

На правах рукописи



СЕМЕНОВ Алексей Александрович

**ГЕОМЕТРИЧЕСКИ НЕЛИНЕЙНАЯ МАТЕМАТИЧЕСКАЯ
МОДЕЛЬ РАСЧЕТА ПРОЧНОСТИ И УСТОЙЧИВОСТИ
ОРТОТРОПНЫХ ОБОЛОЧЕЧНЫХ КОНСТРУКЦИЙ**

Специальность: **05.23.17** – Строительная механика

АВТОРЕФЕРАТ

диссертации на соискание ученой степени
кандидата технических наук

Санкт-Петербург – 2014

Работа выполнена в ФГБОУ ВПО «Санкт-Петербургский государственный архитектурно-строительный университет».

Научный руководитель: доктор технических наук, профессор
Карпов Владимир Васильевич

Официальные оппоненты: **Трушин Сергей Иванович**,
доктор технических наук, профессор, ФГБОУ
ВПО «Московский государственный строитель-
ный университет», профессор кафедры строи-
тельной механики;

Филатов Валерий Николаевич,
доктор технических наук, профессор, ФГБОУ
ВПО «Саратовский государственный техниче-
ский университет имени Гагарина Ю.А.», про-
фессор кафедры математики и моделирования

Ведущая организация: **ФГАОУ ВО «Санкт-Петербургский государ-
ственный политехнический университет»**

Защита диссертации состоится «18» декабря 2014 г. в 13⁰⁰ часов на засе-
дании диссертационного совета Д **212.223.03** при ФГБОУ ВПО «Санкт-
Петербургский государственный архитектурно-строительный университет» по
адресу: 190005, Санкт-Петербург, ул. 2-я Красноармейская, д. 4, зал заседаний
диссертационного совета (аудитория 219).

Тел./Факс: (812) 316-58-72; E-mail: rector@spbgasu.ru

С диссертацией можно ознакомиться в библиотеке ФГБОУ ВПО «Санкт-
Петербургский государственный архитектурно-строительный университет» и
на сайте www.spbgasu.ru.

Автореферат разослан «___» октября 2014 г.

Ученый секретарь
диссертационного совета
доктор технических наук,
профессор



Кондратьева Лидия Никитовна

I. ОБЩАЯ ХАРАКТЕРИСТИКА РАБОТЫ

Актуальность исследования. В современном строительстве, а также в судостроении, машиностроении, авиастроении и других областях промышленности, большое применение получают конструкции в виде оболочек. В настоящее время появились композитные материалы (углепластики, стеклопластики, боропластики и др.), обладающие высокой прочностью, огнеупорностью, химической и коррозионной стойкостью, легкостью, и их применение при проектировании оболочечных конструкций заслуживает особого внимания. Так как армирующие элементы в материале часто располагают вдоль осей криволинейной системы координат оболочки, то такие конструкции можно считать ортотропными.

Возобновление интереса к исследованию оболочечных конструкций в последние годы вызвано не только появлением новых перспективных материалов, но и, прежде всего, развитием вычислительной техники, которая позволила теперь по-новому взглянуть на нелинейные проблемы оболочек.

Одним из свойств тонкостенных оболочек, как отмечает Э. Л. Аксельрад, является их гибкость, т.е. способность к значительным упругим перемещениям (прогибам), превышающим толщину оболочки иногда в десятки раз. Как следствие этого – возможная потеря устойчивости оболочек и необходимость при их исследовании учитывать геометрическую нелинейность.

Важным является при рассмотрении задач устойчивости оболочек проводить анализ прочности их материала, так как после наступления деформаций текучести происходят необратимые изменения и исследование устойчивости конструкции в линейно-упругой постановке становится неправомерным.

Поэтому актуальным является совместное исследование прочности, устойчивости и закритического поведения оболочек из ортотропных материалов на основе наиболее точных математических моделей их деформирования, эффективных алгоритмов расчета и специально разработанного программного обеспечения.

Степень разработанности темы исследования. Основы теории анизотропных пластин, и, в частности – ортотропных, можно найти в работах С. А. Амбарцумяна, В. В. Васильева, С. Г. Лехницкого и др. Устойчивость оболочек исследовалась многими авторами, однако практически все публикации относятся к исследованию изотропных оболочек. Одной из первых публикаций по исследованию устойчивости ортотропных оболочек является работа А. А. Буштыркова. Следует также отметить работы Р. Б. Рикардса и Г. А. Тетерса. В этих работах использована модель оболочек, основанная на гипотезах Кирхгофа – Лява, однако, как показали экспериментальные исследования, необходимо при исследовании устойчивости таких оболочек учитывать поперечные сдвиги. Большой теоретический интерес представляют работы А. Н. Гузя и И. Ю. Бабича, где приведены решения, основанные на линеаризованных уравнениях трехмерной теории упругости. Следует также отметить работы Л. Г. Белозерова и В. А. Киреева, В. А. Максимюка и И. С. Чернышенко и др.

Устойчивость оболочек из композитных материалов рассматривается в работах С. И. Трушина. Из иностранных ученых, занимающихся устойчивостью оболочек из композитных материалов, следует отметить М. К. Ahmed, E. Carrera, J. N. Reddy, и др. Обширный экспериментальный материал по нахождению предельных значений напряжений для оболочек из композиционных материалов представлен в работах А. А. Смердова.

Различные критерии прочности изотропных и ортотропных материалов описаны в работах И. И. Гольденבלата, В. А. Копнова, Ш. О. Кулона, А. А. Лебедева, Р. Мизеса, Г. С. Писаренко, Л. Фишера и др.

Во всех работах, касающихся устойчивости оболочек, в основном рассматриваются цилиндрические оболочки, не исследуется закритическое поведение и взаимосвязь устойчивости и прочности. Кроме того, отсутствуют публикации о ребристых оболочках из ортотропных материалов.

Цель и задачи исследования.

Цель исследования – разработка математической модели деформирования ортотропных оболочечных конструкций для нахождения предельных значений нагрузок потери прочности и устойчивости.

Задачи исследования:

1. Разработка наиболее точной математической модели деформирования ортотропных оболочек с учетом геометрической нелинейности, поперечных сдвигов, наличия ребер жесткости.

2. Разработка эффективного алгоритма исследования прочности и устойчивости оболочек из ортотропных материалов, позволяющего автоматически выбирать оптимальный по точности шаг нагружения и без смены параметра обходить особые точки кривой равновесных состояний.

3. Разработка программного обеспечения расчетов прочности и устойчивости оболочек из ортотропных материалов на основе передовых технологий программирования.

4. Проведение анализа критериев предельного сопротивления материала и выбор наиболее оптимального для определения предельных нагрузок потери прочности. Проанализировать процесс развития областей остаточных деформаций в закритической области.

5. Проведение комплексного исследования прочности и устойчивости подкрепленных ортотропных оболочечных конструкций при статическом механическом нагружении в докритической и закритической стадиях.

6. Оценка влияния учета геометрической нелинейности на значения предельных нагрузок потери прочности.

7. Анализ местных и общих форм потери устойчивости оболочечных конструкций.

Объектом исследования являются тонкостенные ортотропные оболочки, подкрепленные ребрами жесткости.

Предметом исследования является напряженно-деформированное состояние, прочность и устойчивость подкрепленных ортотропных оболочек вращения при статическом механическом нагружении.

Научная новизна исследования заключается в следующем:

1. Разработана математическая модель деформирования ортотропных оболочек, учитывающая геометрическую нелинейность, поперечные сдвиги, введение ребер по методу конструктивной анизотропии с учетом их сдвиговой и крутильной жесткости.

2. Разработан алгоритм, основанный на методе Ритца и методе продолжения решения по наилучшему параметру с использованием адаптивного выбора сетки для повышения точности расчетов, позволяющий находить верхние и нижние критические нагрузки, точки бифуркации, а также исследовать закритическое поведение конструкции для анализа местной и общей форм потери устойчивости.

3. Разработана программа «OrthShell: strength and stability of orthotropic shells», позволяющая проводить комплексные исследования прочности и устойчивости оболочек из ортотропных материалов (свидетельство о регистрации в Реестре программ для ЭВМ № 2014614627 от 29.04.2014 г.).

4. Проведен анализ критериев прочности для выбора оптимального критерия предельного сопротивления материала и анализ развития областей остаточных деформаций при закритическом деформировании.

5. Проведен анализ закритического поведения рассматриваемых конструкций, который показал, что до полной потери устойчивости оболочек зачастую происходят несколько раз местные потери устойчивости.

6. Выявлено, что потеря устойчивости для некоторых вариантов оболочек наступает раньше потери прочности, но имеет место и обратное, поэтому необходимо проводить расчеты конкретных конструкций. Поэтому необходимо проводить комплексные расчеты прочности и устойчивости конкретных конструкций.

7. Выявлено, что для тонкостенных пологих оболочек прямоугольного плана и панелей цилиндрических оболочек, выполненных из углепластика, при учете геометрической нелинейности предельные нагрузки потери прочности уменьшаются по сравнению с расчетами, проведенными при геометрически линейной постановке (в 5-10 раз).

8. При подкреплении ортотропных оболочек ребрами жесткости критические нагрузки возрастают в 2 – 6 раз в зависимости от числа подкрепляющих конструкцию ребер. Также существенно увеличивается нагрузка потери прочности (в 1.5 – 3 раза).

Методологической основой диссертационного исследования послужили метод Ритца для сведения вариационной задачи нахождения минимума функционала к решению системы нелинейных алгебраических уравнений; метод продолжения решения по наилучшему параметру для решения системы нелинейных алгебраических уравнений; метод конструктивной анизотропии для учета подкрепления конструкции; методы строительной механики, вычислительной математики и разработки программного обеспечения.

Область исследования соответствует требованиям паспорта научной специальности ВАК: 05.23.17 – Строительная механика, а именно: содержанию специальности, каковым являются методы расчета сооружений и их элементов на

прочность, устойчивость при силовых воздействиях, а также следующим основным направлениям: п. 2 «Линейная и нелинейная механика конструкций и сооружений, разработка физико-математических моделей их расчета», п. 4 «Численные методы расчета сооружений и их элементов».

Практическая ценность и реализация результатов исследований. Проведенный анализ прочности, устойчивости и закритического поведения подкрепленных ортотропных оболочек на основе разработанной компьютерной программы может быть использован в проектных организациях, научных исследованиях и учебном процессе.

Результаты работы внедрены в отчет по проекту №2.1.2/10824 Аналитическая ведомственная целевая программа Министерства образования и науки РФ «Развитие научного потенциала высшей школы» (2011 г.), в отчет по проекту в рамках государственного задания Министерства образования и науки РФ № 8.1046.2011 «Математическое и программное обеспечение расчетов прочности и устойчивости подкрепленных оболочек вращения» (2012-2013 годы), а также в учебном процессе. Кроме того, результаты исследования прочности и устойчивости ортотропных оболочечных конструкций приняты к внедрению в проектно-конструкторской деятельности ООО «ПускМонтаж-Проект».

