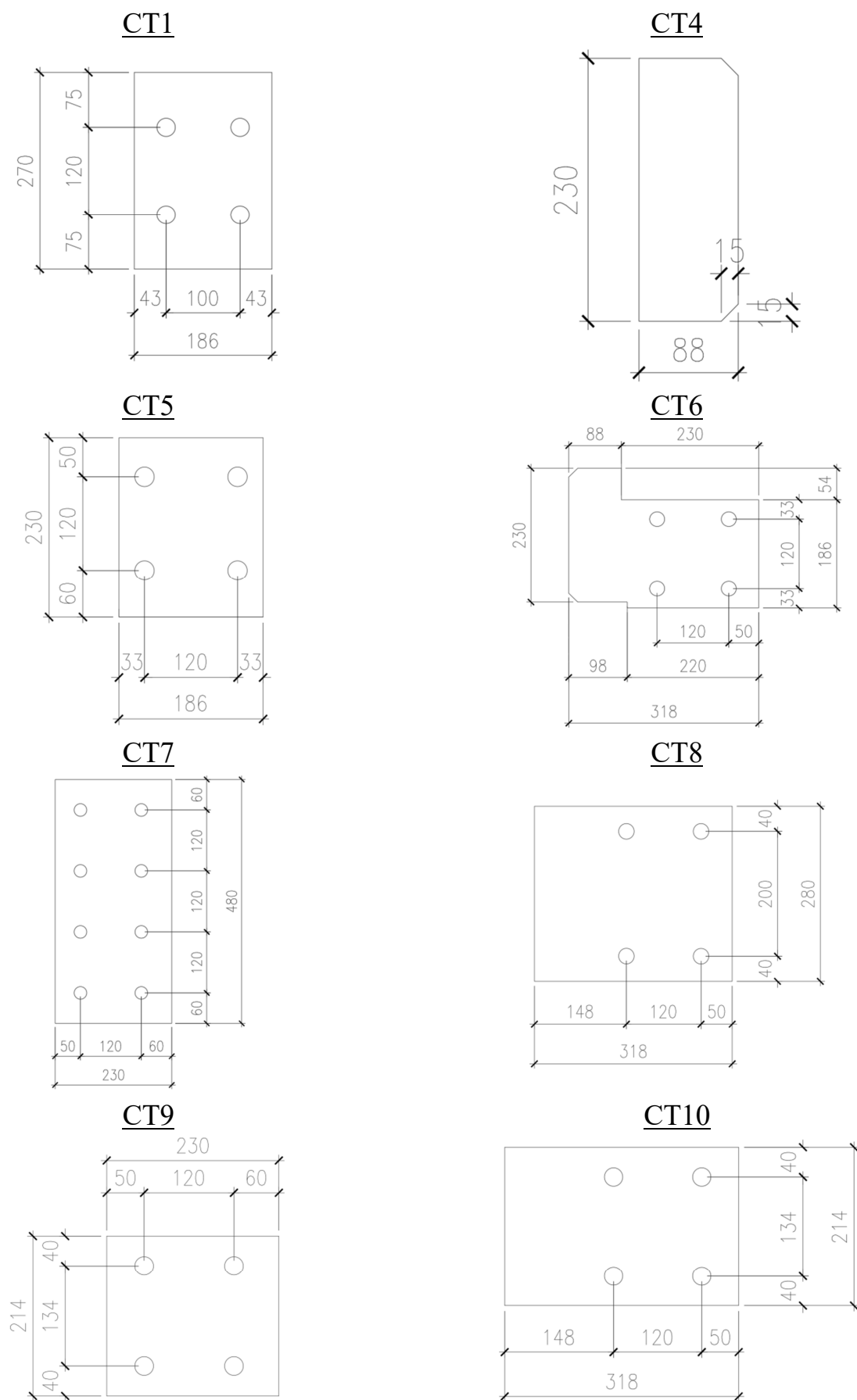


Рисунок А.6. Детали колонн К-С1, К-С1А

Б-D1(H520X186X8X10)

