

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ БЮДЖЕТНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ  
ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ  
«САНКТ-ПЕТЕРБУРГСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ АРХИТЕКТУРНО-СТРОИТЕЛЬНЫЙ УНИВЕРСИТЕТ»

*На правах рукописи*

**Чепилко Сергей Олегович**

**ВЛИЯНИЕ НЕЛИНЕЙНОЙ ПОЛЗУЧЕСТИ НА НАПРЯЖЕННО-  
ДЕФОРМИРОВАННОЕ СОСТОЯНИЕ СТАЛЕЖЕЛЕЗОБЕТОННЫХ  
КОНСТРУКЦИЙ**

Специальность: **2.1.9. Строительная механика**

**ДИССЕРТАЦИЯ**

на соискание ученой степени  
кандидата технических наук

Научный руководитель:  
доктор технических наук, профессор  
**Рутман Юрий Лазаревич**

Санкт-Петербург – 2022

## ОГЛАВЛЕНИЕ

<b>ВВЕДЕНИЕ</b> .....	3
<b>1. СОСТОЯНИЕ ВОПРОСА И ЗАДАЧИ ИССЛЕДОВАНИЯ</b> .....	10
Выводы по первой главе.....	16
<b>2. НЕЛИНЕЙНЫЙ РАСЧЕТ СЖБ-БАЛОК В СЛУЧАЕ МГНОВЕННОГО (КРАТКОВРЕМЕННОГО) ЗАГРУЖЕНИЯ</b> .....	17
2.1. Особенности аппроксимирования нелинейной диаграммы " $\varepsilon - \sigma$ " бетона полиномами.....	17
2.2. Расчет СЖБ балок с учетом нелинейной диаграммы " $\varepsilon - \sigma$ " бетона.....	30
2.3. Определение сдвигающих напряжений на контакте «сталь– бетон».....	39
2.4. Расчет СЖБ балки по предельным состояниям.....	44
2.5. Модельные расчеты СЖБ балок с учетом нелинейности диаграммы " $\varepsilon - \sigma$ " и анализ результатов.....	67
Выводы по второй главе.....	71
<b>3. УЧЕТ ЛИНЕЙНОЙ ПОЛЗУЧЕСТИ В СЖБ-БАЛКАХ</b> .....	73
3.1. Вывод разрешающей системы.....	73
3.2. Асимптотика в случае теории упругой наследственности.....	79
3.3. Решение в резольвентах.....	87
3.4. Резольвенты в случае теории упругой наследственности.....	89
3.5. Резольвенты в случае теории старения.....	95
Выводы по третьей главе.....	99
<b>4. УЧЕТ НЕЛИНЕЙНОЙ ПОЛЗУЧЕСТИ В СЖБ-БАЛКАХ</b> .....	101
4.1. Вывод разрешающей системы уравнений.....	101

4.2. Асимптотика в случае теории упругой наследственности.....	107
4.3. Примеры расчета асимптотических напряжений.....	112
Выводы по четвертой главе.....	118
<b>ЗАКЛЮЧЕНИЕ.....</b>	<b>119</b>
<b>БИБЛИОГРАФИЧЕСКИЙ СПИСОК.....</b>	<b>121</b>

## **ВВЕДЕНИЕ**

**Актуальность темы исследования.** Сталежелезобетонные конструкции появились в строительной практике достаточно давно, поскольку в них использована идея совместить в одной конструкции относительную легкость и простоту монтажа стальных балок, воспринимающих растягивающие усилия и бетонной (железобетонной плиты), работающей на сжатие. При этом конструктивно обеспечена совместная работа бетонной плиты и стальных балок. Совместная работа стальных балок с бетонной плитой существенно повышает жесткость конструкции, что позволяет увеличить пролет, уменьшить строительную высоту сечения, повысить несущую способность. Исходно основная область применения сталежелезобетонных конструкций – мостостроение, где несколько стальных балок или ферм объединены бетонной (железобетонной плитой). Помимо мостостроения подобные конструкции используются, например, в большепролетных перекрытиях, где их можно рассматривать, как ребристые плиты, поскольку число объединенных бетонной плитой стальных балок уже значительно. В некоторых случаях использование сталежелезобетонных конструкций является единственно возможным. Так, при реконструкциях перекрытий действующих зданий существенным требованием является сохранение как строительной высоты перекрытия, так и его весовых характеристик при возможном увеличении полезной нагрузки в соответствии с требованиями современных строительных норм.

Исторически идея использования железобетонной плиты объединенной со стальными балками в единую конструкцию была высказана в первой половине 20-го века Каугеом и Скоттом (Англия, 1929) и Фрейсине (Франция, 1935). В

1939 г. в Швейцарии была запатентована конструкция, названная балками системы «Альфа», где объединение стальной балки с бетонной плитой осуществлялось с использованием приваренной к верхнему поясу стальной балки стальной спирали. В последующем различным способам обеспечения полного включения в совместную работу бетонной плиты и стальных балок было уделено значительное внимание. Экспериментальные исследования сталежелезобетонных конструкций, проводимые в разные годы, показывали надежную совместную работу бетона и стальных балок вплоть до разрушения, если были обеспечены достаточные конструктивные способы их объединения в единую конструкцию.

Если рассматривать сталежелезобетонные конструкции в узком смысле, т.е. только как сталежелезобетонные балки – комплексные балки таврового сечения, состоящие из бетонной (железобетонной) плиты и стальной балки (это могут быть и фермы), – то необходимо выделить по предложению проф. Замалиева Ф. С. [12], пусть и с некоторой долей условности, два основных класса:

– сталежелезобетонные пролетные строения мостов, для которых характерно отношение собственных жесткостей бетонной плиты и стальной балки порядка  $\frac{E_b I_b}{E_s I_s} \approx 0.01$ ;

– сталежелезобетонные перекрытия, для которых это отношение составляет  $\frac{E_b I_b}{E_s I_s} \approx 0.1 \div 0.5$ .

В первом случае бетонной плитой объединяется малое число стальных балок (обычно две-три), в перекрытиях же стальных балок может быть много, и вся конструкция целиком может рассматриваться, как ортотропная плита. Влияние соседних балок друг на друга существенно только на напряжения в поперечном (относительно стальных балок) направлении. В продольном направлении достаточно рассматривать «вырезанную» из общего массива отдельную балку таврового сечения, состоящую из стальной балки и части бетонной плиты.

Стандартный инженерный расчет такой балки производится, как расчет классической комплексной балки в упругой стадии. Это верно только при сравнительно малых уровнях нагружения. Уже при величинах напряжений порядка  $0.2 \div 0.4R_b$  начинает сказываться нелинейный характер работы бетона. Помимо собственно нелинейной диаграммы « $\varepsilon - \sigma$ », проявляющейся при мгновенном нагружении, длительное действие нагрузки вызывает в бетоне такие процессы, как ползучесть. Которая в свою очередь носит линейный характер также только при сравнительно низких уровнях нагружения. В соответствии со строительными нормами и правилами расчет СЖБ балок производится по предельным состояниям, как и для обычных железобетонных балок. Однако работа СЖБ балок имеет свою специфику, поскольку эксплуатационные нагрузки обычно существенно меньше предельных, но в за частую больше тех, при которых можно считать бетон работающим в упругой стадии. Фактически большая часть напряжений бетона, т.е. величины лежащие в интервале  $0.2R_b < \sigma \leq R_b$ , не может быть рассчитана по упругой стадии. Все эти вопросы, связанные с нелинейной работой бетона, требуют анализа их влияния на работу сталежелезобетонной конструкции в целом, а также сравнения с упругим расчетом. Учет нелинейности работы бетона позволяет оптимизировать подбор параметров сталежелезобетонной балки, что ведет к экономии материалов (выбор класса бетона и марки стали, их сечения и т.п.). В качестве нелинейной диаграммы бетона « $\varepsilon - \sigma$ » в вынесенной на защиту работе, принята формула Сарджина, нормируемая в Еврокодах [50], а также в СП 159.1325800.2014 [34].

**Степень разработанности проблемы.** Основные положения по расчету сталежелезобетонных конструкций в СССР были разработаны и приняты в практику проектирования еще в 60-е годы усилиями М.Е.Гибшмана, Н.С. и Н.Н.Стрелецких и их учеников. Полученные ими методики расчета относились в первую очередь к упругому расчету. Затем работы в этом направлении ушли на периферию научного поиска, и возврат интереса к сталежелезобетонным конструкциям начал происходить лишь на рубеже 2000-хтысячных годов. При этом основное внимание уделялось расчету упоров на бетон, обеспечивающих

совместную работу стальной балки с железобетонной плитой. Работа собственно сталежелезобетонных балок, учитывающая нелинейный характер работы железобетона, только сейчас начинает привлекать внимание исследователей.

**Цели исследования:**

- определение влияния нелинейных свойств бетона на работу СЖБ-балок;
- определение возможности учета результатов, относящихся к нелинейной работе бетона в СЖБ-балках в конечно-элементных моделях систем САПР.

**Объект исследования:** комплексные СЖБ-балки, понимаемые, как железобетонная плита и стальная балка, объединённые анкерами (упорами на бетон) и работающими совместно.

**Предмет исследования:** напряженно-деформированное состояние СЖБ-балок.

**Задачи исследования:**

- влияние нелинейной работы бетона на сдвиговые усилия, возникающие на контакте сталь-бетон в СЖБ-балках;
- учет нелинейной работы бетона в расчете СЖБ-балок и особенности поведения СЖБ-балок с учетом нелинейной работы бетона;
- учет линейной ползучести бетона в расчете СЖБ-балок;
- учет нелинейной ползучести бетона в расчете СЖБ-балок;
- оптимизация проектирования СЖБ-балок на основе особенностей НДС.

**Научная новизна:**

1) Получена разрешающая система интегральных уравнений ползучести для СЖБ-балок в линейной постановке, выписано ее решение в резольвентах, а также асимптотическое решение для случая теории упругой наследственности.

2) Получена разрешающая система интегральных уравнений ползучести для СЖБ-балок в нелинейной постановке и выписана нелинейная система уравнений, соответствующая асимптотическому решению для случая теории упругой наследственности.

3) Проведен анализ влияния нелинейных процессов на НДС СЖБ-балок и сравнение с линейным расчетом. Показана допустимость линейного расчета в системах САПР с последующей коррекцией.

**Теоретическая значимость** заключается в том, что примененный научно-методический подход позволяет аналитически единообразно подходить к расчету целого ряда практических задач, требующих учета нелинейной мгновенной и длительной работы бетона. относящихся, вообще говоря, как к сталежелезобетонным, так и обычным железобетонным балкам. При этом не накладывается особых требований на геометрическую связность и форму сечения.

**Практическая значимость:**

1) Результаты, учитывающие нелинейную работу СЖБ-балки при мгновенном нагружении, а также линейную и нелинейную ползучесть, позволяют оценивать напряжения в СЖБ-балке до момента образования зоны текучести в стальной балке (после чего необходим расчет по предельным состояниям 1-й группы).

2) Обоснована возможность использования систем САПР (ЛИРА, SCAD, и т.п.), в расчетах СЖБ-балок с последующим уточнением напряжений в бетоне, поскольку нелинейная работа бетона сравнительно слабо сказывается на работе стальной балки и ее прогибах.

3) Результаты, относящиеся к нелинейной ползучести могут быть применены (с некоторой доработкой) и при расчете обычных железобетонных балок.

4) Полученные результаты позволяют оптимизировать подбор параметров СЖБ-балок, тем самым давая возможность достигать экономии бетона и стали.

5) Выписанные в явном виде системы нелинейных уравнений могут быть численно решены в современных расчетных комплексах символьной математики, таких как Mathematica, Maple, MathCad и т.п., что делает ее доступной в использовании в повседневной инженерной практике.

**Методология и методы исследования.** Все изучаемые вопросы разрабатывались и рассматривались с привлечением строгих методов строительной механики, а также аналитических и численных методов математики. При вычислениях использовались возможности программы Mathematica.

**Положения, выносимые на защиту:**

1. Разрешающая система уравнений для расчета СЖБ балок в случае мгновенного нагружения с учетом нелинейной работы бетона.
2. Разрешающая система интегральных уравнений линейной ползучести на основе уравнения Маслова-Арутюняна для СЖБ балок.
3. Разрешающая система интегральных уравнений нелинейной ползучести на основе уравнения вязко-упруго-пластичности бетона для СЖБ балок.
4. Асимптотические решения полученных систем интегральных уравнений ползучести в случае, если бетон подчиняется теории упругой наследственности.
5. Сравнение полученных асимптотических решений с результатом расчета СЖБ балок по предельным состояниям 1 группы.

**Личный вклад автора.** Все полученные результаты получены лично автором.

**Степень достоверности.** В основе предложенных методик лежат корректные математические и физические модели и методы решения.

**Апробация результатов.** Полученные теоретические и численные результаты подтверждены апробацией на следующих конференциях и семинарах:

1. Доклад в Доме Ученых:  
<https://www.youtube.com/watch?v=Cn9sABTowHE&feature=youtu.be>, Санкт-Петербург, 2020.
2. Доклад «Особенности расчета сталежелезобетонных комплексных балок по предельным состояниям 1 группы» на Вебинаре «Расчет и

проектирование строительных конструкций с использованием BIM-системы Ing+», Санкт-Петербург, 2021.

3. IV Международная научно-техническая конференция «Строительство и архитектура: теория и практика инновационного развития» (CATPID-2021), Нальчик, 01-05 июля 2021 г. Доклад: «Расчет сталежелезобетонных балок с учетом нелинейной ползучести» (IV International Scientific and Technical Conference «Construction and Architecture: Theory and Practice of Innovative Development» (CATPID-2021) held in Nalchik from 01<sup>th</sup> to 05<sup>th</sup> July, 2021).

**Публикации.** Материалы диссертации опубликованы в 4 печатных работах, в том числе 4 научных статьи в журналах из перечня рецензируемых научных изданий ВАК.

**Структура и объем диссертации.** Диссертация состоит из введения, четырех глав, заключения и списка используемой литературы. Содержит 123 страницы, 31 рисунок, 146 формул, 11 таблиц.

## 1. СОСТОЯНИЕ ВОПРОСА И ЗАДАЧИ ИССЛЕДОВАНИЯ

С конца XIX-начала XX века по мере все более широкого введения в строительную практику конструкций из бетона на основании многочисленных экспериментов было установлена мгновенная нелинейность работы бетона. Тогда же различные исследователи начали предлагать аналитические зависимости, описывающие нелинейность работы бетона. Однако в 1938 году в строительные нормы для определения предельных состояний был введен пластический шарнир. Это позволило существенно упростить расчеты, но упруго-пластическая мгновенная нелинейная стадия работы была, тем самым, отодвинута на периферию инженерной строительной расчетной практики. Другим проявлением особенностей физической природы бетона являются такие процессы, как, например, ползучесть, проявляющаяся при длительном действии нагрузки. Общепринятого физического истолкования явление ползучести до сих пор не получило. Однако для описания явления ползучести были предложены различные теории отечественными и зарубежными учеными, такими как Больцман, Вольтерра, Дэвис, Дишингер, Н.Х.Арутюнян, С.В.Александровский, В.М.Бондаренко, Н.А.Буданов, К.З.Галустов, А.А.Гвоздев, М.Е.Гибшман, Залесов, Н.И.Карпенко, Т.В.Кизирия, Г.Н.Маслов, И.Е.Прокопович, Ю.Н.Работнов, А.Р.Ржаницын, Р.С.Санжаровский, А.Г.Тамразян, И.И.Улицкий, С.Е.Фрайфельд, В.Д.Харлаб, В.Ф.Яценко и многими другими. Необходимо отметить, что важным отличием работы СЖБ балок от железобетонных является то обстоятельство, что изгибная жесткость железобетонных балок определяется бетонным сечением, а влияние стальной арматуры сравнительно невелико, в то

время как в СЖБ балках основной вклад в изгибную жесткость дает стальная балка, а изгибная жесткость бетонной плиты существенно меньше. В силу этого неупругие деформации в бетоне вызывают в СЖБ балках значительное перераспределение напряжений в сечении. Тем самым актуализируется вопрос об учете нелинейной работы бетона. В настоящее время основным способом учета физической нелинейности бетона является расчет по деформированной схеме при простом нагружении с пересчетом жесткостных характеристик сечения рассчитываемого элемента на каждом этапе изменения нагрузки с учетом уравнений равновесия. При этом локально в сечении также может производиться дискретизация сечения путем, например, разбиения его на слои с усреднением действующих в сечении силовых факторов. Однако без развития аналитических методов оптимизация подобного рода алгоритмов невозможна. Кроме того, если не рассматривать неразрезные СЖБ конструкции, то в условиях статической определимости применительно к некоторым аспектам напряженно-деформированного состояния СЖБ балок возможен и чисто аналитический подход.

В нашей стране работы по проектированию и строительству СЖБ конструкций начались в послевоенный период в первую очередь в мостостроении. Необходимо отметить, что огромный вклад в проектирование и расчет сталежелезобетонных конструкций внесли в первую очередь работы М.Е.Гибшмана, Н.С. и Н.Н.Стрелецких и их учеников. Н.Н.Стрелецким [39] было предложено применительно к СЖБ конструкциям мостов считать предельным состоянием по прочности достижение момента исчерпания эксплуатационной способности, которое наступает раньше, чем потеря полной несущей способности конструкции (предельное состояние первой группы). Что фактически означает необходимость определения момента достижения предельно допустимых нормированных относительных деформаций, поскольку классический расчет по предельным состояниям не предполагает определения деформаций. Один из выводов, сделанных Н.С.Стрелецким, заключается в

некорректности применения при расчетах по прочности ни упругих методов, ни методов предельного равновесия. При этом отмечается, что расчет по методу предельного равновесия гораздо ближе к действительной работе СЖБ балок при исчерпании несущей способности (по данным экспериментов), чем упругий расчет. Полученные в предлагаемом диссертационном исследовании теоретические результаты полностью подтверждают это.

Необходимо отметить, что существующие строительные нормы и правила, имеющие отношение к СЖБ конструкциям, имеют некоторую несогласованность друг с другом. Так, в СП 159.1325800.2014 [34] рекомендуется производить нелинейный расчет напряжений в бетоне с использованием формулы Сарджина (в нормах эта зависимость названа параболой с нисходящей ветвью). В СП 266.1325800.2016 [36] в пункте 4.3.1 указано: *«Расчет сталежелезобетонных конструкций по предельным состояниям первой и второй групп производят по упругой стадии или с учетом физической нелинейности материалов, возможного образования трещин в бетоне, анизотропии, накопления повреждений, с учетом продольного изгиба и геометрической нелинейности»*. При этом не указано, на основании какой диаграммы состояния бетона " $\varepsilon - \sigma$ " проводить расчет. В приведенных в этом СП расчетных схемах эпюры работы бетона соответствуют либо упругому расчету (треугольная), либо диаграмме Прандтля (прямоугольная). Фактически эти положения расчета соответствуют приведенным в монографии Н.С.Стрелецкого [39], и к ним относятся все замечания из этой монографии. В СП 63.13330.2018 [37] в Приложении Г выписанная аналитическая зависимость крайне сложна, и использование ее в практических расчетах возможно только в специально разработанных программных комплексах. Некоторый обзор этой зависимости проведен в книге Н.И.Карпенко [17]. В аналитических расчетах она бесполезна, поскольку данное представление точнее называть алгоритмическим, чем аналитическим.

Как уже было отмечено ранее во **Введении**, использование СЖБ конструкций позволяет существенно увеличить жесткость при той же строительной высоте. При этом необходимо отметить, что выигрыш по несущей способности оказывается не таким большим. Качественно в упругой постановке выигрыш по жесткости и несущей способности при использовании СЖБ балок можно оценить следующим образом. Изгибная жесткость СЖБ балки есть величина:

$$(EI)_{sb} = E_s I_s + E_b I_b + E_s A_s z_s^2 \frac{m}{1+m}.$$

Тут обозначено:

$(EI)_{sb}$  – изгибная жесткость СЖБ балки;

$E_s, E_b$  – модули упругости и деформации стали и бетона соответственно;

$A_s, A_b$  – площади стального и бетонного сечений соответственно;

$I_s, I_b$  – моменты инерции стального и бетонного сечений соответственно;

$m = \frac{E_b A_b}{E_s A_s}$ ;  $z_s = \frac{h+H}{2}$  – положение центра тяжести стальной балки (отсчет от ц.т. плиты);  $H, h$  – высоты стального и бетонного сечений соответственно.

Если бетонная плита лежит на стальной балке и возможен сдвиг, т.е. они работают, как рессора, то изгибная жесткость такой балки есть сумма жесткостей компонент:

$$(EI)_{s+b} = E_s I_s + E_b I_b.$$

Если ввести безразмерные параметры  $\alpha^2 = \frac{I_s}{A_s H^2}$ ,  $\zeta = \frac{h}{H}$ , то для отношения

изгибных жесткостей получим:

$$\rho_{\alpha}(\zeta, m) = \frac{(EI)_{sb}}{(EI)_{s+b}} = 1 + \frac{E_s A_s z_s^2}{E_s I_s + E_b I_b} \cdot \frac{m}{1+m} = 1 + \frac{(1+\zeta)^2}{\left(\alpha^2 + \frac{m}{12} \zeta^2\right)} \cdot \frac{m}{1+m}.$$

Для стальной балки из двутавра I40Б2 по ГОСТ Р 57837-2017 значение параметра  $\alpha$  составит 0,42. Полагая  $\zeta = 0.25$  и  $m = 2$ , получим  $\rho_{\alpha}(\zeta, m) = 2.39$ .

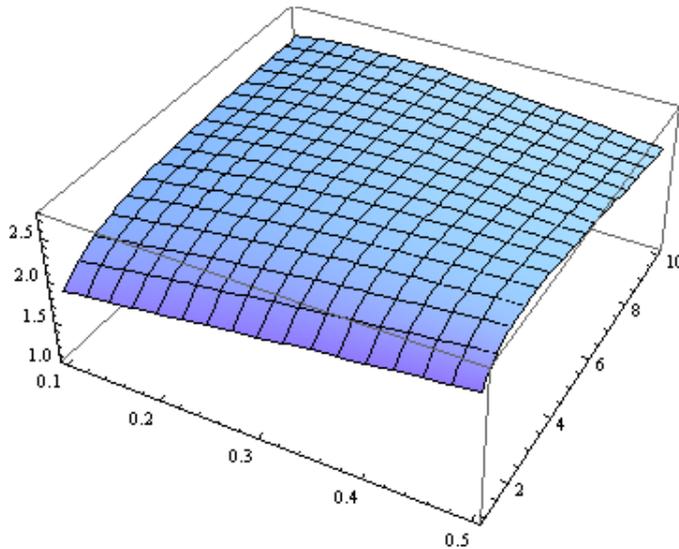


Рис. 1

Это соответствует сечению бетонной плиты 0,1x1,16 м. В этом случае при фиксированном  $\alpha$ , график  $\rho_{\alpha}(\zeta, m)$ ,  $\zeta \in [0; 0.5]$ ,  $m \in [1; 10]$  приведен на рисунке 1. Видно, что достигается выигрыш в жесткости более чем в два раза.

Сравнение по напряжениям в стальной балке можно провести следующим образом. В случае «рессоры» усилия в бетонной плите и стальной балке пропорциональны их изгибным жесткостям:

$$\frac{M_b}{M_s} = \frac{E_b I_b}{E_s I_s}; \quad M_b + M_s = M \Rightarrow M_s = \frac{M}{1 + \frac{E_b I_b}{E_s I_s}};$$

$$\frac{E_b I_b}{E_s I_s} = \frac{E_b A_b \frac{h^2}{12}}{E_s A_s \alpha^2 H^2} = \frac{m \zeta^2}{12 \alpha^2} \Rightarrow M_s = \frac{M}{1 + \frac{m \zeta^2}{12 \alpha^2}}.$$

Максимальные напряжения в стальной балке:

$$\sigma_r = \frac{M_s H}{2I_s} = \frac{M}{1 + \frac{m\zeta^2}{12\alpha^2}} \cdot \frac{H}{2I_s} \text{ ("рессора")};$$

$$\sigma_{sb} = M \frac{E_s \left( H + \frac{h}{2} - z_0 \right)}{(EI)_{sb}} \text{ (СЖБ)};$$

Их отношение:

$$r_\alpha(\zeta, m) = \frac{\sigma_r}{\sigma_{sb}} = \frac{(EI)_{sb}}{E_s I_s} \cdot \frac{H}{2 \left( 1 + \frac{m\zeta^2}{12\alpha^2} \right) \left( H + \frac{h}{2} - z_0 \right)} \Rightarrow$$

$$r_\alpha(\zeta, m) = \left( 1 + \frac{(1+\zeta)^2}{4\alpha^2 + \frac{m\zeta^2}{3}} \cdot \frac{m}{1+m} \right) \frac{1}{1 + \frac{m(1+\zeta)}{1+m}}.$$

При фиксированном  $\alpha$ , график  $r_\alpha(\zeta, m)$ ,  $\zeta \in [0; 0.5]$ ,  $m \in [1; 10]$  для той же балки приведен на рисунке 2. Выигрыш по несущей способности в рассматриваемом случае – в 1,3 раза. Поскольку в упругом расчете вклад бетона в работу СЖБ балки завышается, то при учете нелинейной работы бетона увеличение несущей способности бетона получается относительно небольшим в сравнении с увеличением жесткости.

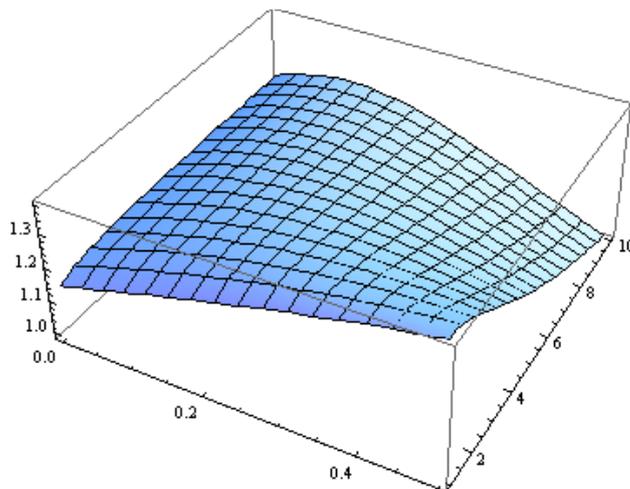


Рис. 2

Упругий расчет может рассматриваться только как первая итерация, при этом он позволяет определиться с основными конструктивными сечениями и пользоваться возможностями систем САПР. Окончательный подбор параметров проектируемой конструкции может быть сделан только на основании нелинейного расчета.