Апробация работы. Результаты работы докладывались на Десятой международной научно-практической конференции «Исследование, разработка и применение высоких технологий в промышленности» (9-11 декабря 2010 г., Санкт-Петербург), на I, II и III Международных конгрессах «Актуальные проблемы современного строительства» (10-12 апреля 2012 г., 10-12 апреля 2013 г., 9-11 апреля 2014 г., Санкт-Петербург), Международном конгрессе «Наука и инновации в современном строительстве - 2012» (10-12 октября 2012 г., Санкт-Петербург), XIII Международном форуме «Новые идеи нового века» (18-25 февраля 2013 г., Хабаровск), V Международной конференции «Актуальные проблемы архитектуры и строительства» (25-28 июня 2013 г., Санкт-Петербург), XX Международном симпозиуме «Динамические и технологические проблемы механики конструкций и сплошных сред» им. А.Г. Горшкова (17-21 февраля 2014, Москва).

Публикации. Материалы диссертации опубликованы в 17 печатных работах, общим объемом 17.87 п.л., лично автором – 7 п.л., в том числе 5 работ опубликованы в изданиях, входящих в перечень ведущих рецензируемых научных журналов, утвержденный ВАК РФ; получено свидетельство о государственной регистрации программы ЭВМ.

Структура и объем работы. Диссертация состоит из введения, четырех глав с выводами по каждой из них, общих выводов. Диссертация содержит 189 страниц машинописного текста, 18 таблиц, 41 рисунок, 3 приложения и список использованной литературы из 164 наименований работ отечественных и зарубежных авторов.

Достоверность обоснована применением апробированных методов строительной механики и вычислительной математики, сравнением результатов расчета тестовых задач с некоторыми решениями, полученными другими авторами,

а также качественным согласованием результатов расчета с результатами экспериментов других авторов.

II. ОСНОВНЫЕ ПОЛОЖЕНИЯ И РЕЗУЛЬТАТЫ ИССЛЕДОВАНИЙ ДИССЕРТАЦИИ, ВЫНОСИМЫЕ НА ЗАЩИТУ

1. Разработана математическая модель деформирования ортотропных оболочек, учитывающая геометрическую нелинейность, поперечные сдвиги, введение ребер по методу конструктивной анизотропии с учетом их сдвиговой и крутильной жесткости.

Схематичное изображение тонкостенной оболочки с осями локальной криволинейной системы координат представлено на рис. 1. Координатная поверхность совпадает со срединной поверхностью оболочки.

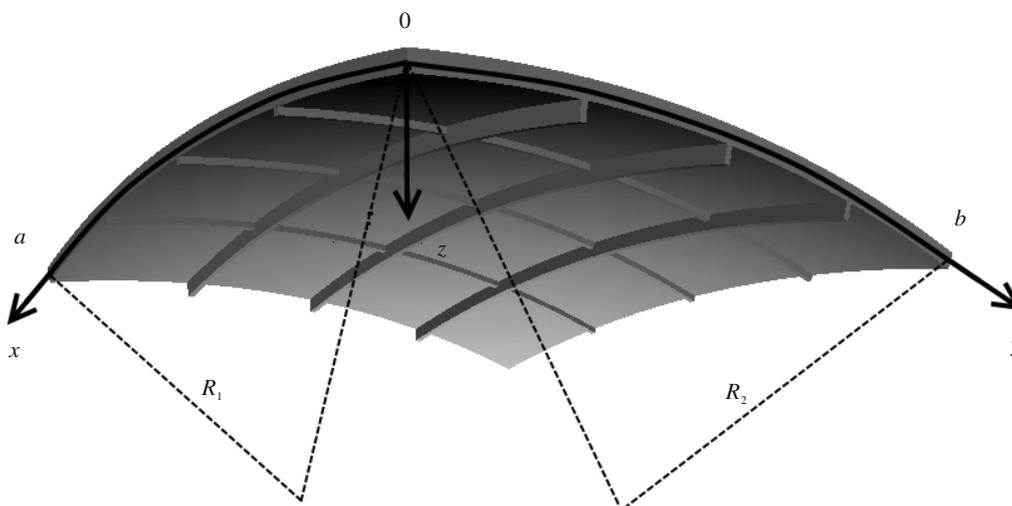


Рис. 1. Общий вид тонкостенной оболочки с осями локальной системы координат

Оси криволинейных координат x, y направлены по линиям главных кривизн оболочки, а ось z направлена по нормали к поверхности.

Применяя гипотезы тонкостенности и учитывая поперечные сдвиги, сведем деформирование трехмерного тела к деформированию двумерного тела. При этом перемещения в слое, отстоящем на расстояние z от срединной поверхности, примут вид

$$U^z = U + z\Psi_x, \quad V^z = V + z\Psi_y, \quad W^z = W,$$

где U, V, W – перемещения точек срединной поверхности вдоль осей x, y, z соответственно; Ψ_x, Ψ_y – углы поворота нормали в плоскостях XOZ, YOZ .

Геометрические соотношения в срединной поверхности оболочки с учетом геометрической нелинейности принимают известный вид (В. В. Новожилов)

$$\varepsilon_x = \frac{1}{A} \frac{\partial U}{\partial x} + \frac{1}{AB} V \frac{\partial A}{\partial y} - k_x W + \frac{1}{2} \theta_1^2,$$

$$\varepsilon_y = \frac{1}{B} \frac{\partial V}{\partial y} + \frac{1}{AB} U \frac{\partial B}{\partial x} - k_y W + \frac{1}{2} \theta_2^2,$$

$$\gamma_{xy} = \frac{1}{A} \frac{\partial V}{\partial x} + \frac{1}{B} \frac{\partial U}{\partial y} - \frac{1}{AB} U \frac{\partial A}{\partial y} - \frac{1}{AB} V \frac{\partial B}{\partial x} + \theta_1 \theta_2, \quad (1)$$

$$\theta_1 = -\left(\frac{1}{A} \frac{\partial W}{\partial x} + k_x U \right), \quad \theta_2 = -\left(\frac{1}{B} \frac{\partial W}{\partial y} + k_y V \right),$$

где $\varepsilon_x, \varepsilon_y$ – деформации удлинения вдоль координат x, y срединной поверхности; $\gamma_{xy}, \gamma_{xz}, \gamma_{yz}$ – деформации сдвига в плоскостях XOY, XOZ, YOZ ; k_x, k_y – главные кривизны оболочки вдоль осей x и y ; A, B – параметры Ляме, характеризующие геометрию оболочки.

Для связи деформаций и напряжений используются физические соотношения, которые строятся на основе обобщенного закона Гука (С. А. Амбарцумян). Выразив напряжения через деформации, получим физические соотношения для тонкостенной ортотропной оболочки при линейно-упругом деформировании:

$$\sigma_x = \frac{E_1}{1 - \mu_{12}\mu_{21}} [\varepsilon_x + \mu_{21}\varepsilon_y + z(\chi_1 + \mu_{21}\chi_2)];$$

$$\sigma_y = \frac{E_2}{1 - \mu_{12}\mu_{21}} [\varepsilon_y + \mu_{12}\varepsilon_x + z(\chi_2 + \mu_{12}\chi_1)]; \quad (2)$$

$$\tau_{xy} = G_{12}[\gamma_{xy} + 2z\chi_{12}]; \quad \tau_{xz} = G_{13}kf(z)(\Psi_x - \theta_1); \quad \tau_{yz} = G_{23}kf(z)(\Psi_y - \theta_2),$$

где $f(z)$ – функция, характеризующая распределение напряжений τ_{xz}, τ_{yz} по толщине оболочки, $k = 5/6$; E_1, E_2 – модули упругости в направлениях x, y ; G_{12}, G_{13}, G_{23} – модули сдвига в плоскостях XOY, XOZ, YOZ соответственно; μ_{12}, μ_{21} – коэффициенты Пуассона.

Подкрепление тонкостенных конструкций различными жесткостными элементами позволяет существенно улучшить эксплуатационные показатели таких конструкций. Оболочки, подкрепленные ребрами жесткости, теряют устойчивость при нагрузках, в несколько раз больших, чем гладкие. Сфера применения таких оболочек довольно обширна – судостроение, авиастроение, ракетостроение, строительство и т.д. Манипулирование способами подкрепления конструкции позволяет найти оптимальный вариант конструкции.

Наиболее часто ребра располагают вдоль осей локальной системы координат оболочки в одном или двух направлениях.

Рассмотрим геометрию подкрепленной оболочки. Ребра прикреплены к оболочке со стороны вогнутости, и направлены вдоль осей x, y (рис. 2).

Высота и расположение ребер задается функцией (В. В. Карпов)

$$H(x, y) = \sum_{j=1}^m h^j \bar{\delta}(x - x_j) + \sum_{i=1}^n h^i \bar{\delta}(y - y_i) - \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^m h^{ij} \bar{\delta}(x - x_j) \bar{\delta}(y - y_i),$$

где h^j, r_j, m – высота и ширина ребер, параллельных оси y , и число ребер этого направления; h^i, r_i, n – аналогично для ребер, параллельных оси x ; $h^j = \min\{h^i, h^j\}$; $\bar{\delta}(x-x_j)$ и $\bar{\delta}(y-y_i)$ представляют собой разности двух единичных функций $\bar{\delta}(x-x_j)=U(x-a_j)-U(x-b_j)$, $\bar{\delta}(y-y_i)=U(y-c_i)-U(y-d_i)$, где $a_j = x_j - r_j/2$, $b_j = x_j + r_j/2$, $c_i = y_i - r_i/2$, $d_i = y_i + r_i/2$. Следовательно, толщина всей конструкции равна $h+H$. Для оболочек, часто подкрепленных ребрами, целесообразно использовать метод конструктивной анизотропии.

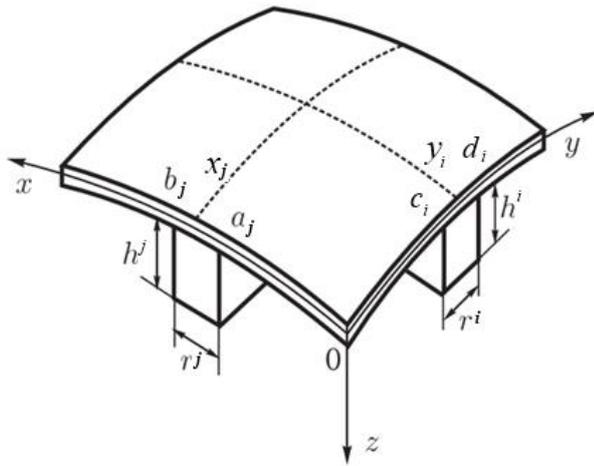


Рис. 2. Задание расположения ребер, параллельных координатным линиям

Вариант метода конструктивной анизотропии для ребристых оболочек был разработан В. В. Карповым. В данной работе этот метод применяется для расчета подкрепленных ортотропных оболочек. Суть метода конструктивной анизотропии заключается в сведении оболочки дискретно-переменной толщины к оболочке равновеликой по жесткости оболочке постоянной толщины и позволяет учитывать такие важные факторы, как сдвиговая и крутильная жесткость ребер.