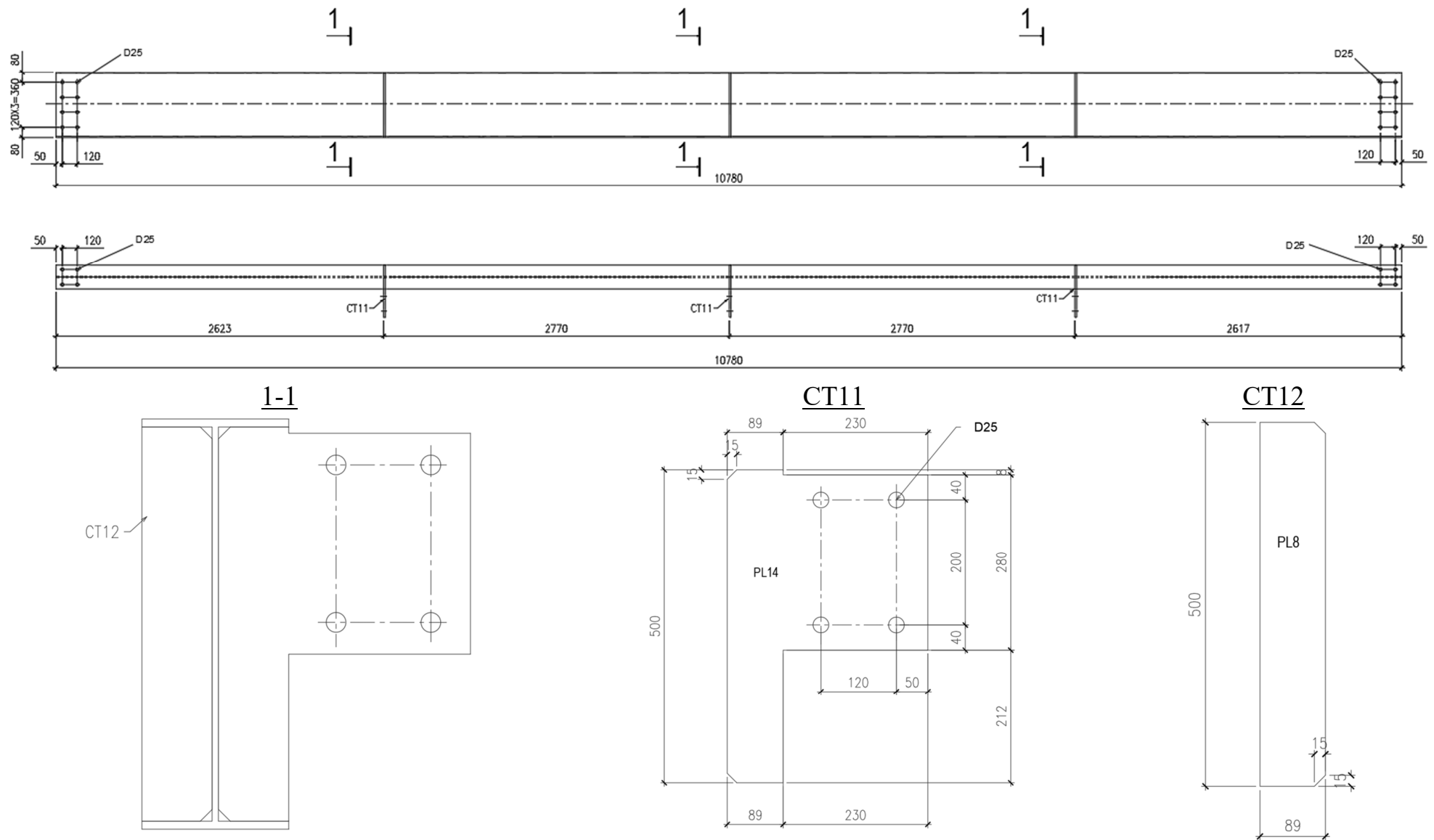
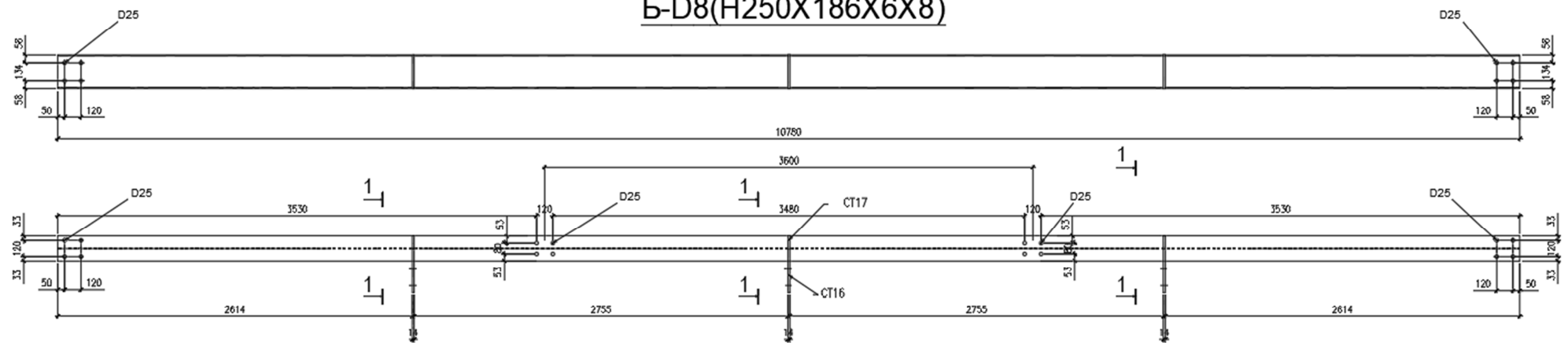