### **Выводы по первой главе**

1. Проведен анализ состояния вопроса и показана методологическая несогласованность существующих строительных норм расчета по отношению к СЖБ-балкам.
2. Даны элементарные оценки выигрышей по несущей способности и жесткости в упругой стадии при использовании СЖБ-балок.

## **2. НЕЛИНЕЙНЫЙ РАСЧЕТ СЖЬ-БАЛОК В СЛУЧАЕ МГНОВЕННОГО (КРАТКОВРЕМЕННОГО) ЗАГРУЖЕНИЯ**

### **2.1. Особенности аппроксимирования нелинейной диаграммы " $\varepsilon-\sigma$ " бетона полиномами**

Практически с самого начала исследований работы бетона на растяжение-сжатие выяснилось, что только при малых уровнях нагружения бетон можно считать работающим упруго, т.е. подчиняющимся закону Гука, когда зависимость напряжений от деформаций линейна. Нелинейность диаграммы " $\varepsilon-\sigma$ " следует из того, что бетон имеет сложную многокомпонентную структуру, как на микроуровне (цементный камень), так и на макроуровне (частицы заполнителя). При этом на каждом уровне имеется значительное количество дефектов структуры, которые начинают проявлять себя под действием нагрузки. Для описания нелинейной зависимости напряжений от деформаций имеется значительное число эмпирических формул. Например, в монографии П.А.Лукаша [20] подробно рассмотрено несколько таких зависимостей. Обзор функций для описания диаграмм деформирования, полученных для бетона при сжатии, приведен в [7], [33]. Анализ диаграмм деформирования по критерию энергозатрат на деформирование и разрушение дан в работе [28]. В современных Еврокодах используется дробно-рациональная аппроксимация (формула Сарджина), имеющая весьма простой вид и при этом описывающая основные особенности поведения диаграммы " $\varepsilon-\sigma$ ", полученной опытным путем. В российских нормах имеется некоторая двусмысленность. А именно: в СП 63.13330.2018 «Бетонные и железобетонные конструкции», Приложение Г [37] зависимость напряжений от деформаций сформулирована настолько громоздко, что ее использование в инженерной практике представляется крайне затруднительной. При этом в СП 159.1325800.2014 [34]

п. 4.10 ф-ла (1) приведена именно формула Сарджина, но названная параболой с нисходящей ветвью, что, вообще говоря, математически не совсем точно. Однако до сих пор во многих работах, рассматривающих нелинейную работу бетона, предлагается зависимость  $\sigma_b(\varepsilon)$  аппроксимировать многочленами с целыми степенями. Безусловно, использование многочленов позволяет упрощать анализ. Но при этом, зачастую, нигде не указывается на каком интервале значений относительной деформации и для каких классов бетона это корректно. Представляется уместным, прежде чем перейти к рассмотрению вопросов, связанных с учетом нелинейной работы бетона в СЖБ балках, провести качественный анализ аппроксимации диаграммы деформирования бетона полиномами.

В качестве эталонной кривой, с которой будет производиться сравнение, возьмем кривую Сарджина, используемую в Еврокодах [50]:

$$\sigma(\eta) = R_* \frac{\eta(k - \eta)}{1 + (k - 2)\eta}, \quad (1)$$

где обозначено

$$k = \frac{E_b \varepsilon_{bo}}{R_*};$$

$$\eta = \frac{\varepsilon}{\varepsilon_{bo}};$$

$\varepsilon_{bo}$  – относительная деформация, соответствующая  $R_*$  (табличная величина);

$E_b$  – начальный модуль деформации бетона;

$$R_* = \begin{cases} R_{b,ser} & \text{– в расчетах по деформациям;} \\ R_b & \text{– в расчетах по прочности.} \end{cases}$$

При заданной влажности воздуха окружающей среды величину  $\varepsilon_{bo}$  можно считать фиксированной.

Для функции (1) выполняются условия:

$$\sigma(0) = 0; \quad (2)$$

$$\sigma'(0) = E_b; \quad (3)$$

$$\sigma(\varepsilon_{b0}) = R_b; \quad (4)$$

$$\sigma'(\varepsilon_{b0}) = 0. \quad (5)$$

На интервале  $[\varepsilon_{b0}; \varepsilon_{b2}]$  функция (1) имеет медленно убывающий участок. Тут  $\varepsilon_{b2}$  – значение предельной величины относительной деформации (нормируемая величина). Общий вид кривой Сарджина представлен на рис.3 (бетон класса В25):

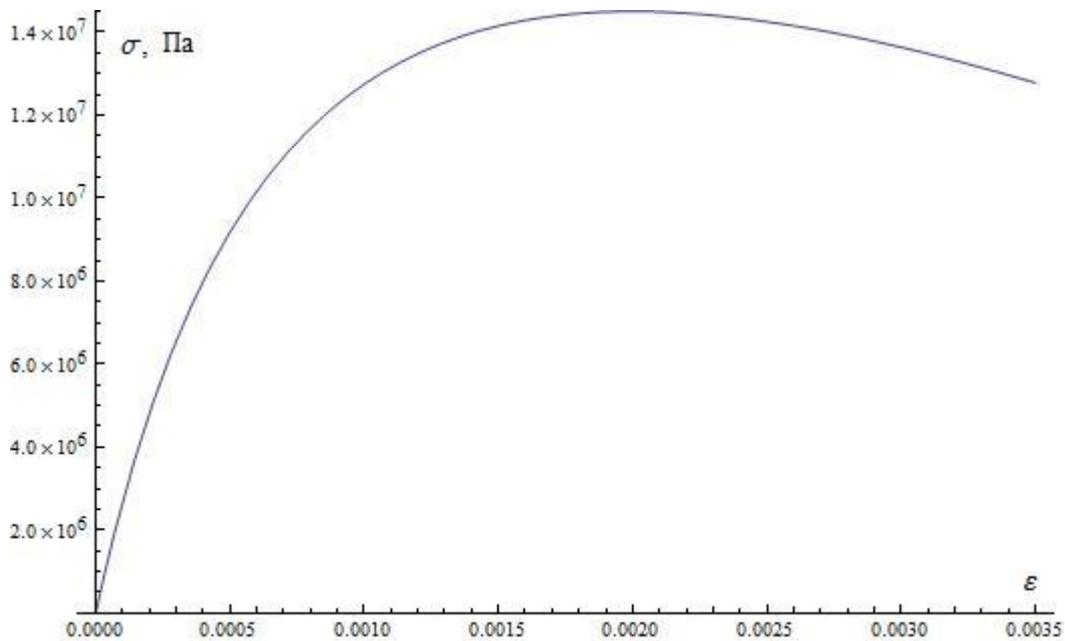


Рис. 3

Условия (2)-(5) являются естественными условиями, которые должны выполняться для любой аппроксимации диаграммы бетона. Кроме того, на интервале  $[\varepsilon_{b0}; \varepsilon_{b2}]$  истинная диаграмма деформирования бетона " $\varepsilon - \sigma$ " имеет пологий монотонно убывающий участок. Функция Сарджина при всех значениях входящих в нее параметров удовлетворяет этим требованиям. Поскольку функция Сарджина принята в качестве расчетной в Еврокодах [50] и отечественных нормах [34], можно считать обоснованным сравнение возможных вариантов полиномиальной аппроксимации именно с ней.

Полином  $P(\varepsilon)$ , аппроксимирующий функцию, должен удовлетворять условиям (2)-(5). Обозначим через  $\sigma_{Sr}(\varepsilon)$  напряжение, определяемое по формуле Сарджина. К условиям (2)-(5) можно добавить также еще два естественных условия:

$$P(\varepsilon_{b2}) = \sigma_{Sr}(\varepsilon_{b2}); \quad (6)$$

$$\int_0^{\varepsilon_{b2}} P(\varepsilon) d\varepsilon = \Sigma_{\sigma}; \quad (7)$$

$$\Sigma_{\sigma} = \int_0^{\varepsilon_{b2}} \sigma_{Sr}(\varepsilon) d\varepsilon.$$

В работе В.Н.Байкова [3] аппроксимирующий многочлен на ниспадающем участке определяется через «себя самого», поскольку к условиям (2)–(5) добавлены еще два:

$$P(\varepsilon_{b2}) = \alpha R_b;$$

$$\frac{d^2}{d\varepsilon^2} P(\varepsilon) \Big|_{\varepsilon=\varepsilon_{b0}} = \frac{d^2}{d\varepsilon^2} P(\varepsilon) \Big|_{\varepsilon=\varepsilon_{b2}}.$$

Второе условие означает равенство кривизн в точке максимума и на конце кривой, по умолчанию предполагая, что на этом участке кривая ведет себя, как дуга окружности, сохраняя свой знак. Как будет показано далее – это не так, знак кривизны может меняться. Величину параметра  $\alpha$  предлагается принимать равной 0.85, а второе условие предполагает равенство кривизн в точке максимума и в точке, соответствующей величине предельной относительной деформации.

Для выполнения условий (1)-(5) требуется полином 3-й степени, (1)-(6) – 4-й степени, (1)-(7) – 5-й степени. В первом случае полином имеет вид:

$$P_3(\varepsilon) = E_b \varepsilon - \frac{2E_b \varepsilon_{b0} - 3R_*}{\varepsilon_{b0}^2} \varepsilon^2 + \frac{E_b \varepsilon_{b0} - 2R_*}{\varepsilon_{b0}^3} \varepsilon^3.$$

Во втором случае коэффициенты полинома  $P_4(\varepsilon)$  будут:

$$P_4(\varepsilon) = E_b \varepsilon + A_2 \varepsilon^2 + A_3 \varepsilon^3 + A_4 \varepsilon^4;$$

$$A_2 = \frac{E_b}{\varepsilon_{b2}} \frac{k\alpha^3 - p(4\alpha - 3) - kp(\alpha - 1)^2(\alpha + 2)}{kp\alpha(\alpha - 1)^2};$$

$$A_3 = \frac{E_b}{\varepsilon_{b2}^2} \frac{(k - 2)p + (4 - 3k)p\alpha^2 + 2k(p - 1)\alpha^3}{kp\alpha^2(\alpha - 1)^2};$$

$$A_4 = \frac{E_b}{\varepsilon_{b2}^3} \frac{k\alpha^2 - p(3\alpha - 2) - pk(\alpha - 1)^2}{kp\alpha^2(\alpha - 1)^2}.$$

Тут обозначено:

$$k = \frac{E_b \varepsilon_{b0}}{R_b}; \quad p = \frac{E_b \varepsilon_{b2}}{\sigma_S(\varepsilon_{b2})}; \quad \alpha = \frac{\varepsilon_{b0}}{\varepsilon_{b2}}.$$

В третьем случае, которому соответствует полином 5-й степени, выражения для коэффициентов будут более громоздкими:

$$P_5(\varepsilon) = E_b \varepsilon + A_2 \varepsilon^2 + A_3 \varepsilon^3 + A_4 \varepsilon^4 + A_5 \varepsilon^5;$$

$$A_2 = \frac{E_b}{\varepsilon_{b2}} \cdot \left( \frac{k\alpha^3(-10 + 24\alpha - 15\alpha^2)}{\Delta} + \frac{p(6 - 20\alpha + 15\alpha^2 + k(-1 + \alpha)^2(-4 + 7\alpha + 6\alpha^2 + 15\alpha^3(-1 + 4\beta)))}{\Delta} \right);$$

$$A_3 = -\frac{2E_b}{\varepsilon_{b2}^2} \cdot \left( \frac{-2k\alpha^3(5 - 9\alpha + 5\alpha^3)}{\Delta} + \frac{p(2 - 20\alpha^2 + 20\alpha^3 + k(-1 + \alpha)^2(-1 - 2\alpha + 12\alpha^2 + 10\alpha^3(-1 + 6\beta) + 5\alpha^4(-1 + 6\beta)))}{\Delta} \right);$$

$$A_4 = \frac{5E_b}{\varepsilon_{b2}^3} \cdot \left( \frac{k\alpha^2(-2+9\alpha^2-8\alpha^3)}{\Delta} + \frac{p(2-6\alpha+5\alpha^3+k(-1+\alpha)^2(-1+2\alpha+4\alpha^3(-1+6\beta)+\alpha^2(1+12\beta)))}{\Delta} \right);$$

$$A_5 = \frac{E_b}{\varepsilon_{b2}^4} \cdot \left( \frac{2k\alpha^2(6-15\alpha+10\alpha^2)}{\Delta} + \frac{p(-6+24\alpha-20\alpha^2-k(-1+\alpha)^2(-3+10\alpha+10\alpha^2(-1+6\beta)))}{\Delta} \right).$$

Тут дополнительно обозначено:

$$\beta = \frac{\Sigma_{\sigma}}{E_b \varepsilon_{b2}^2};$$

$$\Delta = kp(-1+\alpha)^2 \alpha(2-6\alpha+5\alpha^2).$$

Значения коэффициентов в случае аппроксимации по В.Н.Байкову [3]:

$$\bar{A}_2 = \frac{E_b}{e_{b0}k} \cdot \frac{12-16\eta+5\eta^2-10\eta^3+10\alpha\eta^4-2\alpha\eta^5+\alpha\eta^6-k(-1+\eta)^2(8+3\eta+\eta^3)}{\bar{\Delta}};$$

$$\bar{A}_3 = \frac{E_b}{e_{b0}^2k} \cdot \frac{2(-4-4\eta+10\eta^2+5\eta^3+(5-10\alpha)\eta^4-\alpha\eta^5-\alpha\eta^6+k(-1+\eta)^2(2+6\eta+\eta^3))}{\bar{\Delta}};$$

$$\bar{A}_4 = \frac{E_b}{e_{b0}^3k} \cdot \frac{\eta(14-10\eta-10\eta^2+5(-3+2\alpha)\eta^3+10\alpha\eta^4+\alpha\eta^5-k(-1+\eta)^2(7+4\eta+\eta^2))}{\bar{\Delta}};$$

$$\bar{A}_5 = \frac{E_b}{e_{b0}^4k} \cdot \frac{3\eta^2(k(-1+\eta)^2+2(-1+\eta+\eta^2-\alpha\eta^3))}{\bar{\Delta}}.$$

Тут обозначено:

$$\bar{\Delta} = (-1 + \eta)^2 (4 - 2\eta + \eta^2).$$

В соответствии с СП 63.13330.2018 [37] для кратковременного действия нагрузки и при относительной влажности воздуха 40-75% (табл.6.10) имеем  $\varepsilon_{b0} = 0.002$  и  $\varepsilon_{b2} = 0.0035$ . График семейства полиномов  $P_3(x)$ , построенный для классов бетонов В10-В60 приведен на рис. 4. Легко видеть, что удовлетворительной такую аппроксимацию назвать никак нельзя. Для бетонов классов В10-В35 значению относительной деформации  $\varepsilon_{b0}$  соответствует не максимум функции, а минимум, а на участке  $[\varepsilon_{b0}; \varepsilon_{b2}]$  почти все кривые возрастают, вместо убывания.

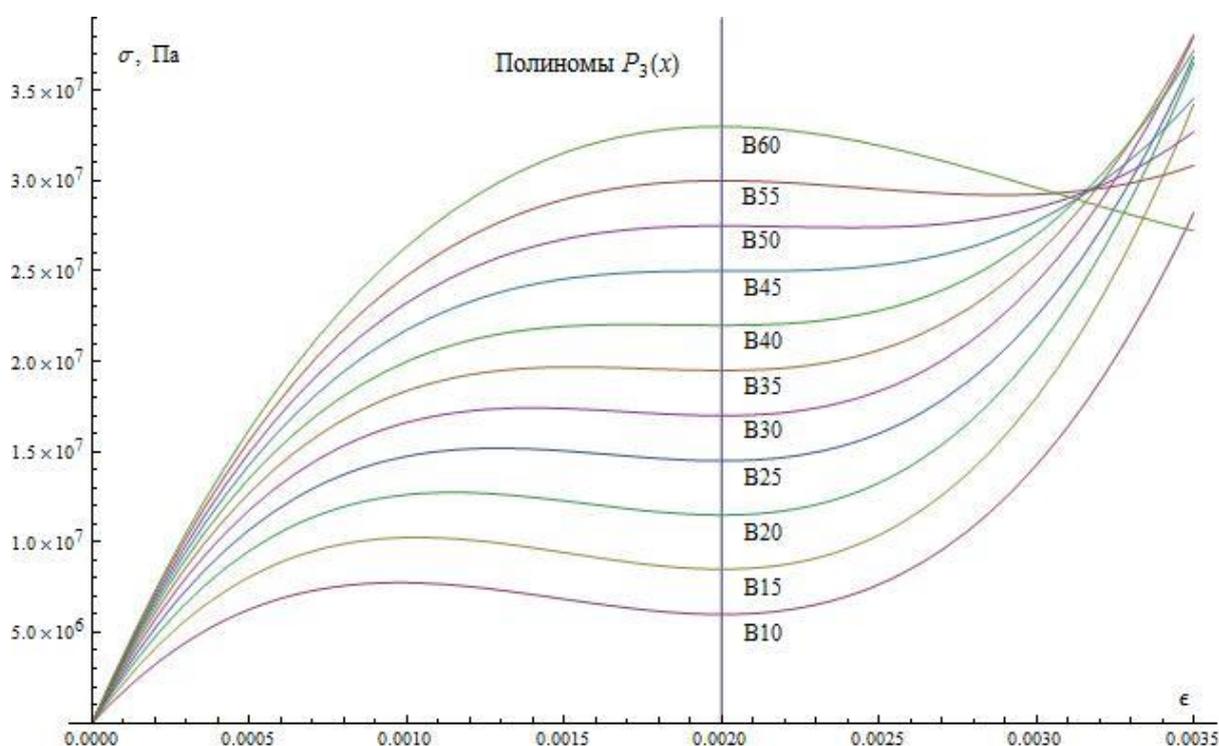


Рис. 4

На рис. 5 представлен график семейства полиномов  $P_4(x)$ , построенный для классов бетонов В10-В60 и совмещенный с соответствующими кривыми Сарджина. Для бетонов классов В35-В60 аппроксимацию можно считать удовлетворительной, для меньших классов пользоваться полученной аппроксимацией можно только с оговорками, поскольку на участке  $[\varepsilon_{b0}; \varepsilon_{b2}]$

графики имеют максимум. Кроме того, на участке  $[0; \varepsilon_{b0}]$  полиномы, соответствующие бетонам В10-В25 также имеют максимум.

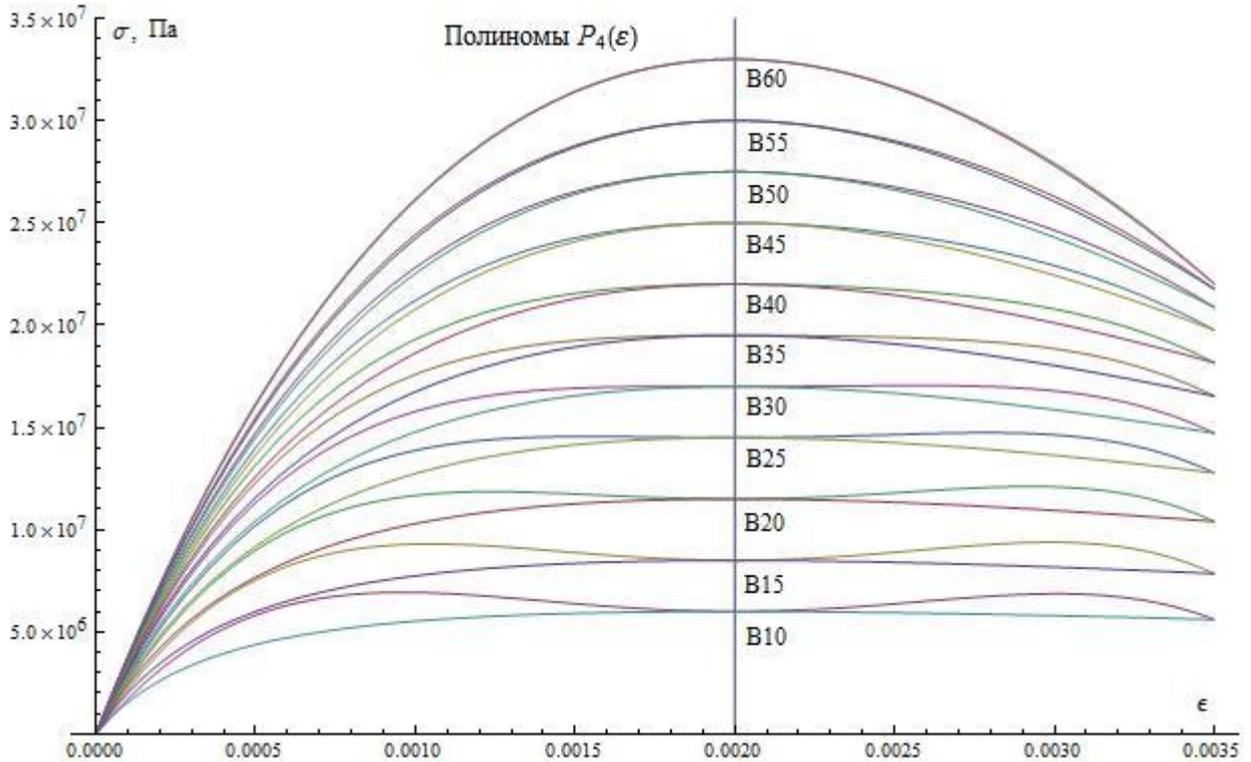


Рис. 5

Для полиномов 5-й степени, удовлетворяющих условиям (2)-(7), график приведен на рис. 6. Для полиномов 5-й степени, удовлетворяющих условиям аппроксимации по В.Н.Байкову [3] при  $\alpha = 0.85$  – график приведен на рис. 7, при  $\alpha = \frac{\sigma_{Sr}(\varepsilon_{b2})}{R_b}$  – на рис. 8 (при этом значении параметра  $\alpha$  напряжение, соответствующее  $\varepsilon_{b2}$ , совпадает с напряжением по Сарджину  $\sigma_{Sr}(\varepsilon_{b2})$ ). Аппроксимация по условиям (2)-(7) дает весьма близкие графики для полиномов и функции Сарджина, но для низкомарочных бетонов на отрезке  $[\varepsilon_{b0}; \varepsilon_{b2}]$  у полиномов имеется минимум и возрастающие участки. Из графика на рис. 7 видно, что аппроксимация по Байкову близка к функции Сарджина только для бетонов класса В20-В40. Для бетонов более высоких классов имеется значительное расхождение графиков на нисходящих ветвях, а для классов В10-В15 – в точке  $\varepsilon_{b0}$  кривые Байкова имеют не максимум, а минимум. Для второго

варианта аппроксимации по Байкову, когда  $R_{b,crc} = \hat{P}_5(\varepsilon_{b2}) = \sigma_{Sr}(\varepsilon_{b2})$ , кривые визуально близки для всех классов бетонов, но при этом, как и ранее, для бетонов классов В10-В20 в точке  $\varepsilon_{b0}$  кривые Байкова имеют не максимум, а минимум. Однако для низкомарочных бетонов по прежнему на отрезке  $[\varepsilon_{b0}; \varepsilon_{b2}]$  кривые имеют возрастающий участок.

