

На правах рукописи



Семенов Алексей Александрович

**ПРОЧНОСТЬ И УСТОЙЧИВОСТЬ ПОДКРЕПЛЕННЫХ
ОРТОТРОПНЫХ ОБОЛОЧЕЧНЫХ КОНСТРУКЦИЙ
В ЗАДАЧАХ СТАТИКИ И ДИНАМИКИ**

Специальность 2.1.9. Строительная механика

АВТОРЕФЕРАТ

диссертации на соискание ученой степени
доктора технических наук

Санкт-Петербург – 2024

Работа выполнена в федеральном государственном бюджетном образовательном учреждении высшего образования «Санкт-Петербургский государственный архитектурно-строительный университет».

Научный консультант: доктор технических наук, профессор
Карпов Владимир Васильевич

Официальные оппоненты: **Галишникова Вера Владимировна**,
доктор технических наук, доцент,
ФГБОУ ВО «Национальный исследовательский
Московский государственный строительный
университет» (НИУ МГСУ), проректор;
Каюмов Рашит Абдулхакович,
доктор физико-математических наук, профессор,
ФГБОУ ВО «Казанский государственный
архитектурно-строительный университет»,
кафедра «Механика», профессор;
Петров Владилен Васильевич,
доктор технических наук, профессор, академик РААСН,
ФГБОУ ВО «Саратовский государственный технический
университет имени Гагарина Ю.А.»,
кафедра «Строительные материалы, конструкции
и технологии», профессор.

Ведущая организация: **ФГБОУ ВО «Петербургский государственный
университет путей сообщения
Императора Александра I».**

Защита состоится «16» апреля 2024 г. в 11³⁰ часов, на заседании диссертационного совета **24.2.380.01** при ФГБОУ ВО «Санкт-Петербургский государственный архитектурно-строительный университет» по адресу: 190005, Санкт-Петербург, ул. 2-я Красноармейская, д. 4, зал заседаний диссертационного совета (ауд. № 220).

Тел./Факс: (812) 316-58-72; E-mail: rector@spbgasu.ru

С диссертацией можно ознакомиться в библиотеке ФГБОУ ВО «Санкт-Петербургский государственный архитектурно-строительный университет» и на сайте: <https://dis.spbgasu.ru/specialtys/personal/semenov-aleksey-aleksandrovich-0>

Автореферат разослан «05» февраля 2024 года.

Ученый секретарь
диссертационного совета

Попов Владимир Мирович

ОБЩАЯ ХАРАКТЕРИСТИКА РАБОТЫ

Актуальность темы исследования. Изучение процесса деформирования оболочечных конструкций имеет существенное значение для различных областей промышленности, в том числе авиастроения, судостроения, ракетостроения и других. В строительстве такие конструкции зачастую применяются, в том числе, для покрытия большепролетных сооружений. Например, такая необходимость возникает при строительстве общественных зданий: стадионов, концертных залов, рынков; зданий промышленного назначения: складов, ангаров для техники и оборудования, заводских корпусов.

Основное требование к оболочкам-покрытиям строительных сооружений – обеспечение безопасной и долговременной работоспособности конструкции при заданных уровнях нагрузок. При этом важным является и уменьшение их материалоемкости. Оболочки покрытия изготавливаются из железобетона, стали или композиционных материалов, которые обладают высокой жесткостью, но при этом существенно более легкие. Однако малое применение композиционных материалов для конструкций большепролетных строительных сооружений связано с дороговизной материала и недостаточной степенью исследования их работоспособности. Некоторые из таких материалов можно рассматривать как ортотропные.

Проведение комплексных исследований процесса деформирования оболочек по наиболее точным математическим моделям позволит аргументированно принимать проектные решения, что будет способствовать их безопасной работе, а также уменьшению материалоемкости конструкции и снижению её себестоимости.

Тонкостенные оболочечные конструкции могут терять работоспособность не только из-за необратимых изменений в материале (потеря прочности), но и из-за потери устойчивости, когда малое изменение нагрузки приводит к существенному быстрому возрастанию перемещений (прогибов). К сожалению, в большинстве известных исследований авторами анализируется только что-то одно – или прочность, или устойчивость. Данное исследование носит комплексный характер, и рассматривает оба параметра, определяющие надежность и безопасность строительных конструкций.

Подкрепление тонкостенных конструкций различными жесткими элементами позволяет существенно улучшить их эксплуатационные показатели. Оболочки, подкрепленные ребрами жесткости, теряют устойчивость при нагрузках, в несколько раз больших, чем гладкие. Сфера применения таких оболочек довольно обширна – судостроение, авиастроение, ракетостроение, строительство и т.д. Манипулирование способами

подкрепления оболочки позволяет снизить напряжения в местах их концентрации и найти оптимальный вариант конструкции.

Поэтому актуальным является совместное исследование прочности, устойчивости и закритического поведения подкрепленных ребрами оболочек из ортотропных материалов на основе наиболее точных математических моделей их деформирования, эффективных алгоритмов расчета и специально разработанного программного обеспечения.

Данные исследования были поддержаны Минобрнауки РФ в рамках выполнения государственного задания № 3801 «Комплексное исследование прочности, устойчивости и нелинейных колебаний подкрепленных оболочечных конструкций на основе разработанных программных продуктов» (2015-2016 гг.), грантом РНФ № 18-19-00474 «Разработка математических моделей и методов расчета необратимого деформирования конструкций со сложной реологией материала» (2018-2020 гг.), неоднократно поддерживались грантами Комитета по научной и высшей школе Санкт-Петербурга (2015, 2016, 2017, 2018, 2020, 2021, 2022 гг.). Кроме того, результаты исследования используются в деятельности научной школы «Компьютерные технологии комплексного исследования прочности, устойчивости и нелинейных колебаний строительных конструкций зданий и сооружений», действующей в СПбГАСУ под руководством д.т.н., профессора В. В. Карпова.

Степень разработанности темы исследования. Теория тонкостенных оболочек начала развиваться в начале XX века. основополагающую роль в ее развитии сыграли работы В. З. Власова, Б. Г. Галеркина, А. Л. Гольденвейзера, Л. Доннелла, Т. Кармана, А. И. Лурье, А. Лява, Х. М. Муштари, В. В. Новожилова, Г. Рейсснера, Э. Рейсснера. Существенный вклад в дальнейшее развитие теории и методов расчета тонкостенных оболочек внесли работы Н. А. Алумяз, С. А. Амбарцумяна, И. А. Биргера, Н. В. Валишвили, А. С. Вольмира, С. С. Гаврюшина, К. З. Галимова, Э. И. Григолюка, А. Н. Гузя, Р. А. Каюмова, В. Н. Паймушина, В. В. Петрова, В. Г. Соколова, А. А. Трещева, К. Ф. Черных, А. П. Янковского и др.

Основы теории анизотропных пластин, и, в частности – ортотропных, можно найти в работах С. А. Амбарцумяна, В. В. Васильева, С. Г. Лехницкого и др. Устойчивость оболочек исследовалась многими авторами, однако большинство публикаций относятся к исследованию изотропных конструкций. Одними из первых работ по исследованию устойчивости оболочек из композиционных материалов были работы Р. Б. Рикардса и Г. А. Тетерса. В этих работах использована модель гладких оболочек, основанная на гипотезах Кирхгофа – Лява. Следует также отметить работы Л. Г. Белозерова и В. А. Киреева, И. С. Чернышенко и В. А. Максимиюка и др.

Из иностранных ученых, занимающихся устойчивостью оболочек из композитных материалов, следует отметить М. Amabili, E. Carrera, J. N. Reddy и др. Обширный экспериментальный материал по нахождению предельных значений напряжений для оболочек из композиционных материалов представлен в работах А. А. Смердова и С. В. Цветкова.

Различные критерии прочности изотропных и ортотропных материалов описали в своих работах И. И. Гольденблат и В. А. Копнов, Ш. О. Кулон, А. А. Лебедев, Р. Мизес, Г. С. Писаренко, С. В. Цветков, L. Fisher, O. Hoffman, S. W. Tsai и Е. М. Wu, М.-Н. Yu и др.

Основные идеи расчета ребристых оболочек были высказаны в конце 40-х годов XX века А. И. Лурье и В. З. Власовым. А. И. Лурье и В. З. Власов считали, что ребра взаимодействуют с обшивкой по линии и представляют собой одномерные стержневые элементы, работающие только на растяжение-сжатие и изгиб. Позднее П. А. Жилин предложил оболочку, подкрепленную ребрами жесткости, рассматривать как оболочку дискретно-переменной толщины. Такой же подход использовался в работах Л. В. Енджиевского, И. Н. Преображенского и В. В. Карпова. Следует также отметить работы И. Я. Амиро и В. А. Заруцкого, Г. Н. Белосточного, Д. П. Голоскокова, Е. С. Гребня, Б. К. Михайлова, С. А. Тимашева. Вопросам расчета сетчатых оболочек посвящены работы В. В. Галишниковой.

Также существует подход к расчету ребристой оболочки, который основан на «размазывании» жесткости ребер по всей конструкции, и рассмотрении ее как конструктивно-ортотропной.

Среди зарубежных исследований по ребристым оболочкам следует отметить работы M. Baruch и J. Singer, Y.-S. Lee и Y.-W. Kim, K. M. Liew, Van der Neut, T. Y. Ng, X. Zhao и др.

Изначально решение задач устойчивости оболочек при статическом нагружении основывалось на применении метода Эйлера, то есть нахождении собственных значений. Таким образом, задача сводилась к решению линейных уравнений. Чтобы исследовать частные и общие формы потери устойчивости оболочек и их закритическое поведение, необходимо решать уравнения, которые являются нелинейными. Эта задача существенно упростилась после опубликования в 1959 году В. В. Петровым метода последовательных нагружений. Позднее был разработан метод продолжения решения по наилучшему параметру (этим параметром являлась длина дуги кривой равновесных состояний), описание которого можно найти в работах В. И. Шалашилина и Е. Б. Кузнецова.

Цель и задачи исследования.

Цель исследования – развитие теории и методов расчета тонкостенных ортотропных оболочечных конструкций, подкрепленных ребрами жесткости, при статическом или динамическом нагружении.

Задачи исследования:

1. Анализ методов учета ребер жесткости для тонкостенных оболочечных конструкций. Разработка наиболее точного (уточненного) дискретного метода для учета ребер жесткости.

2. Разработка математической модели деформирования ортотропных оболочек при статическом нагружении с учетом геометрической нелинейности, поперечных сдвигов, наличия ребер жесткости в соответствии с рассмотренными методами их учета.

3. Разработка эффективного алгоритма исследования прочности и устойчивости подкрепленных оболочек из ортотропных материалов при статическом нагружении, позволяющего автоматически выбирать оптимальный по точности шаг нагружения и без смены параметра обходить особые точки кривой равновесных состояний.

4. Модификация разработанного автором программного обеспечения расчетов прочности и устойчивости оболочек из ортотропных материалов при статическом нагружении на основе передовых технологий программирования.

5. Анализ критериев предельного состояния материала и выбор наиболее оптимального для определения предельных нагрузок начала невыполнения условий прочности. Анализ процесса развития областей невыполнения условий прочности в закритической области.

6. Выполнение комплексного исследования прочности и устойчивости подкрепленных ортотропных оболочечных конструкций при статическом механическом нагружении в докритической и закритической стадиях.

7. Анализ эффективности подкрепления оболочечных конструкций ребрами жесткости в одном направлении, в двух направлениях, с внутренней или с внешней стороны. Сопоставление результатов расчетов по известным методам учета ребер жесткости и по уточненному дискретному методу, предложенному автором.

8. Разработка математической модели деформирования ортотропных оболочек при динамическом нагружении с учетом геометрической нелинейности, поперечных сдвигов, инерции вращения, наличия ребер жесткости в соответствии с рассмотренными методами их учета.

9. Разработка эффективного алгоритма исследования устойчивости подкрепленных оболочек из ортотропных материалов при динамическом нагружении.

10. Разработка программного обеспечения расчетов устойчивости оболочек из ортотропных материалов при динамическом нагружении на основе передовых технологий программирования.

11. Анализ устойчивости подкрепленных ортотропных оболочечных конструкций при динамическом механическом нагружении в докритической и закритической стадиях.

Научная новизна исследований заключается в следующем:

1. Разработана математическая модель деформирования ортотропных оболочек при статическом нагружении, учитывающая в совокупности геометрическую нелинейность, поперечные сдвиги, наличие ребер жесткости в соответствии с рассмотренными методами их учета. Все варианты модели могут быть использованы для конструкций разной геометрической формы, которая может быть задана через параметры Ляме и радиусы главных кривизн.

2. Разработан уточненный дискретный метод для учета ребер жесткости тонкостенных оболочечных конструкций. Для ребер, направленных перпендикулярно рассматриваемому направлению, вводится коэффициент приведения, равный отношению ширины ребер этого направления к линейному размеру оболочки в рассматриваемом направлении.

3. Расширена область применения метода конструктивной анизотропии для выполнения расчетов оболочечных конструкций из ортотропного материала. Метод позволяет свести конструкцию дискретно-переменной толщины к равновеликой по жесткости оболочке постоянной толщины.

4. Предложен вариант математической модели, позволяющий исследовать конструкции, когда в ортогонально расположенных жесткостных элементах направление укладки армирующих волокон всегда происходит вдоль ребра.

5. Разработан алгоритм исследования прочности и устойчивости подкрепленных оболочек из ортотропных материалов при статическом нагружении, позволяющий без смены параметра и с адаптивным выбором сетки обходить особые точки кривой равновесных состояний и исследовать за критическое поведение конструкций.