Рисунок А.7. Балка Б-D1(H520×186×8×10), разрез 1-1 и детали CT11, CT12

Б-D8(H250X186X6X8)



1-1

CT16

CT17

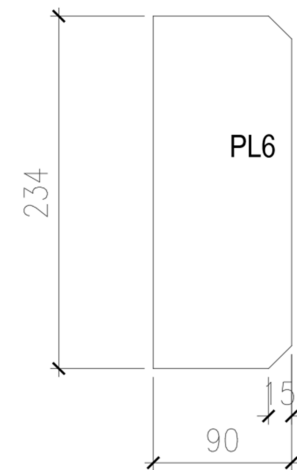
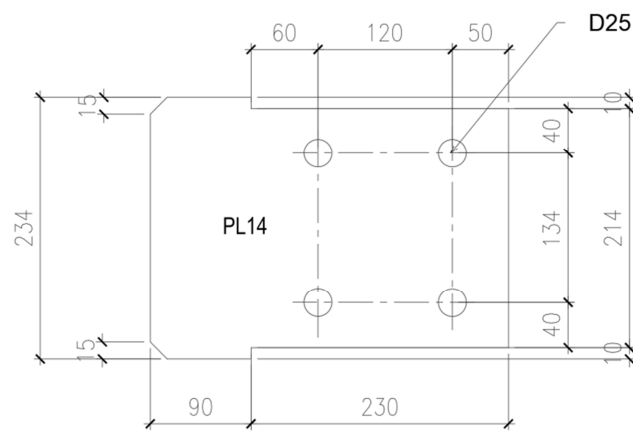
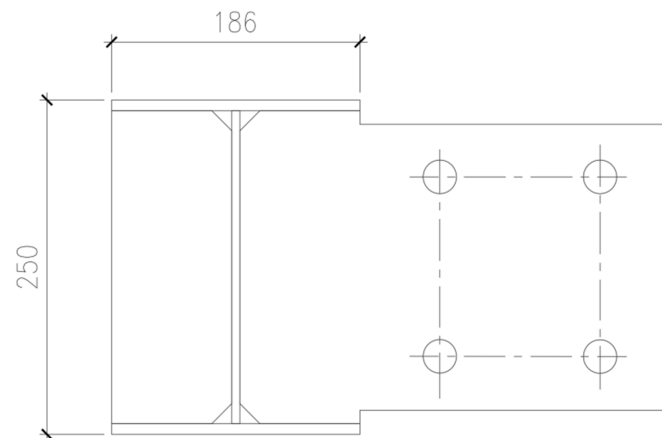