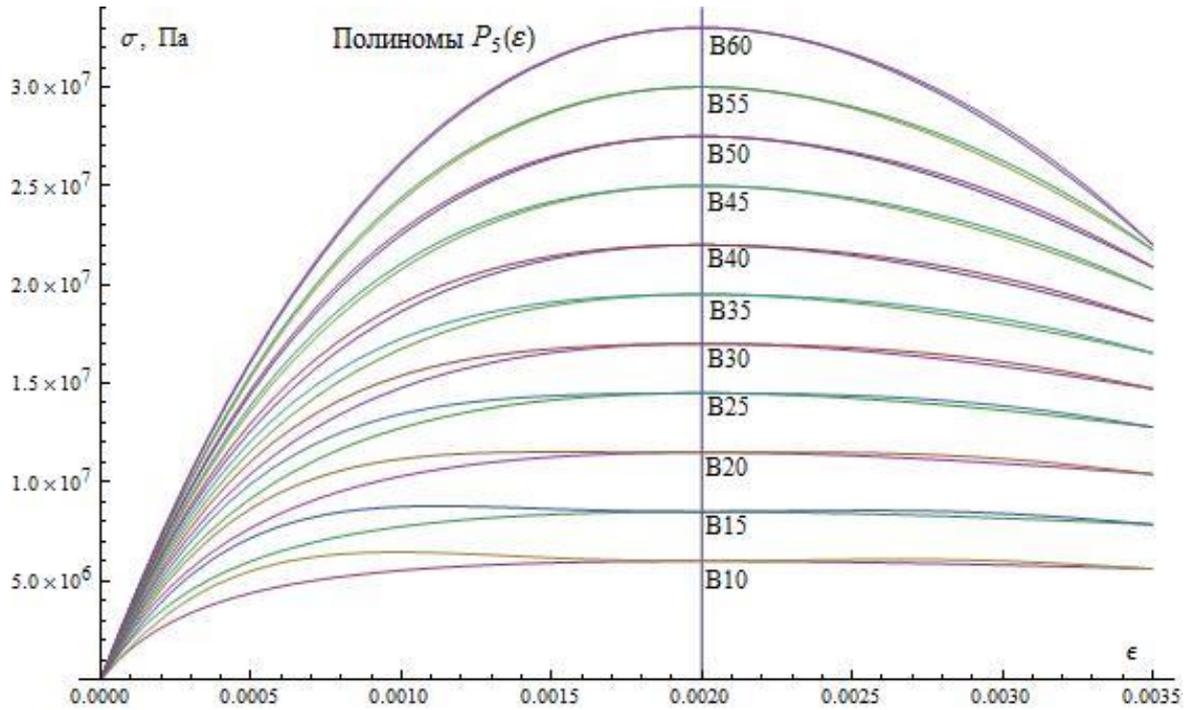


Рис. 6

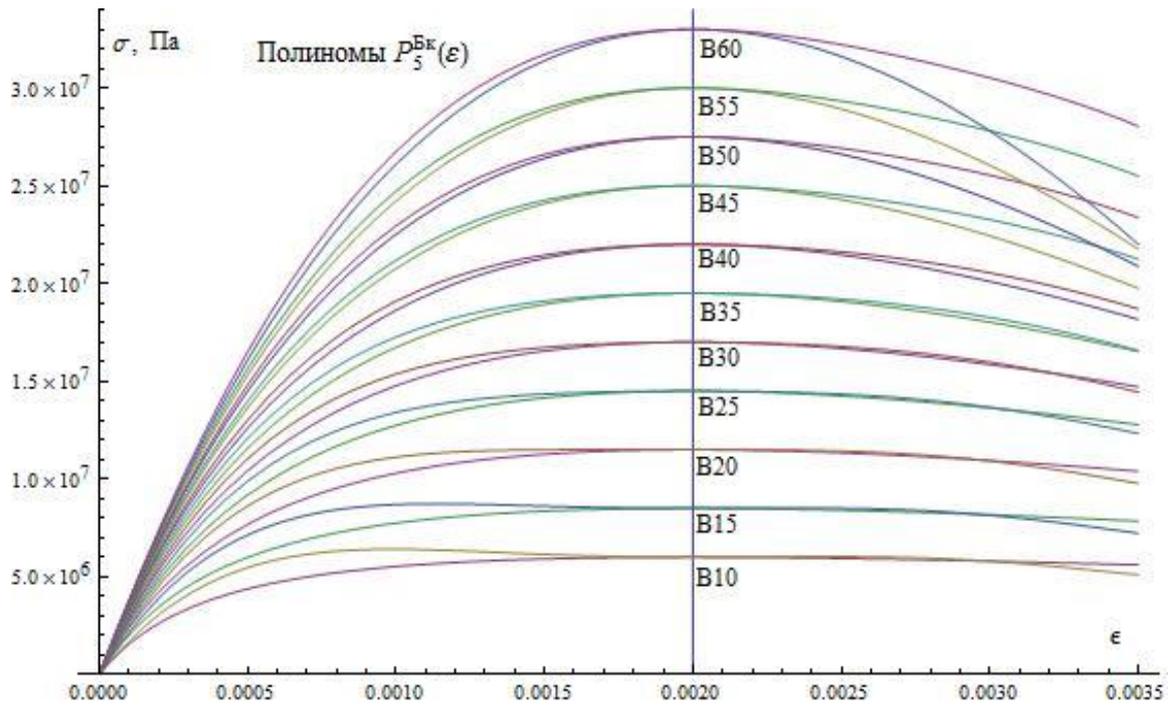


Рис. 7

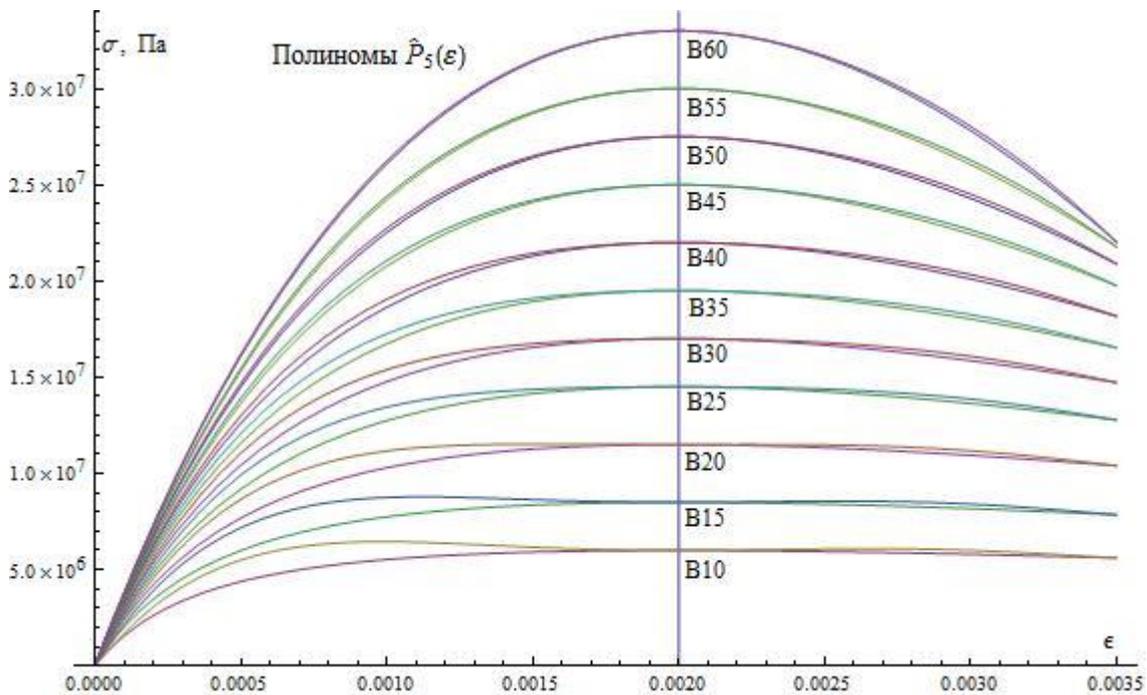


Рис. 8

Таким образом, прямое использование аппроксимирующих многочленов при описании зависимости напряжений в бетоне от деформаций требует известной осторожности.

К этому необходимо добавить, что попытки использовать разложение в ряд Тейлора функции Сарджина  $\sigma_{Sr}(\varepsilon)$  по степеням  $\varepsilon$  будут близкими к кривой Сарджина только при весьма малых значениях  $\varepsilon$ , а не на всем интервале задания  $[0; \varepsilon_{b2}]$ . Это можно проиллюстрировать следующим графиками, где совмещены кривые Сарджина и их разложения в ряд Тейлора. На рис. 9 в разложении взято 4 члена, на рис. 10 – 5 членов.

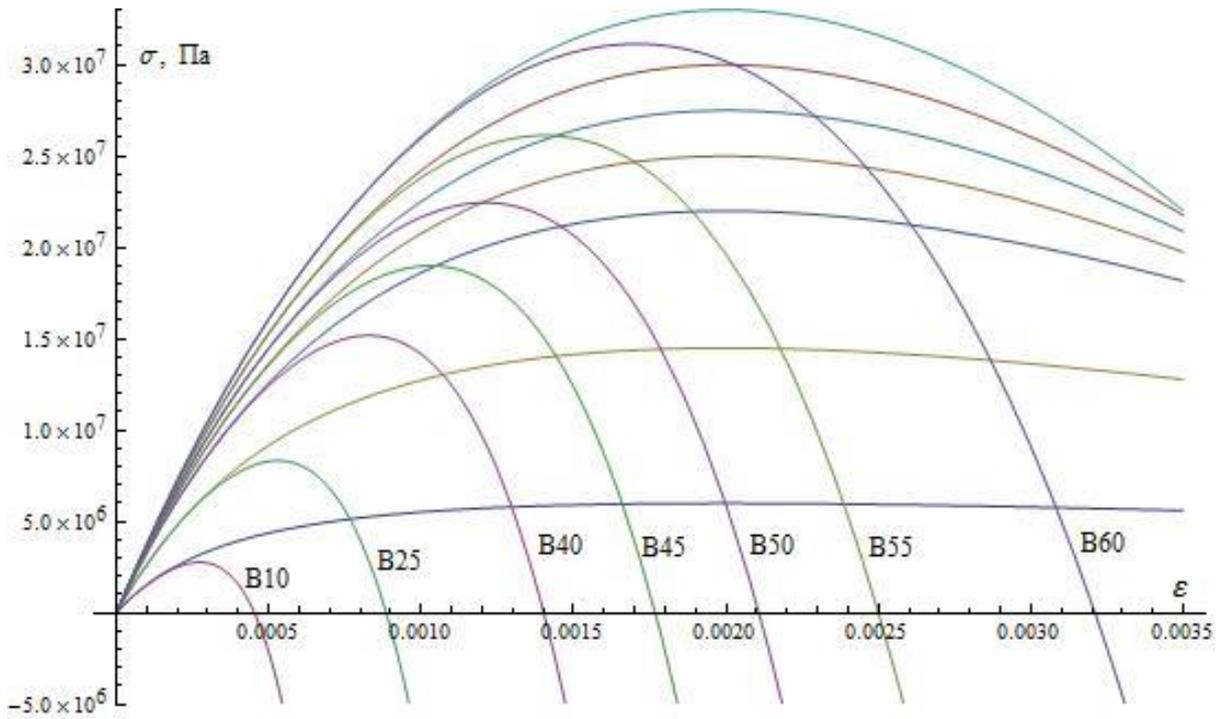


Рис. 9

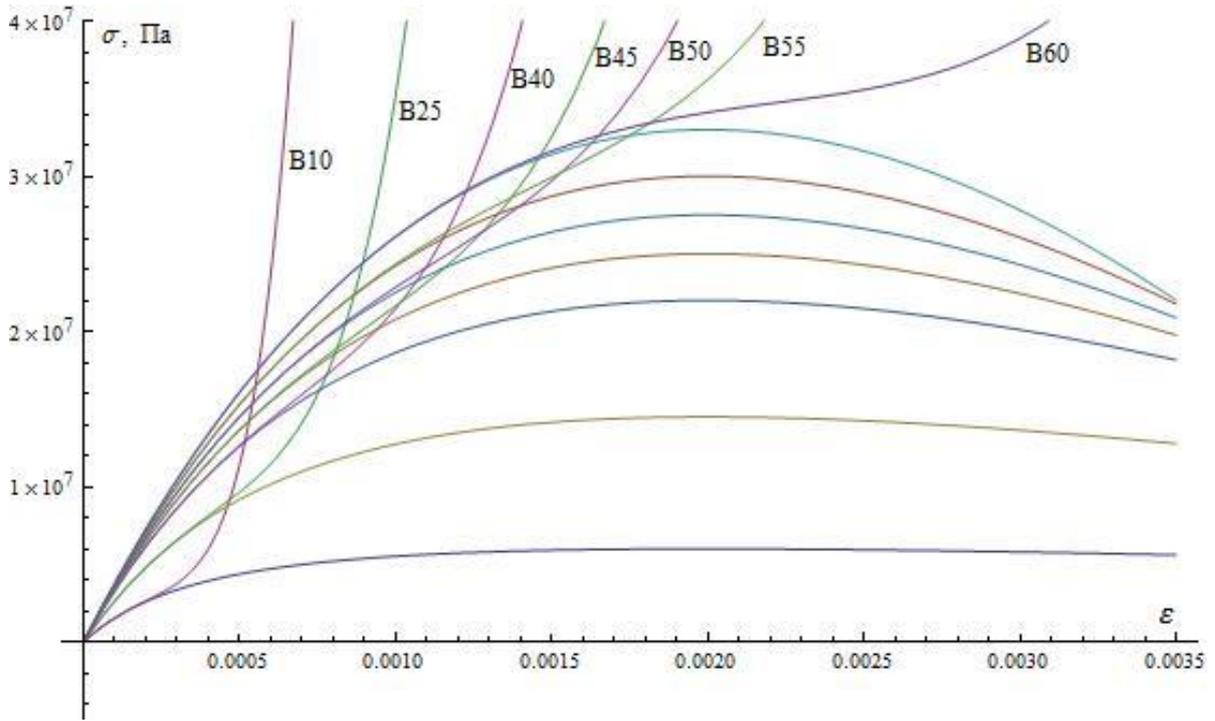


Рис. 10

Легко видеть, что разложения в ряд близки к исходным кривым только в малой окрестности нуля.

Аппроксимация многочленами в случае использования в анализе обратной функции  $\epsilon(\sigma_b)$  не может быть «идеальной» на всем интервале задания  $\epsilon(\sigma_b)$  в принципе, поскольку функции  $\epsilon(\sigma_b)$  и  $\sigma_b(\epsilon)$  симметричны на диаграмме " $\sigma - \epsilon$ " относительно биссектрисы  $\epsilon = \sigma_b$ , следовательно, функция  $\epsilon(\sigma_b)$  имеет две ветви на отрезке  $[0; R_b]$ , причем производная в точке  $\sigma_b = R_b$  имеет особенность, т.е.  $\epsilon'(\sigma_b)|_{\sigma_b=R_b} = \infty$ . В некоторых работах (например, [4]) предлагается аппроксимировать зависимость  $\epsilon(\sigma_b)$  многочленами. Нужно отметить, что фактически в них приведены разложения в ряд Тейлора по  $\sigma_b$  с удержанием нужного числа членов, хотя и получены эти разложения другим способом. Однако, во-первых, разложение в ряд является точным не на всем отрезке  $[0; R_b]$ , а во-вторых, поскольку полиномы не имеют особенностей то, тем самым, они не могут удовлетворить граничному условию вида  $\epsilon'(\sigma_b)|_{\sigma_b=R_b} = \infty$ . Это можно

проиллюстрировать на графике (см. рис. 11), где приведены функция  $\varepsilon_{Sr}(\sigma_b)$  и ее разложение в ряд Тейлора для бетона класса В25, а также интерполяционный многочлен 5-й степени, построенный по значениям  $\varepsilon'_{Sr}(0) = \frac{1}{E_b}$ ,  $\varepsilon_{Sr}\left(\frac{\sigma_b}{3}\right)$ ,  $\varepsilon'_{Sr}\left(\frac{\sigma_b}{3}\right)$ ,  $\varepsilon_{Sr}\left(\frac{2\sigma_b}{3}\right)$ ,  $\varepsilon_{Sr}(\sigma_b)$ . В разложении взято 5 членов. Кривая, соответствующая зависимости  $\varepsilon(\sigma_b) = P_5(\sigma_b)$  обозначена через  $\hat{\varepsilon}(\sigma_b)$ , кривая, соответствующая интерполяционному многочлену – через  $\varepsilon_P(\sigma_b)$ .

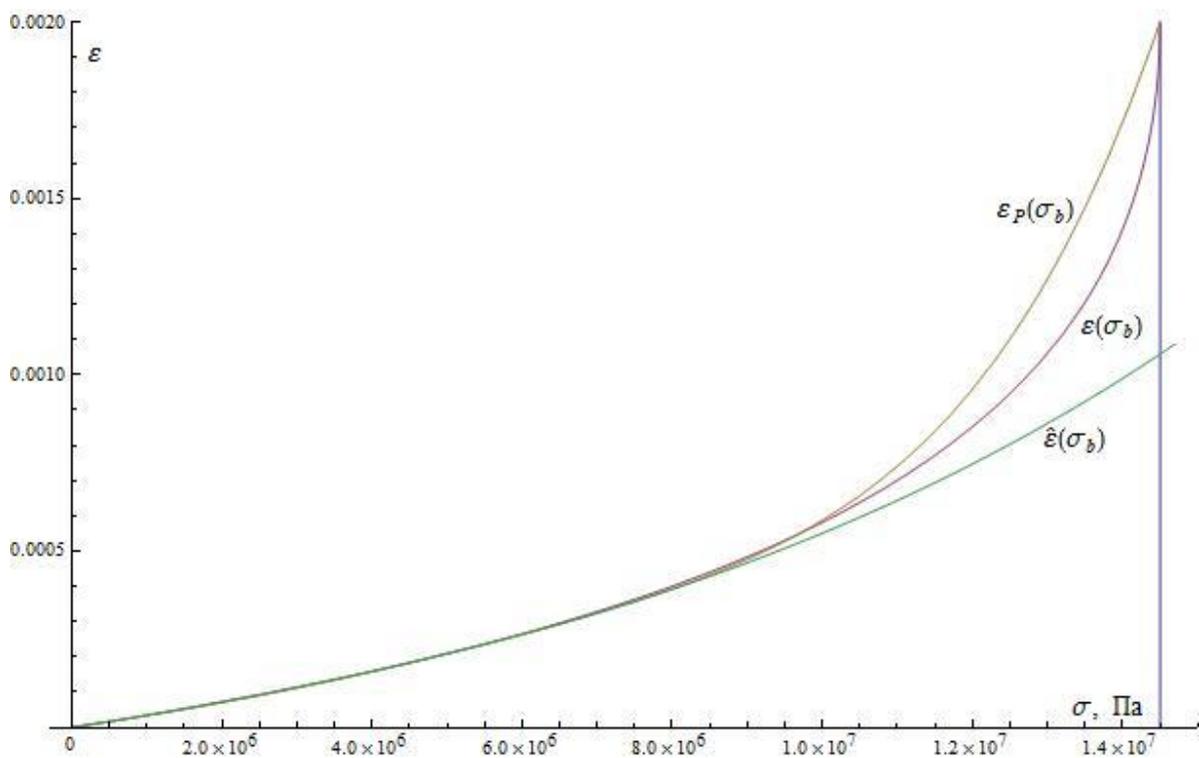


Рис. 11

Видно, что приближение вида  $\varepsilon_P(\sigma_b)$  значительно лучше, чем  $\hat{\varepsilon}(\sigma_b)$ , однако и оно не идеально.

Таким образом, можно сделать следующие выводы:

1) использование многочленов при аппроксимации нелинейной диаграммы " $\varepsilon - \sigma$ " требует известной осторожности, и для тяжелых бетонов низких марок расчеты могут привести к значимым погрешностям;

2) использование разложений  $\sigma_{Sr}(\varepsilon)$  в ряд Тейлора по степеням  $\varepsilon$  и  $\varepsilon_{Sr}(\sigma)$  в ряд по степеням  $\sigma$  некорректно на полных областях задания  $\varepsilon$  и  $\sigma$ , а те части областей задания  $\varepsilon$  и  $\sigma$ , где разложения корректны, эти разложения соответствуют сравнительно низким значениям напряжений и деформаций, т.е. фактически – это близкий к линейному участок диаграммы;

3) при использовании многочленов для аппроксимации зависимости  $\varepsilon(\sigma)$  нельзя достичь выполнения всех граничных условий, а именно в точке  $\sigma = R_b$ , но можно получить удовлетворительное приближение (это гарантирует теорема Вейерштрасса о приближении непрерывных функций многочленами), если взять достаточное число точек интерполяции; при этом в каждом конкретном случае нужно оговаривать, по каким точкам и условиям строится приближение.

Поскольку, во-первых, интегрирование функции Сарджина и моментов относительно нее (интегралы вида  $\int \sigma_b(\varepsilon)d\varepsilon$ ,  $\int \varepsilon\sigma_b(\varepsilon)d\varepsilon$ ,  $\int \varepsilon^2\sigma_b(\varepsilon)d\varepsilon$ ) в явном виде не представляет особых сложностей, кроме громоздкости выражений, что для современных систем символьной математики, таких как Mathematica, Maple, MathCad, не является проблемой, а во-вторых, обратная функция к функции Сарджина легко выписывается в явном и сравнительно простом виде, то представляется рациональным стараться использовать в анализе именно ее (по крайней мере там, где используются интегральные характеристики), не пытаясь добиться упрощений за счет использования аппроксимирующих полиномов. Возможные достигнутые упрощения в записи будут требовать постоянного «индивидуального» подбора аппроксимирующего многочлена в каждом конкретном расчетном случае.

## **2.2. Расчет СЖБ балок с учетом нелинейной диаграммы " $\varepsilon - \sigma$ " бетона**

Перейдем к рассмотрению расчета сталежелезобетонных балок (в дальнейшем СЖБ-балок) с учетом физической нелинейности работы бетона.

Стандартный расчет СЖБ-балок проводится в упругой постановке. Однако линейная работа бетона происходит лишь при нагрузках, вызывающих относительно малые напряжения в бетоне – до величин порядка  $0.2 \div 0.3R_b$ . При дальнейшем увеличении нагрузки начинает сказываться нелинейность работы бетона: во-первых, при мгновенном (кратковременном) загрузении, когда считается, что напряжения в бетоне удовлетворяют нелинейной диаграмме " $\varepsilon - \sigma$ "; во-вторых, при продолжительном действии нагрузки, когда в бетоне начинаются процессы ползучести и релаксации, действие которых обусловлено появлением неупругих внутренних деформаций, вызванных перекристаллизацией, накоплением микротрещин и другими факторами. Математически уравнение ползучести может записываться в форме интегрального уравнения, связывающего относительные деформации и напряжения в бетоне:

$$f(\sigma_b(z, t)) = E_b(t)\varepsilon_b(z, t) + E_b(t) \int_{t_0}^t K(t, \xi) f(\sigma_b(z, \xi)) d\xi. \quad (8)$$

Это – так называемое уравнение вязко-упруго-пластичности бетона (см., например, [41]). В случае, если функция напряжений принимается в виде  $f(\sigma_b(z, t)) = \sigma_b(z, t)$ , уравнение переходит в линейное уравнение ползучести Маслова-Арутюняна. Если отбросить в формуле (8) интеграл в правой части, уравнение должно соответствовать диаграмме " $\varepsilon - \sigma$ " в случае мгновенного загрузения. Если нелинейная функция напряжений  $f(\sigma)$  входит только под интеграл, уравнение переходит в нелинейное уравнение Маслова-Арутюняна. Исходя из вышеизложенного, расчет СЖБ-балок естественным образом распадается на три задачи:

- 1) учет нелинейной диаграммы " $\varepsilon - \sigma$ " бетона при мгновенном загрузении;
- 2) учет линейной ползучести;
- 3) учет нелинейной ползучести по модели вязко-упруго-пластичности.

Рассмотрим сначала возможность учета нелинейной работы бетона в СЖБ-балках при следующих допущениях:

- 1) СЖБ-балка рассматривается, как классическая комплексная балка, т.е. в НДС учитываются только продольные напряжения растяжения-сжатия;
- 2) выполняется гипотеза плоских сечений;
- 3) стальная балка работает упруго;
- 4) СЖБ-балка однопролетная шарнирно-опертая;
- 5) параметры СЖБ-балки подобраны так, что бетон сжат в любом сечении;
- 6) бетон однороден и работает без трещин;
- 7) внешние силы растяжения-сжатия отсутствуют.

На геометрическую связность стального сечения никаких условий не накладывается, поэтому армирование бетонной плиты может быть учтено в составе стального сечения, т.е. потребуется определение центра тяжести стального сечения, его площадь и момент инерции с учетом арматуры.

Принимается локальная система в центре тяжести бетонного сечения – см. рис. 12. Направления глобальных осей координат совпадают с локальными, а начало глобальных координат – в центре тяжести бетонного сечения в середине пролета балки. На рисунке армирование бетонной плиты не учитывается.

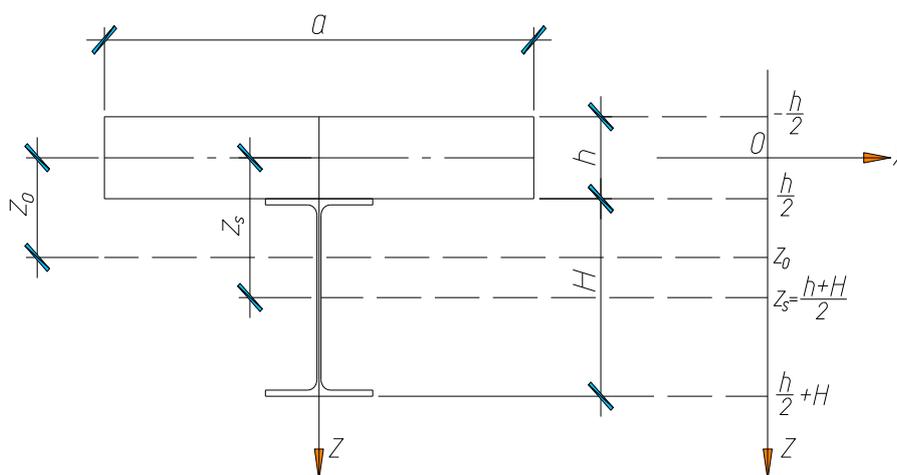


Рис. 12

Зависимость между напряжениями и относительными деформациями примем по формуле Сарджина (1), нормируемой в Eurocode 2 [50] и записанной в обозначениях, принятых в Российских нормах СП для сжатого бетона будет иметь вид:

$$\sigma_b(\varepsilon) = -R_* \frac{\left(\frac{|\varepsilon|}{\varepsilon_{bo}}\right) \left(\frac{E_b \varepsilon_{bo}}{R_*} - \frac{|\varepsilon|}{\varepsilon_{bo}}\right)}{1 + \left(\frac{E_b \varepsilon_{bo}}{R_*} - 2\right) \left(\frac{|\varepsilon|}{\varepsilon_{bo}}\right)}, \quad (9)$$

где  $\varepsilon_{bo}$  - предельная относительная деформация при равномерном осевом сжатии, равная 0,0002 при непродолжительном действии нагрузки, либо определяемая по табл. 6.10 СП 63.13330.2018 [36]:

$$R_* = \begin{cases} R_{b,ser} & \text{— в расчетах по деформациям;} \\ R_b & \text{— в расчетах по прочности.} \end{cases}$$

$E_b$  — начальный модуль деформации бетона при непродолжительном действии нагрузок.

Считая выполненной гипотезу плоских сечений, записать относительные деформации в бетоне и стали можно в следующем виде (с учетом принятой системы координат;  $Y(y)$  — линия прогиба):

$$\varepsilon_b = (z_0 - z)\kappa;$$

$$\varepsilon_s = (z_0 - z)\kappa;$$

$$\kappa = -\frac{1}{\rho} = -Y''.$$

Тут обозначено:  $z_0$  — положение нейтральной оси СЖБ балки,  $\kappa$  и  $\rho$  — кривизна и радиус кривизны нейтральной оси,  $Y$  — уравнение прогиба.

Напряжения в стали стальной балке, поскольку она работает упруго, равны:

$$\sigma_s = E_s \varepsilon_s = E_s (z_0 - z)\kappa.$$

Напряжения в бетоне в соответствии с формулой Сарджина:

$$\sigma_b = \sigma_b(\varepsilon_b) = \sigma_b((z_0 - z)|\kappa|) = -R_* \frac{\left(\frac{(z_0 - z)|\kappa|}{\varepsilon_{bo}}\right) \left(\frac{E_b \varepsilon_{bo}}{R_*} - \frac{(z_0 - z)|\kappa|}{\varepsilon_{bo}}\right)}{1 + \left(\frac{E_b \varepsilon_{bo}}{R_*} - 2\right) \frac{(z_0 - z)|\kappa|}{\varepsilon_{bo}}}.$$

Бетон считается сжатым. В принятых координатах из этого следует, что  $\kappa < 0$  и  $|\kappa| = -\kappa$ . Поэтому

$$\sigma_b = \sigma_b(z) = R_* \frac{\frac{(z_0 - z)\kappa}{\varepsilon_{bo}} \left(\frac{E_b \varepsilon_{bo}}{R_*} + \frac{(z_0 - z)\kappa}{\varepsilon_{bo}}\right)}{1 - \left(\frac{E_b \varepsilon_{bo}}{R_*} - 2\right) \frac{(z_0 - z)\kappa}{\varepsilon_{bo}}}. \quad (9')$$

Поскольку по условию 7) внешние силы растяжения-сжатия отсутствуют, то интеграл напряжений по полному сечению СЖБ балки должен равняться нулю. Тогда в любом сечении СЖБ-балки должно выполняться (условие равновесия):

$$\int_{A_b} \sigma_b dA_b + \int_{A_s} \sigma_s dA_s = 0. \quad (10)$$

Обозначим эти интегралы через  $N_b$  и  $N_s$ :

$$N_b = \int_{A_b} \sigma_b dA_b;$$

$$N_s = \int_{A_s} \sigma_s dA_s.$$

Оба интеграла могут быть легко вычислены. Для стального сечения можно сразу написать:

$$N_s = \int_{A_s} \sigma_s dA_s = \int_{A_s} E_s (z_0 - z)\kappa dA_s = E_s \kappa \int_{A_s} (z_0 - z) dA_s = E_s \kappa \left( z_0 \int_{A_s} dA_s - \int_{A_s} z dA_s \right).$$

Первый интеграл очевидно есть площадь стального сечения, т.е.  $\int_{A_s} dA_s = A_s$ .