6. Предложена методика исследования прочности и устойчивости подкрепленных оболочечных конструкций при статическом или динамическом нагружении путем нахождения напряженно-деформированного состояния конструкции при последовательном увеличении нагрузки и построении кривой равновесных состояний.

7. Получены значения критических нагрузок потери устойчивости и нагрузки начала невыполнения условий прочности, построены зависимости «нагрузка – прогиб» для разных вариантов конструкций. Выполнен анализ процесса развития областей невыполнения условий прочности в критической области по нескольким критериям для широкого класса объектов (пологих оболочек двойкой кривизны, цилиндрических и конических панелей, а также сферических куполов).

8. Получены значения критических нагрузок для оболочек с вариантами подкрепления ребрами жесткости в одном направлении, в двух

направлениях, с внутренней или с внешней стороны. Максимальные значения критической нагрузки соответствуют варианту подкрепления ортогональной сеткой ребер с внешней стороны.

9. Разработаны несколько вариантов математической модели деформирования ортотропных оболочек при динамическом нагружении. В качестве основной предложено использовать модель в виде системы обыкновенных дифференциальных уравнений первого порядка с учетом геометрической нелинейности, поперечных сдвигов, инерции вращения, наличия ребер жесткости в соответствии с рассмотренными методами их учета. Данная модель получена применением метода Л. В. Канторовича к функционалу полной энергии деформации.

10. Разработан алгоритм исследования устойчивости подкрепленных оболочек из ортотропных материалов при динамическом нагружении, основанный на методе Л. В. Канторовича и методе Розенброка для решения жестких систем ОДУ, к которым относятся уравнения движения тонкостенных оболочечных конструкций.

11. Получены значения критических нагрузок и зависимости «нагрузка – прогиб» подкрепленных ортотропных оболочечных конструкций при действии нагрузки, линейно зависящей от времени, в докритической и закритической стадиях. Результаты представлены для пологих оболочек двоякой кривизны, цилиндрических и конических панелей.

Теоретическая и практическая значимость работы. *Теоретическая значимость* заключается в развитии нелинейной теории деформирования подкрепленных ортотропных оболочечных конструкций, разработке нового уточненного метода учета ребер жесткости и адаптации известных методов под новый класс задач, расширении области применения разработанных подходов на задачи динамики.

Практическая значимость заключается в возможности применения разработанных методик и компьютерных программ для исследования напряженно-деформированного состояния, прочности и устойчивости подкрепленных ребрами оболочек из ортотропных материалов при статическом или динамическом нагружении в проектных организациях, научных исследованиях и учебном процессе. Результаты исследования и методики расчета прочности и устойчивости тонкостенных оболочечных конструкций приняты к внедрению в проектно-конструкторской деятельности АО «Институт Гипростроймост – Санкт-Петербург». В учебном процессе ФГБОУ ВО СПбГАСУ результаты используются в учебных дисциплинах «Компьютерное и математическое моделирование», «Компьютерное моделирование нелинейных процессов в строительстве».

Объект исследований: тонкостенные ортотропные оболочки, подкрепленные ребрами жесткости.

Предмет исследований: напряженно-деформированное состояние, прочность и устойчивость подкрепленных ортотропных оболочек при статическом или динамическом механическом нагружении.

Методология и методы исследования: метод Ритца для сведения вариационной задачи нахождения минимума функционала к решению системы нелинейных алгебраических уравнений; метод продолжения решения по наилучшему параметру для решения системы нелинейных алгебраических уравнений; метод Эйлера; дискретный метод учета ребер жесткости «по линии», дискретный метод учета ребер жесткости «по полосе», метод конструктивной анизотропии, уточненный дискретный метод (предложен автором); метод Л. В. Канторовича; метод Розенброка для решения жестких систем ОДУ; методы строительной механики, вычислительной математики и разработки программного обеспечения.

Область исследований соответствует паспорту специальности 2.1.9. Строительная механика, а именно следующим основным направлениям: **п. 2** «Линейная и нелинейная механика конструкций, зданий и сооружений, разработка физико-математических моделей их расчета», **п. 4** «Численные и численно-аналитические методы расчета зданий, сооружений и их элементов на прочность, жесткость, устойчивость и динамику при силовых, температурных и других воздействиях».

Личный вклад автора. Все результаты диссертационной работы принадлежат лично автору. Во всех работах, опубликованных в соавторстве, автору в равной степени принадлежит постановка задач и формулировка основных положений, определяющих научную новизну исследований.

Положения, выносимые на защиту:

1. Математическая модель деформирования ортотропных оболочек при статическом нагружении, учитывающая в совокупности геометрическую нелинейность, поперечные сдвиги, наличие ребер жесткости в соответствии с рассмотренными методами их учета.

2. Уточненный дискретный метод учета ребер жесткости для тонкостенных оболочечных конструкций. Для ребер, направленных перпендикулярно рассматриваемому направлению, вводится коэффициент приведения, равный отношению ширины ребер этого направления к линейному размеру оболочки в рассматриваемом направлении.

3. Модифицированный метод конструктивной анизотропии для выполнения расчетов оболочечных конструкций из ортотропного материала. Метод позволяет свести конструкцию дискретно-переменной толщины к равновеликой по жесткости оболочке постоянной толщины.

4. Алгоритм исследования прочности и устойчивости подкрепленных оболочек из ортотропных материалов при статическом нагружении,

позволяющий без смены параметра и с адаптивным выбором сетки обойти особые точки кривой равновесных состояний и исследовать закритическое поведение конструкций.

5. Значения критических нагрузок потери устойчивости и нагрузок начала невыполнения условий прочности, зависимости «нагрузка – прогиб» для разных вариантов конструкций. В том числе, для оболочек с вариантами подкрепления ребрами жесткости в одном направлении, в двух направлениях, с внутренней или с внешней стороны. Результаты анализа процесса развития областей невыполнения условий прочности в закритической области по нескольким критериям для широкого класса объектов (пологих оболочек двоякой кривизны, цилиндрических и конических панелей, а также сферических куполов).

6. Несколько вариантов математической модели деформирования ортотропных оболочек при динамическом нагружении. В качестве основной предложено использовать модель в виде системы обыкновенных дифференциальных уравнений первого порядка с учетом геометрической нелинейности, поперечных сдвигов, инерции вращения, наличия ребер жесткости в соответствии с рассмотренными методами их учета. Данная модель получена применением метода Л. В. Канторовича к функционалу полной энергии деформации.

7. Алгоритм исследования устойчивости подкрепленных оболочек из ортотропных материалов при динамическом нагружении, основанный на методе Л. В. Канторовича и методе Розенброка для решения жестких систем ОДУ, к которым относятся уравнения движения тонкостенных оболочечных конструкций.

8. Значения критических нагрузок и зависимости «нагрузка – прогиб» подкрепленных ортотропных оболочечных конструкций при действии нагрузки, линейно зависящей от времени, в докритической и закритической стадиях. Результаты представлены для пологих оболочек двоякой кривизны, цилиндрических и конических панелей.

Степень достоверности и апробация результатов. Степень достоверности результатов проведенных исследований обоснована применением апробированных методов строительной механики и вычислительной математики; подтверждена сравнением результатов расчета тестовых задач с некоторыми решениями, полученными другими авторами, а также качественным согласованием результатов расчета с результатами экспериментов других авторов; обеспечена обоснованностью методологии исследования, ее соответствием поставленной проблеме и глубокой проработкой научной литературы по теме диссертации.

Апробация работы. Результаты работы докладывались на следующих конференциях и семинарах:

71-я, 72-я, 73-я и 74-я научная конференция профессоров, преподавателей, научных работников, инженеров и аспирантов университета «Архитектура – Строительство – Транспорт» (7–9 октября 2015 г., 5–7 октября 2016 г., 4–6 октября 2017 г., 3–5 октября 2018 г., Санкт-Петербург); 68-я, 69-я, 70-я и 71-я Всероссийская научно-практическая конференция студентов, аспирантов и молодых ученых «Актуальные проблемы современного строительства» (15–17 апреля 2015 г., 6–8 апреля 2016 г., 5–7 апреля 2017 г., 4–6 апреля 2018 г., Санкт-Петербург); III и IV Международный научный семинар «Динамическое деформирование и контактное взаимодействие тонкостенных конструкций при воздействии полей различной физической природы» (19–21 октября 2015 г., 15–19 февраля 2016 г., Москва); XXIV и XXVI Международный симпозиум «Динамические и технологические проблемы механики конструкций и сплошных сред» им. А.Г. Горшкова (19–23 марта 2018 г., 16–20 марта 2020 г., Кремлёнки); Двенадцатая конференция с международным участием «Новые информационные технологии в исследовании сложных структур» (4–8 июня 2018 г., Катуль); XXVI Международная конференция «Математическое и компьютерное моделирование в механике деформируемых сред и конструкций» (28–30 сентября 2015 г., Санкт-Петербург); XXVII Международная конференция «Математическое и компьютерное моделирование в механике твердого тела и конструкциях – МКМ 2017» (25–27 сентября 2017 г., Санкт-Петербург); VI Международная научная конференция «Задачи и методы компьютерного моделирования конструкций и сооружений» («Золотовские чтения») (15 февраля 2017 г., Москва); X Международная конференция «Проблемы прочности материалов и сооружений на транспорте» (23–25 мая 2017 г., Санкт-Петербург); X, XI и XIV, XVI Международная конференция «Механика, ресурс и диагностика материалов и конструкций» (16–20 мая 2016 г., 11–15 декабря 2017 г., 9–13 ноября 2020 г., 16–20 мая 2022 г., Екатеринбург); Международная конференция: Воронежская весенняя математическая школа «Понрягинские чтения – XXX» (3–9 мая 2019 г., Воронеж); Международная научно-практическая конференция, посвященная 90-летию СГТУ им. Гагарина Ю.А. «Геометрическое компьютерное моделирование в подготовке специалистов для цифровой экономики» (20–22 мая 2020 г., Саратов).

Полностью диссертация обсуждалась на научном семинаре ФГБОУ ВО СПбГАСУ 08 июня 2022 г., на научном семинаре ФГБОУ ВО НИУ МГСУ 27 января 2023 г., на научном семинаре ФГБОУ ВО СГТУ им. Гагарина Ю.А. 29 сентября 2023 г.

Публикации. Основные научные результаты диссертации опубликованы в 85 научных работах, в том числе 10 в рецензируемых изданиях из перечня, размещенного на официальном сайте ВАК, 37 в рецензируемых

изданиях, индексируемых в базах данных Scopus и/или Web of Science, 3 свидетельства о государственной регистрации программ для ЭВМ. Общий объем научных работ составляет 40 п.л. (авторских – 25,4 п.л.).

Структура и объем работы. Диссертация состоит из оглавления, введения, шести глав, заключения, списка сокращений и условных обозначений, списка литературы и приложений. Текст диссертации изложен на 383 страницах, содержит 61 таблицу, 109 рисунков, 5 приложений и список использованной литературы из 298 наименований работ отечественных и зарубежных авторов.

ОСНОВНОЕ СОДЕРЖАНИЕ РАБОТЫ

1. Математическая модель деформирования ортотропных оболочек при статическом нагружении, учитывающая в совокупности геометрическую нелинейность, поперечные сдвиги, наличие ребер жесткости в соответствии с рассмотренными методами их учета.

Рассматриваемые виды тонкостенных оболочек с осями локальной криволинейной системы координат показаны на рис. 1, координатная поверхность совпадает со срединной поверхностью. Соответствующие значения параметров Ляме и главных радиусов кривизны приведены в табл. 1.

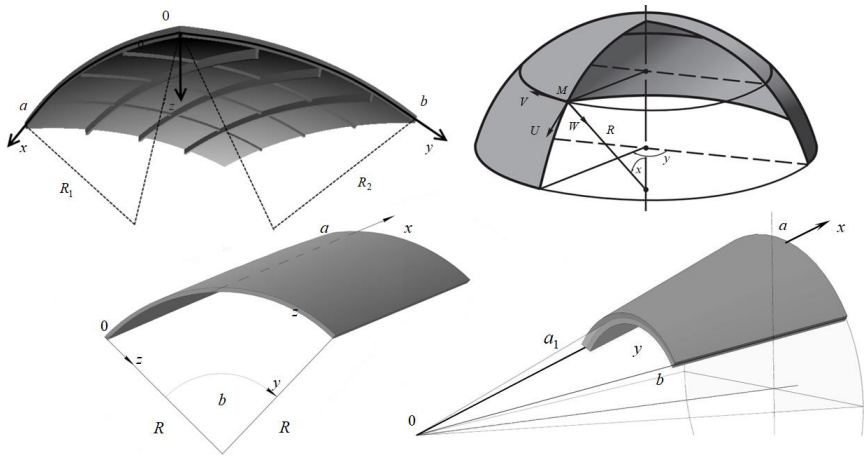


Рис. 1. Рассматриваемые виды тонкостенных оболочек

Математическая модель деформирования тонких оболочечных конструкций учитывает ортотропию материала, геометрическую нелинейность, поперечные сдвиги.

Таблица 1. Параметры Ляме и главные радиусы кривизны

Вид конструкции	A	B	R_1	R_2
Пологая двоякой кривизны	1	1	const	const
Цилиндрическая	1	R_2	∞	const
Коническая	1	$x \cdot \sin \theta$	∞	$x \cdot \operatorname{tg} \theta$
Сферическая	R	$R \cdot \sin x$	R	R

Перемещения в слое, находящимся на расстоянии z от срединной поверхности, примут вид

$$U^z = U + z\Psi_x, \quad V^z = V + z\Psi_y, \quad W^z = W, \quad (1)$$

где $U = U(x, y)$, $V = V(x, y)$, $W = W(x, y)$ – перемещения точек срединной поверхности вдоль осей x, y, z ; $\Psi_x = \Psi_x(x, y)$, $\Psi_y = \Psi_y(x, y)$ – углы поворота нормали в плоскостях xOz , yOz .