Рисунок А.8. Балка Б-D8(H250×186×6×8), разрез 1-1 и детали CT16, CT17

150

H250X186X8X8

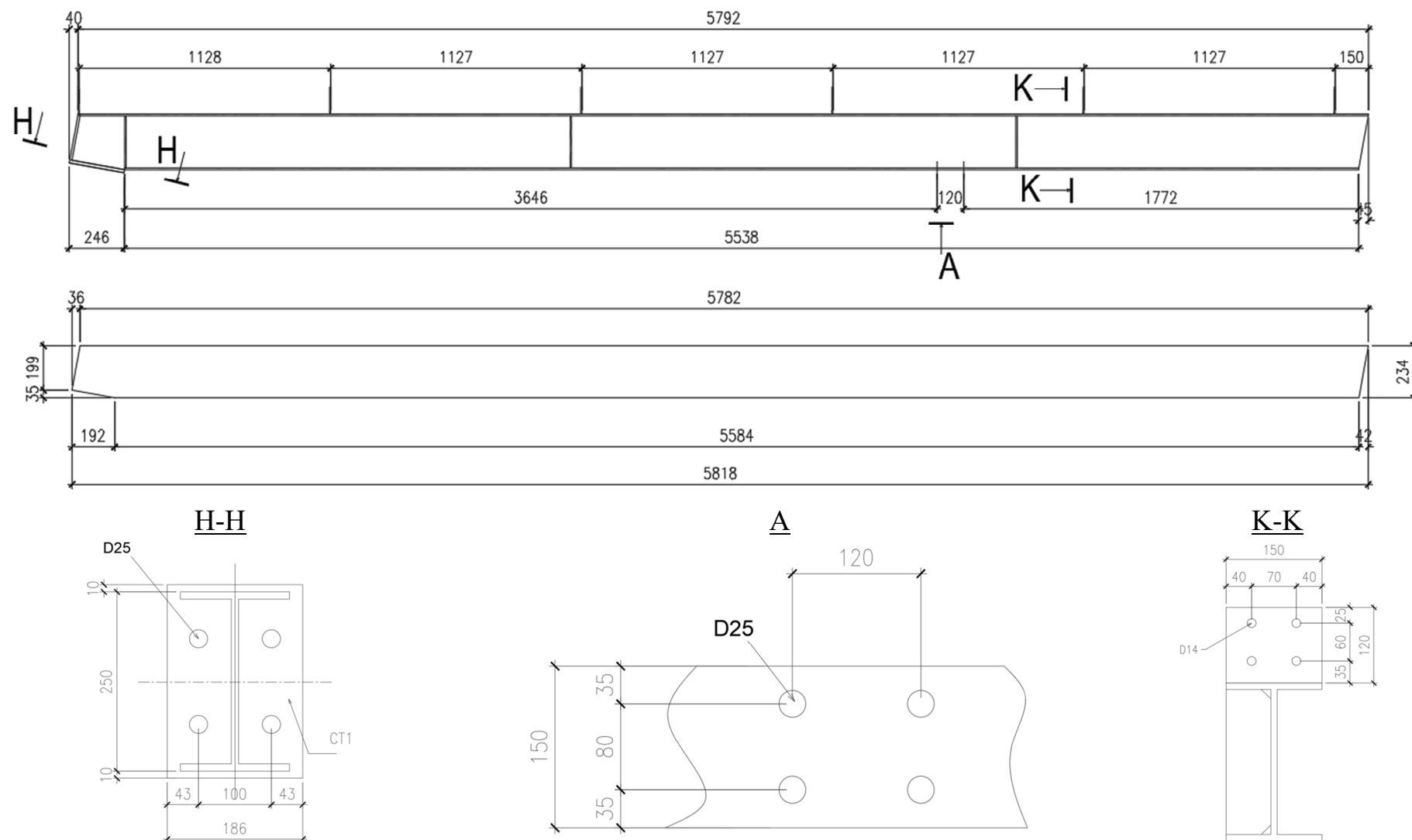


Рисунок А.9. Балка (H250×186×8×8), разрезы Н-Н, К-К и деталь А

Приложение Б. Публикации по теме диссертации

Публикации в изданиях, индексируемых в БД Scopus и Web of Science:

1. Lalin V.V., Ngo H.H. The Loop Resultant Method for Static Structural Analysis // International Journal for Computational Civil and Structural Engineering. – 2022. – № 1. - С. 72–81. DOI: 10.22337/2587-9618-2022-18-1-72-81.

Публикации в изданиях, включенных в Перечень ВАК:

2. Lalin V.V., Ngo H.H., Vavilova A.M. A finite element force method applied to free vibration of rod systems // Системные технологии. – 2024. - № 1. - С. 34-46. DOI: 10.48612/dnitii/2024_50_34-46.

3. Лалин В.В., Ле Т.К.Ч., Нго Х.Х. Способ статического учета высших форм колебаний в задачах динамики конструкций // Природные и техногенные риски. Безопасность сооружений. – 2020. - № 3. - С. 39-42.

4. Lalin V.V., Lalina I.I., Ngo H.H., Le T.M.D. The force method algorithm in the form of a loop resultant method // Строительство и реконструкция. – 2024. - № 4. - С. 42-55. DOI: 10.33979/2073-7416-2024-114-4-42-55.

5. Ngo H.H., Lalin V.V., Le T.Q.T. Free vibration analysis of rod systems using the finite element force method with extended shape functions // Вестник инженерной школы Дальневосточного федерального университета. - 2024. - № 2. - С. 127-141. DOI: 10.24866/2227-6858/2024-2/127-141.