Второй интеграл есть статический момент сечения и он равен  $\int_{A_s} z dA_s = z_s A_s$ . Тут

$z_s$  – есть положение центра тяжести стального сечения в локальной системе координат. Таким образом, имеем:

$$N_s = E_s \kappa (z_0 - z_s). \quad (11)$$

Проведем интегрирование во втором интеграле:

$$\begin{aligned} N_b &= \int_{A_b} \sigma_b dA_b = a \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} R_* \frac{\frac{(z_0 - z)\kappa}{\varepsilon_{bo}} \left( k + \frac{(z_0 - z)\kappa}{\varepsilon_{bo}} \right)}{1 - (k-2) \frac{(z_0 - z)\kappa}{\varepsilon_{bo}}} dz = \\ &= -E_b A_b \kappa \frac{(k-1)^2}{k(k-2)} \cdot \left( \frac{z_0}{(k-1)^2} + \xi + \frac{\xi^2}{h} \ln \left( \frac{\xi - \left( z_0 + \frac{h}{2} \right)}{\xi - \left( z_0 - \frac{h}{2} \right)} \right) \right), \end{aligned} \quad (12)$$

Тут обозначено:

$$A_b = ah;$$

$$k = \frac{E_b \varepsilon_{bo}}{R_*};$$

$$\xi = \frac{\varepsilon_{bo}}{(k-2)\kappa}.$$

При малых значениях кривизны  $\kappa$  для  $N_b$  выполняется:

$$N_b \underset{\kappa \rightarrow 0}{=} E_b A_b z_0 \kappa + O(\kappa^2).$$

Таким образом, при малых  $\kappa$  уравнение (10) имеет вид:

$$(10) \underset{\kappa \rightarrow 0}{\Rightarrow} E_b A_b z_0 \kappa + E_s A_s (z_0 - z_s) \kappa = 0.$$

Из полученного уравнения легко найти положение нейтральной оси:

$$z_0 = \frac{E_s A_s z_s}{E_s A_s + E_b A_b} = \frac{1}{1+m} z_s, \quad \text{где обозначено } m = \frac{E_b A_b}{E_s A_s}.$$

Полученное выражение для  $z_0$  есть положение нейтральной оси в упругой постановке.

Полностью уравнение равновесия (10) после определения входящих в него интегралов имеет вид:

$$E_s A_s (z_0 - z_s) \kappa - E_b A_b \kappa \frac{(k-1)^2}{k(k-2)} \cdot \left( \frac{z_0}{(k-1)^2} + \xi + \frac{\xi^2}{h} \ln \left( \frac{\xi - \left( z_0 + \frac{h}{2} \right)}{\xi - \left( z_0 - \frac{h}{2} \right)} \right) \right) = 0. \quad (13)$$

Определим теперь момент внутренней пары в произвольном сечении СЖБ-балки. В случае одноосного напряженного состояния он по определению равен:

$$M_{\text{int}} = \int_{A_b} \sigma_b (z_0 - z) dA_b + \int_{A_s} \sigma_s (z_0 - z) dA_s$$

Введем, как и ранее для внутренних усилий растяжения-сжатия, обозначения:

$$M_b = \int_{A_b} \sigma_b (z_0 - z) dA_b;$$

$$M_s = \int_{A_s} \sigma_s (z_0 - z) dA_s.$$

Интегралы  $M_b$  и  $M_s$  также могут быть легко вычислены. Для  $M_s$  выкладки аналогичны предыдущим:

$$\begin{aligned} M_s &= \int_{A_s} \sigma_s (z_0 - z) dA_s = \int_{A_s} E_s \kappa (z_0 - z)^2 dA_s; \\ \int_{A_s} (z_0 - z)^2 dA_s &= \int_{A_s} \left( z_0^2 - 2z_0 z + z^2 \right) dA_s = z_0^2 A_s - 2z_0 z_s A_s + \int_{A_s} z^2 dA_s = \\ &= z_0^2 A_s - 2z_0 z_s A_s + z_s^2 A_s + I_s = I_s + A_s (z_0 - z_s)^2; \\ M_s &= E_s \kappa \left( I_s + A_s (z_0 - z_s)^2 \right), \end{aligned} \quad (14)$$

где  $I_s$  – момент инерции стальной балки.

$$M_b = -E_b A_b \kappa \frac{(k-1)^2}{k(k-2)} \left[ \xi^2 + \xi z_0 + \frac{1}{(k-1)^2} \left( \frac{h^2}{12} + z_0^2 \right) + \frac{\xi^3}{h} \ln \left( \frac{\xi - \left( z_0 + \frac{h}{2} \right)}{\xi - \left( z_0 - \frac{h}{2} \right)} \right) \right]. \quad (15)$$

Таким образом, полный внутренний момент равен:

$$M_{\text{int}} = M_s + M_b = E_s \kappa \left( I_s + A_s (z_0 - z_s)^2 \right) -$$

$$-E_b A_b \kappa \frac{(k-1)^2}{k(k-2)} \left[ \xi^2 + \xi z_0 + \frac{1}{(k-1)^2} \left( \frac{h^2}{12} + z_0^2 \right) + \frac{\xi^3}{h} \ln \left( \frac{\xi - \left( z_0 + \frac{h}{2} \right)}{\xi - \left( z_0 - \frac{h}{2} \right)} \right) \right]. \quad (16)$$

При малых  $\kappa \rightarrow 0$  можно записать:

$$M_{\text{int}} \underset{\kappa \rightarrow 0}{=} \left( E_b \left( \frac{ah^3}{12} + A_b z_0^2 \right) + E_s \left[ I_s + A_s (z_0 - z_s)^2 \right] \right) \kappa + O(\kappa^2).$$

В принятой системе координат  $\kappa = -Y^{\text{II}}$ , поэтому при малых  $\kappa$ :

$$Y^{\text{II}} = -\frac{M_{\text{int}}}{(EI)_{sb}},$$

где  $(EI)_{sb} = E_b \left( \frac{ah^3}{12} + A_b z_0^2 \right) + E_s \left[ I_s + A_s (z_0 - z_s)^2 \right]$  – изгибная жесткость СЖБ-

балки в упругой постановке.

Поскольку рассматриваемая балка однопролетная шарнирно опертая, – величина внутреннего момента с учетом принятой системы координат равна балочному моменту со знаком «-». Балочный момент может быть легко вычислен. Таким образом:

$$M_{\text{int}} = -M_{\text{beam}}.$$

Следовательно, в этом случае мы имеем полную систему уравнений для определения  $z_0$  и  $\kappa$ :

$$\begin{cases} N_b + N_s = 0; \\ M_b + M_s = -M_{\text{beam}}, \end{cases} \quad (17)$$

где  $N_b, N_s, M_b, M_s$  вычисляемые по формулам (11)–(15).

Система (17) – нелинейная, поэтому, как  $z_0$  и  $\kappa$ , так и прогибы балки могут быть найдены лишь численно. Численное решение системы (17) не представляет трудностей, однако определение прогибов требует решения дифференциального уравнения

$$Y^{\text{II}} = -\kappa.$$

В случае использования конечно-разностных схем для решения дифференциального уравнения, систему (17) нужно будет решать для каждой

точки разбиения отрезка  $\left[-\frac{L}{2}, \frac{L}{2}\right]$ . Определение прогибов, а также  $z_0$  и  $\kappa$  можно произвести, воспользовавшись методом конечных элементов с использованием полученных выражений. Однако прогиб может быть достаточно просто оценен, исходя из кривой прогиба, соответствующей упругой работе.

Сделаем это, исходя из следующих соображений. Пусть  $\bar{Y}(y)$  – кривая прогиба под действием загрузки  $q = q(y)$  в упругой постановке. Приближенно можно считать, что кривая прогибов  $Y(y)$  при нелинейной работе бетона подобна кривой  $\bar{Y}(y)$ , то есть  $Y = \lambda \bar{Y}(y)$ .

Тогда для любой точки  $y_0$  имеем:

$$\kappa_0 = \kappa|_{y=y_0} = -Y''(y)|_{y=y_0} = -\lambda Y''(y)|_{y=y_0} = \lambda \bar{\kappa}_0;$$

$$Y_0 = Y(y)|_{x=x_0} = -\lambda \bar{Y}(y)|_{y=y_0} = \lambda \bar{Y}_0,$$

где  $\bar{Y}_0$ ,  $\bar{\kappa}_0$  – прогиб и кривизна в точке  $y_0$  в упругой постановке.

Из системы (17) можно определить  $\kappa_0$ , значение  $\bar{\kappa}_0$  также известно, поскольку известен вид  $\bar{Y}(y)$ . Поэтому коэффициент пропорциональности  $\lambda$  равен:

$$\lambda = \frac{\kappa_0}{\bar{\kappa}_0}.$$

Откуда находим:

$$Y_0 = \frac{\kappa_0}{\bar{\kappa}_0} \bar{Y}_0 = \kappa_0 \frac{\bar{Y}_0}{\bar{\kappa}_0}.$$

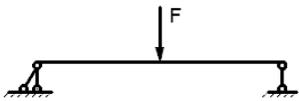
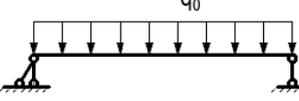
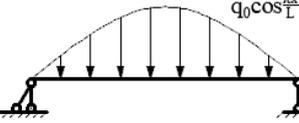
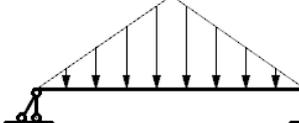
Величина  $\frac{\bar{Y}_0}{\bar{\kappa}_0}$  для каждого конкретного нагружения может быть легко

определена. В середине пролета для некоторых нагружений значения  $\frac{\bar{Y}_0}{\bar{\kappa}_0}$  сведены

в Таблицу 1:

Таблица 1

**Отношение прогиба к кривизне в середине пролета для различных типов нагружений**

Загружение	$\frac{\bar{y}_0}{\bar{\kappa}_0}$
	$-\frac{L^2}{12} \approx -0,083L^2$
	$-\frac{5}{48}L^2 \approx -0,104L^2$
	$-\frac{L^2}{\pi^2} \approx -0,101L^2$
	$-\frac{L^2}{10} \approx -0,1L^2$

### 2.3. Определение сдвигающих напряжений на контакте «сталь-бетон»

Помимо кривизны и положения нейтральной оси, необходимых для определения напряжений в расчете СЖБ балок по прочности, также является необходимым произвести определение сдвигающих сил, возникающих на контакте «сталь-бетон» для расчета упоров на бетон, обеспечивающих совместную работу стальной балки и бетонной плиты. Сделаем это, следуя рассуждениям Тимошенко С.П. ([42]), – см. рис. 13:

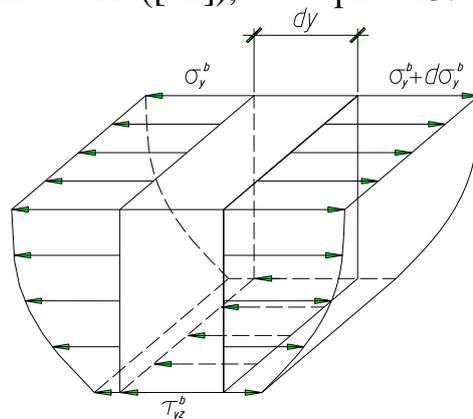


Рис. 13

На верхней (свободной) грани касательных напряжений нет. Из интегрального условия равновесия имеем:

$$\int_{A_{\text{отс}}^{\tau}} \tau_{yz}^b dA + \int_{A_{\text{отс}}^{y+dy}} (\sigma_y^b + d\sigma_y^b) dA - \int_{A_{\text{отс}}^y} \sigma_y^b dA = 0.$$

Поскольку  $A_{\text{отс}}^{y+dy} = A_{\text{отс}}^y$  (геометрия сечения не меняется по длине балки, то есть не зависит от  $y$ ), то можно сразу записать:

$$\int_{A_{\text{отс}}^{\tau}} \tau_{yz}^b dA + \int_{A_{\text{отс}}^y} (d\sigma_y^b) dA = 0.$$

Интегралы в последней сумме равны:

$$\int_{A_{\text{отс}}^{\tau}} \tau_{yz}^b dA = dy \int_{-\frac{a}{2}}^{\frac{a}{2}} \tau_{yz}^b dx \Big|_{z=-\frac{h}{2}+h_{\text{отс}}};$$

$$\int_{A_{\text{отс}}^y} (d\sigma_y^b) dA = d \left( \int_{A_{\text{отс}}^y} \sigma_y^b dA \right) = d \left( \int_{-\frac{h}{2}}^{-\frac{h}{2}+h_{\text{отс}}} \left( \int_{-\frac{a}{2}}^{\frac{a}{2}} \sigma_y^b dx \right) dz \right).$$

Поэтому получается:

$$\int_{-\frac{a}{2}}^{\frac{a}{2}} \tau_{yz}^b dx \Big|_{z=-\frac{h}{2}+h_{\text{отс}}} = -\frac{d}{dy} \left( \int_{-\frac{h}{2}}^{-\frac{h}{2}+h_{\text{отс}}} \left( \int_{-\frac{a}{2}}^{\frac{a}{2}} \sigma_y^b dx \right) dz \right).$$

Для полного бетонного сечения  $h_{\text{отс}} = h$ , следовательно, погонное сдвигающее усилие  $t_{\text{cont}}(y)$  на контакте «сталь-бетон» равно:

$$t_{\text{cont}}(y) = \int_{-\frac{a}{2}}^{\frac{a}{2}} \tau_{yz}^b dx \Big|_{z=\frac{h}{2}} = -\frac{d}{dy} \left( \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} \left( \int_{-\frac{a}{2}}^{\frac{a}{2}} \sigma_y^b dx \right) dz \right) = -\frac{d}{dy} \int_{A_b} \sigma_y^b dA_b = -\frac{d}{dy} N_b. \quad (18)$$

Из условия равновесия следует, что выполняется:

$$N_b = -N_s.$$

Поэтому:

$$N_b = -N_s = -E_s A_s (z_0 - z_s) \kappa.$$

Таким образом, выражение для погонного сдвигающего усилия имеет вид:

$$t_{\text{cont}}(y) = -\frac{d}{dy}(-E_s A_s (z_0 - z_s) \kappa) = E_s A_s \frac{d}{dy}((z_0 - z_s) \kappa). \quad (19)$$

Величина накопленной на участке  $[a, b]$  сдвигающей силы составляет:

$$T_{\text{cont}}(a, b) = \int_a^b t_{\text{cont}}(y) dy = E_s A_s (z_0 - z_s) \kappa \Big|_{y=a}^{y=b}. \quad (20)$$

Ее можно записать, исходя из (18), в другом виде:

$$T_{\text{cont}}(a, b) = -\int_a^b \frac{d}{dy} N_b dy = N_b(a) - N_b(b). \quad (21)$$

Расчет дискретно расположенных упоров на бетон, обеспечивающих совместную работу стальной балки и бетонной плиты, производится именно на соответствующую накопленную сдвигающую силу. Тем самым для определения  $T_{\text{cont}}(a, b)$  достаточно иметь значения  $z_0(y)$  и  $\kappa(y)$  в точках  $y = a$  и  $y = b$ , то есть решить систему (17) для  $M_{\text{beam}}(a)$  и  $M_{\text{beam}}(b)$ . Однако при  $y = \pm \frac{L}{2}$  (на концах) для шарнирно опертой балки  $M_{\text{int}} = M_{\text{beam}} = 0$ . И, кроме того,  $\kappa \Big|_{y=\pm \frac{L}{2}} = 0$ . Последнее следует из того, что учет нелинейной диаграммы " $\sigma - \varepsilon$ " бетона позволяет рассматривать СЖБ-балку, как балку переменной жесткости. При этом, поскольку кривая  $\sigma = \sigma(\varepsilon)$  располагается между прямыми  $\sigma = E_b \varepsilon$  и  $\sigma = E_{b, \text{crc}} \varepsilon$  (см. рис. 14),

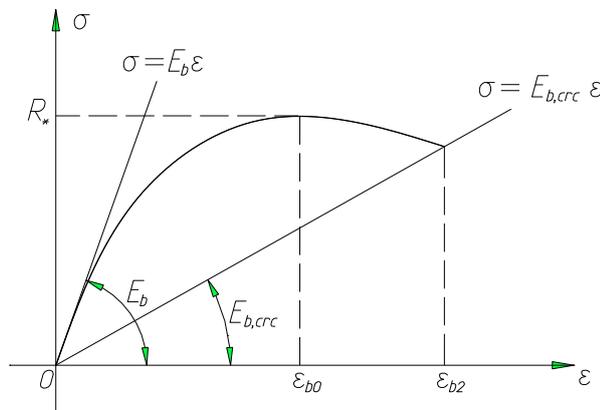


Рис. 14

то изгибная жесткость СЖБ-балки будет в любом сечении заключена между двумя крайними значениями:

$$(EI)_{sb}^{E_{b,erc}} < (EI)_{sb}^{\text{нелин}} < (EI)_{sb}^{E_b}$$

где  $(EI)_{sb}^{E_b}$  и  $(EI)_{sb}^{E_{b,erc}}$  – упругие изгибные жесткости, вычисленные по модулям деформаций  $E_b$  и  $E_{b,erc}$ . Для кривизны  $\kappa$  выполняется соотношение:

$$\kappa = Y^{\text{II}} = -\frac{M}{(EI)}.$$

Поэтому для любой упругой балки:

$$\kappa \Big|_{y=\pm\frac{L}{2}} = Y^{\text{II}} \Big|_{y=\pm\frac{L}{2}} = -\frac{M}{(EI)_{sb}} \Big|_{y=\pm\frac{L}{2}} = 0.$$

Значит, в нелинейном случае из вышеприведенного неравенства для  $(EI)_{sb}^{\text{нелин}}$  следует, что кривизна на концах балки равна нулю. Из этого также следует, что в окрестностях точек  $y = \pm\frac{L}{2}$  кривизна  $\kappa$  мала. Ранее из первого уравнения системы (17) было получено выражение для положения нейтральной оси при малых значениях кривизны:

$$z_0 \xrightarrow{\kappa \rightarrow 0} \frac{1}{1+m} z_s.$$

Это означает, что в некоторой окрестности точек  $y = \pm\frac{L}{2}$  нейтральная ось  $z_0$

постоянна:

$$z_0 = \frac{1}{1+m} z_s = \text{const.}$$

Если продифференцировать второе уравнение системы (17) по  $y$ , то можно записать следующее соотношение ( $z_0$  полагается постоянной):

$$\left( F(y) + E_s A_s \left[ (z_0 - z_s)^2 + i_s^2 \right] \right) \kappa' = -\frac{d}{dy} M_{beam} = -Q,$$

где  $Q = Q(y)$  – поперечная сила;

$$F(y) = E_b A_b \frac{(k-1)^2}{k(k-2)} \left[ \zeta^2 - \frac{\zeta^4}{\frac{h^2}{4} - (z_0 - \zeta)^2} - \frac{1}{(k-1)^2} \left( \frac{h^2}{12} + z_0^2 \right) + \frac{2\zeta^3}{h} \ln \left( \frac{\zeta - \left( z_0 + \frac{h}{2} \right)}{\zeta - \left( z_0 - \frac{h}{2} \right)} \right) \right]$$

Отсюда в окрестности  $y = \pm\frac{L}{2}$  получается:

$$\kappa' = - \frac{Q(y)}{F(y) + E_s A_s \left[ (z_0 - z_s)^2 + i_s^2 \right]}.$$

Переходя к пределу по  $y \rightarrow \pm \frac{L}{2}$ :

$$\kappa \Big|_{y \rightarrow \pm \frac{L}{2}} = 0;$$

$$F(y) \Big|_{\kappa \rightarrow 0} \rightarrow E_b A_b \left( \frac{h^2}{12} + z_0^2 \right);$$

$$\kappa' \Big|_{y = \pm \frac{L}{2}} = - \frac{Q \Big|_{\pm \frac{L}{2}}}{E_b A_b \left( \frac{h^2}{12} + z_0^2 \right) + E_s A_s \left[ (z_0 - z_s)^2 + i_s^2 \right]} = \frac{Q \Big|_{\pm \frac{L}{2}}}{(EI)_{sb}}, -$$

где  $(EI)_{sb}$  есть упругая жесткость СЖБ-балки.

Тем самым, погонная сдвигающая сила на концах СЖБ-балки (шарнирно опертой) равна:

$$t_{\text{cont}} \Big|_{y = \pm \frac{L}{2}} = \frac{E_s A_s (z_0 - z_s) Q}{E_b A_b \left( \frac{h^2}{12} + z_0^2 \right) + E_s A_s \left[ (z_0 - z_s)^2 + i_s^2 \right]} = \frac{E_s A_s (z_0 - z_s) Q}{(EI)_{sb}}.$$

Получена обычная формула Журавского для СЖБ-балки. Ее можно переписать в эквивалентном виде, воспользовавшись уравнением равновесия на концах балки:

$$E_s A_s (z_0 - z_s) + E_b A_b z_0 = 0 \quad \Rightarrow$$

$$\Rightarrow E_s A_s (z_0 - z_s) = -E_b A_b z_0.$$

Поэтому:

$$t_{\text{cont}} \Big|_{y = \pm \frac{L}{2}} = - \frac{E_b A_b z_0 Q}{E_b A_b \left( \frac{h^2}{12} + z_0^2 \right) + E_s A_s \left[ (z_0 - z_s)^2 + i_s^2 \right]} = - \frac{E_b A_b z_0 Q}{(EI)_{sb}}.$$

Выписанные формулы совпадают с аналогичными формулами для упругой задачи, то есть погонная сдвигающая сила на концах шарнирно опертой СЖБ-балки не зависит от нелинейной работы бетона и определяется начальным модулем деформации бетона.

Величина накопленной на половине пролета сдвигающей силы составит:

$$T_{\text{cont}}\left(0, \frac{L}{2}\right) = E_s A_s (z_0 - z_s) \kappa \Big|_{y=0}^{y=\frac{L}{2}} = -E_s A_s (z_0 - z_s) \kappa \Big|_{y=0}.$$

Это следует из того, что на конце балки  $\kappa \Big|_{y=\frac{L}{2}} = 0$ .

Обозначим через  $\bar{T}_{\text{cont}}(a, b)$  накопленную на интервале  $[a, b]$  сдвигающую силу в упругой постановке. Тогда:

$$\bar{T}_{\text{cont}}\left(0, \frac{L}{2}\right) = E_s A_s (\bar{z}_0 - z_s) \bar{\kappa} \Big|_{y=0}^{y=\frac{L}{2}} = -E_s A_s (\bar{z}_0 - z_s) \bar{\kappa} \Big|_{y=0}.$$

Их отношение будет равно:

$$r_T = \frac{\bar{T}_{\text{cont}}\left(0, \frac{L}{2}\right)}{T_{\text{cont}}\left(0, \frac{L}{2}\right)} = \frac{\bar{N}_b(0)}{N_b(0)} = \frac{(\bar{z}_0 - z_s) \bar{\kappa} \Big|_{y=0}}{(z_0 - z_s) \kappa \Big|_{y=0}}. \quad (22)$$

Величины  $\bar{N}_b(0)$  и  $N_b(0)$  есть интегралы от напряжений по бетонному сечению. Из общих соображений ясно, что изгибная жесткость СЖБ-балки в упругой постановке будет больше, чем в нелинейной, поскольку кривая  $\sigma = \sigma(\varepsilon)$  лежит ниже прямой  $\sigma = E_b \varepsilon$ . Перераспределение усилий растяжения-сжатия между бетонной и стальной частью сечения происходит пропорционально их жесткостям. В нелинейном случае жесткость бетонной части сечения СЖБ-балки меньше, тем самым меньше будет и интегральное усилие сжатия в бетоне. Следовательно,  $r_T$  будет больше 1.

#### 2.4. Расчет СЖБ балки по предельным состояниям

Расчет по предельным состояниям 1 группы является обязательным в современных строительных нормах. В обычной инженерной практике такой расчет проводится по методу предельного равновесия, где за основу берется диаграмма Прандтля, как для стали, так и для бетона. При этом величины относительных деформаций, возникающих в волокнах рассматриваемого сечения не рассматриваются. Получаемый результат дает оценку сверху для величины предельной нагрузки, воспринимаемой сечением. Сам по себе расчет не требует применения изощренного математического аппарата, кроме того, он

дает достаточную для инженерной практики точность. Возможно по этой причине, анализ получаемых результатов остается на периферии внимания исследователей. Однако СЖБ балки имеют свои «родовые» особенности: их параметры стараются подбирать таким образом, чтобы максимально использовать работу бетона на сжатие, тем самым увеличивая жесткость СЖБ балки. Как будет показано далее, в СЖБ балках при увеличении нагрузки, перераспределение внутренних усилий в бетонной плите и стальной балке происходит таким образом, что первыми начинают «течь» волокна в стальной балке. С этого момента можно считать, что в балке начинаются пластические деформации. Ясно, что исчерпание несущей способности будет достигнуто, когда предельные значения относительных деформаций будут достигнуты либо в бетонной плите, либо в стальной балке. Таким образом, в работе сталежелезобетонной балки можно выделить 2 стадии:

- 1-я стадия – упругая работа стальной балки;
- 2-я стадия – пластическая работа стальной балки.

Такой подход аналогичен тому, что используется в расчете стальных конструкций.

Под предельным состоянием СЖБ балки будем понимать такое состояние, когда в крайнем волокне бетонной плиты или стальной балки относительные деформации достигают предельных значений ( $\varepsilon_{b2}$  или  $\varepsilon_{s2}$ ). Считаем выполненной гипотезу плоских сечений вплоть до достижения предельного состояния. Возможные расчетные схемы представлены на рис. 15 и 16.