Геометрические соотношения в срединной поверхности оболочки с учетом геометрической нелинейности принимают вид

$$\begin{aligned} \varepsilon_x &= \frac{1}{A} \frac{\partial U}{\partial x} + \frac{1}{AB} V \frac{\partial A}{\partial y} - k_x W + \frac{1}{2} \theta_1^2, & \varepsilon_y &= \frac{1}{B} \frac{\partial V}{\partial y} + \frac{1}{AB} U \frac{\partial B}{\partial x} - k_y W + \frac{1}{2} \theta_2^2, \\ \gamma_{xy} &= \frac{1}{A} \frac{\partial V}{\partial x} + \frac{1}{B} \frac{\partial U}{\partial y} - \frac{1}{AB} U \frac{\partial A}{\partial y} - \frac{1}{AB} V \frac{\partial B}{\partial x} + \theta_1 \theta_2, & (2) \\ \gamma_{xz} &= k f(z) [\Psi_x - \theta_1], & \gamma_{yz} &= k f(z) [\Psi_y - \theta_2], \\ \theta_1 &= -\left(\frac{1}{A} \frac{\partial W}{\partial x} + k_x U \right), & \theta_2 &= -\left(\frac{1}{B} \frac{\partial W}{\partial y} + k_y V \right), \end{aligned}$$

где $\varepsilon_x, \varepsilon_y$ – деформации удлинения в срединной поверхности; $\gamma_{xy}, \gamma_{xz}, \gamma_{yz}$ – деформации сдвига в плоскостях xOy , xOz , yOz .

Функции изменения кривизн χ_1, χ_2 и кручения χ_{12} :

$$\begin{aligned} \chi_1 &= \frac{1}{A} \frac{\partial \Psi_x}{\partial x} + \frac{1}{AB} \frac{\partial A}{\partial y} \Psi_y, & \chi_2 &= \frac{1}{B} \frac{\partial \Psi_y}{\partial y} + \frac{1}{AB} \frac{\partial B}{\partial x} \Psi_x, \\ \chi_{12} &= \frac{1}{2} \left[\frac{1}{A} \frac{\partial \Psi_y}{\partial x} + \frac{1}{B} \frac{\partial \Psi_x}{\partial y} - \frac{1}{AB} \left(\frac{\partial A}{\partial y} \Psi_x + \frac{\partial B}{\partial x} \Psi_y \right) \right]. & (3) \end{aligned}$$

Физические соотношения (зависимость между напряжениями и деформациями):

$$\sigma_x = \frac{E_1}{1 - \mu_{12}\mu_{21}} \left[\varepsilon_x + \mu_{21}\varepsilon_y + z(\chi_1 + \mu_{21}\chi_2) \right],$$

$$\sigma_y = \frac{E_2}{1 - \mu_{12}\mu_{21}} \left[\varepsilon_y + \mu_{12}\varepsilon_x + z(\chi_2 + \mu_{12}\chi_1) \right], \quad (4)$$

$$\tau_{xy} = G_{12} \left[\gamma_{xy} + 2z\chi_{12} \right], \quad \tau_{xz} = G_{13}kf(z)(\Psi_x - \theta_1), \quad \tau_{yz} = G_{23}kf(z)(\Psi_y - \theta_2).$$

Составляющие усилий и моментов, действующие в обшивке (индекс «0»), будут иметь вид

$$N_x^0 = G_1^0 h (\varepsilon_x + \mu_{21}\varepsilon_y), \quad N_y^0 = G_2^0 h (\varepsilon_y + \mu_{12}\varepsilon_x), \quad M_x^0 = G_1^0 h^3 (\chi_1 + \mu_{21}\chi_2) / 12, \\ M_y^0 = G_2^0 h^3 (\chi_2 + \mu_{12}\chi_1) / 12, \quad N_{xy}^0 = N_{yx}^0 = G_{12}^0 h \gamma_{xy}, \quad (5)$$

$$M_{xy}^0 = M_{yx}^0 = G_{12}^0 h^3 \chi_{12} / 6, \quad Q_x^0 = kG_{13}^0 h (\Psi_x - \theta_1), \quad Q_y^0 = kG_{23}^0 h (\Psi_y - \theta_2),$$

$$G_1^0 = \frac{E_1}{1 - \mu_{12}\mu_{21}}, \quad G_2^0 = \frac{E_2}{1 - \mu_{12}\mu_{21}}.$$

Функционал полной потенциальной энергии деформации оболочечной конструкции можно представить в виде

$$E_s = E_s^0 + E_p^R, \quad (6)$$

где E_p^R формируется в зависимости от способа задания ребер жесткости, и в общем виде будет

$$E_p^R = \frac{1}{2} \int_{a_1}^a \int_0^b \left[N_x^R \varepsilon_x + N_y^R \varepsilon_y + \frac{1}{2} (N_{xy}^R + N_{yx}^R) \gamma_{xy} + M_x^R \chi_1 + M_y^R \chi_2 + \right. \\ \left. + (M_{xy}^R + M_{yx}^R) \chi_{12} + Q_x^R (\Psi_x - \theta_1) + Q_y^R (\Psi_y - \theta_2) \right] AB dx dy, \quad (7)$$

а составляющая функционала, относящаяся к обшивке, будет

$$E_s^0 = \frac{1}{2} \int_{a_1}^a \int_0^b \left[N_x^0 \varepsilon_x + N_y^0 \varepsilon_y + \frac{1}{2} (N_{xy}^0 + N_{yx}^0) \gamma_{xy} + M_x^0 \chi_1 + M_y^0 \chi_2 + (M_{xy}^0 + M_{yx}^0) \chi_{12} + \right. \\ \left. + Q_x^0 (\Psi_x - \theta_1) + Q_y^0 (\Psi_y - \theta_2) - 2(P_x U + P_y V + qW) \right] AB dx dy. \quad (8)$$

Введение безразмерных параметров позволяет одним расчетом получить напряженно-деформированное состояние целой серии подобных оболочек и, тем самым, выбрать наиболее рациональные размерные параметры конструкций; обеспечить корректность применения численных методов; повысить устойчивость решения. Введем безразмерные параметры

$$\xi = \frac{x - a_1}{a - a_1}, \quad \eta = \frac{y}{b}, \quad \bar{\lambda} = \frac{aA}{bB}, \quad k_\xi = hk_x, \quad k_\eta = hk_y, \quad \bar{A} = \frac{aA}{h}, \quad \bar{B} = \frac{bB}{h}, \quad \bar{z} = \frac{z}{h}, \\ \bar{U} = \frac{aUA}{h^2}, \quad \bar{V} = \frac{bVB}{h^2}, \quad \bar{W} = \frac{W}{h}, \quad \bar{\Psi}_x = \frac{\Psi_x aA}{h}, \quad \bar{\Psi}_y = \frac{\Psi_y bB}{h}, \quad \bar{P} = \frac{a^4 A^4 q}{h^4 E_1}, \quad (9)$$

где a, b – линейные размеры оболочки в направлениях x и y ; $\bar{\lambda}$ – безразмерный коэффициент; ξ, η, \bar{z} – новая (безразмерная) система координат.

Чтобы не загромождать рассуждения и не усложнять интерпретацию результатов, далее все соотношения приведены в размерных параметрах. Тем не менее, в разработанном программном обеспечении все вычисления производятся в безразмерных.

2. Уточненный дискретный метод учета ребер жесткости для тонкостенных оболочечных конструкций. Рассмотрим геометрию подкрепленной оболочки. Ребра располагаются со стороны вогнутости, и направлены вдоль осей x, y (рис. 2).

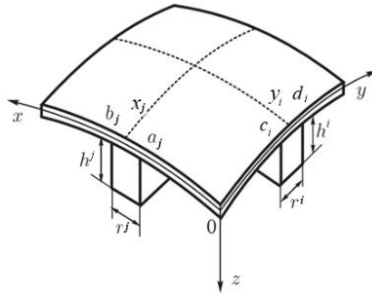


Рис. 2. Схема расположения ребер

Дискретный метод ввода ребер жесткости при контакте с обшивкой «по линии». Во многих работах применяется подход А. И. Лурье, когда принимается

$$N_x^R = E_1 \sum_{i=1}^n (F^i r_i \varepsilon_x + S^i r_i \chi_1) \delta(y - y_i), \quad M_x^R = E_1 \sum_{i=1}^n (S^i r_i \varepsilon_x + J^i r_i \chi_1) \delta(y - y_i),$$

$$N_{xy}^R = N_{yx}^R = 0, \quad M_{xy}^R = M_{yx}^R = 0, \quad Q_x^R = Q_y^R = 0. \quad (10)$$

Здесь F^i, S^i, J^i, r_i, n – площадь поперечного сечения ребер, приходящаяся на единицу длины сечения, для ребер, направленных параллельно оси x ; статический момент и момент инерции этого сечения; ширина ребер этого направления и число ребер этого направления. Аналогично F^j, S^j, J^j, r_j, m – для ребер, параллельных оси y ; $\delta(x - x_j), \delta(y - y_i)$ – дельта-функции. Данный вид математической модели значительно проще, однако не учитывает такие факторы, как взаимное влияние пересекающихся ребер друг на друга, а также влияние подкрепления на сдвиг и кручение в срединной поверхности обшивки, что делает модель менее точной.

Дискретный метод ввода ребер жесткости при контакте с обшивкой «по полосе». П. А. Жилиным было предложено рассматривать оболочку с ребрами как конструкцию дискретно-переменной толщины. Данный подход применялся также в работах Л. В. Енджиевского, И. Н. Преображенского и В. В. Карпова. Тогда высота и расположение ребер задаются функцией (В. В. Карпов):

$$H(x, y) = \sum_{j=1}^m h^j \bar{\delta}(x - x_j) + \sum_{i=1}^n h^i \bar{\delta}(y - y_i) - \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^m h^{ij} \bar{\delta}(x - x_j) \bar{\delta}(y - y_i), \quad (11)$$

где индексы i и j указывают номер ребра, расположенного параллельно оси x и y ; n, m – количество ребер; h^i, h^j – высота ребер; $h^{ij} = \min\{h^i, h^j\}$; $\bar{\delta}(x - x_j)$ и $\bar{\delta}(y - y_i)$ – единичные столбчатые функции, равные разности двух единичных функций $\bar{\delta}(x - x_j) = U(x - a_j) - U(x - b_j)$; $\bar{\delta}(y - y_i) = U(y - c_i) - U(y - d_i)$, где

$$a_j = x_j - r_j / (2A), \quad b_j = x_j + r_j / (2A), \quad (12)$$

$$c_i = y_i - r_i / (2B), \quad d_i = y_i + r_i / (2B).$$

Для силовых факторов, действующих в ребрах, жесткостные характеристики находятся интегрированием единицы, z и z^2 по z в пределах от $h/2 + H$:

$$\begin{aligned} \bar{F} &= \sum_{i=1}^n F^i \bar{\delta}(y - y_i) + \sum_{j=1}^m F^j \bar{\delta}(x - x_j) - \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^m F^{ij} \bar{\delta}(x - x_j) \bar{\delta}(y - y_i), \\ \bar{S} &= \sum_{i=1}^n S^i \bar{\delta}(y - y_i) + \sum_{j=1}^m S^j \bar{\delta}(x - x_j) - \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^m S^{ij} \bar{\delta}(x - x_j) \bar{\delta}(y - y_i), \quad (13) \\ \bar{J} &= \sum_{i=1}^n J^i \bar{\delta}(y - y_i) + \sum_{j=1}^m J^j \bar{\delta}(x - x_j) - \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^m J^{ij} \bar{\delta}(x - x_j) \bar{\delta}(y - y_i). \end{aligned}$$

«Размазывание» жесткости ребер по методу конструктивной анизотропии (изотропный случай). Существует несколько вариантов «размазывания» жесткости ребер по всей области оболочки. Суть «размазывания» заключается в сведении оболочки дискретно-переменной толщины к равновеликой по жесткости оболочке постоянной толщины. В. В. Карповым был разработан вариант метода конструктивной анизотропии (МКА), учитывающий сдвиговую и крутильную жесткости ребер (изотропный случай). В соответствии с ним,

$$F_x = \sum_{i=1}^n \frac{F^i r_i}{b} + \sum_{j=1}^m \left(\frac{F^j r_j}{a} - \sum_{i=1}^n \frac{F^{ij} r_i r_j}{ab} \right) \frac{r_j}{a}, \quad F_y = \sum_{j=1}^m \frac{F^j r_j}{a} + \sum_{i=1}^n \left(\frac{F^i r_i}{b} - \sum_{j=1}^m \frac{F^{ij} r_i r_j}{ab} \right) \frac{r_i}{b},$$

$$\begin{aligned}
S_x &= \sum_{i=1}^n \frac{S^i r_i}{b} + \sum_{j=1}^m \left(\frac{S^j r_j}{a} - \sum_{i=1}^n \frac{S^{ij} r_i r_j}{ab} \right) \frac{r_j}{a}, \\
S_y &= \sum_{j=1}^m \frac{S^j r_j}{a} + \sum_{i=1}^n \left(\frac{S^i r_i}{b} - \sum_{j=1}^m \frac{S^{ij} r_i r_j}{ab} \right) \frac{r_i}{b}, \\
J_x &= \sum_{i=1}^n \frac{J^i r_i}{b} + \sum_{j=1}^m \left(\frac{J^j r_j}{a} - \sum_{i=1}^n \frac{J^{ij} r_i r_j}{ab} \right) \frac{r_j}{a}, \quad J_y = \sum_{j=1}^m \frac{J^j r_j}{a} + \sum_{i=1}^n \left(\frac{J^i r_i}{b} - \sum_{j=1}^m \frac{J^{ij} r_i r_j}{ab} \right) \frac{r_i}{b}.
\end{aligned} \tag{14}$$