Получим выражения для усилий и моментов при введении ребер жесткости по методу конструктивной анизотропии. Проинтегрируем напряжения (2) по z в пределах от $-h/2$ до $h/2+H$. Для подкрепленных оболочек $f(z)$ можно принять в виде (В. В. Карпов)

$$f(z) = -\frac{6}{(h+H)^2} \left(z + \frac{h}{2} \right) \left(z - \frac{h}{2} - H \right), \quad k = \frac{5}{6}.$$

Таким образом, выражения для усилий и моментов примут вид:

$$\begin{aligned} N_x &= \frac{E_1}{1-\mu_{12}\mu_{21}} \left[(h+F_x)(\varepsilon_x + \mu_{21}\varepsilon_y) + S_x(\chi_1 + \mu_{21}\chi_2) \right], \\ N_y &= \frac{E_2}{1-\mu_{12}\mu_{21}} \left[(h+F_y)(\varepsilon_y + \mu_{12}\varepsilon_x) + S_y(\chi_2 + \mu_{12}\chi_1) \right], \\ N_{xy} &= G_{12} \left[(h+F_y)\gamma_{xy} + 2S_y\chi_{12} \right], \quad N_{yx} = G_{12} \left[(h+F_x)\gamma_{xy} + 2S_x\chi_{12} \right], \\ M_x &= \frac{E_1}{1-\mu_{12}\mu_{21}} \left[S_x(\varepsilon_x + \mu_{21}\varepsilon_y) + \left(\frac{h^3}{12} + J_x \right) (\chi_1 + \mu_{21}\chi_2) \right], \end{aligned} \quad (3)$$

$$\begin{aligned}
M_y &= \frac{E_2}{1 - \mu_{12}\mu_{21}} \left[S_y(\varepsilon_y + \mu_{12}\varepsilon_x) + \left(\frac{h^3}{12} + J_y \right) (\chi_2 + \mu_{12}\chi_1) \right], \\
M_{xy} &= G_{12} \left[S_y \gamma_{xy} + 2 \left(\frac{h^3}{12} + J_y \right) \chi_{12} \right], \quad M_{yx} = G_{12} \left[S_x \gamma_{xy} + 2 \left(\frac{h^3}{12} + J_x \right) \chi_{12} \right], \\
Q_y &= G_{13} k (h + F_x) (\Psi_x - \theta_1), \quad Q_x = G_{23} k (h + F_y) (\Psi_y - \theta_2),
\end{aligned}$$

где $F_x, F_y, S_x, S_y, J_x, J_y$ – жесткостные характеристики ребер.

Функционал полной энергии деформации оболочки является суммой работ внутренних и внешних сил, после некоторых преобразований, принимает следующий вид:

$$\begin{aligned}
\mathfrak{D} &= \frac{E_1}{2(1 - \mu_{12}\mu_{21})} \int_{a_1}^{a_2} \int_{y_1(x)}^{y_2(x)} \left\{ a_1 \varepsilon_x^2 + a_2 \varepsilon_y^2 + a_3 \varepsilon_x \varepsilon_y + a_4 \gamma_{xy}^2 + a_5 (\Psi_x - \theta_1)^2 + \right. \\
&+ a_6 (\Psi_y - \theta_2)^2 + a_7 \varepsilon_x \chi_1 + a_8 \varepsilon_x \chi_2 + a_9 \varepsilon_y \chi_1 + a_{10} \varepsilon_y \chi_2 + a_{10} \gamma_{xy} \chi_{12} + \\
&\left. + a_{11} \chi_1^2 + a_{12} \chi_2^2 + a_{13} \chi_1 \chi_2 + a_{14} \chi_{12}^2 - a_{15} q W \right\} AB dx dy \quad (4)
\end{aligned}$$

где

$$\begin{aligned}
a_1 &= h + F_x, \quad a_2 = \overline{G_2} (h + F_y), \quad a_3 = \mu_{21} (2h + F_x + F_y), \quad a_4 = 0.5 \overline{G_{12}} (2h + F_x + F_y), \\
a_5 &= \overline{G_{13}} k (h + F_x), \quad a_6 = \overline{G_{23}} k (h + F_y), \quad a_7 = 2S_x, \quad a_8 = \mu_{21} (S_x + S_y), \\
a_9 &= 2\overline{G_2} S_y, \quad a_{10} = 2\overline{G_{12}} (S_x + S_y), \quad a_{11} = h^3 / 12 + J_x, \quad a_{12} = \overline{G_2} (h^3 / 12 + J_y), \\
a_{13} &= \mu_{21} (h^3 / 6 + J_x + J_y), \quad a_{14} = 2\overline{G_{12}} (h^3 / 6 + J_x + J_y), \quad a_{15} = 2(1 - \mu_{12}\mu_{21}) / E_1, \\
\overline{G_2} &= \frac{E_2}{E_1}, \quad \overline{G_{12}} = \frac{G_{12}(1 - \mu_{12}\mu_{21})}{E_1}, \quad \overline{G_{13}} = \frac{G_{13}(1 - \mu_{12}\mu_{21})}{E_1}, \quad \overline{G_{23}} = \frac{G_{23}(1 - \mu_{12}\mu_{21})}{E_1}.
\end{aligned}$$

2. Разработан алгоритм исследования предложенной модели, основанный на методе Рунге и методе продолжения решения по наилучшему параметру с использованием адаптивного выбора сетки, позволяющий находить верхние и нижние критические нагрузки, точки бифуркации, а также исследовать закритическое поведение конструкции для анализа местной и общей форм потери устойчивости.

Неизвестные функции представляются в виде

$$\begin{aligned}
U(x, y) &= \sum_{I=1}^N U(I) Z1(I); \quad V(x, y) = \sum_{I=1}^N V(I) Z2(I); \quad W(x, y) = \sum_{I=1}^N W(I) Z3(I); \\
\Psi_x(x, y) &= \sum_{I=1}^N PS(I) Z4(I); \quad \Psi_y(x, y) = \sum_{I=1}^N PN(I) Z5(I), \quad (5)
\end{aligned}$$

где $U(I), V(I), W(I), PS(I), PN(I)$ – неизвестные числовые коэффициенты, а $Z1(I)–Z5(I)$ – известные аппроксимирующие функции аргументов x и y , удовлетворяющие заданным краевым условиям на контуре оболочки, N – количество членов разложения.

Подставив разложения неизвестных функций (5) в функционал (4), найдем производные от функционала по неизвестным числовым параметрам и приравняем их к нулю. В результате получим систему нелинейных алгебраических уравнений:

$$\begin{aligned} \sum_{I=1}^N \left[U(I)C1(I,l) + V(I)C2(I,l) + W(I)C3(I,l) + PS(I)C4(I,l) + \right. \\ \left. + PN(I)C5(I,l) \right] + A_1(l) = 0, \\ \sum_{I=1}^N \left[U(I)C6(I,l) + V(I)C7(I,l) + W(I)C8(I,l) + PS(I)C9(I,l) + \right. \\ \left. + PN(I)C10(I,l) \right] + A_2(l) = 0, \\ \sum_{I=1}^N \left[U(I)C11(I,l) + V(I)C12(I,l) + W(I)C13(I,l) + \right. \\ \left. + PS(I)C14(I,l) + PN(I)C15(I,l) \right] + A_3(l) - CP(l)q = 0, \quad (6) \\ \sum_{I=1}^N \left[U(I)C16(I,l) + V(I)C17(I,l) + W(I)C18(I,l) + \right. \\ \left. + PS(I)C19(I,l) + PN(I)C20(I,l) \right] + A_4(l) = 0. \\ \sum_{I=1}^N \left[U(I)C21(I,l) + V(I)C22(I,l) + W(I)C23(I,l) + \right. \\ \left. + PS(I)C24(I,l) + PN(I)C25(I,l) \right] + A_5(l) = 0. \end{aligned}$$

где коэффициенты этой системы представляют собой двойные интегралы от комбинаций входных параметров и аппроксимирующих функций; $A1(l)–A5(l)$ – нелинейные члены системы. Кратко полученную систему запишем в векторной форме

$$F(\tilde{X}) = 0, \quad (7)$$

$$\tilde{X} = (X, P)^T = (U(I), V(I), W(I), PS(I), PN(I), P)^T, I = 1..N$$

где вектор X – вектор неизвестных числовых параметров, P – нагрузка.

Известно, что в ненагруженном состоянии оболочки значения перемещений и углов поворота нормали равны нулю, т.е.

$$F(X^0, P^0) \equiv 0, X^0 = 0, P^0 = 0. \quad (8)$$

Для решения нелинейной системы алгебраических уравнений (7) будем применять метод продолжения решения по параметру. Притом, будем использовать модификацию метода, в которой за параметр продолжения решения берется длина дуги λ кривой равновесных состояний, притом параметр λ не входит явно в систему уравнений (Е. Б. Кузнецов, В. И. Шалашилин).

Продифференцировав (7) по параметру λ , считая что переменные вектора \tilde{X} от него зависят, получим задачу Коши для системы линейных дифференциальных уравнений $\frac{\partial F(\tilde{X})}{\partial \tilde{X}} \frac{d\tilde{X}}{d\lambda} = 0$, с начальным условием $\tilde{X}(\lambda_0) = 0, \lambda_0 = 0$.

Здесь J – матрица Якоби вектор-функции F , а $\det(J)$ – определитель матрицы Якоби J . Точки, в которых выполняется условие $\det(J) \neq 0$, называются регулярными, а точки, в которых $\det(J) = 0$, – особыми.

Применение метода Эйлера для решения полученной задачи Коши сводит решение нелинейной задачи к последовательному решению систем линейных алгебраических уравнений относительно приращений искомых функций $\Delta\tilde{X}$. На k -м этапе нагружения искомые функции находятся по формулам.
$$\tilde{X}_k = \tilde{X}_{k-1} + \Delta\tilde{X}_k.$$

Аналогичная методика для расчета пологих изотропных оболочек применялась в работах Л. П. Москаленко.

3. Разработана программа «OrthShell: strength and stability of orthotropic shells», позволяющая проводить комплексные исследования прочности и устойчивости оболочек из ортотропных материалов (свидетельство о регистрации в Реестре программ для ЭВМ № 2014614627 от 29.04.2014 г.).

Современные программные комплексы для моделирования поведения различных строительных конструкций не могут с достаточной точностью и полнотой исследовать нелинейные проблемы подкрепленных оболочек. Кроме того, в большинстве случаев сложно задать рассчитываемую конструкцию в виде тонкостенной оболочки, подкрепленной ребрами.