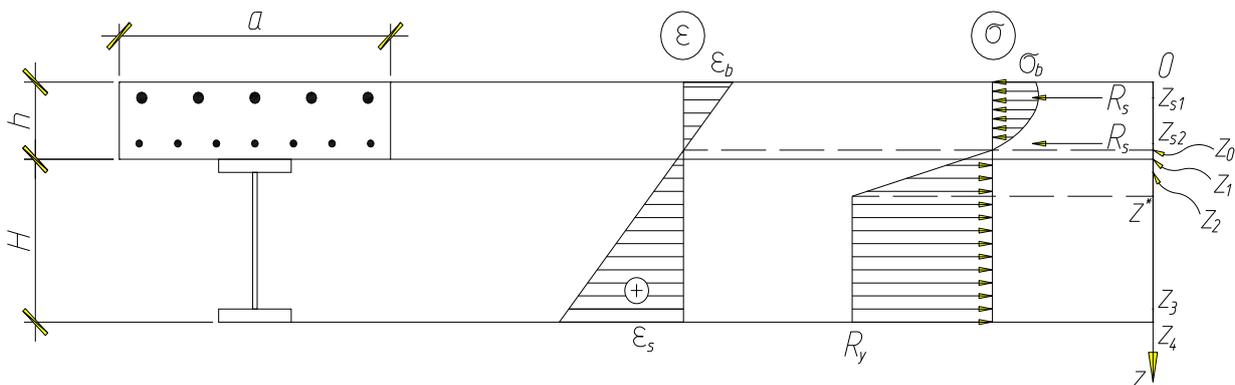


Рис. 15

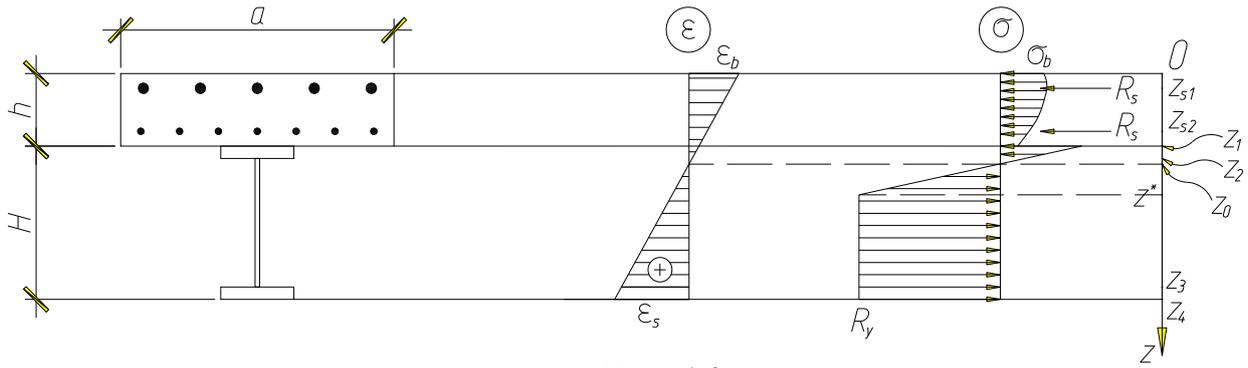


Рис. 16

Необходимо рассмотреть два варианта:

- 1) Нейтральная ось проходит в теле железобетонной плиты;
- 2) Нейтральная ось проходит в теле стальной балки.

В каждом из этих расчетных случаев также требуется рассмотреть два варианта:

- 1) Первым достигается предельное значение относительной деформации в верхнем волокне бетонной плиты;
- 2) Первым достигается предельное значение относительной деформации в нижнем волокне стальной балки.

Растянутый бетон в расчете не учитывается.

Линейность изменения относительных деформаций по высоте сечения можно записать следующим образом:

$$\varepsilon(z) = \varepsilon_b + \frac{\varepsilon_s - \varepsilon_b}{H + h} z, \quad z \in [0; H + h]. \quad (23)$$

Значения  $\varepsilon_b$  и  $\varepsilon_s$  задаются с соответствующим знаком. В принятой на рис. 11 и 12 системах координат  $\varepsilon_b$  берется со знаком «-». Величина относительных деформаций зависит от двух параметров –  $\varepsilon_b$  и  $\varepsilon_s$ , – поэтому, если считать фиксированным один из них, второй требует определения. Это можно сделать, составив уравнение равновесия:

$$N_b + N_s = 0, \quad - \quad (24)$$

где  $N_b$  и  $N_s$  есть интегральные внутренние усилия растяжения-сжатия в бетонном и стальном сечении.

Положение нейтральной оси определяется из представления (23), если  $\varepsilon(z) = 0$ :

$$z_0 = -\frac{H+h}{\varepsilon_s - \varepsilon_b} \varepsilon_b. \quad (25)$$

Величина  $N_b$  в зависимости от положения нейтральной оси (см. рис. 15, 16) равна:

$$N_b^I = a \int_0^{z_0} \sigma_{Sr}(\varepsilon(z)) dz \quad (\text{вариант I, рис. 15});$$

$$N_b^{II} = a \int_0^h \sigma_{Sr}(\varepsilon(z)) dz \quad (\text{вариант II, рис. 16}).$$

Тут  $\sigma_{Sr}$  есть функция Сарджина (8),  $a$  – ширина плиты.

Интегралы  $N_b^I$  и  $N_b^{II}$  равны:

$$N_b^I = \frac{R_b ah}{\alpha(\beta - \gamma)} \left( \frac{k-1}{k-2} \right)^2 (\eta_1 - \ln(1 + \gamma)); \quad (26)$$

$$\eta_1 = \gamma - \frac{\gamma^2}{2(k-1)^2}; \quad (27)$$

$$N_b^{II} = \frac{R_b ah}{\alpha(\beta - \gamma)} \left( \frac{k-1}{k-2} \right)^2 \left( \eta_2 + \ln \left( 1 + \alpha \frac{\beta - \gamma}{1 + \gamma} \right) \right); \quad (28)$$

$$\eta_2 = -(1 - \gamma + (k-2)k) \frac{\alpha(\beta - \gamma)}{(k-1)^2} + \frac{\alpha^2(\beta - \gamma)^2}{2(k-1)^2}; \quad (29)$$

$$\alpha = \frac{h}{H+h}; \quad \beta = \frac{\varepsilon_s(k-2)}{\varepsilon_{b0}}; \quad \gamma = \frac{\varepsilon_b(k-2)}{\varepsilon_{b0}}. \quad (30)$$

Положение нейтральной оси в безразмерных обозначениях (30) примет вид:

$$z_0 = -\frac{\gamma}{\alpha(\beta - \gamma)} h. \quad (31)$$

Величина  $N_s$  может быть определена следующим образом:

$$N_s = \sum_i A_{si} \sigma_s(z_{si}) + \int_h^{H+h} b(z) \sigma_s(z) dz = U_a + U_s. \quad (32)$$

Первое слагаемое в (32) – это суммарное усилие в арматуре, второе – в стальной балке. Во втором слагаемом через  $b(z)$  обозначена ширина сечения. В случае двутавра или швеллера зависимость может быть записана в таком виде:

$$b(z) = \sum_{i=1}^3 b_i (\chi(z - z_i) - \chi(z - z_{i+1}));$$

$$\chi(z) = \begin{cases} 1, & z \geq 0; \\ 0, & z < 0, \end{cases} \text{ – функция Хевисайда;}$$

$b_i$  и  $z_i$  – ширина и координаты полок и стенки двутавра.

В проведенных расчетах диаграмма " $\varepsilon - \sigma$ " для стали рассмотрена в двух вариантах:

1) двухлинейная (по Прандтлю) в соответствии с СП 63.13330.2018 (п. 6.2.14) [36] и СП 159.1325800.2014 (п. 4.12) [34].

2) обобщенная диаграмма " $\varepsilon - \sigma$ " в соответствии с СП 16.13330.2017 (Приложение В) [35], представляющая собой кусочно-линейную функцию (см. рис. 17).

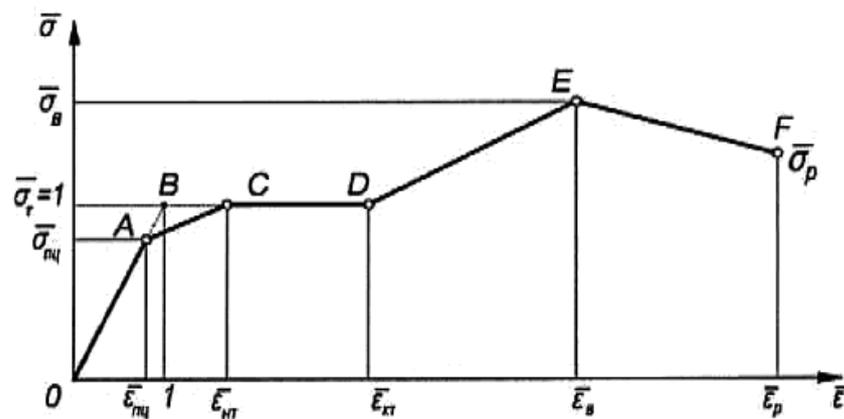


Рис. 17

Обобщенная диаграмма " $\varepsilon - \sigma$ " может быть легко записана в виде суммы при помощи функции Хевисайда:

$$\sigma_s(z) = \sum_{i=1}^9 \sigma_i(z) (\chi(z - \zeta_i) - \chi(z - \zeta_{i+1})); \quad (33)$$

$$\sigma_i(z) = R_i + \frac{R_{i+1} - R_i}{\zeta_{i+1} - \zeta_i} (z - \zeta_i); \quad (34)$$

$$\zeta_i = \frac{\varepsilon_i - \varepsilon_b}{\varepsilon_s - \varepsilon_b} (H + h); \quad (35)$$

$$\varepsilon_i = \bar{\varepsilon}_i \frac{R_y}{E_s}. \quad (36)$$

Значения  $R_i$  и  $\bar{\varepsilon}_i$  сведены в таблицу 2 (величины  $\bar{\varepsilon}$  и  $\bar{\sigma}$  берутся из СП 16.13330.2017, табл. В.9 [35]).

Таблица 2

**Приведенные напряжения в характерных точках обобщенной диаграммы работы стали**

$i$	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
$\bar{\varepsilon}_i$	$-\bar{\varepsilon}_p$	$-\bar{\varepsilon}_b$	$-\bar{\varepsilon}_{кт}$	$-\bar{\varepsilon}_{нт}$	$-\bar{\varepsilon}_{пц}$	$\bar{\varepsilon}_{пц}$	$\bar{\varepsilon}_{нт}$	$\bar{\varepsilon}_{кт}$	$\bar{\varepsilon}_b$	$\bar{\varepsilon}_p$
$R_i$	$-\bar{\sigma}_p R_y$	$-\bar{\sigma}_b R_y$	$-\bar{\sigma}_т R_y$	$-\bar{\sigma}_т R_y$	$-\bar{\sigma}_{пц} R_y$	$\bar{\sigma}_{пц} R_y$	$\bar{\sigma}_т R_y$	$\bar{\sigma}_т R_y$	$\bar{\sigma}_b R_y$	$\bar{\sigma}_p R_y$

Ясно, что если положить  $\bar{\varepsilon}_{пц} = \bar{\sigma}_p = \bar{\sigma}_b = \bar{\sigma}_{пц} = 1$ , то получится двухлинейная диаграмма Прандтля. При учете арматуры в Таблице 2 вместо  $R_y$  нужно подставить  $R_s$ . Также понятно, что диаграмма деформирования стали может быть уточнена при наличии опытных данных на участках А-С и D-F, где она, вообще говоря нелинейна, но представлена на обобщенной диаграмме линейными отрезками. Формулы (33)-(36) легко позволяют аппроксимировать ее любой уточняющей кусочно-линейной функцией с большим числом узлов, не влияя на последующие расчетные формулы. Обобщенная (унифицированная) диаграмма для строительных сталей была предложена в работе Г.Е.Бельского [5].

На участке А-С можно воспользоваться аппроксимацией, данной проф. И.Д.Грудевым [11]:

$$\sigma(\varepsilon) = \begin{cases} \sigma_m \operatorname{sign}|\varepsilon| \left( 0.8 + k \cdot \operatorname{arctg} \left( \frac{|\varepsilon| - 0.8\varepsilon_m}{k\varepsilon_m} \right) \right), & |\varepsilon| > 0.8\varepsilon_m; \\ \sigma_m \frac{\varepsilon}{\varepsilon_m}, & \varepsilon \leq \varepsilon_m; \end{cases} \quad k = 0.1413; \quad \varepsilon_m = \frac{\sigma_m}{E_s} = \frac{R_y}{E_s}.$$

Недостаток формулы Грудева – на конце участка А-С значение напряжения  $\sigma(1.7\varepsilon_m) \neq \sigma_m$ .

Хорошей аппроксимации участка А-С обобщенной диаграммы, можно добиться, используя функции Крылова-Власова:

$$\sigma(\varepsilon) = R_y \sum_{i=1}^4 A_i \Phi_i(\alpha(\bar{\varepsilon} - 0.8)); \quad \bar{\varepsilon} = \varepsilon \frac{R_y}{E_s};$$

$$\Phi_1(x) = \cosh(x) \cos(x); \quad \Phi_2(x) = \sinh(x) \sin(x); \quad \Phi_3(x) = \sinh(x) \cos(x);$$

$$\Phi_4(x) = \cosh(x) \sin(x);$$

$$\alpha = 0.78483; \quad A_1 = 0.8; \quad A_2 = -1.31332; \quad A_3 = -0.77796; \quad A_4 = 1.63884.$$

Расхождение с табличными данными [5] для интеграла, взятого по участку  $\left[ 0.8 \frac{R_y}{E_s}; 1.7 \frac{R_y}{E_s} \right]$  от функции  $\sigma(\varepsilon)$ , составляет 0,071%.

Сумма в (32) с учетом представления (34) может быть легко выписана:

$$U_a = \sum_j A_{sj} \sigma_s(z_{sj}) = \sum_j A_{sj} \sum_{i=1}^9 \sigma_i(z_{sj}) (\chi(z - \zeta_i) - \chi(z - \zeta_{i+1})). \quad (37)$$

Чтобы произвести интегрирование во втором слагаемом (32) можно либо воспользоваться прямым интегрированием в системе символьной математики (*Mathematica*, *Maple* и т.п.), либо следующим соотношением:

$$\int_a^b f(x) \chi(x-c) dx = \left( \int_a^c f(x) dx \right) \chi(a-c) + \left( \int_c^b f(x) dx \right) \chi(b-c);$$

Пользуясь им, введем функцию:

$$\begin{aligned}
S_i^{(1)}(u, v) &= \int_u^v \sigma_{si}(z) \chi(z - \zeta_i) dz = \\
&= (\zeta_i - u) \sigma_{si} \left( \frac{u + \zeta_i}{2} \right) \chi(u - \zeta_i) + (v - \zeta_i) \sigma_{si} \left( \frac{\zeta_i + v}{2} \right) \chi(v - \zeta_i).
\end{aligned} \tag{38}$$

Тогда для интеграла в (32) имеем:

$$U_s = \int_h^{H+h} b(z) \sigma_s(z) dz = \sum_{j=1}^3 b_j \int_{z_j}^{z_{j+1}} \sigma_s(z) dz = \sum_{j=1}^3 b_j U_j^{(s)}; \tag{39}$$

$$U_j^{(s)} = \sum_i \left( S_i^{(1)}(z_j, z_{j+1}) - S_{i+1}^{(1)}(z_j, z_{j+1}) \right). \tag{40}$$

Принимая во внимание формулы (37) и (39), получаем для интегрального усилия в сечении стальной балки:

$$N_s = U_a + b_1 U_1^{(s)} + b_2 U_2^{(s)} + b_3 U_3^{(s)}.$$

Таким образом, нужно рассматривать 4 уравнения:

- 1)  $N_b^I + N_s = 0$  при условии  $\varepsilon_b = \varepsilon_{b2}$ ; требуется определить  $\varepsilon_s$ ;
- 2)  $N_b^I + N_s = 0$  при условии  $\varepsilon_s = \varepsilon_{s2}$ ; требуется определить  $\varepsilon_b$ ;
- 3)  $N_b^{II} + N_s = 0$  при условии  $\varepsilon_b = \varepsilon_{b2}$ ; требуется определить  $\varepsilon_s$ ;
- 4)  $N_b^{II} + N_s = 0$  при условии  $\varepsilon_s = \varepsilon_{s2}$ ; требуется определить  $\varepsilon_b$ ;

Определение корней получающихся нелинейных уравнений в системах компьютерной алгебры (Maple, Mathematica, MathCad) не составляет труда, начальное приближение можно получить, построив графики функций вида  $N_b + N_s$ . При решении этих уравнений необходимо следить, чтобы определяемые величины не превышали соответствующих предельных значений, а положение нейтральной оси соответствовало решаемому уравнению.

После определения  $\varepsilon_s$  (или  $\varepsilon_b$ ) можно определить величину предельного момента:

$$M_b^I = a \int_0^{z_0} \sigma_{Sr}(\varepsilon(z))(z - z_0) dz = \frac{Rah^2}{\alpha^2 (\beta - \gamma)^2} \left( \frac{k-1}{k-2} \right)^2 (\xi_1 + \ln(1 + \gamma)); \tag{41}$$

$$\xi_1 = \gamma \left( -1 + \frac{\gamma}{2} - \frac{\gamma^2}{3(k-1)^2} \right); \quad (42)$$

$$M_b^H = a \int_0^h \sigma_{Sr}(\varepsilon(z))(z-z_0) dz = \frac{Rah^2}{(k-2)^2} \left( \xi_2 - \frac{(k-1)^2}{\alpha^2(\beta-\gamma)^2} \ln \left( 1 + \alpha \frac{\beta-\gamma}{1+\gamma} \right) \right); \quad (43)$$

$$\xi_2 = \frac{\alpha(\beta-\gamma)}{3} + \gamma - \frac{1}{2} + k(k-2) \left( \frac{1-\gamma}{\alpha(\beta-\gamma)} - \frac{1}{2} \right) + \frac{1-\gamma+\gamma^2}{\alpha(\beta-\gamma)}; \quad (44)$$

$$\begin{aligned} M_s &= \sum_i A_{si} (z_{si} - z_0) \sigma_s(z_{si}) + \int_h^{H+h} b(z)(z-z_0) \sigma_s(z) dz = \\ &= \sum_i A_{si} z_{si} \sigma_s(z_{si}) + \int_h^{H+h} b(z) z \sigma_s(z) dz - N_s z_0 = V_a + V_s - N_s z_0. \end{aligned} \quad (45)$$

$$V_a = \sum_j A_{sj} z_{sj} \sigma_s(z_{sj}) = \sum_j A_{sj} z_{sj} \sum_{i=1}^9 \sigma_i(z_{sj}) (\chi(z - \zeta_i) - \chi(z - \zeta_{i+1})). \quad (46)$$

$$\begin{aligned} S_i^{(2)}(u, v) &= \int_u^v z \cdot \sigma_{si}(z) \chi(z - \zeta_i) dz = \\ &= \left( \frac{\zeta_i^2 - u^2}{2} \right) \cdot \sigma_{si} \left( \frac{2}{3} \cdot \frac{\zeta_i^3 - u^3}{\zeta_i^2 - u^2} \right) \chi(u - \zeta_i) + \left( \frac{v^2 - \zeta_i^2}{2} \right) \cdot \sigma_{si} \left( \frac{2}{3} \cdot \frac{v^3 - \zeta_i^3}{v^2 - \zeta_i^2} \right) \chi(v - \zeta_i); \end{aligned} \quad (47)$$

$$V_j^{(s)} = \sum_i \left( S_i^{(2)}(z_j, z_{j+1}) - S_{i+1}^{(2)}(z_j, z_{j+1}) \right). \quad (48)$$

$$V_s = \int_h^{H+h} b(z) z \sigma_s(z) dz = b_1 V_1^{(s)} + b_2 V_2^{(s)} + b_3 V_3^{(s)}. \quad (49)$$

Окончательно предельный момент определяется с учетом формул (41)-(49):

$$M_{ult} = M_b + M_s = M_b^{I,II} + V_a + b_1 V_1^{(s)} + b_2 V_2^{(s)} + b_3 V_3^{(s)} - N_s z_0. \quad (50)$$

Использование функции Хевисайда позволяет не заниматься подробным рассмотрением ветвящихся условных переходов вида «если..., то...», а сразу оперировать выражениями формульного типа. Содержащиеся в них условные переходы, реализуемые функцией Хевисайда, обрабатываются уже внутри систем символьной математики. Это позволяет уменьшить возможность появления ошибок при написании вычислительных процедур.

Если ограничиться обычным в инженерной практике рассмотрением перехода бетона в пластику по теории предельного равновесия, т.е. рассмотрением прямоугольной эпюры напряжений в бетоне вместо криволинейной по формуле Сарджина, то формулы (26), (28), (41), (43) значительно упростятся:

$$N_b^I = R_b a z_0; \quad (51)$$

$$N_b^{II} = R_b a h; \quad (52)$$

$$M_b^I = R_b a \frac{z_0^2}{2}; \quad (53)$$

$$M_b^{II} = R_b a h \left( \frac{h}{2} - z_0 \right); \quad (54)$$

Еще большего упрощения можно добиться, если пренебречь учетом упругих деформаций в стальной балке и рассматривать образование идеального пластического шарнира в сечении СЖБ балки. При таком подходе нужно рассмотреть три варианта положения в сечении пластического шарнира:

- нейтральная ось проходит в теле бетона;
- нейтральная ось проходит в верхней полке двутавра;
- нейтральная ось проходит в теле стенки двутавра.

Если нейтральная ось проходит в теле бетонной плиты, то инженерная оценка величины предельного момента, воспринимаемого сечением СЖБ балки (без учета арматуры; по рис.15), имеет весьма простой вид:

$$\begin{aligned} x &= \frac{R_y A_s}{R_b a}; \\ M_{ult,0} &= R_b a x \left( \frac{H}{2} + h - \frac{x}{2} \right) = \\ &= R_b a \frac{R_y A_s}{R_b a} \left( \frac{H}{2} + h - \frac{1}{2} \frac{R_y A_s}{R_b a} \right) = R_y A_s \left( \frac{H}{2} + h - \frac{1}{2} \frac{R_y A_s}{R_b a} \right). \end{aligned} \quad (55)$$

Варианты расположения нейтральной оси в теле двутавра показаны на рис. 18 и 19:

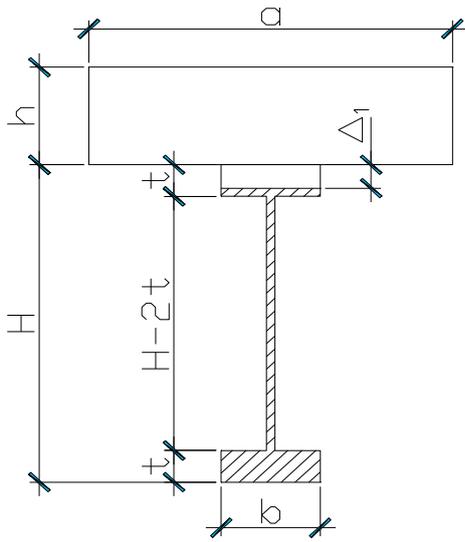


Рис. 18

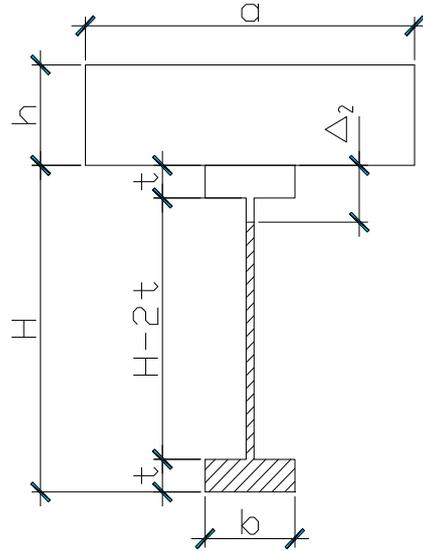


Рис. 19

По рис.18 имеем:

$$R_b ah + R_y b \Delta_1 = R_y A_s - R_y b \Delta_1 \Rightarrow \Delta_1 = \frac{R_y A_s - R_b ah}{2R_y b};$$

$$M_{ult,1} = R_y A_s \frac{H+h}{2} - 2R_y b \Delta_1 \frac{h+\Delta_1}{2} = R_y A_s \frac{H+h}{2} - R_y b \Delta_1 (h + \Delta_1). \quad (56)$$

Аналогично по рис.19 получается:

$$R_b ah + R_y bt + R_y (\Delta_2 - t)s = R_y bt + R_y (H - t - \Delta_2) \Rightarrow \Delta_2 = \frac{R_y Hs - R_b ah}{2R_y s};$$

$$\begin{aligned} M_{ult,1} &= R_y A_s \frac{H+h}{2} - 2R_y bt \frac{h+t}{2} - 2R_y (\Delta_2 - t)s \frac{h+t+\Delta_2}{2} = \\ &= R_y A_s \frac{H+h}{2} - R_y bt(h+t) - R_y (\Delta_2 - t)s(h+t+\Delta_2). \end{aligned} \quad (57)$$

Формулы (32), (33) и (34) можно объединить в одну:

$$M_{ult}^{pls} = M_{ult,0} \chi \left( h - \frac{R_y A_s}{R_b a} \right) + \left( M_{ult,1} \cdot \chi(t - \Delta_1) + M_{ult,2} \chi(\Delta_2 - t) \right) \chi \left( \frac{R_y A_s}{R_b a} - h \right). \quad (58)$$

В содержательном плане представление (58) ничего нового не добавляет, но оно удобно для систем символьной математики. Учет армирования не составляет особых трудностей.

Предлагаемый подход для определения предельного момента в СЖБ балках может быть реализован также и для обычных железобетонных балок. В этом

случае интегральное усилие в бетонной балке в общем случае определяется следующим образом:

$$N_b = \int_0^{z_0} b(z) \sigma_{Sr}(z) dz$$

Если балка прямоугольного сечения, то  $b(z) = b = const$ , однако для более сложных сечений, таких, например, как у ригелей сложной формы, появляется необходимость задавать ширину сечения в виде функции  $b(z)$ . Интегральное усилие в арматуре:

$$N_s = \sum_i A_{si} \sigma_s(z_{si}).$$

Положение нейтральной оси ищется из уравнения (считая отсутствующими внешние силы):

$$\int_0^{z_0} b(z) \sigma_{Sr}(z) dz + \sum_{i=1}^m A_{si} \sigma_s(z_{si}) = 0; \quad z_0 = -\frac{h}{\varepsilon_{sm} - \varepsilon_b} \varepsilon_b.$$

Величина предельного момента:

$$\begin{aligned} M_{ult} &= \int_0^{z_0} b(z) (z - z_0) \sigma_{Sr}(z) dz + \sum_i A_{si} (z_{si} - z_0) \sigma_s(z_{si}) = \\ &= \int_0^{z_0} z b(z) \sigma_{Sr}(z) dz + \sum_i z_{si} A_{si} \sigma_s(z_{si}). \end{aligned}$$

#### Пример расчета по определению предельного момента.

Рассматриваются СЖБ балки со следующими параметрами:

1) Стальная балка: двутавр I30B2 по ГОСТ Р57837–2017, сталь с245 ( $R_y = 235$  МПа); второй вариант — сталь с390 ( $R_y = 370$  МПа);  $H = 300$  мм;  $b = 150$  мм;  $t = 9$  мм;  $s = 6,5$  мм;  $A_s = 46,78$  см<sup>2</sup>;  $I_s = 7209$  см<sup>4</sup>.