Уточненный дискретный метод (изотропный случай). Рассмотренный ранее метод учета ребер жесткости «по полосе» можно уточнить. В рассмотренном также ранее варианте метода конструктивной анизотропии, предложенном В. В. Карповым, при учете жесткости ребер, направленных перпендикулярно рассматриваемому направлению, вводится под знаком суммы коэффициент приведения, равный отношению ширины ребер этого направления к линейному размеру оболочки в рассматриваемом направлении. Автором предлагается вводить такой же коэффициент приведения в жесткостных характеристиках и в дискретном методе. Таким образом, жесткость подкрепления будет состоять из жесткости ребер рассматриваемого направления, и жесткости ребер ортогонального ему направления:

$$\begin{aligned}
\bar{F}_x &= \sum_{i=1}^n F^i \bar{\delta}(y - y_i) + \sum_{j=1}^m r_a F^j \bar{\delta}(x - x_j) - \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^m r_a F^{ij} \bar{\delta}(x - x_j) \bar{\delta}(y - y_i), \\
\bar{F}_y &= \sum_{j=1}^m F^j \bar{\delta}(x - x_j) + \sum_{i=1}^n r_b F^i \bar{\delta}(y - y_i) - \sum_{j=1}^m \sum_{i=1}^n r_b F^{ij} \bar{\delta}(x - x_j) \bar{\delta}(y - y_i), \tag{15}
\end{aligned}$$

заменой F на S и F на J получаются выражения для $\bar{S}_x, \bar{S}_y, \bar{J}_x, \bar{J}_y$,

$$\bar{F}_{xy} = 0,5(\bar{F}_x + \bar{F}_y), \quad \bar{S}_{xy} = 0,5(\bar{S}_x + \bar{S}_y), \quad \bar{J}_{xy} = 0,5(\bar{J}_x + \bar{J}_y). \tag{16}$$

Здесь $r_a = \frac{r_j}{(a - a_1)A}$, $r_b = \frac{r_i}{bB}$, $r_{ab} = \frac{r_a + r_b}{2}$, а усилия и моменты примут вид

$$\begin{aligned}
N_x^R &= G_1^R (\bar{F}_x (\varepsilon_x + \mu \varepsilon_y) + \bar{S}_x (\chi_1 + \mu \chi_2)), \quad N_{xy}^R = G_{12}^R [\bar{F}_{xy} \gamma_{xy} + 2\bar{S}_{xy} \chi_{12}], \\
M_x^R &= G_1^R [\bar{S}_x (\varepsilon_x + \mu \varepsilon_y) + \bar{J}_x (\chi_1 + \mu \chi_2)], \quad M_{xy}^R = G_{12}^R [\bar{S}_{xy} \gamma_{xy} + \bar{J}_{xy} \chi_{12}], \tag{17} \\
N_y^R &= G_2^R [\bar{F}_y (\varepsilon_y + \mu \varepsilon_x) + \bar{S}_y (\chi_2 + \mu \chi_1)], \\
M_y^R &= G_2^R [\bar{S}_y (\varepsilon_y + \mu \varepsilon_x) + \bar{J}_y (\chi_2 + \mu \chi_1)], \\
Q_x^R &= G_{13}^R k \bar{F}_x (\Psi_x - \theta_1), \quad Q_y^R = G_{23}^R k \bar{F}_y (\Psi_y - \theta_2).
\end{aligned}$$

Уточненный дискретный метод (ортотропный случай). Выражения для усилий и моментов сохраняют прежний вид, а выражения для жесткостных характеристик разделим на две части

$$\bar{F}_x = \bar{F}_{x1} + \bar{F}_{x2}, \quad \bar{F}_{x1} = \sum_{i=1}^n F^i \bar{\delta}(y - y_i), \quad (18)$$

$$\bar{F}_{x2} = d_{E2} \left(\sum_{j=1}^m r_a F^j \bar{\delta}(x - x_j) - \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^m r_a F^{ij} \bar{\delta}(x - x_j) \bar{\delta}(y - y_i) \right), \quad d_{E2} = \frac{E_2}{E_1}.$$

Выражения для остальных жесткостных характеристик получаются по аналогии, и подробно представлены в диссертационной работе.

3. Модифицированный метод конструктивной анизотропии для выполнения расчетов оболочечных конструкций из ортотропного материала. Предлагается использовать тот же подход, что и для ортотропного случая уточненного дискретного метода. Тогда, например

$$N_x^R = G_1^R \left[F_x (\varepsilon_x + \mu_{21}^R \varepsilon_y) + S_x (\chi_1 + \mu_{21}^R \chi_2) \right], \quad F_x = F_{x1} + F_{x2}, \quad (19)$$

$$F_{x1} = \sum_{i=1}^n \frac{F^i r_i}{bB}, \quad F_{x2} = d_{E2} \sum_{j=1}^m \left(\frac{F^j r_j}{(a-a_1)A} - \sum_{i=1}^n \frac{F^{ij} r_i r_j}{(a-a_1)AbB} \right) \frac{r_j}{(a-a_1)A}.$$

Таким образом, возможно задавать расположение армирующих волокон как вдоль ребер, так и в соответствии с укладкой материала в обшивке.

4. Алгоритм исследования прочности и устойчивости подкрепленных оболочек из ортотропных материалов при статическом нагружении, позволяющий без смены параметра и с адаптивным выбором сетки обходить особые точки кривой равновесных состояний и исследовать закритическое поведение конструкций.

Для задач статики оболочечных конструкций, их расчет на прочность и устойчивость можно свести к решению системы нелинейных алгебраических уравнений – для этого используется метод Ритца. Представим искомые функции как

$$U = \sum_{k=1}^{\sqrt{N}} \sum_{l=1}^{\sqrt{N}} U_{kl} X_1^k Y_1^l, \quad V = \sum_{k=1}^{\sqrt{N}} \sum_{l=1}^{\sqrt{N}} V_{kl} X_2^k Y_2^l, \quad W = \sum_{k=1}^{\sqrt{N}} \sum_{l=1}^{\sqrt{N}} W_{kl} X_3^k Y_3^l, \\ \Psi_x = \sum_{k=1}^{\sqrt{N}} \sum_{l=1}^{\sqrt{N}} \Psi_{xkl} X_4^k Y_4^l, \quad \Psi_y = \sum_{k=1}^{\sqrt{N}} \sum_{l=1}^{\sqrt{N}} \Psi_{ykl} X_5^k Y_5^l, \quad (20)$$

здесь $U_{kl}, V_{kl}, W_{kl}, \Psi_{xkl}, \Psi_{ykl}$ – неизвестные числовые параметры, а $X_1^k - X_5^k, Y_1^l - Y_5^l$ – известные аппроксимирующие функции аргументов x и y , удовлетворяющие заданным краевым условиям на контуре оболочки; $N = n^2$ – количество членов разложения.

Функции (20) подставляются в функционал полной потенциальной энергии деформации. Перейдем таким образом от функционала E_s к функции E_{sf} . Для поиска минимума, найдем производные от функции E_{sf} по всем неизвестным числовым параметрам, и далее приравняем их к нулю.

В результате получена система нелинейных алгебраических уравнений (СНАУ). К ней применяется метод продолжения решения по наилучшему параметру, который позволяет свести решение нелинейной системы к последовательному решению систем линейных алгебраических уравнений. В качестве наилучшего параметра продолжения решения предлагается брать длину дуги кривой множества решений λ . Чем больше разница между векторами решения на текущем и предыдущем шагах, тем хуже обусловленность матрицы системы и, следовательно, тем менее устойчив вычислительный процесс.

Поэтому целесообразно применять адаптивный выбор сетки для повышения точности расчетов. Метод продолжения решения по наилучшему параметру с адаптивным выбором сетки позволяет находить верхние и нижние критические нагрузки, а также точки бифуркации, так как при обходе особых точек значение параметра нагрузки может уменьшаться.

Для комплексного исследования поведения рассматриваемых конструкций при статическом нагружении по представленному алгоритму автором была разработана программа для ЭВМ (среда разработки – Maple). Получено Свидетельство о государственной регистрации программы для ЭВМ.

5. Значения критических нагрузок потери устойчивости и нагрузок начала невыполнения условий прочности, зависимости «нагрузка – прогиб» для разных вариантов конструкций. В том числе, для оболочек с вариантами подкрепления ребрами жесткости в одном направлении, в двух направлениях, с внутренней или с внешней стороны. Результаты анализа процесса развития областей невыполнения условий прочности в закритической области по нескольким критериям для широкого класса объектов (пологих оболочек двойкой кривизны, цилиндрических и конических панелей, а также сферических куполов).

Под потерей прочности здесь понимается состояние, когда в материале начинают происходить необратимые изменения (хотя бы в одной точке конструкции перестает выполняться критерий прочности). Для изотропных конструкций используется критерий Мизеса, а для ортотропных используются следующие критерии (в силу громоздкости выражений формулы здесь не приводятся): максимальных напряжений; Мизеса – Хилла; Фишера; Гольденבלата – Копнова; Liu – Huang – Stout; Цая – Ву; Хоффмана.

В табл. 2 показаны входные параметры для пологих оболочек двойкой кривизны, цилиндрических, конических панелей, а также сферических куполов, рассматриваемых в данной работе. В табл. 3 – характеристики материалов рассматриваемых конструкций.

Таблица 2. Входные параметры исследуемых конструкций

Пологие оболочки двойкой кривизны	№	h , м	a , м	b , м	R_1 , м	R_2 , м
	1	0,08	16	16	25	25
	2	0,09	54	54	135,9	135,9
	3	0,09	18	18	45,27	45,27
	4	0,09	10,8	10,8	40,05	40,05
	5	0,09	5,4	5,4	20,25	20,25
	6	0,00022	0,2	0,2	7,273	7,273
	7	0,00022	0,2	0,2	5	3,33
	8	0,01	1,2	1,2	4,8	4,8
Цилиндрические панели	№	h , м	a , м	b , рад	R_1 , м	R_2 , м
	1	0,08	16	1	∞	16
	2	0,01	20	$\pi/2$	∞	5,4
	3	0,01	1,5	0,4	∞	2,5
	4	0,01	20	π	∞	5,4
Конические панели	№	h , м	a , м	b , рад	a_1 , м	θ , рад
	1	0,08	32	2,574	16	0,2618
	2	0,01	25	π	5	0,78
Сферические купола	№	h , м	a , рад	b , рад	R_1 , м	R_2 , м
	1	0,09	0,3316	2π	9	–

Пологие оболочки двойкой кривизны без ребер жесткости. Полученные значения критических нагрузок потери устойчивости представлены в табл. 4. По значениям для конструкции № 7 из Материала 2 можно сделать вывод о сходимости метода Ритца.

Пологие оболочки двойкой кривизны, подкрепленные ребрами жесткости. Рассмотрим оболочки вариантов 1, 2, 3 и 4, закрепление контура – шарнирно-неподвижное. Ортогональную сетку ребер расположим с внутренней стороны оболочки, высота и ширина ребер здесь и далее $h^i = h^j = 3h$, $r_i = r_j = 2h$ соответственно. Расстояние между ребрами x_i , а крайние ребра расположены от края конструкции на расстоянии $0,5x_i$.

Таблица 3. Параметры ортотропных и изотропных материалов

Материал	E_1 , МПа	μ_{12}	E_2 , МПа	G_{12} , МПа	G_{13} , МПа	G_{23} , МПа	ρ , кг/м ³
Ортотропные материалы							
Углепластики							
T300/976	$1,4 \cdot 10^5$	0,29	$0,97 \cdot 10^4$	$0,55 \cdot 10^4$	$0,55 \cdot 10^4$	$0,33 \cdot 10^4$	1500
ЛУ-П/ЭНФБ	$1,4 \cdot 10^5$	0,3	$0,97 \cdot 10^4$	$0,46 \cdot 10^4$	$0,46 \cdot 10^4$	$0,46 \cdot 10^4$	1500
M60J/Ероху	$3,3 \cdot 10^5$	0,32	$0,59 \cdot 10^4$	$0,39 \cdot 10^4$	$0,39 \cdot 10^4$	$0,39 \cdot 10^4$	1500
T300/Ероху	$1,25 \cdot 10^5$	0,34	$0,78 \cdot 10^4$	$0,44 \cdot 10^4$	$0,44 \cdot 10^4$	$0,44 \cdot 10^4$	1500
Стеклопластики							
T-10/УПЭ22-27	$2,94 \cdot 10^4$	0,123	$1,78 \cdot 10^4$	$0,301 \cdot 10^4$	$0,301 \cdot 10^4$	$0,301 \cdot 10^4$	1800
E-Glass / Ероху	$6,07 \cdot 10^4$	0,23	$2,48 \cdot 10^4$	$0,12 \cdot 10^5$	$0,12 \cdot 10^5$	$0,12 \cdot 10^5$	1800
Другие ортотропные материалы							
AS/3501 Graphite/Ероху	$1,38 \cdot 10^5$	0,3	$0,896 \cdot 10^4$	$0,071 \cdot 10^5$	$0,071 \cdot 10^5$	$0,071 \cdot 10^5$	1540
Материал 2	$2,0 \cdot 10^4$	0,1	$4,0 \cdot 10^4$	$1,0 \cdot 10^4$	$1,0 \cdot 10^4$	$1,0 \cdot 10^4$	–
Изотропные материалы							
Сталь С345	$2,1 \cdot 10^5$	0,3	$2,1 \cdot 10^5$	$0,807 \cdot 10^5$	$0,807 \cdot 10^5$	$8,07 \cdot 10^4$	7800
Материал 1	$3,0 \cdot 10^4$	0,3	$3,0 \cdot 10^4$	$0,154 \cdot 10^4$	$0,154 \cdot 10^4$	$0,154 \cdot 10^4$	–
Оргстекло	$0,3 \cdot 10^4$	0,35	$0,3 \cdot 10^4$	$0,012 \cdot 10^5$	$0,012 \cdot 10^5$	$0,12 \cdot 10^4$	1190

Таблица 4. Критические нагрузки для пологих оболочек двойкой кривизны

Вар.	Материал	N	Критическая нагрузка	
			\bar{P}	q_{cr} , МПа
1	Стеклопластик T10-УПЭ22-27	16	7402,1369	0,1360
4	Углепластик T300/976	16	260,7169	0,1760
5	Стеклопластик T10-УПЭ22-27	16	117,7265	0,2671
6	Углепластик T300/976	16	171,1979	0,0000351
7	Материал 2	1	6562,1365	0,0001922
		4	5409,8407	0,0001584
		9	1876,3929	0,0000549
		16	1858,0594	0,0000544
		25	1852,2495	0,0000542
8	Woven Roving E-Glass_Vinyl Ester	16	571,0561	0,0468
	Стеклопластик T10-УПЭ22-27	16	415,4894	0,0589
9	Стеклопластик T10-УПЭ22-27	16	33357,51	0,00737

Вначале осуществим расчеты изотропных конструкций, выполненных из стали. На рис. 3 показана сходимость разных методов учета ребер жесткости при $N = 16$ для оболочки варианта 2. Для уточненного дискретного метода и МКА разница в значениях, вычисленная в процентах, для сетки ребер 8×8 составила менее 3 %, а для сетки 12×12 – уже менее 0,2 %.