Программу для комплексного исследования поведения оболочки можно разбить на два основных модуля:

I. Модуль формирования и вычисления коэффициентов СНАУ (размерность матрицы уравнений $5N + 1 \times 5N + 1$)

II. Модуль расчета напряженно-деформированного состояния оболочки и анализа ее прочности и устойчивости.

Для получения СНАУ сначала задаются входные данные оболочки (линейные размеры, кривизны, форма контура, параметры материала, количество и расположение ребер жесткости и т.д.), а также основные соотношения модели в общем виде. Из них формируются коэффициенты системы (6).

Во втором модуле реализован итерационный процесс решения СНАУ и пошагового получения точек кривой «нагрузка – прогиб». На каждом шаге расчета вычисляются перемещения характерных точек конструкции, рассчитываются компоненты вектора напряжений; находятся максимальные значения перемещений и напряжений по всей области конструкции; производится оценка прочности и сохранение всех полученных данных в массивы.

4. Проведен анализ критериев прочности для выбора оптимального критерия предельного сопротивления материала и анализ развития областей остаточных деформаций при закритическом деформировании.

Из анализа критериев прочности анизотропных материалов (И. И. Гольденблат, Б. И. Ковальчук, В. А. Копнов, Ш. О. Кулон, А. А. Лебедев, Р. Мизес, Г. С. Писаренко, Л. Фишер, и др.) следует, что не существует единого критерия для

различных материалов, поэтому для оценки прочности материала конструкций будем использовать пять критериев:

1. Критерий максимальных напряжений.
2. Критерий Мизеса – Хилла.
3. Критерий Фишера.
4. Критерий Гольденבלата – Копнова.
5. Критерий Писаренко – Лебедева.

Вычислительный эксперимент для обоснования выбора критерия прочности при исследовании оболочечных конструкций проводился для различных оболочек (пологих прямоугольного плана, панелей цилиндрических и конических оболочек) и различных ортотропных материалов (углепластики, стеклопластики).

На рис. 3 представлен график зависимости значений выбранных критериев K_r от нагрузки q . Здесь K_r – левая часть критерия прочности, для критерия максимальных напряжений левую часть будем брать в виде

$$K_r = \max \left\{ \left| \frac{\sigma_x}{F_x} \right|, \left| \frac{\sigma_y}{F_y} \right|, \left| \frac{\tau_{xy}}{F_{xy}} \right| \right\}. \text{ Момент перехода } K_r \text{ через единицу (начало потери}$$

прочности) на графиках отмечен кружком. График приводится для панели цилиндрической оболочки из углепластика ЛУ-П/ЭНФБ с параметрами: $a = 20$ м, $R = 5.4$ м, $h = 0.01$ м и углом разворота π рад.

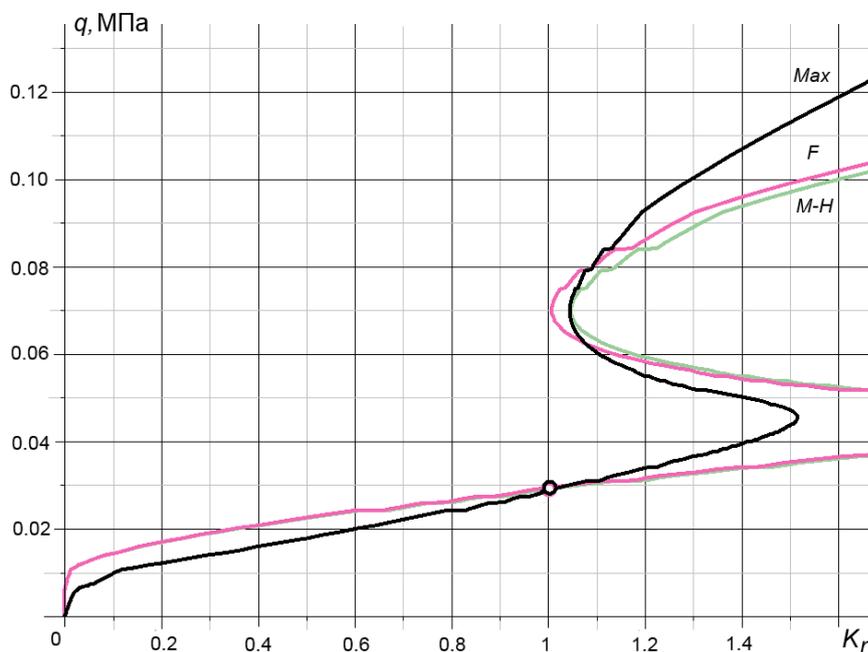


Рис. 3. Кривые зависимости значений выбранных критериев K_r от нагрузки q для рассматриваемой цилиндрической панели

Как показал вычислительный эксперимент, различные критерии дают близкие результаты. Исключением является критерий Писаренко – Лебедева.

Так как предельные нагрузки потери прочности, найденные по критерию максимальных напряжений практически совпадают с аналогичными нагрузками,

найденными по другим критериям, и, кроме того, в отличие от других критериев он еще указывает по какой компоненте напряжений происходит потеря прочности, то в дальнейшем для исследования прочности оболочечных конструкций будем использовать именно его.

Проведен анализ развития областей остаточных деформаций при закритическом деформировании, который показал схожие результаты для разных критериев. Этот анализ дает информацию для оптимальной расстановки ребер жесткости для повышения прочности оболочечных конструкций.

5. Проведен анализ закритического поведения рассматриваемых конструкций, который показал, что до полной потери устойчивости оболочек зачастую происходят несколько раз местные потери устойчивости.

Механические характеристики материалов рассматриваемых конструкций показаны в табл. 1. Помимо оболочек из ортотропных материалов (углепластика), для сравнения рассматривались изотропные оболочки, выполненные из стали и оргстекла.

Таблица 1

Механические характеристики материалов рассматриваемых конструкций
(А. А. Смердов, М. В. Цепенников)

Характеристика	Ортотропные				Изотропные	
	Углепластик				Сталь	Оргстекло
	ЛУ-П/ЭНФБ	T300/Ероху	M60J/Ероху	T300/976		
E_1 , МПа	$1.4 \cdot 10^5$	$1.25 \cdot 10^5$	$3.3 \cdot 10^5$	$1.4 \cdot 10^5$	$2.1 \cdot 10^5$	$0.03 \cdot 10^5$
μ_{12}	0.3	0.34	0.32	0.29	0.3	0.35
E_2 , МПа	$0.97 \cdot 10^4$	$0.78 \cdot 10^4$	$0.59 \cdot 10^4$	$0.97 \cdot 10^4$	$2.1 \cdot 10^5$	$0.03 \cdot 10^5$
G_{12} , МПа	$0.46 \cdot 10^4$	$0.44 \cdot 10^4$	$0.39 \cdot 10^4$	$0.55 \cdot 10^4$	$0.807 \cdot 10^5$	$0.012 \cdot 10^5$
G_{13} , МПа	$0.46 \cdot 10^4$	$0.44 \cdot 10^4$	$0.39 \cdot 10^4$	$0.55 \cdot 10^4$	$0.807 \cdot 10^5$	$0.012 \cdot 10^5$
G_{23} , МПа	$0.46 \cdot 10^4$	$0.44 \cdot 10^4$	$0.39 \cdot 10^4$	$0.33 \cdot 10^4$	$0.807 \cdot 10^5$	$0.012 \cdot 10^5$
F_1^+ , МПа	700	1760	1760	1517	–	–
F_1^- , МПа	– 600	– 1570	– 780	– 1599	–	–
F_2^+ , МПа	27	80	30	46	–	–
F_2^- , МПа	– 184	– 168	– 168	– 253	–	–
F_{12} , МПа	55	98	39	41.4	–	–
σ_T , МПа	–	–	–	–	1720	75
Пл-ть, кг/м ³	1500	1500	1500	1500	7800	1190

Здесь F_1^+ , F_2^+ – пределы прочности при растяжении в направлениях x , y ; F_1^- , F_2^- – пределы прочности при сжатии; F_{12} – предел прочности при сдвиге в плоскости XOY .

Были проведены исследования прочности и устойчивости ортотропных квадратных в плане пологих оболочек; панелей цилиндрических и конических оболочек в геометрически нелинейной постановке. Проведено исследование закритического поведения рассматриваемых конструкций.

Вначале будем рассматривать прямоугольные в плане пологие оболочки. Форма закрепления контура – неподвижный шарнир. На оболочку действует постоянная поперечная нагрузка. Данный вид нагрузки является наиболее опасным, и близок к нагрузке, соответствующей снеговой. В табл. 2 приведены геометрические параметры рассматриваемых вариантов конструкций.

Параметры пологих оболочек специально выбраны такими же, которые были рассмотрены в работах В. В. Карпова при исследовании оболочек из изотропных материалов, чтобы провести в дальнейшем сравнение результатов расчета. Пологие, квадратные в плане оболочки характеризуются безразмерными параметрами $\bar{a} = a/h$, $k_{\xi} = a^2/(h \cdot R_1)$, $\bar{W} = \frac{W}{h}$, $\bar{P} = \frac{qa^4}{E_1 h^4}$, $\bar{\sigma} = \frac{\sigma a^2}{E_1 h^2}$. Поэтому при разных размерных параметрах и одинаковых значениях безразмерных параметров \bar{a} и k_{ξ} оболочки будут подобными. Для таких оболочек значения критической нагрузки и напряжений будут совпадать, а прогиб W необходимо масштабировать.

Таблица 2

Параметры рассматриваемых вариантов пологих оболочек

Вар.	Линейные размеры $a = b$, (м)	Радиусы главных кривизн $R = R_1 = R_2$, (м)	Толщина оболочки h , (м)	Безразмерный параметр \bar{a}	Обобщенный параметр кривизны k_{ξ}
1	18	45.3	0.03	600	238.4
	27	67.95	0.045		
	36	90.6	0.06		
	54	135.9	0.09		
2	18	22.65	0.03	600	477
	27	34	0.045		
	36	45.3	0.06		
	54	67.95	0.09		
3	18	11.325	0.03	600	953
	27	17	0.045		
	36	22.65	0.06		
	54	34	0.09		

При решении геометрически нелинейной задачи строится график зависимости «нагрузка – прогиб» в некоторой точке кривой. Находятся точки максимума и минимума этой кривой. Нагрузки, соответствующие этим точкам принимаются за верхние и нижние критические нагрузки.