Два варианта размеров бетонной плиты:

- $h = 90$  мм;  $a = 1230$  мм;
- $h = 120$  мм;  $a = 1590$  мм.

Варианты классов бетона:

- B15;  $R_b = 8,5$  МПа;  $E_b = 24\,000$  МПа;

- В25;  $R_b = 14,5$  МПа;  $E_b = 30\,000$  МПа;
- В35;  $R_b = 19,5$  МПа;  $E_b = 34\,500$  МПа.

Варианты армирования:

- нет армирования;
- симметричное армирование сетками  $\varnothing 5Bp1-100 \times 100$ ,  $R_{sc} = 435$  МПа;  $a_{sc0} =$

20 мм.

2) Стальная балка: двутавр I40Б1 по ГОСТ Р57837–2017, сталь с245 ( $R_y = 235$  МПа); второй вариант — сталь с390 ( $R_y = 370$  МПа);  $H = 396$  мм;  $b = 199$  мм;  $t = 11$  мм;  $s = 7$  мм;  $A_s = 71,16$  см<sup>2</sup>;  $I_s = 20\,019$  см<sup>4</sup>.

Два варианта размеров бетонной плиты:

- $h = 90$  мм;  $a = 1200$  мм;
- $h = 120$  мм;  $a = 1500$  мм;

Варианты классов бетона:

- В15;  $R_b = 8,5$  МПа;  $E_b = 24\,000$  МПа;
- В25;  $R_b = 14,5$  МПа;  $E_b = 30\,000$  МПа;
- В35;  $R_b = 19,5$  МПа;  $E_b = 34\,500$  МПа.

Варианты армирования:

- нет армирования;
- верхнее армирование  $\varnothing 8 A500C$ , шаг 150,  $R_{sc} = 435$  МПа;  $a_{sc0} = 20$  мм.

3) Стальная балка: сварной двутавр I00Б, сталь с245 ( $R_y = 235$  МПа); второй вариант — сталь с390 ( $R_y = 370$  МПа);  $H = 1006$  мм;  $b = 320$  мм;  $t = 30$  мм;  $s = 18$  мм;  $A_s = 362$  см<sup>2</sup>;  $I_s = 584\,000$  см<sup>4</sup>.

Размер бетонной плиты:

- $h = 150$  мм;  $a = 2000$  мм.

Варианты классов бетона:

- В35;  $R_b = 19,5$  МПа;  $E_b = 34\,500$  МПа;
- В50;  $R_b = 27,5$  МПа;  $E_b = 38\,000$  МПа;
- В60;  $R_b = 33$  МПа;  $E_b = 39\,500$  МПа.

Варианты армирования:

- нет армирования;
- верхнее армирование  $\varnothing 10 A500C$ , шаг 150,  $R_{sc} = 435$  МПа;  $a_{sc0} = 25$  мм.

Расчет по определению предельного момента проводился по формулам (41)–(50) и (51)–(58), и результаты сведены в табл. 3–7. При этом для каждого случая рассматривалось три варианта расчета: по двухлинейной диаграмме стали с предельным нормируемым значением величины  $\varepsilon_{s2}$ , по обобщенной диаграмме стали и по образованию идеального пластического шарнира. В таблицах через  $z_0$ ,  $M_{ult}$  обозначены положение нейтральной оси и величина предельного момента, вычисленные по более точным формулам (41)–(50), т. е. с учетом зависимости Сарджина для бетона, а через  $z_{0,pl}$ ,  $M_{ult,pl}$  — положение нейтральной оси и величина предельного момента, вычисленная по инженерным формулам (51)–(58).

В графе «Вариант расчета» цифрами от 1 и 4 обозначены следующие уравнения равновесия, определяющие положение нейтральной оси:

- 1)  $N_b^I + N_s = 0$  при условии  $\varepsilon_s = \varepsilon_{s2}$ , определяется  $\varepsilon_b$ ;
- 2)  $N_b^{II} + N_s = 0$  при условии  $\varepsilon_s = \varepsilon_{s2}$ , определяется  $\varepsilon_b$ ;
- 3)  $N_b^I + N_s = 0$  при условии  $\varepsilon_b = \varepsilon_{b2}$ , определяется  $\varepsilon_s$ ;
- 4)  $N_b^{II} + N_s = 0$  при условии  $\varepsilon_b = \varepsilon_{b2}$ , определяется  $\varepsilon_s$ .

В соответствии с п. 4.12 СП 159.1325800.2014 [34] величина предельной относительной деформации для конструкционной стали определяется как  $\varepsilon_{s2} = \frac{R_y}{E_s} + 0,006$ . Для стали с245 она составит  $\varepsilon_{s2} = 0,00714$ , для стали с390 —  $\varepsilon_{s2} = 0,0078$ . Основной расчет производился именно по нормируемой величине  $\varepsilon_{s2}$ . Кроме того, в расчете рассматривался также случай, когда относительные деформации в стальной балке учитывались в соответствии с полной обобщенной диаграммой деформирования стали, изменяясь в существенно более широких пределах.

Римские верхние индексы I и II соответствуют интегральным усилиям в бетоне, вычисленным по неполному сечению (от положения нейтральной оси до верха плиты), если нейтральная ось находится в теле бетона, и по полному сечению, если нейтральная ось находится в стальной балке. Таким образом,

условия 1), 2) отвечают достижению предельных деформаций в бетоне, а 3) и 4) — в стальной балке. Серым цветом в таблицах выделены ячейки с предельными значениями относительных деформаций, превышающими величины  $\varepsilon_{\text{кт}} = \frac{14R_y}{E_s} = 0,01597$  (сталь с245) и  $\varepsilon_{\text{кт}} = \frac{17R_y}{E_s} = 0,03053$  (сталь с390; [35]).

В этих случаях деформации в стали покидают площадку текучести С–D и поднимаются по участку D–E, вообще говоря, нелинейному (см. рис. 17). При этом происходит рост напряжений в стальном сечении, что ведет к увеличению предельного момента.

Из приведенных таблиц видно, что во всех расчетных случаях, кроме одного, первыми достигались предельные относительные деформации в стальной балке. Однако для балки I40Б1 (сталь с390) с толщиной полки 9 см из бетона класса В15 в расчете по предельным деформациям в стали максимальная относительная деформация в бетоне превысила величину  $\varepsilon_{b2} = 0,0035$  (см. табл. 6, выделено темно-серым цветом). Из таблиц также видно, что расхождение в определении величины предельного момента по инженерным формулам (41)–(50) в сравнении с формулами (51)–(58) в расчете по  $\varepsilon_{s2}$ , основанными на зависимости Сарджина, может быть ощутимым: для балки I30Б2 максимальная погрешность 11,1 %, для балки I40Б1 максимальная погрешность 9,7 %, для балки I100Б — 6 %.

## Балка 30Б2, сталь с245

Армирование		Армирования нет			Армирование есть		
Класс бетона		B15	B25	B35	B15	B25	B35
Толщина плиты 9 см							
Двухлинейная диаграмма стали	$\varepsilon_b$	-0,00212	-0,00158	-0,00134	-0,00197	-0,00152	-0,00132
	$\varepsilon_{s2}$	0,00714					
	$z_0, м$	0,08915	0,07044	0,06178	0,08421	0,06836	0,06065
	$M_{ult}, кН \cdot м$	197,386	213,852	221,485	202,459	216,118	223,033
	<i>Вариант расчета</i>	1	1	1	1	1	1
Обобщенная диаграмма стали	$\varepsilon_{b2}$	-0,0035					
	$\varepsilon_s$	0,01197	0,01625	0,02187	0,01303	0,01766	0,02271
	$z_0, м$	0,08824	0,06911	0,05380	0,08258	0,06452	0,05201
	$M_{ult}, кН \cdot м$	198,845	222,492	233,483	207,235	226,976	238,245
	<i>Вариант расчета</i>	3	3	3	3	3	3
Расчет по СП (прямоуг. эпюры)	$z_{0,pl}, м$	0,09225	0,06164	0,04583	0,09076	0,05575	0,41450
	$M_{ult,pl}, кН \cdot м$	207,064	229,958	238,646	214,576	235,823	243,680
Толщина плиты 12 см							
Двухлинейная диаграмма стали	$\varepsilon_b$	-0,00192	-0,00137	-0,00114	-0,00183	-0,00135	-0,00115
	$\varepsilon_s$	0,00714					
	$z_0, м$	0,08905	0,06741	0,058	0,08551	0,06672	0,05816
	$M_{ult}, кН \cdot м$	238,125	256,519	262,655	243,102	260,551	266,809
	<i>Вариант расчета</i>	1	1	1	1	1	1
Обобщенная диаграмма стали	$\varepsilon_{b2}$	-0,0035					
	$\varepsilon_s$	0,013	0,0232	0,03117	0,01399	0,02302	0,03071
	$z_0, м$	0,08911	0,05506	0,04241	0,08404	0,05544	0,04297
	$M_{ult}, кН \cdot м$	254,229	266,005	278,737	251,563	271,355	282,321
	<i>Вариант расчета</i>	3	3	3	3	3	3
Расчет по СП (прямоуг. эпюры)	$z_{0,pl}, м$	0,07129	0,04758	0,03546	0,07129	0,04179	0,03108
	$M_{ult,pl}, кН \cdot м$	252,109	270,609	277,330	263,064	279,279	285,170

## Балка 40Б1, сталь с245

Армирование		Армирования нет			Армирование есть		
Класс бетона		B15	B25	B35	B15	B25	B35
Толщина плиты 9 см							
Двухлинейная диаграмма стали	$\epsilon_b$	-0,00226	-0,00164	-0,00141	-0,00203	-0,00156	-0,00136
	$\epsilon_s$	0,00714					
	$z_0, м$	0,11694	0,09059	0,08033	0,10768	0,08696	0,07774
	$M_{ult}, кН \cdot м$	359,080	382,509	394,687	370,011	388,243	399,009
	<i>Вариант расчета</i>	2	1	1	2	1	1
Обобщенная диаграмма стали	$\epsilon_b$	-0,0035					
	$\epsilon_s$	0,01201	0,0161	0,01854	0,01349	0,01721	0,01994
	$z_0, м$	0,10966	0,08677	0,07717	0,10012	0,08214	0,07257
	$M_{ult}, кН \cdot м$	360,481	389,097	408,428	375,539	402,159	420,435
	<i>Вариант расчета</i>	4	3	3	4	3	3
Расчет по СП (прямоуг. эпюры)	$z_{0,pl}, м$	0,0983	0,0914	0,07247	0,0965	0,08740	0,06499
	$M_{ult,pl}, кН \cdot м$	373,837	406,140	426,934	387,372	418,644	437,646
Толщина плиты 12 см							
Двухлинейная диаграмма стали	$\epsilon_b$	-0,00205	-0,00153	-0,00131	-0,00188	-0,00145	-0,00125
	$\epsilon_s$	0,00714					
	$z_0, м$	0,11491	0,09086	0,07979	0,10774	0,087	0,07262
	$M_{ult}, кН \cdot м$	406,458	439,657	455,002	421,229	446,573	459,403
	<i>Вариант расчета</i>	1	1	1	1	1	1
Обобщенная диаграмма стали	$\epsilon_b$	-0,0035					
	$\epsilon_s$	0,01231	0,01692	0,02296	0,01344	0,01978	0,02657
	$z_0, м$	0,11423	0,08843	0,06825	0,10662	0,07759	0,06005
	$M_{ult}, кН \cdot м$	410,204	456,567	478,362	432,88	470,808	493,852
	<i>Вариант расчета</i>	3	3	3	3	3	3
Расчет по СП (прямоуг. эпюры)	$z_{0,pl}, м$	0,1218	0,07800	0,05797	0,11585	0,06791	0,05050
	$M_{ult,pl}, кН \cdot м$	427,414	473,146	490,096	449,770	490,416	505,181

Таблица 5

## Балка 30Б2, сталь с390

Армирование		Армирования нет			Армирование есть		
Класс бетона		B15	B25	B35	B15	B25	B35
Толщина плиты 9 см							
Двухлинейная диаграмма стали	$\epsilon_b$	-0,00321	-0,00217	-0,00182	-0,0028	-0,00206	-0,00176
	$\epsilon_s$	0,0078					
	$z_0, м$	0,11379	0,08479	0,07367	0,10316	0,08143	0,0717
	$M_{ult}, кН \cdot м$	285,63	312,998	326,339	295,097	317,398	329,017
	<i>Вариант расчета</i>	2	1	1	2	1	1
Обобщенная диаграмма стали	$\epsilon_b$	-0,0035					
	$\epsilon_s$	0,00856	0,01273	0,0152	0,00997	0,01355	0,0159
	$z_0, м$	0,11315	0,0841	0,07299	0,10135	0,08007	0,07036
	$M_{ult}, кН \cdot м$	285,83	316,116	334,113	296,525	324,132	340,6
	<i>Вариант расчета</i>	4	3	3	4	3	3
Расчет по СП (прямоуг. эпюры)	$z_{0,pl}, м$	0,09712	0,09113	0,07216	0,09617	0,09019	0,06778
	$M_{ult,pl}, кН \cdot м$	299,161	331,790	352,953	307,213	339,213	359,370
Толщина плиты 12 см							
Двухлинейная диаграмма стали	$\epsilon_b$	-0,00271	-0,00189	-0,00158	-0,00251	-0,00184	-0,00156
	$\epsilon_s$	0,0078					
	$z_0, м$	0,10806	0,08212	0,07072	0,10235	0,07446	0,06997
	$M_{ult}, кН \cdot м$	338,727	373,778	388,94	349,116	379,336	393,526
	<i>Вариант расчета</i>	1	1	1	1	1	1
Обобщенная диаграмма стали	$\epsilon_b$	-0,0035					
	$\epsilon_s$	0,01001	0,01392	0,01913	0,01059	0,01434	0,01926
	$z_0, м$	0,10882	0,08441	0,06495	0,1043	0,08238	0,0646
	$M_{ult}, кН \cdot м$	341,25	397,117	404,271	350,048	404,241	411,347
	<i>Вариант расчета</i>	3	3	3	3	3	3
Расчет по СП (прямоуг. эпюры)	$z_{0,pl}, м$	0,12098	0,07508	0,05583	0,11802	0,06918	0,05145
	$M_{ult,pl}, кН \cdot м$	356,883	402,360	419,019	370,625	412,590	428,242

Таблица 6

## Балка 40Б1, сталь с390

Армирование		Армирования нет			Армирование есть		
Класс бетона		B15	B25	B35	B15	B25	B35
Толщина плиты 9 см							
Двухлинейная рамдигага стали	$\varepsilon_b$	-0,00356	-0,0024	-0,00193	-0,00319	-0,00221	-0,00184
	$\varepsilon_s$	0,0078					
	$z_0, м$	0,15245	0,11444	0,09662	0,14127	0,10728	0,09291
	$M_{ult}, кН \cdot м$	529,019	568,449	589,018	545,928	579,175	595,998
	<i>Вариант расчета</i>	2	2	2	2	2	2
Обобщенная диаграмма стали	$\varepsilon_b$	-0,0035					
	$\varepsilon_s$	0,00761	0,012	0,01496	0,00879	0,01323	0,01586
	$z_0, м$	0,15315	0,10977	0,09215	0,13841	0,10167	0,08786
	$M_{ult}, кН \cdot м$	528,678	570,743	595,262	557,262	584,917	607,68
	<i>Вариант расчета</i>	4	4	4	4	4	3
Расчет по СП (прямоуг. эпюры)	$z_{0,pl}, м$	0,1006	0,0948	0,0903	0,0992	0,0934	0,083804
	$M_{ult,pl}, кН \cdot м$	572,412	615,008	647,102	586,361	631,210	662,528
Толщина плиты 12 см							
Двухлинейная диаграмма стали	$\varepsilon_b$	-0,00301	-0,00209	-0,00175	-0,00268	-0,00197	-0,00168
	$\varepsilon_s$	0,0078					
	$z_0, м$	0,14385	0,10899	0,09476	0,12434	0,09793	0,09135
	$M_{ult}, кН \cdot м$	589,901	644,115	670,585	612,343	658,409	678,751
	<i>Вариант расчета</i>	2	1	1	2	1	1
Обобщенная диаграмма стали	$\varepsilon_b$	-0,0035					
	$\varepsilon_s$	0,00916	0,01317	0,01567	0,01013	0,0169	0,01643
	$z_0, м$	0,14258	0,10832	0,09423	0,13247	0,10379	0,09062
	$M_{ult}, кН \cdot м$	590,526	652,812	689,994	610,598	667,985	704,78
	<i>Вариант расчета</i>	4	3	3	4	3	3
Расчет по СП (прямоуг. эпюры)	$z_{0,pl}, м$	0,1277	0,1204	0,09128	0,1263	0,11270	0,08380

## Балка 100Б, толщина плиты 15 см

Армирование		Армирования нет			Армирование есть		
Класс бетона		B35	B50	B60	B35	B50	B60
Сталь с245							
Двухлинейная диаграмма стали	$\varepsilon_b$	-0,00165	-0,00134	-0,00124	-0,00157	-0,00131	-0,00121
	$\varepsilon_s$	0,00714					
	$z_0, м$	0,21607	0,18289	0,17077	0,20833	0,17868	0,16757
	$M_{ult},$ $кН \cdot м$	4590,47	4701,13	4748,68	4628,12	4724,91	4768,23
	<i>Вариант расчета</i>	2	2	2	2	2	2
Обобщенная диаграмма стали	$\varepsilon_b$	-0,0035					
	$\varepsilon_s$	0,01854	0,02271	0,02462	0,01965	0,02354	0,02543
	$z_0, м$	0,18359	0,15435	0,1439	0,17476	0,14961	0,13985
	$M_{ult},$ $кН \cdot м$	4681,78	4890,73	5006,79	4757,31	4964,43	5078,84
	<i>Вариант расчета</i>	2	2	1	2	1	1
Расчет по СП (прямоуг. эпюры)	$z_{0,р}, м$	0,1677	0,1517	0,1289	0,1677	0,14639	0,12199
	$M_{ult,р},$ $кН \cdot м$	4697,49	4900,85	5010,27	4761,81	4958,48	5062,43
Сталь с390							
Двухлинейная диаграмма стали	$\varepsilon_b$	-0,00273	-0,00201	-0,00177	-0,00256	-0,00193	-0,00171
	$\varepsilon_s$	0,0078					
	$z_0, м$	0,2996	0,23699	0,21298	0,28603	0,22905	0,20767
	$M_{ult},$ $кН \cdot м$	6838,52	7116,05	7222,79	6925,33	7166,36	7259,26
	<i>Вариант расчета</i>	2	2	2	2	2	2
Обобщенная диаграмма стали	$\varepsilon_b$	-0,0035					
	$\varepsilon_s$	0,01027	0,01548	0,01831	0,01131	0,01651	0,01924
	$z_0, м$	0,29391	0,21315	0,1855	0,27321	0,20217	0,17794
	$M_{ult},$ $кН \cdot м$	6833,34	7178,72	7309,3	6943,64	7254,25	7376,57
	<i>Вариант расчета</i>	4	4	4	4	4	4
Расчет по СП (прямоуг. эпюры)	$z_{0,р}, м$	0,1819	0,1717	0,1648	0,1799	0,1698	0,1628
	$M_{ult,р},$ $кН \cdot м$	7053,46	7305,05	7458,96	7131,68	7371,46	7522,21

Величина предельного момента, вычисленная с использованием обобщенной диаграммы деформирования стали, близка к идеальному пластическому моменту вовсе не во всех расчетных случаях, как можно было бы ожидать, исходя из того, что в этих расчетах относительные деформации в стали практически не лимитировались. Максимальное расхождение составляет 9,8 %, что также можно считать существенным (см. табл. 6, балка I40Б1, бетон В35, армированная плита толщиной 9 см). При этом в случае балки I100Б величина предельного момента, вычисленная с использованием обобщенной диаграммы деформирования стали, даже превышает величину идеального пластического момента (см. табл. 6, выделено темно-серым цветом). Это можно объяснить тем обстоятельством, что деформации в стали попадают на возрастающий участок диаграммы деформирования, идущий после участка текучести.

Кроме того, необходимо отметить, что максимальная величина предельного момента в расчете по формулам с использованием функции Сарджина может быть достигнута в случае, когда предельные относительные деформации в бетоне не достигают  $\varepsilon_{b2} = 0,0035$ . Например, в случае балки I30Б2 (сталь с245, бетон В15,  $h = 0,15$  м) максимальный предельный момент составит  $M_{sup} = 198,891$  кН·м при  $\varepsilon_b = 0,0031$ , в то время как при  $\varepsilon_{b2} = 0,0035$  значение предельного момента  $M_{ult} = 198,845$  кН·м. Разница полученных значений невелика, тем не менее этот факт имеет место. Зависимость предельного момента от  $\varepsilon_b$  вблизи  $\varepsilon_{b2} = 0,0035$  для указанной балки приведена на рис. 20:

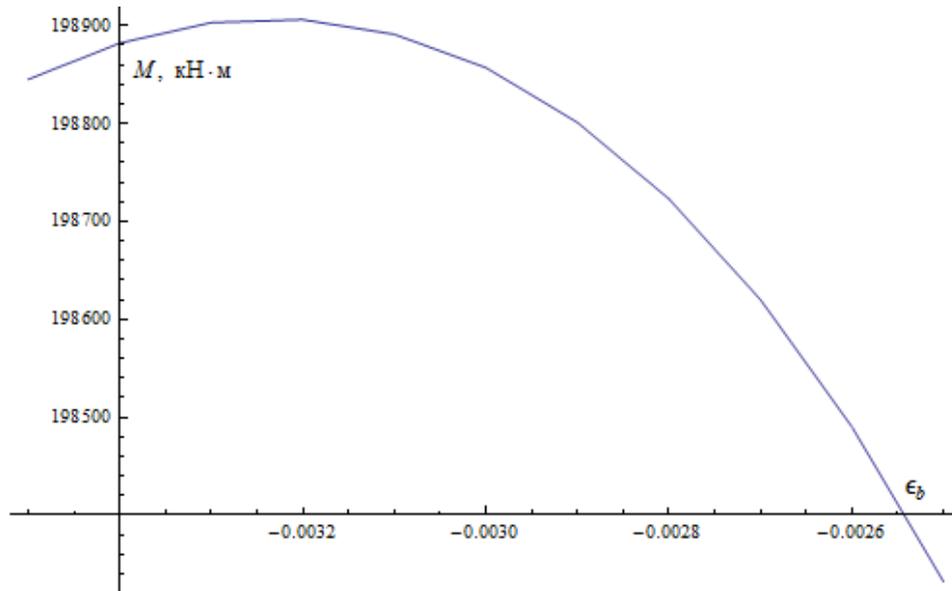


Рис. 20

Расхождение большее 5–6 % уже можно считать значительным, и точность инженерных формул — недостаточной. Кроме того, использование формул (41)–(50) дает понимание, где именно будет достигнуты первыми предельные относительные деформации — в бетонной плите или стальной балке, а также позволяет дать оценку величины этих относительных деформаций. Зная величину относительной деформации в бетоне, можно оценить по формуле Сарджина и напряжения в бетоне. Поскольку с вычислительной точки зрения особой разницы, по каким формулам считать, нет, то использование формул (41)–(50) вполне оправданно.

Необходимо отметить, что в опытах образцы сталежелезобетонных балок со сжатой плитой разрушались при моменте, примерно на 10 % большем теоретического пластического момента (см. [19], с. 190).

Поведение бетона в растянутой зоне — нетривиальный вопрос, поскольку все конструктивные мероприятия по обеспечению совместной работы бетонной плиты и стальной балки — постановка жестких упоров на бетон, стальных болтов и т. п., — предполагают обеспечение работы бетона на сжатие. В предельном состоянии нейтральная ось может подниматься в тело бетона, вследствие чего в массиве бетонной плиты появляется область растянутого бетона, где возможно

трещинообразование (рис. 21). Кроме того, за счет смятия бетона на упорах, на концевых участках балки на контакте «сталь — бетон» происходит скачок в деформациях бетона и стали (проскальзывание) и, как утверждается в работах [13, 44], расщепление нейтральной оси на две: одна в теле бетона, вторая в стальной балке. При этом полученные расчеты показывают, что положение нейтральной оси, вычисленное по идеальному пластическому шарниру, может находиться в стальной балке, а с использованием формулы Сарджина — в теле бетонной плиты, т. е. не все бетонное сечение работает на сжатие.

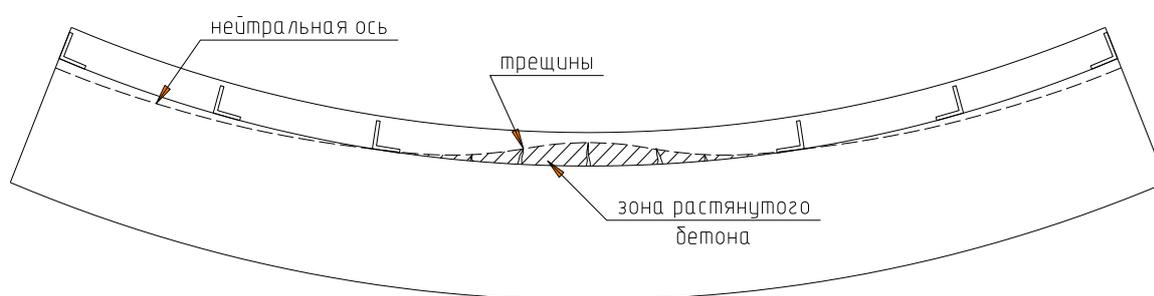


Рис. 21

Исходя из этого, можно сделать вывод о желательности постановки нижнего продольного армирования для обеспечения более полной работы бетона между трещинами. Кроме того, изложенные соображения позволяют утверждать, что формулами по определению предельного момента нужно пользоваться с известной осторожностью. Если в процессе расчета будет получена сравнительно малая величина сжатой зоны бетона по отношению к общей толщине плиты, возможно необходимо переосмыслить конструкцию и изменить параметры СЖБ плиты. Увеличения сжатой зоны бетона можно достичь снижением класса бетона и/или увеличением марки стали. Общее снижение изгибной жесткости при снижении класса бетона по прочности компенсируется более полной его работой на сжатие.