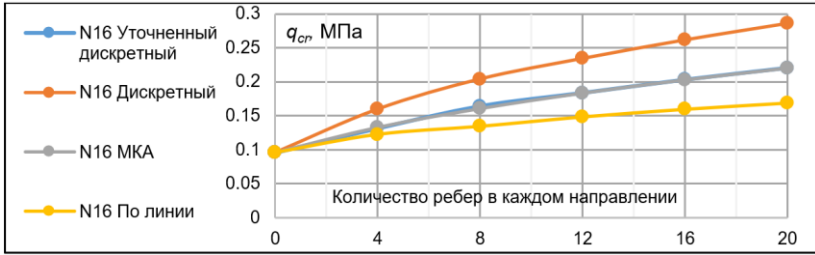


Рис. 3. Значения критических нагрузок при разном числе ребер жесткости (пологая оболочка двойкой кривизны, вариант 2)

На рис. 4 показана зависимость «нагрузка – прогиб» для разных способов учета подкрепления (здесь и далее красные кривые W_c – прогиб в центре конструкции ($x = a/2, y = b/2$); синие кривые W_4 – прогиб в четвертой части конструкции ($x = a/4, y = b/4$)).

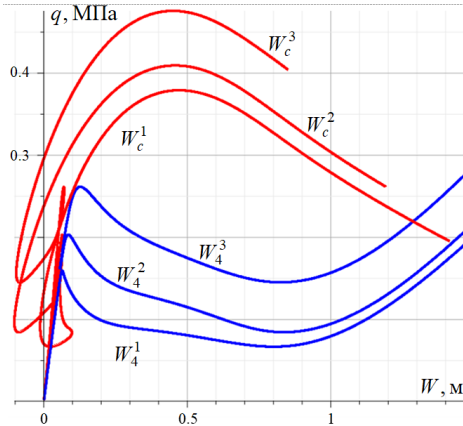


Рис. 4. «Нагрузка – прогиб» для пологой оболочки № 2 при выборе сетки ребер 16×16 (верхний индекс 1 – ввод ребер «по линии» (А. И. Лурье), индекс 2 – уточненный ввод ребер «по полосе» (А. А. Семенов), индекс 3 – ввод ребер «по полосе» (В. В. Карпов)), $N = 16$

Как видно из представленных данных, дискретный ввод ребер при контакте с обшивкой по полосе без учета уточняющих коэффициентов дает завышенные значения критической нагрузки, а подход А. И. Лурье, когда ребра вводятся по линии – существенно заниженные (сравнение с данными, полученными В. И. Климановым и С. А. Тимашевым в ходе экспериментов, будет представлено для тестовой задачи далее). Уточненный дискретный метод, а также метод конструктивной анизотропии, дают очень близкие результаты, притом сходимость значений в данном случае возрастает при увеличении числа ребер жесткости. Аналогичные зависимости получены и для ортотропных конструкций.

Далее, для варианта оболочки 8 из стеклопластика Т-10/УПЭ22-27 с ортогональной сеткой ребер жесткости 4×4 проведем оценку выполнения

условий прочности посредством нескольких критериев. Покажем развитие областей невыполнения условий прочности, полученных по некоторым из представленных критериев, при двух значениях нагрузки – 0,5869 МПа и 1,056 МПа (рис. 5).

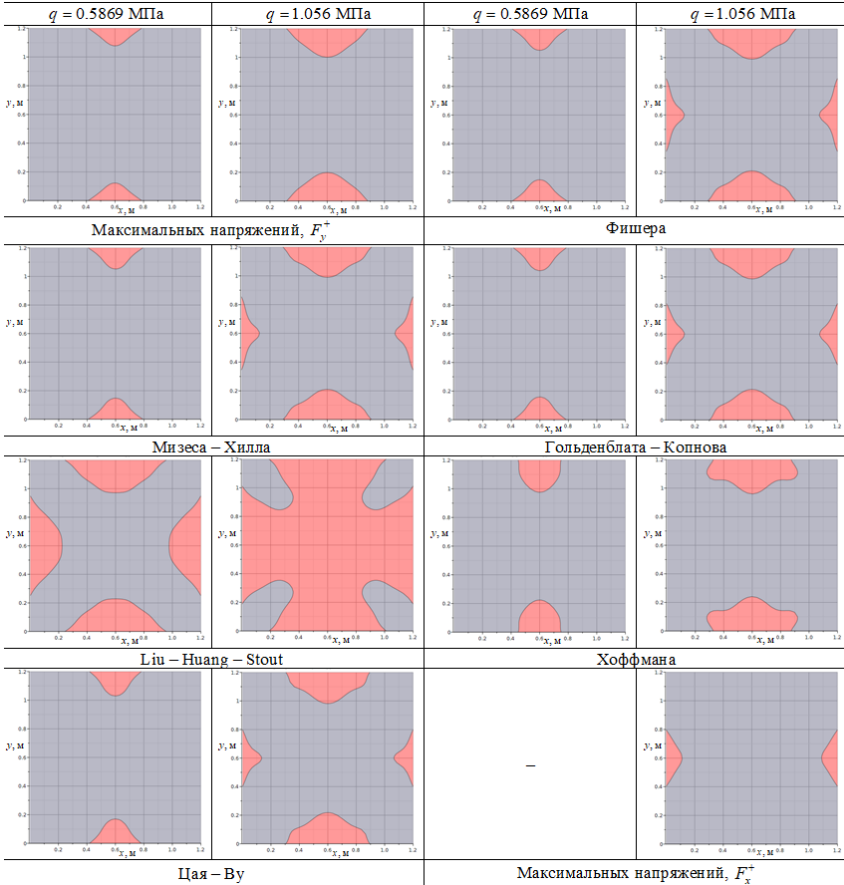


Рис. 5. Развитие областей невыполнения условий прочности при нагрузках 0,5869 МПа и 1,056 МПа для полой оболочки двойной кривизны варианта 8

Результаты показали, в первую очередь, появление повреждений материала по краю конструкции вдоль оси x . Это объясняется тем, что несмотря на то, что с точки зрения геометрии, закреплений и приложенной нагрузки рассматриваемая конструкция симметрична, материал используется ортотропный. Для стеклопластика Т-10/УПЭ22-27 пределы прочности вдоль

направления оси 1 (совпадает с осью x) в два раза больше, чем вдоль направления 2. В связи с этим, при появлении растягивающих напряжений вдоль направления 2 ближе к границам конструкции появляются области невыполнения условий прочности. При увеличении нагрузки они начинают разрастаться, и к ним добавляются аналогичные области рядом с двумя оставшимися краями конструкции. Эти области развиваются аналогичным образом, но с некоторым «запаздыванием».

Результаты, полученные по разным критериям прочности, носят схожий характер, однако следует отметить, что критерий Liu – Huang – Stout срабатывает раньше, и показывает более существенные изменения в материале при тех же нагрузках. По критерию Хоффмана наоборот, области развиваются медленнее, и имеют немного отличающуюся форму, а по первому направлению ортотропии и вовсе не успевают развиваться при рассматриваемых нагрузках. Критерий максимальных напряжений следует рассматривать в совокупности его компонент: в данном случае, значимыми оказались F_y^+ , F_x^+ , и суммарную область невыполнения условий прочности можно получить, объединив их вместе.

Пологие оболочки двойкой кривизны, подкрепленные ребрами жесткости с внешней стороны. В табл. 5 приводятся данные о критических нагрузках для варианта расположения ребер жесткости с внешней стороны и их сравнение с обычным вариантом подкрепления. Как видно из представленных данных, усиление конструкции ребрами жесткости с внешней стороны является эффективным. На рис. 6 показаны графики соответствующих зависимостей «нагрузка – прогиб».

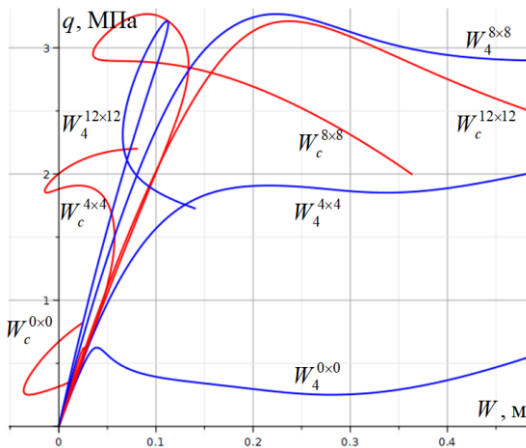


Рис. 6. Результаты для оболочки варианта 3 при расположении ребер жесткости с внешней стороны

Таблица 5. Устойчивость подкрепленных пологих оболочек двойкой кривизны

№	Метод	Схема подкрепления	q_{cr} , МПа ($N = 16$)			
			0×0	4×4	8×8	12×12
3	Уточн. дискр.	С внутренней стороны	0,6238	1,1411	2,5078	3,0508
		С внешней стороны		1,9087	3,0686	3,2115

Цилиндрические панели, подкрепленные ребрами жесткости.

Рассмотрим панели № 1, 2 и 3 из изотропного материала (стали), закрепление контура – шарнирно-неподвижное. Количество ребер будем брать одинаковым в обоих направлениях, для каждого нового варианта сетки увеличивая его на 2 или 4. Для данных конструкций метод конструктивной анизотропии сходится к решению, полученному при дискретном вводе ребер, начиная с сетки ребер 8×8 (разница в значениях менее 1 % при $N = 16$). Значения критических нагрузок для панели варианта 2 показаны на рис. 7.

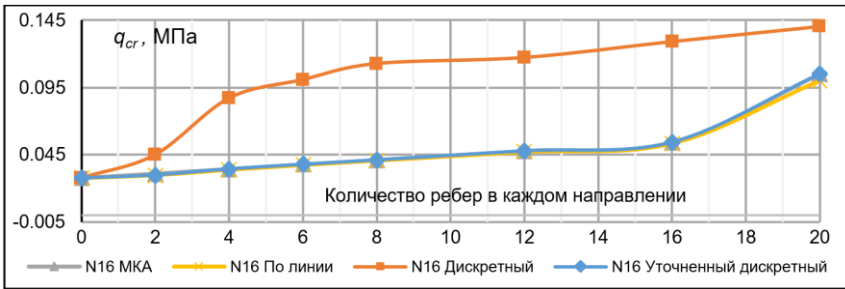


Рис. 7. Значения критических нагрузок q_{cr} при разном числе ребер жесткости (цилиндрическая панель 2, $N = 16$)

Далее был проведен расчет ортотропных цилиндрических панелей – № 1 из материала Т-10/УПЭ22-27 и № 3 из углепластика Т300/976. Угол укладки волокон $\varphi = 90^\circ$ относительно исходного, $N = 16$. Расчеты показали, что для данных конструкций решение МКА сходится к решению, полученному при уточненном дискретном методе, начиная с сетки ребер 8×8 (разница в значениях составляет менее 1 %).

Цилиндрические панели, подкрепленные ребрами в одном направлении. Все рассмотренные ранее варианты учета ребер жесткости позволяют указать количество ребер в одном из направлений равным нулю без необходимости внесения каких-либо дополнительных изменений. Для панели варианта 1 расчеты показали, что ее усиление шпангоутами дает близкие значения к варианту усиления ортогональной сеткой ребер. Усиление

конструкции стрингерами дает эффект в несколько раз меньше и является неэффективным. Такая закономерность ожидаема, и может быть объяснена особенностями формы цилиндрической панели и видом прикладываемой нагрузки.

Цилиндрические панели, подкрепленные ребрами с внешней стороны. Была детально проанализирована панель № 1, варианты подкрепления выбирались $n \times m$, $n \times 0$, $0 \times m$ при n, m от 0 до 20 с шагом 2. Ребра располагались или с внешней, или с внутренней стороны. Расчеты сделаны и по уточненному дискретному методу, и по МКА.