Здесь и далее на графиках показана кривая максимального прогиба W_{\max} ; кривая прогиба W_c в центре; кривая прогиба W_4 в четверти; кривая W_8 в восьмой части. На кривых W_{\max} и W_c показаны точки, в которых определитель матрицы Якоби обращается в ноль. Эти точки соответствуют верхним и нижним критическим нагрузкам или точкам бифуркации. Ромбами на этих кривых показаны точки, соответствующие нагрузкам потери прочности по какой-либо из компонент напряжений. На остальных кривых эти точки не отмечены, чтобы не загромождать график. При проведении данных расчетов предполагается, что по-

сле достижения первого предельного значения напряжений конструкция не изменила своей геометрии и характера поведения. Дальнейшая кривая имеет скорее научный, чем практический интерес.

Рассмотрим более подробно пологую оболочку варианта 1 при толщине $h = 0.09$ м. В этом случае нагрузка от собственного веса составит 0.00135 МПа. На рис. 4 приведен фрагмент графика «нагрузка q – прогиб W » для данной оболочки из углепластика М60J. Первой критической нагрузке соответствует значение 0.0135 МПа, на графике это точка A . В этот момент происходит переход на новое равновесное состояние в точку B (показано пунктиром). Таким образом, оболочка теряет устойчивость посредством «хлопка». Далее, при нагрузке 0.023 МПа (точка C) происходит следующий небольшой «хлопок», в основном это заметно в четверти и восьмой части конструкции.

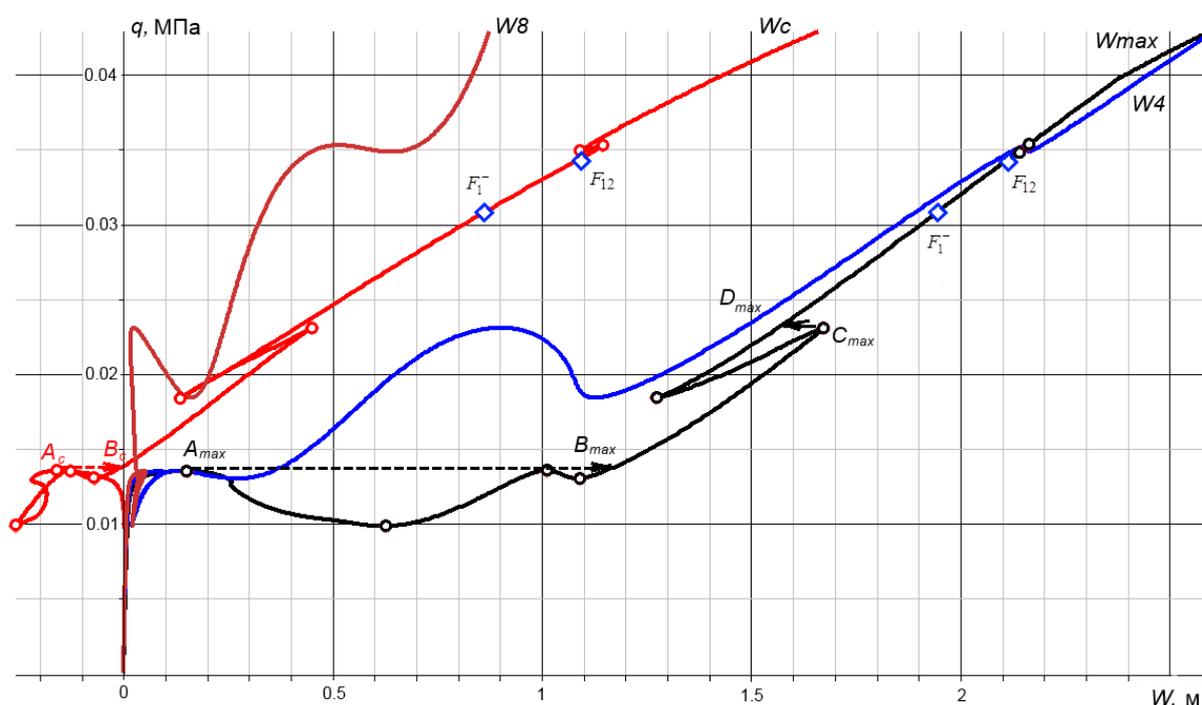


Рис. 4. Фрагмент графика «нагрузка q – прогиб W » для полой оболочки варианта 1 из углепластика М60J

После этого наступает потеря прочности на сжатие вдоль оси x при нагрузке 0.0308 МПа. Таким образом, для рассмотренной конструкции потеря устойчивости наступает раньше потери прочности.

На рис. 5 приводятся поля прогибов конструкции до и после первой критической нагрузки, отложенные не только от плоскости, но и от поверхности оболочки. Это делается в связи с тем, что поле прогибов, отложенное от плоскости в системе Maple, не достаточно наглядно отражает поведение реальной конструкции. Чтобы изменения в конструкции были хорошо видны, был взят коэффициент масштабирования прогиба $k = 5$.

Также будем рассматривать панели цилиндрических оболочек. Форма закрепления контура – неподвижный шарнир. На оболочку действует постоянная поперечная нагрузка. Принятая локальная система координат таких конструкций

показана на рис. 6, а в табл. 3 приведены геометрические параметры рассматриваемых вариантов оболочек.

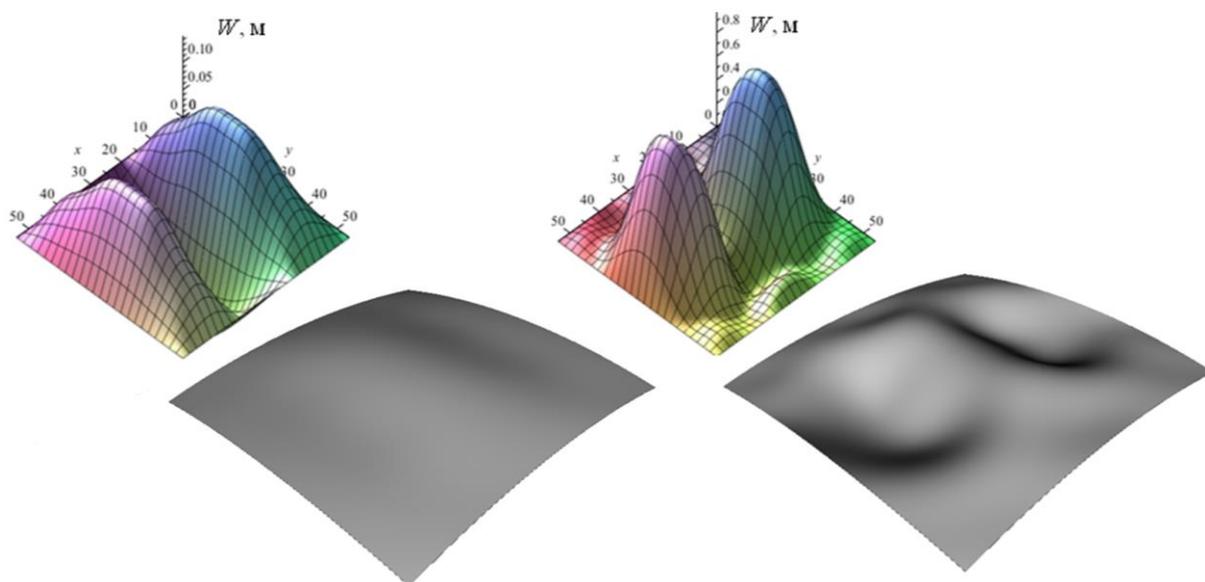


Рис. 5. Поля прогибов конструкции до и после первой критической нагрузки для пологой оболочки варианта 1 из углепластика М60J

Помимо обобщенного параметра кривизны, цилиндрические панели удобно характеризовать отношением их линейных размеров $\lambda_1 = a/(Rb)$.

Панели цилиндрических оболочек можно условно поделить на три категории: короткие, средние и длинные в зависимости от соотношения их сторон. В данном случае, панель варианта 2 относится к категории коротких, варианты 1 и 4 – к категории средних, а вариант 3 к длинным панелям.

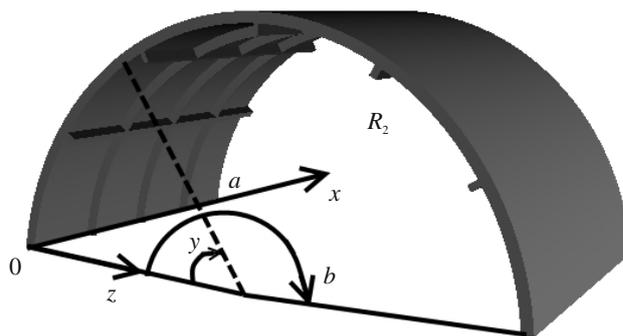


Рис. 6. Схематичное изображение панели цилиндрической оболочки

Таблица 3

Параметры рассматриваемых вариантов панелей цилиндрических оболочек

Параметр	Вариант			
	1	2	3	4
Линейный размер, a (м)	10	10	20	20
Угол разворота, b (рад)	$\pi/2$	π	$\pi/2$	π
Радиус кривизны, R (м)	5.4	5.4	5.4	5.4
Толщина оболочки, h (м)	0.01	0.01	0.01	0.01
Обобщенный параметр кривизны k_n	1332	5329	1332	5329
Отношение линейных размеров λ_1	1.179	0.589	2.357	1.179
Нагрузка от собственного веса (МПа)	0.00015	0.00015	0.00015	0.00015

На рис. 7 приведен фрагмент графика «нагрузка q – прогиб W » для цилиндрической панели варианта 3 из углепластика ЛУ-П/ЭНФБ.