## 2.5. Модельные расчеты СЖБ балок с учетом нелинейности диаграммы " $\varepsilon - \sigma$ " и анализ результатов

Полученные теоретические результаты по нелинейному расчету СЖБ-балок можно проиллюстрировать следующим расчетным примером. Рассматривается СЖБ-балка со следующими параметрами:

1) Стальная балка: двутавр I40Б1 по ГОСТ Р57837-2017, сталь С390;  $R_y=370$  МПа;  $H=396$  мм;  $b=199$  мм;  $t=11$  мм;  $s=7$  мм;  $A_s=71,16$  см<sup>2</sup>;  $I_s=20019$  см<sup>4</sup>.

Бетонная плита:

- $h=120$  мм;  $a=1500$  мм.

Варианты классов бетона:

- В10;  $R_b=6$  МПа;  $E_b=19000$  МПа;
- В25;  $R_b=14.5$  МПа;  $E_b=30000$  МПа;

Армирования нет. Пролет 8 м.

2) Стальная балка: сварной двутавр I100Б, сталь С390;  $R_y=370$  МПа;  $H=1006$  мм;  $b=320$  мм;  $t=30$  мм;  $s=18$  мм;  $A_s=362$  см<sup>2</sup>;  $I_s=584000$  см<sup>4</sup>.

Размер бетонной плиты:

- $h=150$  мм;  $a=2000$  мм.

Варианты классов бетона:

- В35;  $R_b=19.5$  МПа;  $E_b=34500$  МПа;
- В50;  $R_b=27.5$  МПа;  $E_b=38000$  МПа.

Армирования нет. Пролет 35 м.

Зависимости максимальных напряжений в бетонной плите от погонной нагрузки приведены на рис. 22 (балка I 40Б1, бетон класса В10) и рис. 23 (балка I 100, бетон класса В50).

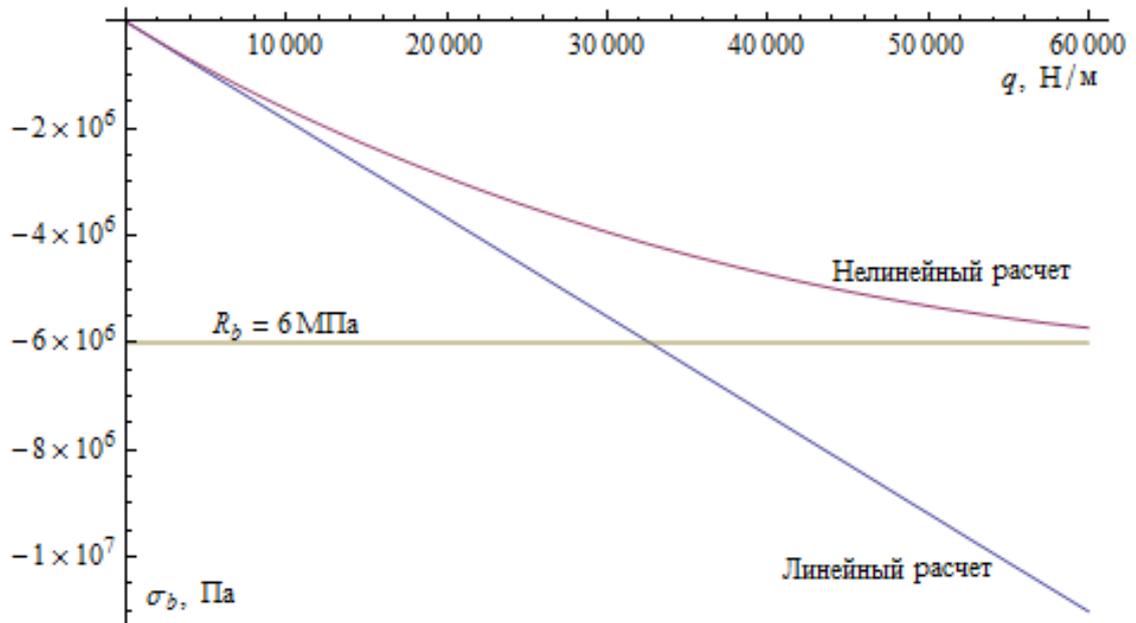


Рис. 22

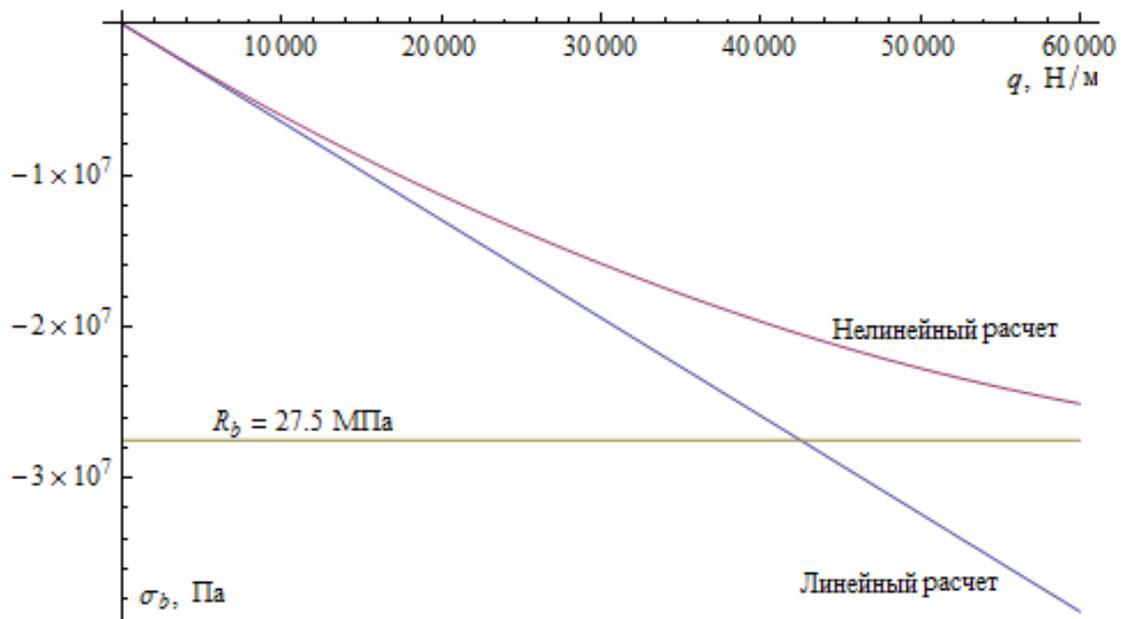


Рис.23

Значения максимальных напряжений в СЖБ-балках сведены в Табл. 8 и 9. Погонные нагрузки приняты заведомо большими.

Таблица 8

**Максимальные напряжения в СЖБ-балке (вариант 1)**

Стальная балка – I 40Б1, бетонное сечение – $b=1.5$ м, $h=0.12$ м								
Бетон В10								
	30 кН/м		40 кН/м		50 кН/м		60 кН/м	
	упр.	нелин.	упр.	нелин.	упр.	нелин.	упр.	нелин.
$\sigma_{b,max}$	-5,51	-3,93	-7,35	-4,72	-9,19	-5,31	-11,02	-5,72
$\sigma_{s,max}$	163,41	171,11	217,88	232,2	272,35	295,98	326,82	363,05
$r_T$	1.05		1.083		1.13		1.196	
Бетон В25								
	30 кН/м		40 кН/м		50 кН/м		60 кН/м	
	упр.	нелин.	упр.	нелин.	упр.	нелин.	упр.	нелин.
$\sigma_{b,max}$	-6,65	-5,68	-8,86	-7,2	-11,08	-8,55	-13,29	-9,75
$\sigma_{s,max}$	157,94	160,77	210,59	215,66	263,23	271,25	315,88	327,57
$r_T$	1.004		1.007		1.011		1.016	

Таблица 9

**Максимальные напряжения в СЖБ-балке (вариант 2)**

Стальная балка – св. двугавр I 100, бетонное сечение – $b=2.0$ м, $h=0.15$ м								
Бетон В35								
	10 кН/м		20 кН/м		30 кН/м		40 кН/м	
	упр.	нелин.	упр.	нелин.	упр.	нелин.	упр.	нелин.
$\sigma_{b,max}$	-6,27	-5,69	-12,54	-10,32	-18,82	-13,97	-25,09	-16,67
$\sigma_{s,max}$	99,1	100,41	198,19	203,93	297,29	311,42	396,39	423,82
$r_T$	1.035		1.082		1.147		1.238	
Бетон В50								
	10 кН/м		20 кН/м		30 кН/м		40 кН/м	
	упр.	нелин.	упр.	нелин.	упр.	нелин.	упр.	нелин.
$\sigma_{b,max}$	-6,47	-5,96	-12,94	-11,03	-19,41	-15,36	-25,88	-19,06
$\sigma_{s,max}$	98,47	99,03	196,95	199,32	295,42	301,19	313,43	321,35
$r_T$	1.013		1.029		1.05		1.076	

Из таблиц и графиков видно, что максимальные напряжения в бетоне в нелинейном расчете существенно ниже, чем напряжения в упругом. Более того, напряжения сжатия в бетоне при учете нелинейной работы не достигают предельных значений  $R_b$ , и первыми «текут» стальные балки. Напряжения в стальной балке несколько больше, чем в упругом расчете, но не существенно. Стальные балки в составе СЖБ-балок сравнительно слабо чувствительных к качеству бетона (классу), если напряжения в них составляют порядка 200 МПа и ниже. Следовательно, если в процессе производства работ были нарушены какие-то требования технологии и бетон не соответствует проектной прочности, то для СЖБ-балок это может не носить фатальный характер, если стальная балка была запроектирована с некоторым запасом порядка  $\approx 20\%$  (с учетом ползучести), а упоры на бетон обеспечивают совместную работу. Значения накопленных сдвигающих усилий на контакте сталь-бетон в упругом и нелинейном расчете в зависимости от класса бетона по прочности могут значительно отличаться только при высоких уровнях нагружений. Кроме того, необходимо учитывать, что в случае длительного действия нагрузки процессы ползучести и релаксации в бетоне приведут к снижению и выравниванию по сечению напряжений в бетоне и росту напряжений в стальной балке.

Проведем сравнение с расчетом СЖБ балки по предельным состояниям.

В таблице 10 приведены значения предельных погонных нагрузок, рассчитанных, исходя из:

– линейного расчета (бетон и сталь работают упруго),  $q_{lim}^{LP}$  – предельные нагрузки, при которых достигаются  $R_b$  и  $R_y$ ;

– нелинейного расчета по упругой работе стальной балки,  $q_{lim}^{НЛР}$  – предельная нагрузка, при которой достигается  $R_y$ ;

– по предельным состояниям первой группы,  $q_{lim}^{Сардж}$  – предельная нагрузка, при которой достигается предельная относительная деформация  $\varepsilon_{b2}$  в верхнем

волокне бетона или  $\varepsilon_{s2}$  – предельная относительная деформация в нижнем волокне стальной балки.

$$\text{– запас по работе в пластической стадии, } r = \frac{q_{lim}^{Сардж} - q_{lim}^{НЛР}}{q_{lim}^{НЛР}} \cdot 100\% .$$

Расчетное сопротивление стали принято пределу текучести  $R_s = R_y = 370 \text{ МПа}$  (сталь С390).

Таблица 10

### Предельные значения погонных нагрузок

СЖБ-балка		$q_{lim}^{ЛР}$ , кН / м	$q_{lim}^{НЛР}$ , кН / м	$q_{lim}^{Сардж}$ , кН / м	$r$ , %
I 40Б1	В10	32,66 (по $R_b$ )	61,01	69,22	13,46
		67,93 (по $R_y$ )			
	В25	65,44 (по $R_b$ )	66,86	81,48	21,87
		70,28 (по $R_y$ )			
I 100Б	В35	31,09 (по $R_b$ )	35,28	44,96	27,44
		37,34 (по $R_y$ )			
	В50	42,51 (по $R_b$ )	36,32	46,9	29,13
		37,57 (по $R_y$ )			

Из полученной таблицы 10 также видно, что упругий расчет может быть взят за основу при определении предельных нагрузок (предварительная оценка) только по  $R_y$ . При этом оценка будет несколько завышена. Кроме того необходимо отметить, что чем выше класс бетона, тем больше будет (в процентах) запас по работе в пластической стадии.

### Выводы по второй главе

- 1) Подходить к использованию полиномиальной аппроксимации диаграммы деформирования бетона нужно достаточно аккуратно и критически;
- 2) Расчет по предельным состояниям с использованием диаграммы Прандтля для стали и бетона может приводить к заметным отклонениям от расчета по обобщенной диаграмме стали и кривой Сарджина;

3) упругий расчет СЖБ-балок может использоваться для оценки сверху напряжений в стальной балке с достаточной для инженерной практики точностью;

4) оценка максимальных напряжений в бетоне на основе упругого расчета корректна только при малых уровнях нагружений;

5) проектирование СЖБ-балок на максимальные нагрузки без учета нелинейной работы бетона некорректно; в частности, это касается упоров на бетон (уголковых, стад-болтов и т.п.).

### 3. УЧЕТ ЛИНЕЙНОЙ ПОЛЗУЧЕСТИ В СЖБ-БАЛКАХ

#### 3.1. Вывод разрешающей системы

Как было отмечено ранее (в гл. 2) линейная работа бетона происходит лишь при нагрузках, вызывающих относительно малые напряжения в бетоне – до величин порядка  $0.2 \div 0.3R_b$ . При продолжительном действии нагрузки уже возникает необходимость учета ползучести. Будем исходить из достаточно общего уравнения (8) вязко-упруго-пластичности бетона связывающего относительные деформации и напряжения в бетоне [41]:

$$f(\sigma_b(z,t)) = E_b(t)\varepsilon_b(z,t) + E_b(t) \int_{t_0}^t K(t,\xi) f(\sigma_b(z,\xi)) d\xi.$$

Принимая функцию напряжений в виде  $f(\sigma_b(z,t)) = \sigma_b(z,t)$ , получим линейное уравнение ползучести Маслова-Арутюняна.

Рассмотрим возможность учета ползучести бетона в СЖБ-балках в простейшей постановке, т.е., рассматривая СЖБ-балку, как классическую комплексную балку при следующих допущениях:

- 1) СЖБ-балка рассматривается, как классическая комплексная балка, т.е. в НДС учитываются только продольные напряжения растяжения-сжатия;
- 2) выполняется гипотеза плоских сечений;
- 3) стальная балка работает упруго;
- 4) СЖБ-балка однопролетная шарнирно-опертая;
- 5) параметры СЖБ-балки подобраны так, что бетон сжат в любом сечении;
- 6) бетон однороден и работает без трещин;
- 7) внешние силы растяжения-сжатия отсутствуют.

На геометрическую связность стального сечения никаких условий не накладываемся, поэтому армирование бетонной плиты легко может быть учтено в составе стального сечения, поскольку дополнительно потребуется определение центра тяжести стального сечения, его площадь и момент инерции с учетом арматуры.

Решение задачи в линейной постановке представляется необходимым для последующего рассмотрения вопросов, касающихся нелинейной ползучести, и сравнения результатов. Вопрос учета нелинейной ползучести будет рассмотрен в следующей главе.

Принимается локальная система координат в центре тяжести стальной балки (рис.24). Направление глобальных осей координат совпадают с локальными.

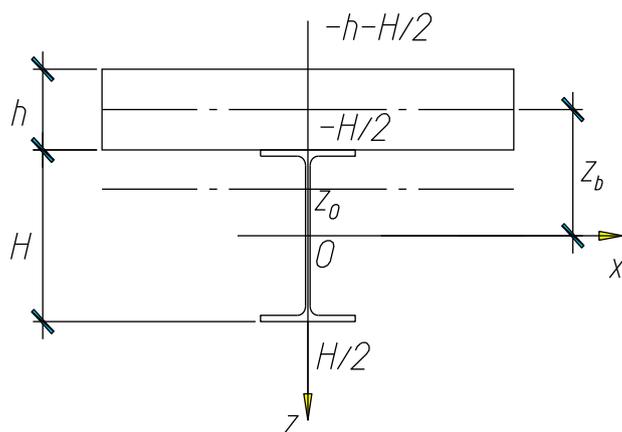


Рис.24

Относительные деформации по условию 2):

$$\varepsilon(z, t) = \varepsilon_s(t) - z\kappa(t), \quad (59)$$

где  $\varepsilon(z, t)$  – относительная деформация в сечении балки на расстоянии  $z$  от начала координат (локальных);

$\varepsilon_s(t)$ ,  $\kappa(t)$  – относительная деформация в центре тяжести стального сечения и кривизна нейтральной оси балки.

Условие 3) позволяет использовать уравнение Маслова-Арутюняна [1]:

$$\varepsilon_b(z, t) = \frac{\sigma_b(z, t)}{E_b(t)} - \int_{t_0}^t \sigma_b(z, \xi) \frac{\partial}{\partial \xi} \left[ C(t, \xi) + \frac{1}{E_b(\xi)} \right] d\xi \quad (60)$$

Естественные условия, налагаемые на функции  $E_b(t)$  и  $C(t, \xi)$ :

$$E_b(t) \xrightarrow{t \rightarrow \infty} E_{b,\infty}; \quad C(t, t) = 0; \quad C(t, \xi) \xrightarrow{t \rightarrow \infty} C_\infty(\xi); \quad \frac{\partial C(t, \xi)}{\partial t} \xrightarrow{t \rightarrow \infty} 0.$$

В случае теории упругой наследственности  $C_\infty(\xi) = C_\infty = const, \forall \xi$ .

Напряжения в стальной балке по условию 3):

$$\sigma_s(z, t) = E_s \varepsilon(z, t) = E_s (\varepsilon_s(t) - z\kappa(t)).$$

В дальнейшем при выводе формул будут использованы следующие интегралы:

$$\int_A dA = A; \int_A z dA = z_0 A; \int_A z^2 dA = I^0 + z_0^2 A,$$

где через  $A$  обозначена, как область интегрирования, так и ее площадь,  $I^0$  – момент инерции сечения,  $z_0$  – координата центра тяжести сечения.

Условие 7) отсутствия внешних сил дает:

$$N_s(t) + N_b(t) = 0, \quad (61)$$

где  $N_s(t), N_b(t)$  – интегральные внутренние усилия растяжения-сжатия в стальной балке и бетонной плите:

$$N_s(t) = \int_{A_s} \sigma_s(z, t) dA_s, \quad (62)$$

$$N_b(t) = \int_{A_b} \sigma_b(z, t) dA_b, \quad (63)$$

Проведем в (62) интегрирование. Для  $N_s(t)$  имеем:

$$N_s(t) = \int_{A_s} \sigma_s(z, t) dA_s = \int_{A_s} E_s (\varepsilon_s(t) - z\kappa(t)) dA_s = E_s \varepsilon_s(t) \int_{A_s} dA_s - E_s \kappa(t) \int_{A_s} z dA_s.$$

Поскольку начало координат, в которых производится интегрирование по сечению, находится в центре тяжести стального сечения, то  $\int_{A_s} z dA_s = 0$ . Поэтому:

$$N_s(t) = E_s A_s \varepsilon_s(t). \quad (64)$$

Чтобы произвести интегрирование в (63) выразим из (60)  $\sigma_b(z, t)$ , подставив в него выражение (59) для  $\varepsilon(z, t)$ :

$$\sigma_b(z, t) = E_b(t) (\varepsilon_s(t) - z\kappa(t)) + E_b(t) \int_{t_0}^t K(t, \xi) \sigma_b(z, \xi) d\xi, \quad (65)$$

$$\text{где } K(t, \xi) = \frac{\partial}{\partial \xi} \left[ C(t, \xi) + \frac{1}{E_b(\xi)} \right].$$

С учетом (59) и (63) интегральное внутреннее усилие в бетонной плите равно:

$$\begin{aligned}
N_b(t) &= \int_{A_b} \sigma_b(z,t) dA_b = \int_{A_b} \left( E_b(t)(\varepsilon_s(t) - z\kappa(t)) + E_b(t) \int_{t_0}^t K(t,\xi) \sigma_b(z,\xi) d\xi \right) dA_b = \\
&= E_b(t) \varepsilon_s(t) \int_{A_b} dA_b - E_b(t) \kappa(t) \int_{A_b} z dA_b + E_b(t) \int_{t_0}^t K(t,\xi) \left( \int_{A_b} \sigma_b(z,\xi) dA_b \right) d\xi = \\
&= E_b(t) A_b (\varepsilon_s(t) - z_b \kappa(t)) + E_b(t) \int_{t_0}^t K(t,\xi) N_b(\xi) d\xi.
\end{aligned}$$

Поскольку  $N_b(t) = -N_s(t)$ , то последнее выражение может быть преобразовано следующим образом:

$$N_s(t) + E_b(t) A_b (\varepsilon_s(t) - z_b \kappa(t)) - E_b(t) \int_{t_0}^t K(t,\xi) N_s(\xi) d\xi = 0.$$

Введем обозначение:

$$m(t) = \frac{E_b(t) A_b}{E_s A_s}. \quad (66)$$

Тогда уравнение равновесия (61) с учетом (64) принимает вид:

$$N_s(t) - \frac{m(t)}{1+m(t)} E_s A_s z_b \kappa(t) - \frac{E_b(t)}{1+m(t)} \int_{t_0}^t K(t,\xi) N_s(\xi) d\xi = 0. \quad (67)$$

В (67) входит неизвестная величина – кривизна  $\kappa(t)$ . Для получения второго разрешающего уравнения определим внутренний момент в сечении. По определению он равен:

$$M_{int} = \int_{A_s} \sigma_s(z,t) z dA_s + \int_{A_b} \sigma_b(z,t) z dA_b = M_s(t) + M_b(t),$$

где через  $M_s(t)$  и  $M_b(t)$  для удобства обозначены соответствующие интегралы.

В случае однопролетной шарнирно опертой балки внутренний момент в сечении равен балочному моменту  $M_{beam}$ , который при известном нагружении может быть легко найден. В принятых координатах его нужно взять со знаком минус:

$$M_{int} = M_s(t) + M_b(t) = -M_{beam} \quad (68)$$

Проведем необходимые интегрирования. Для  $M_s(t)$  получаем:

$$\begin{aligned}
 M_s(t) &= \int_{A_s} \sigma_s(z,t)z \, dA_s = \int_{A_s} E_s (\varepsilon_s(t) - z\kappa(t))z \, dA_s = \\
 &= E_s \varepsilon_s(t) \int_{A_s} z \, dA_s - E_s \kappa(t) \int_{A_s} z^2 dA_s = \\
 &= -E_s I_s^0 \kappa(t).
 \end{aligned} \tag{69}$$

где  $I_s^0$  – момент инерции стального сечения.

Перейдем к интегрированию в  $M_b(t)$ :

$$\begin{aligned}
 M_b(t) &= \int_{A_b} \sigma_b(z,t)z \, dA_b = \\
 &= \int_{A_b} \left( E_b(t) (\varepsilon_s(t) - z\kappa(t))z + E_b(t) \int_{t_0}^t K(t,\xi) \sigma_b(z,\xi)z \, d\xi \right) dA_b = \\
 &= E_b(t) \varepsilon_s(t) \int_{A_b} z \, dA_b - E_b(t) \kappa(t) \int_{A_b} z^2 dA_b + E_b(t) \int_{t_0}^t K(t,\xi) \left( \int_{A_b} z \sigma_b(z,\xi) dA_b \right) d\xi = \\
 &= E_b(t) A_b z_b \varepsilon_s(t) - E_b(t) \kappa(t) (I_b^0 + A_b z_b^2) + E_b(t) \int_{t_0}^t K(t,\xi) M_b(\xi) d\xi.
 \end{aligned}$$

Величина  $M_b(t)$  из условия (68) равна:

$$M_b(t) = -M_{beam} - M_s(t) = -M_{beam} + E_s I_s^0 \kappa(t). \tag{70}$$

Подстановка под интеграл выражения (70) для  $M_b(t)$  дает:

$$\begin{aligned}
 M_b(t) &= \\
 &= E_b(t) A_b z_b \varepsilon_s(t) - E_b(t) \kappa(t) (I_b^0 + A_b z_b^2) - E_b(t) \int_{t_0}^t K(t,\xi) (M_{beam} + E_s I_s^0 \kappa(\xi)) d\xi = \\
 &= m(t) N_s z_b - E_b(t) \kappa(t) (I_b^0 + A_b z_b^2) - M_{beam} E_b(t) \Phi(t, t_0) - E_b(t) E_s I_s^0 \int_{t_0}^t K(t,\xi) \kappa(\xi) d\xi,
 \end{aligned}$$

где обозначено

$$\Phi(t, t_0) = \int_{t_0}^t K(t, \xi) d\xi = -C(t, t_0) + \frac{1}{E_b(t)} - \frac{1}{E_b(t_0)}. \tag{71}$$

Подстановка вместо  $M_b(t)$  выражения (70) позволяет получить второе интегральное уравнение относительно  $N_s$  и  $\kappa(t)$ :

$$\begin{aligned} M_b(t) &= -M_{beam} + E_s I_s^0 \kappa(t) = \\ &= m(t) N_s z_b - E_b(t) \kappa(t) (I_b^0 + A_b z_b^2) - M_{beam} E_b(t) \Phi(t, t_0) - E_b(t) E_s I_s^0 \int_{t_0}^t K(t, \xi) \kappa(\xi) d\xi \Leftrightarrow \\ m(t) N_s z_b - (E_s I_s^0 + E_b(t) (I_b^0 + A_b z_b^2)) \kappa(t) + M_{beam} (1 - E_b(t) \Phi(t, t_0)) - \\ - E_b(t) E_s I_s^0 \int_{t_0}^t K(t, \xi) \kappa(\xi) d\xi &= 0. \end{aligned}$$

После преобразований получим:

$$\kappa(t) - \frac{m(t) z_b}{(EI)_\Sigma} N_s(t) - \frac{E_s I_s^0}{(EI)_\Sigma} E_b(t) \int_{t_0}^t K(t, \xi) \kappa(\xi) d\xi = -M_{beam} \frac{1 - E_b(t) \Phi(t, t_0)}{(EI)_\Sigma}. \quad (72)$$

Тут обозначено:

$$(EI)_\Sigma = E_s I_s^0 + E_b(t) (I_b^0 + A_b z_b^2), \quad (73)$$

– сумма изгибных жесткостей стальной балки и бетонной плиты относительно центра тяжести стального сечения.