Конические панели без ребер жесткости. В табл. 6 показаны значения критических нагрузок для вариантов 1 и 2. Рассмотрены панели из стали С345 и стеклопластика Т-10/УПЭ22-27 с расположением волокон вдоль криволинейной координаты.

Таблица 6. Критические нагрузки для конических панелей

№	Материал	$\varphi, ^\circ$	N	\bar{P}	$q_{cr}, \text{МПа}$
1	Сталь С345	–	9	+	+
	Сталь С345	–	16	727371,7	5,9667
	Т-10/ УПЭ22-27	90	16	377860	0,2627
2	Сталь С345	–	4	+	+
		–	9	+	+
		–	16	196447991	1,0561
		–	25	50609198	0,2721

Для анализа сходимости метода Ритца были выполнены вычисления при разных N , которые показали, что при малых их значениях критическую нагрузку не удастся отследить, и необходимо не менее 16 неизвестных переменных для каждой функции.

Конические панели, подкрепленные ортогональной сеткой ребер. Рассмотрим панель варианта 1 из материала Т-10/УПЭ22-27. Направление 1 укладки волокон в ортотропном материале совпадает с направлением оси y . Расчеты выполнены при $N = 16$ (табл. 7).

Таблица 7. Устойчивость стеклопластиковых конических панелей

Вар.	Метод	$q_{cr}, \text{МПа}$ при разном числе ребер жесткости						
		0×0	2×2	4×4	6×6	8×8	10×10	12×12
1	Уточн. дискр.	0,2627	0,7732	1,0648	1,2440	1,4099	1,5545	1,6870
	МКА		0,7999	1,0608	1,2478	1,4095	1,5546	1,6872

Полученные значения показывают, что для рассматриваемой панели решение по методу конструктивной анизотропии сходится к решению, полученному в результате уточненного дискретного введения ребер жесткости, начиная с сетки 8×8 (разница значений менее 1 %).

Конические панели, подкрепленные ребрами в одном направлении. Рассматривается коническая панель № 1. Расчеты показали, что ее усиление шпангоутами дает близкие значения к варианту усиления ортогональной сеткой ребер. Усиление конструкции стрингерами дает эффект в несколько раз ниже и является неэффективным. Такой характер поведения аналогичен выявленному для цилиндрической панели.

Исследование сферических куполов. Рассматривается замкнутый сферический купол, что показывает возможность применения разработанной математической модели, алгоритма и программного обеспечения для исследования конструкций данного вида.

Для верификации, проведем сравнение результатов исследования устойчивости сферической оболочки (купола) с решением, полученным в работе (Григолюк Э. И., Лопаницын Е. А. Влияние осесимметричных начальных неправильностей сферической оболочки на ее критическую нагрузку // Известия МГТУ МАМИ. 2008. № 1. С. 233–246). Параметры купола $R/h = 100$, угол разворота $\alpha = 19^\circ = 0,3316$ рад, материал – сталь с $E = 2,1 \cdot 10^5$ МПа, $\mu = 0,3$, жестко закрепленный и находящийся под действием равномерного поперечного давления.

Для оценки результатов вводится безразмерный параметр нагрузки $q^* = \sqrt{3(1-\mu^2)} [qR^2/2Eh^2]$ и безразмерный параметр прогиба $w_0^* = W/h$.

В данном случае, при аппроксимации всех неизвестных функций вдоль окружной координаты рядом $1, \cos(2\pi\eta), \sin(2\pi\eta), \cos(4\pi\eta)$, где $\eta = y/2\pi$, были получены значения, показанные в табл. 8.

Таблица 8. Сравнение полученных значений критических нагрузок

Вар.	N	Шарнирно-неподвижное закрепление			Жесткое закрепление			
		Прочность	Устойчивость		Прочность	Устойчивость		
		q_{pr} , МПа	q_{cr} , МПа	q_{cr}^*		q_{pr} , МПа	q_{cr} , МПа	q_{cr}^*
1	4	4,29	29,35	1,155	2,27	20,39	0,802	0,972
	9	4,48	21,82	0,858	3,39	18,70	0,735	
	16	4,50	19,81	0,779	3,38	22,78	0,896	

Будем рассматривать купол и при жестком закреплении, и при шарнирно-неподвижном. Для тестовой задачи разница в значениях критической нагрузки составила около 7 %. Однако, более низкое значение критической нагрузки лучше согласуется с результатами экспериментов, также описанными в работе Э. И. Григолоука и Е. А. Лопаницына: согласно экспериментам, диапазон q^*_{cr} составляет от 0,28 до 0,9. Кроме того, данное расхождение может быть объяснено использованием разных математических моделей и выбранными параметрами точности численных методов.

На рис. 8 показан график «нагрузка – прогиб» при разных значениях N , совмещенный с графиком тестовой задачи. Видно, что уже при $N = 16$ кривые достаточно хорошо согласуются.

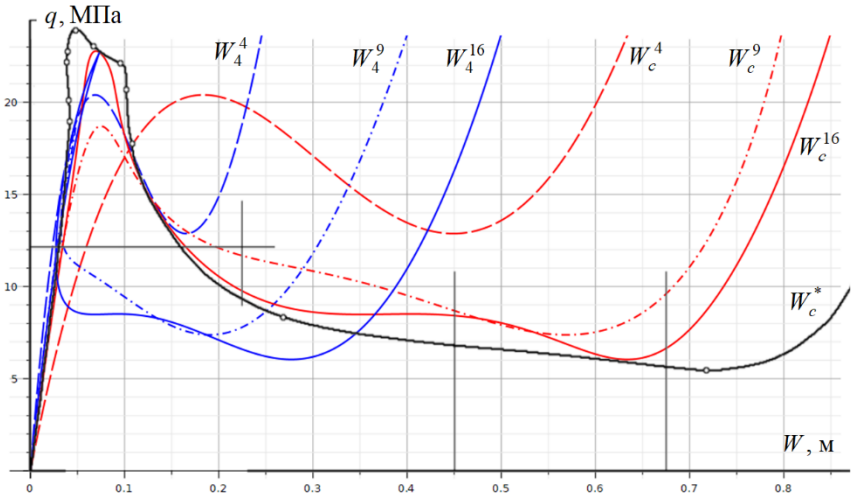
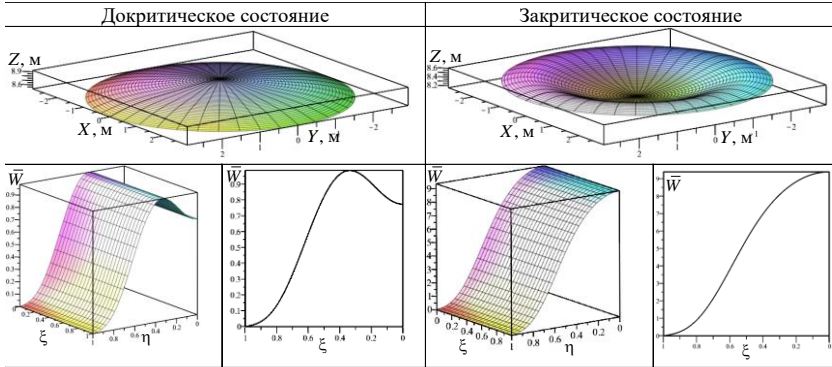


Рис. 8. График «нагрузка q – перемещение W » для рассматриваемого купола

На рис. 9 показан исследуемый купол в докритический и закритический момент. Помимо фрагмента поля прогибов и его вида сбоку (в безразмерных параметрах) купол показан в глобальной декартовой системе координат (в размерных значениях).

Рис. 9. Рассматриваемый купол при $q = 22,78$ МПа

Достоверность полученных результатов. Исследуем конструкции, которые рассматривались в работах Wang X. (2007), DOI: 10.1016/j.cma.2006.11.009; van Campen D. H. и др. (2002), DOI: 10.1016/S0020-7462(01)00090-7. Параметры материалов конструкций были приведены в табл. 3 и обозначены как Материал 1 и Материал 2. В этих работах рассматривались изотропные и ортотропные пологие оболочки двойкой кривизны, квадратные в плане и шарнирно-неподвижно закрепленные по контуру, в основе алгоритма предлагается использовать DQM (Differential quadrature method). Сравнение значений критических нагрузок, полученных здесь и авторами, показано в табл. 9.

Таблица 9. Сравнение полученных значений критических нагрузок q_{cr} , МПа

Вариант задачи	D. H. van Campen, V. P. Bouwman и др.		X. Wang		Автор
	PSM	AEM	DQM	FEM	МПРПП
6	25,14	31,92	22,74	22,63	23,22
7	57,86	76,71	50,76	52,89	54,35

Результаты экспериментов по исследованию устойчивости оболочек из оргстекла, проведенные в Уральском научном центре АН СССР, описаны в работе (Климанов В. И., Тимашев С. А. Нелинейные задачи подкрепленных оболочек. Свердловск: УНЦ АН СССР, 1985. 291 с.). Авторами были проведены испытания над 18 образцами пологой оболочки двойкой кривизны (вар. 9 в табл. 2), материал – оргстекло, параметры ребер – $n = m = 9$, $h^i = h^j = 0,0033$ м, $r = 0,0092$ м. Полученные значения q_{cr} дали разброс от $0,411 \cdot 10^{-2}$ до $0,703 \cdot 10^{-2}$ МПа, итоговое значение: $q_{cr} = 0,503 \cdot 10^{-2}$ МПа. Расчет конструкции по рассмотренным в данной работе методам дал результаты, приведенные в табл. 10.

Таблица 10. Сравнение результатов расчета с данными эксперимента, q_{cr} , МПа

Результаты эксперимента (В. И. Климанов и С. А. Тимашев, 1985)		$0,503 \cdot 10^{-2}$
N = 16	Дискретный ввод ребер «по линии»	$0,350 \cdot 10^{-2}$
	Дискретный ввод ребер «по полосе»	$0,733 \cdot 10^{-2}$
	Метод конструктивной анизотропии	$0,537 \cdot 10^{-2}$
	Уточненный дискретный ввод ребер «по полосе»	$0,551 \cdot 10^{-2}$

Из полученных данных видно, что среди дискретных методов введения ребер жесткости предложенный в данной работе метод дает значения, наиболее близкие к экспериментальным данным. Метод конструктивной анизотропии также дает близкое значение критической нагрузки. В случае использования дискретного введения ребер жесткости по линии, значение критической нагрузки значительно занижено, а в случае использования дискретного ввода ребер жесткости по полосе оно значительно завышается.

6. Несколько вариантов математической модели деформирования ортотропных оболочек при динамическом нагружении. В качестве основной предложено использовать модель в виде системы обыкновенных дифференциальных уравнений первого порядка с учетом геометрической нелинейности, поперечных сдвигов, инерции вращения, наличия ребер жесткости в соответствии с рассмотренными методами их учета. Данная модель получена применением метода Л. В. Канторовича к функционалу полной энергии деформации. Рассматриваются ортотропные оболочечные конструкции произвольного вида толщиной h , находящиеся под действием внешней механической нагрузки, зависящей от времени $P_x = P_x(x, y, t)$, $P_y = P_y(x, y, t)$, $q = q(x, y, t)$.

В работе рассмотрены три варианта математической модели деформирования: в виде системы уравнений в частных производных для усилий и моментов; в виде системы обыкновенных дифференциальных уравнений относительно искомым функций перемещений; в виде уравнений в смешанной форме. Здесь подробно остановимся только на основном (в виде системы обыкновенных дифференциальных уравнений относительно искомым функций перемещений). Функционал энергии при динамическом нагружении имеет следующий вид:

$$I = \int_{t_0}^{t_1} (E_k - E_s) dt, \quad (21)$$

где E_k – кинетическая энергия деформации; $E_s = E_p - A$ – разность потенциальной энергии деформации системы и работы внешних сил; t – время.

В модели учитывается наличие поперечных сдвигов, что позволяет также учесть инерцию вращения. Тогда для подкрепленной оболочки

$$E_k = E_k^0 + E_k^R, \quad (22)$$

$$E_k^0 = \frac{\rho}{2} \int_0^a \int_0^b \left\{ h \left[\left(\frac{\partial U}{\partial t} \right)^2 + \left(\frac{\partial V}{\partial t} \right)^2 + \left(\frac{\partial W}{\partial t} \right)^2 \right] + \frac{h^3}{12} \left[\left(\frac{\partial \Psi_x}{\partial t} \right)^2 + \left(\frac{\partial \Psi_y}{\partial t} \right)^2 \right] \right\} AB dx dy,$$

$$E_k^R = \frac{\rho}{2} \int_0^a \int_0^b \left\{ \bar{F} \left[\left(\frac{\partial U}{\partial t} \right)^2 + \left(\frac{\partial V}{\partial t} \right)^2 + \left(\frac{\partial W}{\partial t} \right)^2 \right] + 2\bar{S} \left[\frac{\partial U}{\partial t} \frac{\partial \Psi_x}{\partial t} + \frac{\partial V}{\partial t} \frac{\partial \Psi_y}{\partial t} \right] + \right. \\ \left. + \bar{J} \left[\left(\frac{\partial \Psi_x}{\partial t} \right)^2 + \left(\frac{\partial \Psi_y}{\partial t} \right)^2 \right] \right\} AB dx dy.$$

В соответствии с методом Л. В. Канторовича, неизвестные функции представим как

$$U(x, y, t) = \sum_{i=1}^{\sqrt{N}} \sum_{j=1}^{\sqrt{N}} U_{ij}(t) X_1^i Y_1^j, \quad V(x, y, t) = \sum_{i=1}^{\sqrt{N}} \sum_{j=1}^{\sqrt{N}} V_{ij}(t) X_2^i Y_2^j,$$

$$W(x, y, t) = \sum_{i=1}^{\sqrt{N}} \sum_{j=1}^{\sqrt{N}} W_{ij}(t) X_3^i Y_3^j, \quad (23)$$

$$\Psi_x(x, y, t) = \sum_{i=1}^{\sqrt{N}} \sum_{j=1}^{\sqrt{N}} \Psi_{xij}(t) X_4^i Y_4^j, \quad \Psi_y(x, y, t) = \sum_{i=1}^{\sqrt{N}} \sum_{j=1}^{\sqrt{N}} \Psi_{yij}(t) X_5^i Y_5^j,$$

здесь $U_{ij}(t) - \Psi_{yij}(t)$ – неизвестные функции переменной t .