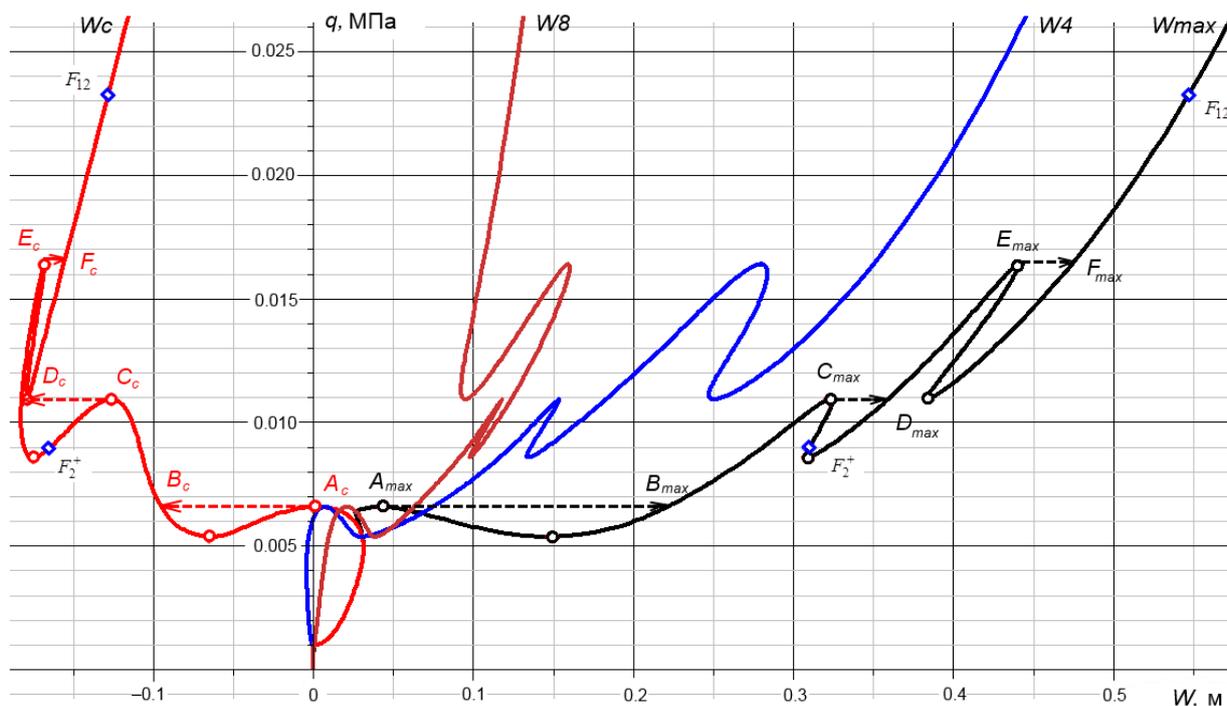


Рис. 7. Фрагмент графика «нагрузка q – прогиб W » для панели цилиндрической оболочки варианта 3 из углепластика ЛУ-П/ЭНФБ

При нагружении оболочки процесс происходит следующим образом: сначала достигается нагрузка 0.0066 МПа (Точка A), происходит переход на новое равновесное состояние (Точка B). Как видно из рисунков, в этот момент центр оболочки неожиданно выгнулся в обратную сторону, а в четвертях произошло резкое увеличение прогиба. Далее идет небольшое увеличение нагрузки до 0.0109 МПа (Точка C) и переход на новое равновесное состояние в точку D . Аналогичная ситуация происходит при достижении точки E . Если же происходит процесс разгрузки конструкции, то на кривой «нагрузка-прогиб» задействуются нижние критические нагрузки, и переходы на новые равновесные состояния происходят через них.

На рис. 8 представлены при нагрузке 0.0066 МПа поля прогибов до потери устойчивости (рис. 8а, 8б) и после «прохлопывания» (рис. 8в, 8г), отложенные от плоскости (рис. 8а, 8в) и от поверхности оболочки (рис. 8б, 8г), коэффициент масштабирования прогиба $k = 2$.

Когда оболочечная конструкция имеет достаточно большие размеры, и при этом достаточно тонкая, она редко теряет устойчивость сразу одним большим хлопком. Происходят локальные скачкообразные деформации в различных частях конструкции, это так называемые локальные потери устойчивости. Оболочка может пытаться по несколько раз выгнуться то в одну, то в другую сторону, прежде чем произойдет один большой хлопок. Этот процесс можно отследить, наблюдая за кривыми «нагрузка – прогиб» в разных характерных точках оболочки (например, центр и четверть конструкции могут вести себя кардинально противоположно). Особый интерес представляет случай, когда в процессе нагружения происходит несколько небольших локальных потерь устойчивости подряд. На графиках (рис. 4, 7) это показано пунктирными линиями.

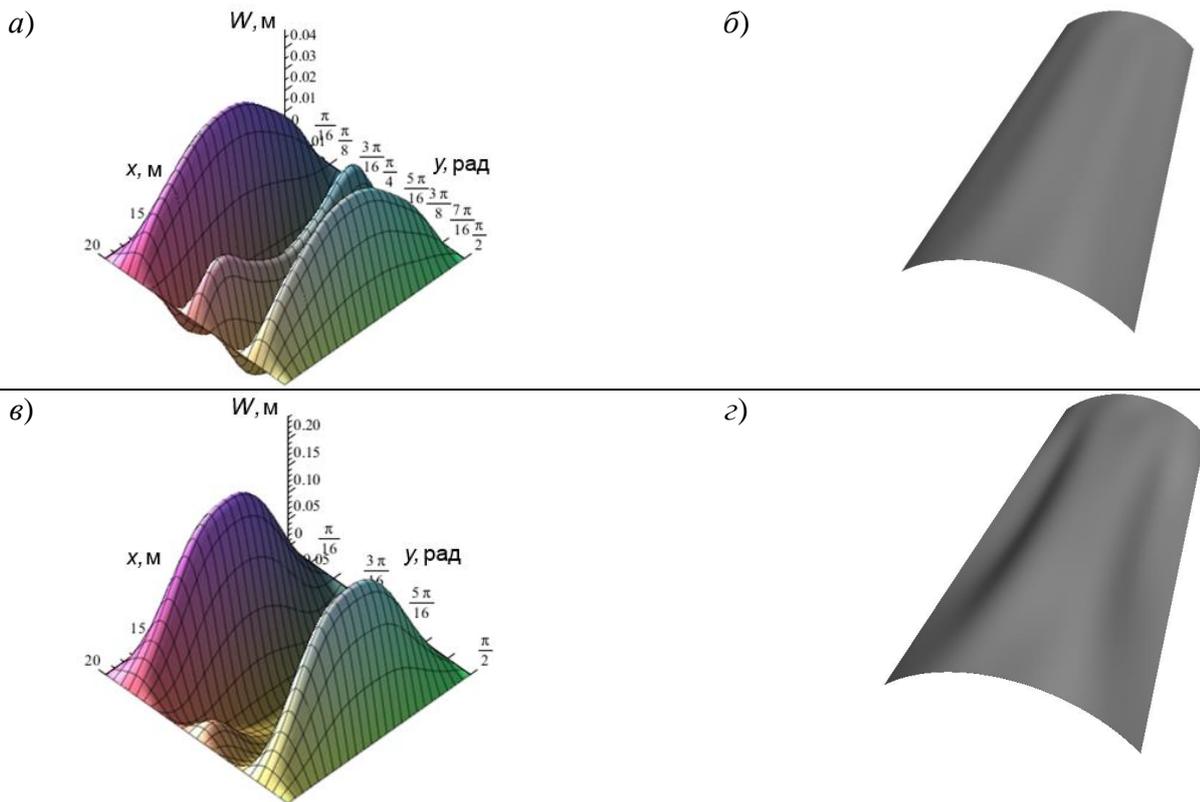


Рис. 8. Поля прогибов при первой критической нагрузке, до и после потери устойчивости

Аналогичная картина потери устойчивости наблюдается и у панелей конических оболочек. Было проведено исследование конических панелей, параметры рассматриваемых конструкций показаны в табл. 4.

Таблица 4

Параметры рассматриваемых вариантов конических панелей

Параметр	Вариант 1	Вариант 2	Вариант 3
a_1 – начало оболочки вдоль оси x , м	5	5	5
a – конец оболочки вдоль оси x , м	25	25	25
θ – угол конусности, рад	0.78	0.78	0.78
b – угол разворота, рад	π	π	π
h – толщина оболочки, м	0.01	0.01	0.01
Материал	оргстекло, изотропный	сталь, изотропный	угл. Т300/976, ортотропный
Нагрузка от собственного веса, МПа	0.000118	0.00078	0.00015

На рис. 9 приводится график «нагрузка q – прогиб W » для конической ортотропной панели варианта 3. Как видно из графика, конструкция не теряет устойчивость, однако, при нагрузке 0.023 МПа происходит потеря прочности.

На рис. 10а показано поле прогибов, отложенное от плоскости в системе $Marle$ в момент достижения предельной нагрузки потери прочности (0.023 МПа), а на рис. 10б показано то же поле прогибов, но отложенное от поверхности оболочки. Чтобы изменения в конструкции были хорошо видны, был взят коэффициент масштабирования прогиба $k = 2$.

Значения критических нагрузок потери устойчивости и предельных нагрузок потери прочности, а также соответствующих им максимальных значений прогибов для всех рассматриваемых вариантов конструкций показаны в табл. 5.