6. Lalin V.V., Lalina I.I., Ngo H.H., Vavilova A.M. An element forces formulation of stability analysis using the finite element force method for rod systems // Инновации и Инвестиции. – 2024. - № 2. - С. 270-275.

Статьи в сборниках трудов научно-технических конференций:

7. Ngo H.H., Lalin V.V., Lalina I.I., Vavilova A.M., Le T.Q.T., Le T.M.D. The Idea of a “Loop Fragment” of the Finite Element Force Method in the Loop Resultant Method for Static Structural Analysis // Materials Proceedings, ISSN: 2673-4605. – 2024. - № 18. – 8 с. DOI: 10.3390/materproc2024018003.

8. Лалин В.В., Чуднова Е.П., Нго Х.Х. Алгоритм расчета статически неопределимых стержневых конструкций с помощью метода контурных усилий //

Сборник трудов конференции «Неделя науки СПбПУ»: Материалы всероссийской конференции. Инженерно-строительный Институт. - Санкт-Петербург. - 2021. - С. 446-448.

9. Лалин В.В., Лалина И.И., Нго Х.Х. Алгоритмизация метода сил для стержневых систем – метод контурных усилий // Сборник трудов конференции: Материалы XIV международной конференции по прикладной математике и механике в аэрокосмической отрасли (АММАГ'2022). - Алушта. – 2022. – С. 205-206.

10. Лалин В.В., Нго Х.Х. Обобщенная точка Коссера - материальная точка с тензором инерции и тензором масс. Новые конечные элементы для задач динамики стержневых систем // Сборник трудов конференции: Материалы XXIII международной конференции по вычислительной механике и современным прикладным программным системам (ВМСППС'2023). – с. Дивноморское, Краснодарский край. – 2023. – С. 58-59.