Подставим (23) в (21). После вычисления интегралов по переменным x и y от известных функций, функционал I представляет собой функционал от функций $U_{ij}(t) - \Psi_{yij}(t)$. Далее применим известную формулу Эйлера – Лагранжа:

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial(E_k - E_s)}{\partial \dot{X}_j(t)} - \frac{\partial(E_k - E_s)}{\partial X_j(t)} = 0, \quad j = 1, 2, \dots, 5N, \quad (24)$$

где $X(t) = (U_{ij}(t), V_{ij}(t), W_{ij}(t), \Psi_{xij}(t), \Psi_{yij}(t))^T$, $i, j = 1, \dots, \sqrt{N}$, а точкой обозначена производная по времени. Такая форма записи является наиболее компактной. Так как производные от искомым функций по переменной t содержатся только в выражении для кинетической энергии, а сами функции – только в выражении для E_s , то справедливо

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial E_k}{\partial \dot{X}_j(t)} + \frac{\partial E_s}{\partial X_j(t)} = 0, \quad j = 1, 2, \dots, 5N. \quad (25)$$

Систему необходимо решать при начальных условиях: при $t = 0$
 $U_{ij} = V_{ij} = W_{ij} = \Psi_{xij} = \Psi_{yij} = \dot{U}_{ij} = \dot{V}_{ij} = \dot{W}_{ij} = \dot{\Psi}_{xij} = \dot{\Psi}_{yij} = 0$, $i, j = 1, 2, \dots, \sqrt{N}$,
 или $X_j = 0$, $\dot{X}_j = 0$, $j = 1, 2, \dots, 5N$.

7. Алгоритм исследования устойчивости подкрепленных оболочек из ортотропных материалов при динамическом нагружении, основанный на методе Л. В. Канторовича и методе Розенброка для решения жестких систем ОДУ, к которым относятся уравнения движения тонкостенных оболочечных конструкций. Применение метода Л. В. Канторовича рассмотрено в предыдущем пункте. Полученные уравнения движения относятся к жестким системам уравнений, и могут быть решены специальными методами, например, Гира, Розенброка, BDF, имеющимися в таких программных комплексах, как, например, Maple, MatLab и др. Автором разработано программное обеспечение для выполнения расчетов устойчивости оболочек при динамическом нагружении в среде Maple и получено Свидетельство о государственной регистрации программы для ЭВМ.

8. Значения критических нагрузок и зависимости «нагрузка – прогиб» подкрепленных ортотропных оболочечных конструкций при действии нагрузки, линейно зависящей от времени, в докритической и за-критической стадиях.

Пологие оболочки двоякой кривизны без ребер жесткости. Здесь и далее оболочки находятся под действием внешней равномерно распределенной поперечной нагрузки $q = q(x, y, t) = q_{sv} + A_1 t$, $P_x = P_x(x, y) = P_{xsv}$, $P_y = P_y(x, y) = P_{ysv}$, где q_{sv} , P_{xsv} , P_{ysv} – компоненты нагрузки от собственного веса. В табл. 11 приведены значения нагрузок потери устойчивости для всех рассмотренных вариантов оболочек (в том числе, локальные потери устойчивости (выделены курсивом), которые здесь наблюдаются при малых скоростях нагружения).

Оболочки двоякой кривизны, усиленные ребрами жесткости. Найдены нагрузки потери устойчивости q_{cr} на основе дискретного и уточненного дискретного методов для оболочки № 4 из стали С345. Рассмотрены случаи с разным количеством подкрепляющих элементов.

Цилиндрические панели без ребер жесткости. Рассмотрены панели варианта 1 при разных скоростях нагружения. Расчеты показали, что при использовании современных ортотропных материалов (углепластик, стеклопластик и др.) возможно уменьшение значения критической нагрузки, однако такие конструкции существенно легче, чем конструкции, выполненные из наиболее часто используемых изотропных материалов.

Таблица 11. Значения нагрузок потери устойчивости для пологих оболочек двойкой кривизны

Вар.	$a, b, \text{ м}$	$R_1, R_2, \text{ м}$	$h, \text{ м}$	\bar{A}_1	A_1	Материал	Критическая нагрузка		
							\bar{P}_{cr}	$q_{cr}, \text{ МПа}$	
1	16	25	0,08	42894,311	1	Стеклопластик Т-10/УПЭ22-27	13278	0,244	
							23183	0,426	
				428943,11	10		47020	0,864	
				4289431,1	100		166204	3,054	
						42894311	1000	840816	15,450
				3898,295	1	Углепластик Т300/976	3494,35	0,3058	
							7694,35	0,6733	
				38982,95	10		10962,92	0,9593	
				389829,5	100		42654,35	3,7323	
						3898295	1000	153614,35	13,4413
				14370	1	Стеклопластик E-Glass / Ероху	12320,597	0,467411	
							18422,738	0,698909	
				143700	10		28030,646	1,06341	
				1437000	100		65935,094	2,50140	
		14370000	1000	393842,84	14,9413				
4	10,8	40,05	0,09	100	1,765	Углепластик М60J/Ероху	269,05	0,4282	
				1000	17,65		560,85	0,8926	
5	5,4	20,25	0,09	100	112,9	Углепластик М60J/Ероху	111,65	2,8433	
				1000	1129		334,57	8,5193	

Цилиндрические панели, подкрепленные ребрами жесткости. Рассмотрим панель № 1 из стали С345 при скорости нагружения $A_1 = 10 \text{ МПа/с}$. В табл. 12 показаны критические нагрузки потери устойчивости q_{cr} при различных методах и схемах усиления. Сравнение кривых «нагрузка – прогиб» показано на рис. 10 (уточненный дискретный метод). Следует отметить, что у данной конструкции до общей потери устойчивости наблюдается локальная потеря устойчивости.

Для панелей конических оболочек получены аналогичные результаты.

Таблица 12. Устойчивость цилиндрической панели варианта 1 из стали С345

Метод	Критическая нагрузка потери устойчивости $q_{cr}, \text{ МПа}$						
	0×0	2×2	4×4	6×6	8×8	10×10	12×12
Дискретный	1,716	2,229	2,988	4,014	4,902	5,364	5,946
Уточненный дискретный	1,716	1,958	2,542	3,028	3,482	3,926	4,231

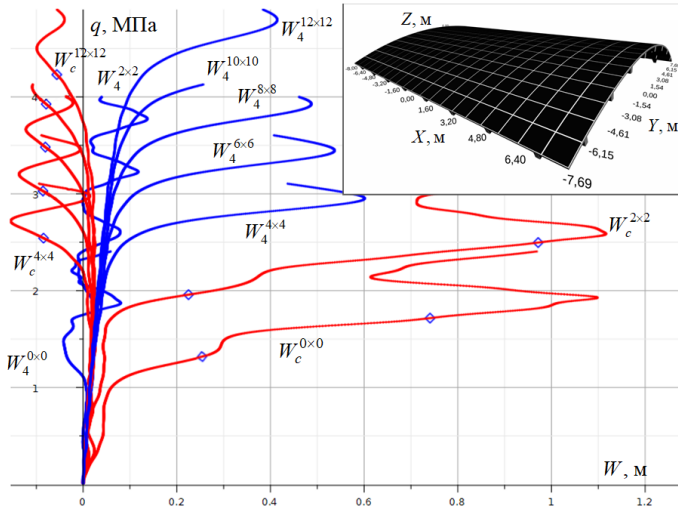


Рис. 10. Зависимость «нагрузка – прогиб» для панели варианта 1

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

На основе:

- разработанных моделей деформирования подкрепленных оболочечных конструкций при статическом или динамическом нагружении, учитывающих геометрическую нелинейность, ортотропию материала, поперечные сдвиги, наличие ребер жесткости, когда их контакт с обшивкой происходит по полосе, и при этом учитывается сдвиговая и крутильная жесткости ребер;

- методов решения нелинейных задач теории оболочек, а именно метода Ритца сведения вариационной задачи о минимуме функционала полной потенциальной энергии деформации конструкции к системе нелинейных алгебраических уравнений для задач статики; метода продолжения решения по наилучшему параметру с адаптивным выбором шага продолжения решения для обхода особых точек графика «нагрузка – прогиб» и обеспечения необходимой точности расчетов; метода Л. В. Канторовича для задач динамики; метода Розенброка для решения жестких систем ОДУ;

- программного обеспечения, разработанного автором для исследования прочности и устойчивости подкрепленных ортотропных оболочек при статическом или динамическом нагружении на основе современных технологий программирования;

было проведено комплексное исследование прочности и устойчивости подкрепленных ортотропных оболочечных конструкций, по результатам которого можно сделать следующие выводы:

1. Оболочки из ортотропных материалов, к которым можно отнести односторонне ориентированные композиты (стеклопластик, углепластик и др.), по сравнению с оболочками из традиционных материалов, применяемых для покрытия больших пролетных строительных объектов, не уступают по прочности и устойчивости традиционным, но по своей массе гораздо легче. Исследовать такие конструкции на прочность и устойчивость необходимо комплексно: в большинстве рассмотренных случаев начало невыполнения условий прочности наступает раньше потери устойчивости, однако имеет место и обратное. В связи с этим, нельзя заранее исключить какой-либо из этих факторов.

2. Предложенная модель учета жесткостных характеристик ребер при контакте их с обшивкой по полосе, когда при учете жесткости ребер, расположенных перпендикулярно основному направлению, вводится некоторый коэффициент приведения, является наиболее точной.

Модель, основанная на введении ребер «по линии», дает заниженные значения критической нагрузки потери устойчивости.

Модель, основанная на контакте ребер с обшивкой «по полосе», которая использовалась в работах Л. В. Енджиевского, И. Н. Преображенского и В. В. Карпова, дает завышенные значения критической нагрузки потери устойчивости.

3. Постановка ребер жесткости существенно повышает критическую нагрузку потери устойчивости ортотропных оболочек, повышает предельно допустимые нагрузки потери прочности, снижает концентрацию напряжений благодаря их перераспределению по оболочке. Путем соответствующей постановки ребер и подбора схемы подкрепления можно избежать потери устойчивости оболочки.

4. Анализ различных вариантов усиления оболочек показал: наличие ортогональной сетки ребер жесткости со стороны выпуклости конструкции дает более высокую критическую нагрузку по сравнению с наличием ребер со стороны вогнутости оболочки. Для цилиндрических панелей рассмотрены разные схемы подкреплений. В порядке повышения значений критической нагрузки: 1) стрингеры с внешней стороны, 2) стрингеры с внутренней стороны, 3) шпангоуты с внутренней стороны, 4) ортогональная сетка ребер с внутренней стороны, 5) шпангоуты с внешней стороны, 6) ортогональная сетка ребер с внешней стороны.

5. Анализ использования различных критериев прочности ортотропных оболочек, таких как: критерий максимальных напряжений, Мизеса – Хилла, Фишера, Гольденבלата – Копнова, Liu – Huang – Stout, Цая – Ву, Хоффмана, показал, что все критерии дают близкие результаты начала процесса потери прочности оболочки, однако наиболее практичным и простым является критерий максимальных напряжений. При продолжении нагружения определяется область невыполнения условий прочности, анализируя

которую инженеры-проектировщики могут принять решение об изменении параметров конструкции (например, изменение параметров подкрепления для обеспечения безопасной работы конструкции).

6. При динамическом нагружении происходит запаздывание реакции оболочки на воздействие нагрузки. Показано, что наиболее часто локальные потери устойчивости проявляются при малых скоростях нагружения. Численные результаты показали значительную неравномерность деформирования конструкции в связи с ортотропией материала. Как и при статическом нагружении, наличие ребер жесткости значительно повышает критическую нагрузку потери устойчивости.

Проведенное комплексное исследование прочности и устойчивости позволяет на стадии проектирования находить опасные режимы работы оболочечных конструкций, и путем изменения их параметров этого избежать, в том числе за счет постановки ребер жесткости.