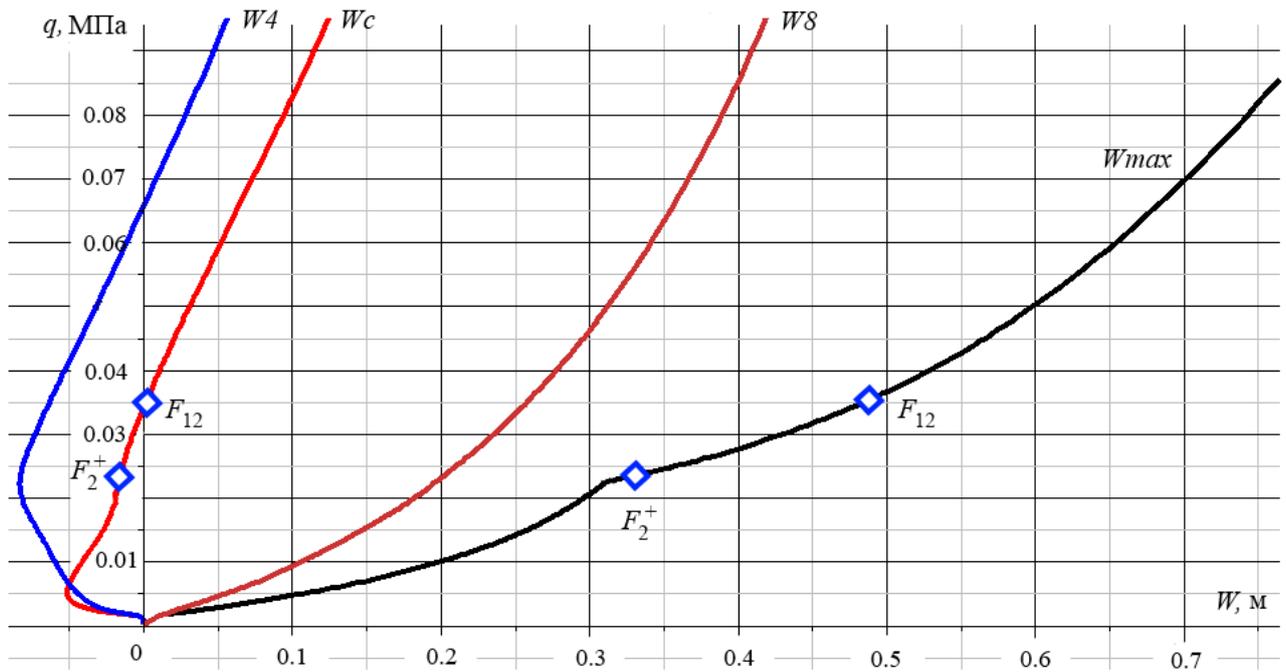


Рис. 9. График «нагрузка q – прогиб W » для конической панели варианта 3

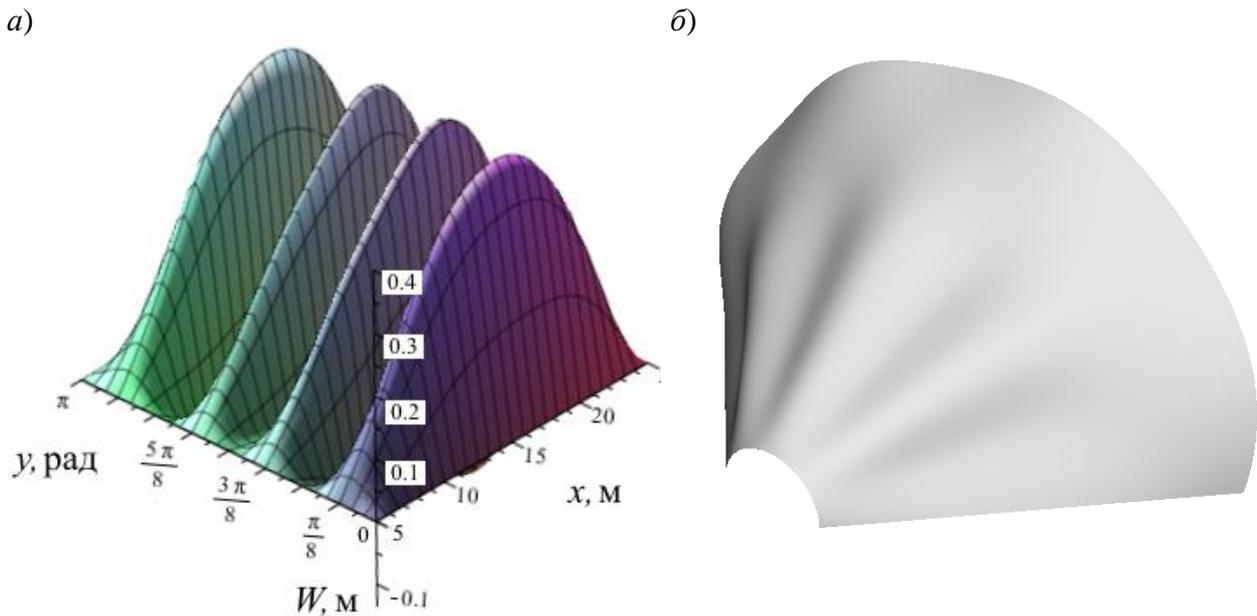


Рис. 10. Поле прогибов оболочки варианта 3 в момент потери прочности при нагрузке 0.023 МПа

Таблица 5

Полученные значения для рассматриваемых вариантов панелей конических оболочек

Параметр	Панели конических оболочек		
	Вар.1, оргстекло	Вар.2, сталь	Вар.3, углепластик
Критическая нагрузка q_{kr} , МПа	0.0152	0.2847	–
Максимальный прогиб при q_{kr} , м	0.971	0.3515	–
Предельная нагрузка q_{nlin} , МПа	0.0113	0.2847	0.023
Нагрузка от собственного веса, МПа	0.000118	0.00078	0.00015
Компонента пред. напряжений	σ_i	σ_i	F_2^+

Для рассмотренной ортотропной конической панели (вариант 3), в силу геометрии такой конструкции, распределение значений прогибов и напряжений по области оболочки происходит неравномерно со смещением вмятин к более широкой части оболочки. Для оболочек, теряющих устойчивость, при потере устойчивости число вмятин может меняться. Сравнение с результатами расчетов аналогичных по геометрии, но изотропных конструкций, показало преимущество современных композиционных материалов по комбинации прочностных характеристик и их веса.

Сравнение с результатами расчета устойчивости тестовых задач для изотропных пологих и цилиндрических оболочек, полученных по другому алгоритму, и сравнение для ортотропных оболочек с программным комплексом ANSYS, показали количественное совпадение критических нагрузок.

6. Выявлено, что потеря устойчивости для некоторых вариантов оболочек наступает раньше потери прочности, но имеет место и обратное, поэтому необходимо проводить расчеты конкретных конструкций. Поэтому необходимо проводить комплексные расчеты прочности и устойчивости конкретных конструкций.

После проведения аналогичных исследований по всем представленным в табл. 2 вариантам пологих оболочек, можно сделать вывод, что для оболочек варианта 3 для двух видов углепластика потеря прочности происходит раньше потери устойчивости, для остальных потеря устойчивости раньше потери прочности. В половине случаев достижение предельных значений напряжений происходит на нисходящей ветви графика «нагрузка q – прогиб W ».

После проведения исследований по всем представленным в табл. 3 вариантам цилиндрических панелей, можно сделать вывод, что в большинстве исследованных случаев первыми предельные значения достигались компонентой напряжений вдоль оси y на растяжение, реже y на сжатие и сдвиг в плоскости.

Следует отметить, что для цилиндрических панелей 1, 2 и 4 вариантов характерно следующее поведение: сначала при очень малой нагрузке (порядка 0.005 МПа) происходит постепенное продавливание центра оболочки (кривая нагрузка-прогиб в центре неожиданно начинает развиваться в направлении, близком к горизонтальному), далее кривая снова начинает расти, происходит потеря прочности, а затем и потеря устойчивости.

Так как предельные значения напряжений для разных конструкций и материалов достигались по разным компонентам вектора напряжений, для каждой конкретной конструкции необходимо проводить отдельное компьютерное моделирование и исследование ее напряженно-деформированного состояния.

7. Выявлено, что для тонкостенных пологих оболочек прямоугольного плана и панелей цилиндрических оболочек, выполненных из углепластика, при учете геометрической нелинейности предельные нагрузки потери прочности уменьшаются по сравнению с расчетами, проведенными при геометрически линейной постановке (в 5-10 раз).

Для пологих оболочек был проведен анализ влияния учета геометрической нелинейности на получаемые значения предельно допустимых нагрузок потери прочности.

В табл. 6 представлены значения критических нагрузок потери устойчивости q_{kr} и предельных нагрузок потери прочности при геометрически линейном и нелинейном варианте расчета (q_{lin} и q_{nlin} соответственно), и их отношение.

Отношение найденных предельных нагрузок потери прочности при геометрически линейном варианте расчета к тем же значениям при нелинейном варианте расчета составляет от 1.2 до 11. Таким образом, при исследовании прочности ортотропных пологих оболочек необходимо учитывать геометрическую нелинейность, иначе предельно допустимые нагрузки будут существенно завышены.

Таблица 6

Значения критических нагрузок потери устойчивости и предельных нагрузок потери прочности для рассматриваемых пологих оболочек

Оболочка	Углепластик	Нелинейный вариант			$\frac{q_{lin}}{q_{nlin}}$
		q_{nlin} (МПа)	Компонента предельных напряжений	q_{kr} (МПа)	
Вариант 1 $k_{\xi} = 238.4$	ЛУ-П/ЭНФБ	0.023	F_2^+	0.013	5.61
	T300/Ероху	0.030	F_2^-	0.011	11.1
	M60J/Ероху	0.031	F_1^-	0.013	4.90
	T300/976	0.032	F_2^+	0.013	10.72
Вариант 2 $k_{\xi} = 477$	ЛУ-П/ЭНФБ	0.043	F_2^+	0.076	5.83
	T300/Ероху	0.145	F_2^+	0.064	4.54
	M60J/Ероху	0.057	F_1^-	0.074	5.17
	T300/976	0.063	F_{12}	0.078	10.8
Вариант 3 $k_{\xi} = 953$	ЛУ-П/ЭНФБ	0.406	F_1^-	0.569	1.24
	T300/Ероху	0.292	F_2^+	0.487	4.48
	M60J/Ероху	0.413	F_1^-	0.521	1.42
	T300/976	0.561	F_2^+	0.586	2.41

Аналогичные результаты завышения предельных нагрузок потери прочности при геометрически линейном варианте расчета были получены и для панелей цилиндрических оболочек.

Это связано с тем, что деформирование оболочек из композиционных материалов (углепластики, стеклопластики и др.) носит существенно нелинейный характер. При геометрически нелинейном варианте расчета график «нагрузка q – прогиб W » представляет собой прямую линию, т.е. прогиб прямо пропорционально зависит от нагрузки. При учете геометрической нелинейности прогиб существенно отклоняется от прямолинейной зависимости при увеличении нагрузки. Причем происходит, зачастую, изменение первоначальной формы изогнутой поверхности. Как следствие увеличения значений прогибов – увеличение деформаций и напряжений, что приводит к достижению предельных значений

напряжений при гораздо меньших нагрузках. Так, для панели цилиндрической оболочки (Вариант 3 из табл. 3) максимальный прогиб в момент потери прочности при геометрически линейном расчете составил 0.03 м, а при геометрически нелинейном варианте 0.31 м (нагрузки 0.053 МПа и 0.009 МПа соответственно).

Следует заметить, что определяется точки начального невыполнения условий прочности, при этом конструкция еще может не терять своей работоспособности. Однако, при дальнейшем нагружении эти области расширяются и могут привести к разрушению конструкции.

8. При подкреплении ортотропных оболочек ребрами жесткости критические нагрузки возрастают в 2 – 6 раз в зависимости от числа подкрепляющих конструкцию ребер. Также существенно увеличивается нагрузка потери прочности (в 1.5 – 3 раза).

В качестве примера расчета подкрепленной оболочки возьмем рассмотренную ранее пологую оболочку варианта 1, но подкрепленную ортогональной сеткой ребер постоянной высоты и ширины. Ширина всех ребер равна $2h$, а высота $3h$. Оболочка подкреплена различным числом регулярно расположенных ребер. В табл. 7 показано влияние наличия подкрепления конструкции на значения критических нагрузок потери устойчивости q_{kr} и предельных нагрузок потери прочности q_{nlin} при разном количестве ребер жесткости.

Таблица 7

Сравнение значений критических нагрузок при разном количестве ребер жесткости

Оболочка	q_{kr} , (МПа)	q_{nlin} , (МПа)	Компонента пред. напр.
Вар. 1, гладкая	0.0135	0.0308	F_1^-
Вар. 1, подкреплена ребрами жесткости 9x9	0.0347	0.0479	F_1^-
Вар. 1, подкреплена ребрами жесткости 18x18	0.0520	0.0605	F_1^-
Вар. 1, подкреплена ребрами жесткости 36x36	0.0788	0.0825	F_1^-

Как видно из представленных данных, для рассмотренного варианта пологой оболочки, квадратной в плане, при подкреплении конструкции ребрами жесткости значения критических нагрузок возрастают в 2 – 6 раз в зависимости от числа подкрепляющих оболочку ребер. Также существенно увеличивается нагрузка потери прочности (в 1.5 – 3 раза).

Общие выводы

Разработана математическая модель с комплексным учетом ортотропии материала, геометрической нелинейности, поперечных сдвигов, введения ребер по методу конструктивной анизотропии с учетом их сдвиговой и крутильной жесткости.