Тезисы в сборниках трудов научно-технических конференций:

11. Лалин В.В., Нго Х.Х. Материальная точка с разными массами по разным направлениям – новые конечные элементы в задачах динамики стержневых систем // Сборник тезисов научных докладов VIII-го Международного симпозиума «Актуальные проблемы компьютерного моделирования конструкций и сооружений». – Тамбов. - 2023. – С. 151-152.

12. Лалин В.В., Нго Х.Х. Обобщенная точка Коссера. Новые конечные элементы для задач динамики стержневых систем // Сборник тезисов научных докладов XXIII Зимней школы по механике сплошных сред. - Пермь. - 2023. – С. 191.

13. Lalin V.V., Ngo H.H., Le T.Q.T. An element forces formulation of finite element force method applied to the vibration analysis // Сборник тезисов научных докладов XVII-го Международной научно-технической конференции «Актуальные проблемы компьютерного моделирования конструкций и сооружений». – Новосибирск. - 2024. – С. 23.

Приложение В. Справки о внедрении

Директор консалтинговой компании

«UVI CO.,LTD»

Чан Тай Сон

« 17 » август 2024 г.

СПРАВКА

о внедрении результатов диссертационного исследования

Нго Хыу Хиеу

Консалтинговая компания «UVI CO.,LTD» (Вьетнам) подтверждает, что результаты диссертационного исследования Нго Хыу Хиеу на тему «Метод сил в задачах статики, динамики и устойчивости стержневых систем», представленной на соискание ученой степени кандидата технических наук, обладают актуальностью и представляют практический интерес.

В период 2022 – 2024 годов нашему предприятию был поставлен метод сил в форме метода конечных элементов в усилиях (МКЭУ). Разработанная программа МКЭУ с помощью программного обеспечения MATLAB была успешно использована для расчетов железобетонных сооружений в сейсмоопасных районах в городах Дананг и Куанг Нам, Вьетнам. Результаты внутреннего усилия железобетонных колонн и балок, полученные по методу конечных элементов в усилиях, меньше, чем у метода конечных элементов в перемещениях (ETABS), что помогает нашим клиентам сэкономить около 2,5 процентов количества арматуры и соответствует национальному стандарту (TCVN 5574). Намечено в ближайшем времени широкое использование разработанной программы МКЭУ при проектировании зданий и сооружений на нашем предприятии.

Директор консалтинговой компании

«UVI CO.,LTD»



Чан Тай Сон



Заместитель генерального директора
АО «WINHOUSE J.S.C»
Тай Хыу Хай
« 05 » сентября 2024 г.

СПРАВКА

о внедрении результатов диссертационного исследования
Нго Хыу Хиеу

Акционерное общество «WINHOUSE J.S.C» (Вьетнам) подтверждает, что результаты диссертационного исследования Нго Хыу Хиеу на тему «Метод сил в задачах статики, динамики и устойчивости стержневых систем», представленной на соискание ученой степени кандидата технических наук, обладают актуальностью и представляют практический интерес.

В период 2022 – 2023 годов нашему предприятию был поставлен метод сил в форме метода конечных элементов в усилиях (МКЭУ). Разработанная программа МКЭУ с помощью программного обеспечения MATLAB была успешно использована при проверке устойчивости металлических строительных конструкций в городе Дананг, Вьетнам. При проектировании металлических конструкций обычно используются значения коэффициента расчетной длины μ колонны, полученные из национального стандарта (TCVN 5575) и метода конечных элементов в перемещениях (SAP2000). Кроме того, значения μ , полученные методом конечных элементов в усилиях, также необходимы для применения.

Опытное проектирование и строительство с использованием МКЭУ показало возможность экономии около 0.8% стали, что позволило сберечь материальные ресурсы заказчика.

Результаты диссертационного исследования были также использованы для проектирования железобетонных конструкций. Использование предлагаемого МКЭУ необходимо и является научно обоснованным вкладом при разработке оптимальных проектных решений в ближайшем будущем.

Заместитель генерального директора
АО «WINHOUSE J.S.C»



GIÁM ĐỐC
Thái Hữu Hải