СПИСОК РАБОТ ПО ТЕМЕ ДИССЕРТАЦИИ

Публикации в изданиях из перечня рецензируемых научных журналов ВАК РФ

1. Шаранин, В. Ю. Алгоритм быстрого численного интегрирования в задачах устойчивости оболочечных конструкций / В. Ю. Шаранин, **А. А. Семенов** // Инженерно-строительный вестник Прикаспия. – 2023. – № 2(44). – С. 133–140. (0,25 / 0,5 п.л.)
2. Семенов, А. А. Устойчивость цилиндрических панелей, подкрепленных ортогональной сеткой ребер / **А. А. Семенов**, Л. П. Москаленко, В. В. Карпов, М. В. Сухотерин // Вестник гражданских инженеров. – 2020. – № 6(83). – С. 117–125. (0,14 / 0,6 п.л.)
3. Алаева, Д. Р. Методика исследования докритического и закритического деформирования оболочек при шарнирно-подвижном закреплении контура / Д. Р. Алаева, **А. А. Семенов**, В. В. Карпов // Инженерно-строительный вестник Прикаспия. – 2020. – № 2(32). – С. 49–53. (0,1 / 0,3 п.л.)
4. Ситникова, И. С. Напряженно-деформированное состояние купола при двух вариантах учета ветровой нагрузки / И. С. Ситникова, **А. А. Семенов** // Вестник гражданских инженеров. – 2017. – № 6(65). – С. 79–89. (0,34 / 0,7 п.л.)
5. Семенов, А. А. Методика исследования устойчивости пологих ортотропных оболочек двоякой кривизны при динамическом нагружении / **А. А. Семенов** // International Journal for Computational Civil and Structural Engineering. – 2017. – Т. 13. – № 2. – С. 145–153. (0,6 п.л.)
6. Семенов, А. А. Эффективность использования безразмерных параметров при расчете прочности и устойчивости подкрепленных пологих оболочек / **А. А. Семенов**, А. Н. Панин // Академический вестник УралНИИпроект РААСН. – 2015. – № 3. – С. 73–76. (0,125 / 0,25 п.л.)
7. Панин, А. Н. Исследование прочности пологих оболочек из бетона на основе различных критериев прочности / А. Н. Панин, **А. А. Семенов** // Строительная механика и расчет сооружений. – 2015. – № 3(260). – С. 17–23. (0,2 / 0,4 п.л.)
8. Карпов, В. В. Критерии прочности для тонкостенных ортотропных оболочек. Ч. 2: Расчеты и анализ / В. В. Карпов, **А. А. Семенов** // Вестник гражданских инженеров. – 2015. – № 1(48). – С. 60–70. (0,34 / 0,7 п.л.)

9. Игнатъев, О. В. Эффективность применения современных ортотропных материалов при проектировании панелей конических оболочек / О. В. Игнатъев, А. Н. Панин, **А. А. Семенов** // Известия ТулГУ. Технические науки. – 2015. – № 11–1. – С. 44–52. (0,18 / 0,6 п.л.)

10. Баранова, Д. А. Компьютерное моделирование местных и общих форм потери устойчивости тонкостенных оболочек / Д. А. Баранова, В. В. Карпов, **А. А. Семенов** // Вычислительная механика сплошных сред. – 2015. – Т. 8. – № 3. – С. 229–244. (0,33 / 1 п.л.)

в изданиях, индексируемых Scopus, Web of Science

11. Semenov, A. Method of strength analysis for doubly-curved stiffened orthotropic shells by various strength theories / **A. Semenov** // FME Transactions. – 2023. – Vol. 51. – No. 2. – P. 211–220. (0,6 п.л.)

12. Згода, Ю. Н. Высокопроизводительный расчет тонкостенных оболочечных конструкций с использованием параллельных вычислений и графических ускорителей / Ю. Н. Згода, **А. А. Семенов** // Вычислительные технологии. – 2022. – № 6. – С. 45–57. (0,4 / 0,8 п.л.)

13. Semenov, A. Buckling of Shallow Shells of Double Curvature Stiffened by Ribs from the Outside / **A. Semenov** // Journal of the Serbian Society for Computational Mechanics. – 2022. – Vol. 16. – No. 1. – P. 54–64. (0,6 п.л.)

14. Семенов, А. А. Уточненный дискретный метод расчета подкрепленных ортотропных оболочек / **А. А. Семенов** // Вестник ПНИПУ. Механика. – 2022. – № 4. – С. 90–102. (0,8 п.л.)

15. Semenov, A. Strength of Steel Shell Cylindrical Panels Reinforced with an Orthogonal Grid of Stiffeners / **A. Semenov** // Journal of Applied and Computational Mechanics. – 2022. – Vol. 8. – No. 2. – P. 723–732. (0,6 п.л.)

16. Semenov, A. Nonlinear Mathematical Model for Dynamic Buckling of Stiffened Orthotropic Shell Panels / **A. Semenov** // International Journal of Structural Stability and Dynamics. – 2022. – P. 2250191. (0,6 п.л.)

17. Semenov, A. Mathematical Modeling in Shell Structure Analysis Tasks / **A. Semenov** // International Journal for Engineering Modelling. – 2022. – Vol. 35. – No. 1. – P. 43–55. (0,8 п.л.)

18. Semenov, A. Dynamic Buckling of Stiffened Shell Structures with Transverse Shears under Linearly Increasing Load / **A. Semenov** // Journal of Applied and Computational Mechanics. – 2022. – Vol. 8. – No. 4. – P. 1343–1357. (0,9 п.л.)

19. Semenov, A. Buckling of Shell Panels Made of Fiberglass and Reinforced with an Orthogonal Grid of Stiffeners / **A. Semenov** // Journal of Applied and Computational Mechanics. – 2021. – Vol. 7. – No. 3. – P. 1856–1861. (0,4 п.л.)

20. Карпов, В. В. Structural anisotropy method for shells with orthogonal stiffeners / В. В. Карпов, **А. А. Семенов** // Structures. – 2021. – Vol. 34. – P. 3206–3221. (0,5 / 1 п.л.)

21. Бакусов, П. А. Анализ устойчивости вычислительного алгоритма к изменению геометрических параметров цилиндрических оболочечных конструкций / П. А. Бакусов, **А. А. Семенов** // Вестник ПНИПУ. Механика. – 2021. – № 1. – С. 12–21. (0,3 / 0,6 п.л.)

22. Semenov, A. Visualization of the Stress-Strain State of Shell Structures Using Virtual and Augmented Reality Technologies / **A. Semenov**, I. Zgoda // CEUR Workshop Proceedings. – 2020. – Vol. 2744. – P. 13, 1–12. (0,4 / 0,8 п.л.)

23. Semenov, A. A. Stress-strain state interactive visualization of the parametrically-defined thin-shell structures with the use of AR and VR technologies / **А. А. Семенов**, Iu. N. Zgoda // Научная визуализация. – 2020. – Vol. 12. – No. 4. – P. 108–122. (0,46 / 0,9 п.л.)

24. Petrov, D. Buckling of cylindrical shell panels in ANSYS / D. Petrov, **A. Semenov** // AIP Conference Proceedings. – 2020. – Vol. 2315. – P. 020032. (0,2 / 0,4 п.л.)
25. Maslennikov, N. Study of Deformation of Structural Elements as Result of Concrete Creep / N. Maslennikov, A. Panin, **A. Semenov**, V. Kharlab // Advances in Intelligent Systems and Computing. – Cham: Springer International Publishing, 2020. – Vol. 1116. – P. 453–461. (0,14 / 0,6 п.л.)
26. Karpov, V. Computer Modeling of the Creep Process in Stiffened Shells / V. Karpov, **A. Semenov** // Advances in Intelligent Systems and Computing. – Cham: Springer International Publishing, 2020. – Vol. 982. – P. 48–58. (0,34 / 0,7 п.л.)
27. Karpov, V. V. Refined model of stiffened shells / V. V. Karpov, **A. A. Semenov** // International Journal of Solids and Structures. – 2020. – Vol. 199. – P. 43–56. (0,43 / 0,9 п.л.)
28. Лапина, Е. О. Исследование прочности и устойчивости ортотропных конических оболочек и конических панелей / Е. О. Лапина, **А. А. Семенов** // Известия Саратовского университета. Новая серия. Серия: Математика. Механика. Информатика. – 2020. – Т. 20. – № 1. – С. 79–92. (0,4 / 0,8 п.л.)
29. Semenov, A. Mathematical model of deformation of orthotropic shell structures under dynamic loading with transverse shears / **A. Semenov** // Computers & Structures. – 2019. – Vol. 221. – P. 65–73. (0,6 п.л.)
30. Panin, A. Nonlinear Deformations of Stiffened Reinforced Concrete Shells / A. Panin, **A. Semenov** // Key Engineering Materials. – 2019. – Vol. 828. – P. 180–193. (0,4 / 0,9 п.л.)
31. Karpov, V. V. Basic relationships between statics and dynamics in reinforced shell roofs of underground and aboveground structures and methods of their calculation / V. V. Karpov, **A. A. Semenov** // Geotechnics Fundamentals and Applications in Construction: New Materials, Structures, Technologies and Calculations. – London: CRC Press, Taylor & Francis Group, 2019. – P. 114–119. (0,2 / 0,4 п.л.)
32. Семенов, А. А. Метод непрерывного продолжения решения по наилучшему параметру при расчете оболочечных конструкций / **А. А. Семенов**, С. С. Леонов // Ученые записки Казанского университета. Серия: Физико-математические науки. – 2019. – Т. 161. – № 2. – С. 230–249. (0,625 / 1,25 п.л.)
33. Semenov, A. Dynamic buckling of stiffened orthotropic shell structures / **A. Semenov** // Magazine of Civil Engineering. – 2018. – No. 6(82). – P. 3–11. – DOI: 10.18720/MCE.82.1. (0,5 п.л.)
34. Karpov, V. V. Mixed-Form Equations for Stiffened Orthotropic Shells of Arbitrary Canonical Shape with Static Loading / V. V. Karpov, **A. A. Semenov** // Journal of Mechanics. – 2018. – Vol. 34. – No. 4. – P. 469–474. (0,18 / 0,4 п.л.)
35. Каменев, И. В. Устойчивость пологих ортотропных оболочек двойкой кризисны при шарнирно-подвижном закреплении контура / И. В. Каменев, **А. А. Семенов** // Вестник ПНИПУ. Механика. – 2018. – № 2. – С. 32–43. (0,375 / 0,75 п.л.)
36. Semenov, A. A. Strength of orthotropic cylindrical panels with account for geometric nonlinearity / **A. A. Semenov** // Journal of Applied Mechanics and Technical Physics. – 2017. – Vol. 58. – No. 3. – P. 511–516. (0,4 п.л.)
37. Semenov, A. A. Stability of cylindrical shell panels of modern materials under dynamic loading / **A. A. Semenov** // AIP Conference Proceedings. – 2017. – Vol. 1915. – P. 030025. (0,3 п.л.)
38. Karpov, V. Calculation of Reliability of Hangars for Parking and Maintenance of Vehicles / V. Karpov, A. Panin, **A. Semenov** // Transportation Research Procedia. – 2017. – Vol. 20. – P. 261–266. (0,125 / 0,4 п.л.)

39. Karpov, V. V. Numerical methods for calculating the strength and stability of stiffened orthotropic shells / V. V. Karpov, **A. A. Semenov** // Materials Physics and Mechanics. – 2017. – Vol. 31. – No. 1–2. – P. 16–19. (0,125 / 0,25 п.л.)
40. Karpov, V. V. Mathematical models and algorithms for studying strength and stability of shell structures / V. V. Karpov, **A. A. Semenov** // Journal of Applied and Industrial Mathematics. – 2017. – Vol. 11. – No. 1. – P. 70–81. (0,375 / 0,75 п.л.)
41. Karpov, V. V. The stress-strain state of ribbed shell structures / V. V. Karpov, O. V. Ignat'ev, **A. A. Semenov** // Magazine of Civil Engineering. – 2017. – No. 6(74). – P. 147–160. (0,3 / 0,9 п.л.)
42. Бакусов, П. А. Устойчивость сегментов тороидальных оболочек при изменении угла отклонения от вертикальной оси / П. А. Бакусов, **A. А. Семенов** // Вестник ПНИПУ. Механика. – 2017. – № 3. – С. 17–36. (0,625 / 1,25 п.л.)
43. Semenov, A. A. Models of Deformation of Stiffened Orthotropic Shells under Dynamic Loading / **A. A. Semenov** // Journal of Siberian Federal University. Mathematics & Physics. – 2016. – Vol. 9. – No. 4. – P. 485–497. (0,8 п.л.)
44. Semenov, A. A. Strength and stability of geometrically nonlinear orthotropic shell structures / **A. A. Semenov** // Thin-Walled Structures. – 2016. – Vol. 106. – P. 428–436. (0,6 п.л.)
45. Karpov, V. Comprehensive study of the strength and stability of shallow shells made of fiberglass / V. Karpov, **A. Semenov** // AIP Conference Proceedings. – 2016. – Vol. 1785. – P. 040022. (0,125 / 0,25 п.л.)
46. Каменев, И. В. Обоснование использования метода конструктивной анизотропии при расчете пологих оболочек двоякой кривизны, ослабленных вырезами / И. В. Каменев, **A. А. Семенов** // Вестник ПНИПУ. Механика. – 2016. – № 2. – С. 54–68. (0,5 / 0,9 п.л.)
47. Карпов, В. В. Безразмерные параметры в теории подкрепленных оболочек / В. В. Карпов, **A. А. Семенов** // Вестник ПНИПУ. Механика. – 2015. – № 3. – С. 74–94. (0,65 / 1,3 п.л.)

Свидетельства о государственной регистрации программ для ЭВМ

48. DynShell: dynamic buckling and nonlinear vibrations of orthotropic shells / **A. А. Семенов** // Свидетельство о государственной регистрации программы для ЭВМ № 2017662611, РФ от 13.11.2017 г.
49. PerfShell: calculations of perforated shells / И. В. Каменев, **A. А. Семенов** // Свидетельство о государственной регистрации программы для ЭВМ № 2016616152, РФ от 20.07.2016 г.
50. DimShell: dimensionless calculations of orthotropic shells / В. В. Карпов, **A. А. Семенов** // Свидетельство о государственной регистрации программы для ЭВМ № 2015661781, РФ от 09.11.2015 г.

В других печатных изданиях

В других печатных изданиях опубликовано 35 научных работ.

Компьютерная верстка *М. В. Смирновой*

Подписано к печати 15.01.2024. Формат 60×84 $\frac{1}{16}$. Бумага офсетная.

Усл. печ. л. 2,3. Тираж 150 экз. Заказ 3.

Санкт-Петербургский государственный архитектурно-строительный университет.
190005, Санкт-Петербург, 2-я Красноармейская, д. 4.

Отпечатано на МФУ. 198095, Санкт-Петербург, ул. Розенштейна, д. 32, лит. А