Применена методика расчета, основанная на методе Ритца и методе продолжения решения по наилучшему параметру с учетом адаптивного выбора сетки для повышения точности расчетов, которая позволяет исследовать прочность и устойчивость оболочек, обходить особые точки кривой «нагрузка – прогиб»,

получать значения верхней и нижней критических нагрузок, находить точки бифуркации и исследовать закритическое поведение конструкции.

Разработано программное обеспечение расчетов прочности и устойчивости подкрепленных оболочек на основе передовых технологий программирования, что позволяет использовать его как в научных исследованиях, так и при проектировании оболочечных конструкций.

Проведено комплексное исследование прочности и устойчивости ортотропных тонкостенных оболочек, которое позволило сделать следующие выводы:

1. Оболочки из ортотропных материалов наиболее эффективны в качестве элементов строительных конструкций. Рассмотренные панели конических оболочек из изотропных материалов (оргстекло, сталь) теряли устойчивость, а панель из углепластика устойчивость не потеряла. Потеря прочности для такой панели наступила при нагрузке, в два раза превышающей нагрузку потери прочности для оболочки из оргстекла.

2. Проведенный анализ различных критериев прочности материала показал близкие результаты в предельных нагрузках потери прочности. За оптимальный критерий, как наиболее информативный, выбран критерий максимальных напряжений. Развитие областей текучести материала конструкции при увеличении нагрузки показало схожие результаты для разных критериев. Этот анализ дает информацию для оптимальной расстановки ребер жесткости для повышения прочности оболочечных конструкций.

3. Неучет геометрической нелинейности при исследовании прочности ортотропных оболочек существенно завышает допустимые нагрузки, найденные при геометрически нелинейном варианте расчета. Для рассмотренных вариантов конструкций эта разница в значениях может достигать одного порядка. Это связано с существенно нелинейным характером деформирования оболочек из композиционных материалов, когда прогибы, а, следовательно, и деформации и напряжения в несколько раз превосходят те значения, что получаются при геометрически линейном варианте расчета при одной и той же нагрузке.

4. Для рассмотренных пологих оболочек, прямоугольных в плане, панелей цилиндрических и конических оболочек, в большинстве случаев первыми предельные значения достигались компонентой напряжений вдоль оси u на растяжение.

5. Для рассмотренных оболочек из углепластика потеря прочности происходит после потери устойчивости, однако имеет место и обратное. Поэтому при исследовании устойчивости оболочечных конструкций необходимо одновременно исследовать и прочность оболочки, так как после наступления деформаций текучести происходят необратимые изменения и исследование устойчивости конструкции в линейно-упругой постановке становится неправомерным. Так как предельные значения напряжений для разных конструкций и материалов достигались по разным компонентам вектора напряжений, для каждой конкретной конструкции необходимо проводить отдельное компьютерное моделирование и исследование ее напряженно-деформированного состояния.

6. При подкреплении оболочечной конструкции ребрами жесткости значения критических нагрузок возрастают в 2 – 6 раз в зависимости от числа подкрепляющих оболочку ребер. Также существенно увеличивается нагрузка потери прочности (в 1.5 – 3 раза).

7. Для многих вариантов панелей цилиндрических и конических оболочек перед общей потерей устойчивости происходит многократная местная потеря устойчивости с образованием мелких вмятин в различных частях оболочки. Места этих вмятин перемещаются по оболочкам по мере деформирования. Если потеря прочности наступает после потери устойчивости, то после снятия нагрузки конструкция может не терять несущей способности.

III. ОСНОВНЫЕ НАУЧНЫЕ ПУБЛИКАЦИИ ПО ТЕМЕ ДИССЕРТАЦИОННОГО ИССЛЕДОВАНИЯ:

публикации в периодических научных изданиях, рекомендованных ВАК РФ:

1. **Семенов, А. А.** Компьютерное моделирование докритического и за- критического поведения тонкостенных оболочек при разных способах закрепления контура / А. А. Семенов // Вестник гражданских инженеров. – 2012. – № 4 (33). – С. 247–251. (0.25 п.л.)

2. Асеев, А. В. Визуализация напряженно-деформированного состояния тонкостенных ребристых оболочек / А. В. Асеев, А. А. Макаров, **А. А. Семенов** // Вестник гражданских инженеров. – 2013. – № 38(3). – С. 226–232. (0.125 / 0.375 п.л.)

3. Карпов, В. В. Математическая модель деформирования подкрепленных ортотропных оболочек вращения / В. В. Карпов, **А. А. Семенов** // Инженерно-строительный журнал. – № 5. – 2013. С. 100–106. (0.1875 / 0.375 п.л.)

4. Семенов, А. А. Алгоритмы исследования прочности и устойчивости подкрепленных ортотропных оболочек / **А. А. Семенов** // Строительная механика инженерных конструкций и сооружений. – № 1. – 2014. – С.49–63. (0.875 п.л.)

5. Карпов, В. В. Исследование прочности пологих ортотропных оболочек из углепластика / В. В. Карпов, **А. А. Семенов**, Д. В. Холод // Электронный журнал «Труды МАИ». – № 76. – 2014. – С.1–20. (0.42 / 1.25 п.л.)

патенты:

6. LinShell: linear calculation of shallow shells / В. В. Карпов, **А. А. Семенов**, Д. В. Холод // Свидетельство о государственной регистрации программы для ЭВМ № 2013660432, РФ от 06.11.2013 г.

7. DefShell: strength and stability of thin shells / В. В. Карпов, Л. П. Москаленко, **А. А. Семенов** // Свидетельство о государственной регистрации программы для ЭВМ № 2012612774, РФ от 19.03.2012 г.

8. OrthShell: strength and stability of orthotropic shells / **А. А. Семенов** // Свидетельство о государственной регистрации программы для ЭВМ № 2014614627, РФ от 29.04.2014 г.

публикации в других изданиях:

9. Атисков, А. Ю. Компьютерные технологии расчета оболочек / А. Ю. Атисков, Д. А. Баранова, В. В. Карпов, Л. П. Москаленко, **А. А. Семенов**. – СПб.: СПбГАСУ, 2012. – 184 с. (2.3 / 11.5 п.л.)

10. Москаленко, Л. П. Алгоритм нахождения точек бифуркации для тонкостенных оболочек / Л. П. Москаленко, **А. А. Семенов** // Высокие технологии и фундаментальные исследования. Т. 4: сборник трудов Десятой международной научно-практической конференции «Исследование, разработка и применение высоких технологий в промышленности». 09-11.12.2010, Санкт-Петербург, Россия / под ред. А.П. Кудинова. – СПб.: Изд-во Политехн. ун-та, 2010. С. 215–216. (0.03 / 0.06 п.л.)

11. **Семенов, А. А.** Программная реализация исследования устойчивости оболочек / А. А. Семенов // Актуальные проблемы современного строительства: 64-я Международная научно-техническая конференция молодых ученых. – В 3 ч. Ч. III. – СПб.: СПбГАСУ, 2011. – С. 72–77. (0.3125 п.л.)

12. **Семенов, А. А.** Применение математического программного пакета MAPLE для решения задач устойчивости и прочности тонкостенных оболочек / А. А. Семенов // Математическое моделирование, численные методы и комплексы программ: межвуз. темат. сб. тр. Вып. 18. – СПб.: СПбГАСУ, 2012. – С. 53–59. (0.375 п.л.)

13. **Семенов, А. А.** Методика учета формы контура тонкостенной оболочки, заданного функционально / А. А. Семенов // Актуальные проблемы современного строительства и пути их эффективного решения: материалы Международной научно-практической конференции. 10-12 октября 2012 г.; под общей редакцией А. Н. Егорова, А. Г. Черных; СПбГАСУ. – В 2 ч. Ч. I. – СПб., 2012. – С. 233–237. (0.25 п.л.)

14. **Семенов, А. А.** Учет различных способов закрепления контура тонкостенных пологих оболочек / А. А. Семенов // Актуальные проблемы экономики и управления в строительстве: Международная научно-практическая конференция студентов, аспирантов, молодых ученых и докторантов / СПбГАСУ. – СПб., 2012. – С. 58–60. (0.125 п.л.)

15. Карпов, В. В. Устойчивость тонкостенных оболочек при учете различных способов закрепления контура / В. В. Карпов, **А. А. Семенов** // Новые идеи нового века – 2013: Материалы Тринадцатой Международной научной конференции. Т.2 // Тихоокеанский государственный университет. – Хабаровск: Изд-во Тихоокеан. гос. ун-та, 2013. С.309–314. (0.156 / 0.3125 п.л.)

16. **Семенов, А. А.** Физические соотношения для тонкостенных оболочек из ортотропных материалов / А. А. Семенов // Актуальные проблемы экономики и управления в строительстве: Международная научно-практическая конференция студентов, аспирантов, молодых ученых и докторантов / СПбГАСУ. – СПб., 2013. – С. 97–99. (0.125 п.л.)

17. **Семенов, А. А.** Исследование прочности тонкостенных оболочек из ортотропных материалов / А. А. Семенов // Актуальные проблемы архитектуры

и строительства: материалы V Международной конференции. 25-28 июня 2013 г.; под общей редакцией Е. Б. Смирнова; СПбГАСУ. – В 2 ч. Ч. I. – СПб., 2013. – С. 425–432. (0.4375 п.л.)

18. **Семенов, А. А.** Исследование прочности и устойчивости тонкостенных пологих ортотропных оболочек / А. А. Семенов // Математическое моделирование, численные методы и комплексы программ: межвуз. темат. сб. тр. Вып. 19. – СПб.: СПбГАСУ, 2013. – С. 40–53. (0.8125 п.л.)

19. Карпов, В. В. Прочность и устойчивость ортотропных оболочек / В. В. Карпов, **А. А. Семенов** // Материалы XX Международного симпозиума «Динамические и технологические проблемы механики конструкций и сплошных сред» им. А.Г. Горшкова. Т. 1. – М.: ООО "ТР-принт", 2014. – С. 92–93. (0.03 / 0.06 п.л.)

20. Karpov, V. and **A. Semenov**, 2014. Strength and Stability of Orthotropic Shells. World Applied Sciences Journal, 30 (5), pp: 617-623. [http://www.idosi.org/wasj/wasj30\(5\)14/14.pdf](http://www.idosi.org/wasj/wasj30(5)14/14.pdf) DOI: 10.5829/idosi.wasj.2014.30.05.14064 (0.1875 / 0.375 п.л.)

Компьютерная верстка И. А. Яблоковой

Подписано к печати 14.10.14. Формат 60×84 1/16. Бум. офсетная.

Усл. печ. л. 1,6. Тираж 120 экз. Заказ 81.

Санкт-Петербургский государственный архитектурно-строительный университет.

190005, Санкт-Петербург, 2-я Красноармейская ул., д. 4.

Отпечатано на ризографе. 190005, Санкт-Петербург, 2-я Красноармейская ул., д. 5.