Таким образом, получено второе линейное интегральное уравнение относительно  $\kappa(t)$  и  $N_s(t)$ . Для однопролетной шарнирно опертой балки уравнение (67) и (72) образуют замкнутую систему интегральных уравнений Вольтерра 2-го рода для определения  $\kappa(t)$  и  $N_s(t)$ :

$$\begin{cases} N_s(t) - \frac{m(t)}{1+m(t)} E_s A_s z_b \kappa(t) - \frac{E_b(t)}{1+m(t)} \int_{t_0}^t K(t, \xi) N_s(\xi) d\xi = 0; \\ \kappa(t) - \frac{m(t) z_b}{(EI)_\Sigma} N_s(t) - \frac{E_s I_s^0}{(EI)_\Sigma} E_b(t) \int_{t_0}^t K(t, \xi) \kappa(\xi) d\xi = -M_{beam} \frac{1 - E_b(t) \Phi(t, t_0)}{(EI)_\Sigma}. \end{cases} \quad (74)$$

Зная решение системы (74), можно найти напряжения в бетоне и стали:

$$\sigma_s(z, t) = E_s (\varepsilon_s(t) - z \kappa(t)) = \frac{N_s(t)}{A_s} - E_s \kappa(t) z; \quad (75)$$

$$\sigma_b(z, t) = E_b(t)(\varepsilon_s(t) - z\kappa(t)) = \frac{m(t)N_s(t)}{A_b} - E_b(t)\kappa(t)z. \quad (76)$$

### 3.2. Асимптотика в случае теории упругой наследственности

Если бетон подчиняется теории наследственности, то для системы (74) можно сразу указать стационарное (асимптотическое) решение, соответствующее случаю  $t \rightarrow \infty$  и не зависящее от  $t_0$ . В монографии В.Д. Харлаба [44] приведен без строгого обоснования возможный способ осуществления предельного перехода (автор ссылается на свои работы 60-х годов без упоминания конкретно тех, где приведено обоснование). Не претендуя на математическую полноту и строгость, ниже приведено доказательство утверждения В.Д.Харлаба.

Требуется доказать следующую **Теорему Харлаба**:

Пусть функции  $\Phi(t, \xi)$  и  $\varphi(t)$  определены на множествах  $D_\Phi = [0; +\infty) \times [0; +\infty)$  и  $D_\varphi = [0; +\infty)$  соответственно и ограничены на этих множествах. Кроме того, функции  $\Phi(t, \xi)$  и  $\varphi(t)$  удовлетворяют условиям:

$$1) \quad \Phi(t, \xi) \in C^1(D_\Phi);$$

$$\Phi(t, \xi) \geq 0, \quad \forall t > \xi \in D_\Phi; \quad \frac{\partial}{\partial t} \Phi(t, \xi) < 0, \quad \forall t > 0;$$

$$\Phi(t, \xi) \xrightarrow{t \rightarrow \infty} \Phi_\infty < +\infty, \quad \forall \xi;$$

$$2) \quad \varphi(t) \in C(D_\varphi);$$

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \varphi(t) = \varphi_\infty, \quad |\varphi_\infty| = \text{const} < +\infty.$$

Тогда выполняется:

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \int_{t_0}^t \frac{\partial \Phi(t, \xi)}{\partial \xi} \varphi(\xi) d\xi = - \Phi_\infty \varphi_\infty.$$

Доказательство.

Для любого фиксированного  $\xi$  из 1) следует:

$$\Phi(t, \xi) \underset{t \rightarrow \infty}{=} \Phi_\infty + o(1).$$

Следовательно, если  $t$  достаточно большое, то можно записать:

$$\frac{\partial \Phi(t, \xi)}{\partial \xi} = \frac{\partial}{\partial \xi} [\Phi_\infty + o(1)] = 0 \Rightarrow \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{\partial \Phi(t, \xi)}{\partial \xi} = 0.$$

Представим исходный интеграл в виде суммы:

$$\int_{t_0}^t \frac{\partial \Phi(t, \xi)}{\partial \xi} \varphi(\xi) d\xi = \int_{t_0}^{\tau} \frac{\partial \Phi(t, \xi)}{\partial \xi} \varphi(\xi) d\xi + \int_{\tau}^t \frac{\partial \Phi(t, \xi)}{\partial \xi} \varphi(\xi) d\xi = I_1(t, \tau) + I_2(t, \tau).$$

Обозначим

$$M_\varphi = \sup_{D_\varphi} |\varphi(t)|$$

Возьмем произвольное  $\varepsilon > 0$ . Для него можно указать такие  $t_1$  и  $t_2$ , что будет выполняться:

$$\left| \frac{\partial \Phi(t, \xi)}{\partial \xi} \right| < \varepsilon \text{ при } t > t_1$$

$$|\varphi(t) - \varphi_\infty| < \varepsilon \text{ при } t > t_2.$$

Положим  $\tau = \max(t_1, t_2)$ .

Очевидно, что при  $t > \tau$  оба неравенства выполняются одновременно.

Теперь можно записать:

$$|I_1(t, \tau)| = \left| \int_{t_0}^{\tau} \frac{\partial \Phi(t, \xi)}{\partial \xi} \varphi(\xi) d\xi \right| < \varepsilon \left| \int_{t_0}^{\tau} \varphi(\xi) d\xi \right| < \varepsilon M_\varphi (\tau - t_0).$$

В силу произвольности  $\varepsilon$ , и поскольку  $M_\varphi, \tau, t_0$  конечны, имеем:

$$|I_1(t - \tau)| \xrightarrow{t \rightarrow \infty} 0.$$

Если  $\frac{\partial \Phi(t, \xi)}{\partial \xi} \varphi(\xi) > 0$ , то для  $I_2(t, \tau)$  можно выписать следующие неравенства:

$$I_2(t, \tau) = \int_{\tau}^t \frac{\partial \Phi(t, \xi)}{\partial \xi} \varphi(\xi) d\xi < (\varphi_\infty + \varepsilon) \int_{\tau}^t \frac{\partial \Phi(t, \xi)}{\partial \xi} d\xi = (\varphi_\infty + \varepsilon) \Phi(t, \xi) \Big|_{\tau}^t = - (\varphi_\infty + \varepsilon) \Phi(t, \tau);$$

$$I_2(t, \tau) = \int_{\tau}^t \frac{\partial \Phi(t, \xi)}{\partial \xi} \varphi(\xi) d\xi > (\varphi_\infty - \varepsilon) \int_{\tau}^t \frac{\partial \Phi(t, \xi)}{\partial \xi} d\xi = (\varphi_\infty - \varepsilon) \Phi(t, \xi) \Big|_{\tau}^t = - (\varphi_\infty - \varepsilon) \Phi(t, \tau).$$

Т.е. получается двойное неравенство:

$$- (\varphi_\infty - \varepsilon) \Phi(t, \tau) < I_2(t, \tau) < - (\varphi_\infty + \varepsilon) \Phi(t, \tau).$$

Переходя к пределу, получим:

$$-(\varphi_\infty - \varepsilon) \Phi_\infty < \lim_{t \rightarrow \infty} I_2(t, \tau) < -(\varphi_\infty + \varepsilon) \Phi_\infty.$$

Если  $\frac{\partial \Phi(t, \xi)}{\partial \xi} \varphi(\xi) < 0$ , то аналогичным образом получается двойное

неравенство:

$$\begin{aligned} &-(\varphi_\infty + \varepsilon) \Phi(t, \tau) < I_2(t, \tau) < -(\varphi_\infty - \varepsilon) \Phi(t, \tau) \Rightarrow \\ &\Rightarrow -(\varphi_\infty + \varepsilon) \Phi_\infty < \lim_{t \rightarrow \infty} I_2(t, \tau) < -(\varphi_\infty - \varepsilon) \Phi_\infty. \end{aligned}$$

Поскольку  $\varepsilon$  произвольное, то:

$$\lim_{t \rightarrow \infty} I_2(t, \tau) = -\Phi_\infty \varphi_\infty.$$

Таким образом, выполняется:

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \int_{t_0}^t \frac{\partial \Phi(t, \xi)}{\partial \xi} \varphi(\xi) d\xi = -\Phi_\infty \varphi_\infty.$$

Теорема доказана.

Покажем, что модуль деформации бетона  $E_b(t)$  для того, чтобы удовлетворять требованиям теории наследственности, должен быть постоянным.

Интегральное ядро в уравнении Маслова-Арутюняна (60) после введения в него множителя  $E_b(t)$  имеет вид:

$$\begin{aligned} \varepsilon_b(z, t) &= \frac{\sigma_b(z, t)}{E_b(t)} - \int_{t_0}^t \sigma_b(z, \xi) \frac{\partial}{\partial \xi} \left[ C(t, \xi) + \frac{1}{E_b(\xi)} \right] d\xi \Leftrightarrow \\ E_b(t) \varepsilon_b(z, t) &= \sigma_b(z, t) - \int_{t_0}^t \sigma_b(z, \xi) \frac{\partial}{\partial \xi} \left[ E_b(t) C(t, \xi) + \frac{E_b(t)}{E_b(\xi)} \right] d\xi \Rightarrow \\ K(t, \xi) &= \frac{\partial}{\partial \xi} \left( E_b(t) C(t, \xi) + \frac{E_b(t)}{E_b(\xi)} \right). \end{aligned}$$

Функциональное требование теории наследственности к ядру следующее:

$$K(t, \xi) = F(t - \xi), \text{ — оно есть функция от разности аргументов.}$$

В случае теории наследственности должно выполняться:

$$\frac{\partial}{\partial \xi} \left( E_b(t) C(t, \xi) + \frac{E_b(t)}{E_b(\xi)} \right) = F(t - \xi).$$

Ясно, что функция под знаком дифференцирования также должна зависеть от разности аргументов:

$$E_b(t)C(t, \xi) + \frac{E_b(t)}{E_b(\xi)} = G(t - \xi).$$

Для меры ползучести в теории наследственности выполнено:

$$C(t, \xi) = C(t - \xi).$$

Следовательно, можно записать:

$$E_b(t)C(t - \xi) + \frac{E_b(t)}{E_b(\xi)} = G(t - \xi).$$

Положим  $\xi = t$ . Тогда:

$$E_b(t)C(0) + 1 = G(0) \Rightarrow E_b(t) = \frac{G(0) - 1}{C(0)} = \text{const}, \quad \forall t.$$

Тем самым, получено:  $E_b(t) = E_b = \text{const}$ .

Условие  $E_b(t) = E_b$  отвечает «старому» бетону, то есть можно считать, что конструкция имеет месячный и более срок. Таким образом в рамках теории наследственности будем иметь:

$$E_b(t) = E_b;$$

$$m(t) = m = \frac{E_b A_b}{E_s A_s};$$

$$\frac{\partial}{\partial \xi} \left[ C(t, \xi) + \frac{1}{E_b(\xi)} \right] = \frac{\partial}{\partial \xi} C(t, \xi).$$

Теперь можно воспользоваться Теоремой Харлаба для определения стационарного решения системы (74). Интегральное уравнение Вольтерра 2-го рода всегда имеет решение и оно единственное. Из этого можно заключить, что

$$\kappa(t) \xrightarrow{t \rightarrow \infty} \kappa^* = \text{const};$$

$$N_s(t) \xrightarrow{t \rightarrow \infty} N_s^* = \text{const}.$$

Вообще говоря, последнее утверждение требует математического обоснования, однако оно вытекает из физических соображений.

Переходя в системе (74) к пределу по  $t \rightarrow \infty$  получим:

$$\begin{cases} N_s^* - \frac{m}{1+m} E_s A_s z_b \kappa^* - \frac{E_b}{1+m} (-C_\infty N_s^*) = 0. \\ \kappa^* - \frac{m z_b}{(EI)_\Sigma} N_s^* - \frac{E_s I_s^0}{(EI)_\Sigma} E_b (-C_\infty \kappa^*) = -M_{beam} \frac{(1+E_b C_\infty)}{(EI)_\Sigma}. \end{cases}$$

Обозначим:

$$\varphi = E_b C_\infty. \quad (77)$$

Из первого уравнения получаем:

$$\left(1 + \frac{\varphi}{1+m}\right) N_s^* - \frac{m}{1+m} E_s A_s z_b \kappa^* = 0 \Rightarrow N_s^* = \frac{E_b A_b z_b}{1+\varphi+m} \kappa^*. \quad (78)$$

Подстановка во второе уравнение системы дает:

$$\begin{aligned} \left(1 + \frac{\varphi E_s I_s^0}{(EI)_\Sigma}\right) \kappa^* - \frac{m z_b}{(EI)_\Sigma} N_s^* &= -M_{beam} \frac{(1+\varphi)}{(EI)_\Sigma} \Rightarrow \\ \left(1 + \frac{\varphi E_s I_s^0}{(EI)_\Sigma} - \frac{m E_b A_b z_b^2}{(1+\varphi+m)(EI)_\Sigma}\right) \kappa^* &= -M_{beam} \frac{(1+\varphi)}{(EI)_\Sigma}. \end{aligned}$$

Выражение в скобках приводится к следующему виду:

$$\begin{aligned} 1 + \frac{\varphi E_s I_s^0}{(EI)_\Sigma} - \frac{m E_b A_b z_b^2}{(1+\varphi+m)(EI)_\Sigma} &= \frac{1}{(EI)_\Sigma} \left( E_s I_s^0 + E_b I_b^0 + E_b A_b z_b^2 + \varphi E_s I_s^0 - \frac{m}{(1+\varphi+m)} E_b A_b z_b^2 \right) = \\ &= \frac{1}{(EI)_\Sigma} \left( (1+\varphi) E_s I_s^0 + E_b I_b^0 + \frac{1+\varphi}{(1+\varphi+m)} E_b A_b z_b^2 \right) = \\ &= \frac{(1+\varphi)}{(EI)_\Sigma} \left( E_s I_s^0 + E_b^* I_b^0 + \frac{1}{(1+m^*)} E_b^* A_b z_b^2 \right) = \frac{(1+\varphi)}{(EI)_\Sigma} (EI)_{sb}^*. \end{aligned}$$

Тут обозначено:

$$E_b^* = \frac{E_b}{1+\varphi}; \quad (79)$$

$$m^* = \frac{m}{1+\varphi}, \quad (80)$$

$$(EI)_{sb}^* = E_s I_s^0 + E_b^* I_b^0 + \frac{E_b^* A_b z_b^2}{1+m^*}. \quad (81)$$

Следовательно, из второго уравнения системы получаем асимптотическое значение кривизны:

$$\frac{(1+\varphi)}{(EI)_{\Sigma}}(EI)_{sb}^* \kappa^* = -M_{beam} \frac{(1+\varphi)}{(EI)_{\Sigma}} \Rightarrow$$

$$\kappa^* = -\frac{M_{beam}}{(EI)_{sb}^*}. \quad (82)$$

С учетом (82) получается выражение для асимптотического значения интегральной продольной силы в сечении стальной балки  $N_s^*$  (при  $t \rightarrow \infty$ ):

$$N_s^* = \frac{m}{1+m+\varphi} z_b E_s A_s \kappa^*. \quad (83)$$

Выражение для асимптотической изгибной жесткости  $(EI)_{sb}^*$  по своей структуре полностью аналогично упругой жесткости СЖБ-балки с заменой модуля деформации бетона  $E_b$  на  $\frac{E_b}{1+E_b C_{\infty}} = \frac{E_b}{1+\varphi}$ :

$$(EI)_{sb} = E_s I_s^0 + E_b I_b^0 + \frac{E_b A_b z_b^2}{1+m}.$$

В принятой системе координат положение нейтральной оси может быть записано в виде:

$$z_0^* = \frac{m^*}{1+m^*} z_b = \frac{m}{1+m+\varphi} z_b. \quad (84)$$

Выражение для нейтральной оси в упругой задаче без учета ползучести в принятых локальных координатах в этой же системе координат:

$$\bar{z}_0 = \frac{m}{1+m} z_b.$$

Их отношение равно:

$$\frac{\bar{z}_0}{z_0^*} = 1 + \frac{\varphi}{1+m}.$$

Нормируемая величина  $\varphi = E_b C_{\infty}$  для тяжелых бетонов составляет  $\approx 2 \div 4$ , следовательно, если  $m$  невелико, то положение нейтральной оси существенно меняется.

Выпишем теперь финальные (асимптотические) значения напряжений в крайних волокнах СЖБ-балки и величину прогиба. Они будут равны:

$$\begin{aligned}
\sigma_s^*(z) &= \lim_{t \rightarrow \infty} \sigma_s(z, t) = \lim_{t \rightarrow \infty} E_s (\varepsilon_s(t) - z\kappa(t)) = \frac{N_s^*}{A_s} - E_s \kappa^* z = \\
&= \frac{1}{A_s} \frac{m}{1+m+\varphi} E_s A_s z_b \kappa^* - E_s \kappa^* z = E_s (z_0^* - z) \kappa^*; \\
\varepsilon_s^* &= \varepsilon^*(0) = \frac{\sigma_s^*(0)}{E_s} = z_0^* \kappa^*; \\
\sigma_b(z, t) &= E_b (\varepsilon_s(t) - z\kappa(t)) + E_b \int_{t_0}^t \frac{\partial C(t, \xi)}{\partial \xi} \sigma_b(z, \xi) d\xi \Rightarrow \\
\sigma_b^*(z) &= E_b (\varepsilon_s^* - z\kappa^*) + E_b (-C_\infty \sigma_b^*(z)) = E_b (\varepsilon_s^* - z\kappa^*) - \varphi \sigma_b^*(z) \Rightarrow \\
\sigma_b^*(z) &= \frac{E_b}{1+\varphi} (\varepsilon_s^* - z\kappa^*) = \frac{E_b}{1+\varphi} (z_0^* \kappa^* - z\kappa^*) = \frac{E_b}{1+\varphi} (z_0^* - z) \kappa^*; \\
\begin{cases} \sigma_s^*(z) = E_s (z_0^* - z) \kappa^*; \\ \sigma_b^*(z) = E_b (z_0^* - z) \kappa^*. \end{cases} & \tag{85}
\end{aligned}$$

Выпишем теперь финальные значения напряжений в крайних волокнах СЖБ-балки и величину прогиба.

Напряжения в крайних волокнах СЖБ балки равны:

$$\sigma_s^{\max} = E_s \left( z_0^* - \frac{H}{2} \right) \kappa^* = -E_s \left( z_0^* - \frac{H}{2} \right) \cdot \frac{M_{beam}}{(EI)_{sb}^*}; \tag{86}$$

$$\sigma_b^{\max} = E_b \left( z_0^* + h + \frac{H}{2} \right) \kappa^* = -E_b \left( z_0^* + h + \frac{H}{2} \right) \cdot \frac{M_{beam}}{(EI)_{sb}^*}. \tag{87}$$

Требования теории наследственности являются весьма жесткими. Из выражения (85) для финальных напряжений видно, что напряжения  $\sigma_b^*(z)$  линейны по высоте сечения. Поскольку предельный переход производился по  $t$ , то это означает, что в начальный момент времени напряжения в бетоне были также линейны по высоте сечения. Следовательно, уравнения линейной ползучести в рамках теории наследственности применимы только к бетону, работающему упруго, т.е. при сравнительно малых уровнях нагружения. Таким образом, асимптотические напряжения в СЖБ балке, подчиняющейся теории упругой наследственности, определяются, как для обычных упругих балок. Поскольку асимптотическое значение изгибной жесткости постоянно по длине

СЖБ балки, то и прогибы в асимптотике могут быть определены по формулам для упругих балок с заменой изгибной жесткости  $(EI)_{sb}$  на  $(EI)_{sb}^*$  по формуле (81).

Если пренебречь изгибной жесткостью бетонной плиты, то вместо системы уравнений получается одно уравнение относительно  $N_s$ . В работе [45] В.Д. Харлабом и К.В. Козловым был предложен именно такой подход. Нетрудно получить этот же результат, исходя из предлагаемой выше методики вывода.

Принимается, что

$$\sigma_b(t) = \frac{N_b(t)}{A_b}.$$

Кроме того, в обозначениях [45] и принятой системе координат имеем

$$z_b(t) = -\eta,$$

где  $\eta$  – расстояние между центрами тяжести сечения стальной балки и бетонного сечения.

Внутренний момент в бетонном сечении равен:

$$M_b(t) = - \int_{A_b} \sigma_b(z, t) z \, dA_b = - \int_{A_b} \frac{N_b(t)}{A_b} z \, dA_b = \frac{N_s(t)}{A_b} \int_{A_b} z \, dA_b = N_s(t) z_b = -N_s(t) \eta.$$

$$\Rightarrow M_s(t) + M_b(t) = E_s I_s^0 \kappa(t) - N_s(t) \eta = -M_{beam}.$$

Откуда:

$$\kappa(t) = - \frac{M_{beam} - N_s(t) \eta}{E_s I_s^0}.$$

Подстановка в (66) дает:

$$N_s(t) - \frac{m(t)}{1+m(t)} E_s A_s z_b \left( - \frac{M_{beam} - N_s(t) \eta}{E_s I_s^0} \right) - \frac{E_b(t)}{1+m(t)} \int_{t_0}^t K(t, \xi) N_s(\xi) d\xi = 0.$$

После преобразований получается:

$$N_s(t) - \frac{1}{m_0(t)} \frac{A_s \eta}{I_s^0} M_{beam} - \frac{E_b(t)}{m(t) m_0(t)} \int_{t_0}^t K(t, \xi) N_s(\xi) d\xi = 0,$$

где

$$m_0(t) = 1 + \frac{1}{m(t)} + \frac{A_s z_b^2}{I_s^0} = 1 + \frac{E_s A_s}{E_b(t) A_b} + \frac{A_s z_b^2}{I_s^0}.$$

Полученные формулы – в точности совпадают с формулами [45].

### 3.3. Решение в резольвентах

Выведем формальное решение системы линейных интегральных уравнений (74) в резольвентах. Для этого перепишем (74) более компактно:

$$\begin{cases} N_s(t) - \varphi_1(t)\kappa(t) - \psi_1(t) \int_{t_0}^t K(t, \xi) N_s(\xi) d\xi = 0, \\ \kappa(t) - \varphi_2(t)N_s(t) - \psi_2(t) \int_{t_0}^t K(t, \xi)\kappa(\xi) d\xi = F(t), \end{cases} \quad (88)$$

Тут обозначено:

$$\varphi_1(t) = \frac{m(t)}{1+m(t)} E_s A_s z_b; \quad (89)$$

$$\varphi_2(t) = \frac{m(t) z_b}{(EI)_\Sigma}; \quad (90)$$

$$\psi_1(t) = \frac{E_b(t)}{1+m(t)}; \quad (91)$$

$$(\psi_2(t) = \frac{E_s I_s^0}{(EI)_\Sigma} E_b(t); \quad (92)$$

$$F(t) = -\frac{M_{beam} E_b(t)}{(EI)_\Sigma} \left[ C(t, t_0) + \frac{1}{E_b(t_0)} \right]. \quad (93)$$

Из первого уравнения системы (88) находим:

$$N_s(t) = \varphi_1(t)\kappa(t) + \int_{t_0}^t R_1(t, \xi)\varphi_1(\xi)\kappa(\xi) d\xi,$$

где

$R_1(t, \xi)$  – резольвента ядра  $K_1(t, \xi)$ :

$$R_1(t, \xi) \leftrightarrow K_1(t, \xi) = \psi_1(\xi) K(t, \xi). \quad (94)$$

Подставим полученное выражение для  $N_s(t)$  во второе уравнение системы (88). Имеем:

$$\begin{aligned} \kappa(t) - \varphi_2(t) \left( \varphi_1(t) \kappa(t) + \int_{t_0}^t R_1(t, \xi) \varphi_1(\xi) \kappa(\xi) d\xi \right) - \varphi_2(t) \int_{t_0}^t K(t, \xi) \kappa(\xi) d\xi = F(t) \Rightarrow \\ \kappa(t) = \frac{F(t)}{1 - \varphi_1(t) \varphi_2(t)} + \int_{t_0}^t \frac{\varphi_2(t) R_1(t, \xi) \varphi_1(\xi) + \varphi_2(t) K(t, \xi)}{1 - \varphi_1(t) \varphi_2(t)} \kappa(\xi) d\xi = \\ = \frac{F(t)}{1 - \varphi_1(t) \varphi_2(t)} + \int_{t_0}^t K_2(t, \xi) \kappa(\xi) d\xi. \end{aligned}$$

Тут обозначено:

$$K_2(t, \xi) = \frac{\varphi_2(t) R_1(t, \xi) \varphi_1(\xi) + \varphi_2(t) K(t, \xi)}{1 - \varphi_1(t) \varphi_2(t)}. \quad (95)$$

Решение уравнения относительно  $\kappa(t)$ :

$$\begin{aligned} \kappa(t) = \frac{F(t)}{1 - \varphi_1(t) \varphi_2(t)} + \int_{t_0}^t R_2(t, \xi) \frac{F(\xi)}{1 - \varphi_1(\xi) \varphi_2(\xi)} d\xi = \\ = \frac{F(t)}{\Delta(t)} + \int_{t_0}^t R_2(t, \xi) \frac{F(\xi)}{\Delta(\xi)} d\xi - \end{aligned} \quad (96)$$

где

$$\Delta(t) = 1 - \varphi_1(t) \varphi_2(t);$$

$R_2(t, \xi)$  – резольвента ядра  $K_2(t, \xi)$ :

$$R_2(t, \xi) \leftrightarrow K_2(t, \xi) = \frac{\varphi_2(t) R_1(t, \xi) \varphi_1(\xi) + \varphi_2(t) K(t, \xi)}{\Delta(t)}.$$

Подставим выражение для  $\kappa(t)$  в выражение для  $N_s(t)$ :

$$\begin{aligned} N_s(t) = \varphi_1(t) \left( \frac{F(t)}{\Delta(t)} + \int_{t_0}^t R_2(t, \xi) \frac{F(\xi)}{\Delta(\xi)} d\xi \right) + \\ + \int_{t_0}^t d\xi \left( R_1(t, \xi) \varphi_1(\xi) \left( \frac{F(\xi)}{\Delta(\xi)} + \int_{t_0}^{\xi} R_2(\xi, \tau) \frac{F(\tau)}{\Delta(\tau)} d\tau \right) \right) = \\ = \varphi_1(t) \frac{F(t)}{\Delta(t)} + \varphi_1(t) \int_{t_0}^t R_2(t, \xi) \frac{F(\xi)}{\Delta(\xi)} d\xi + \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& + \int_{t_0}^t d\xi \left( R_1(t, \xi) \varphi_1(\xi) \frac{F(\xi)}{\Delta(\xi)} + R_1(t, \xi) \varphi_1(\xi) \int_{t_0}^{\xi} R_2(\xi, \tau) \frac{F(\tau)}{\Delta(\tau)} d\tau \right) = \\
& = \varphi_1(t) \frac{F(t)}{\Delta(t)} + \int_{t_0}^t \left( \varphi_1(t) R_2(t, \xi) \frac{F(\xi)}{\Delta(\xi)} + R_1(t, \xi) \varphi_1(\xi) \frac{F(\xi)}{\Delta(\xi)} \right) d\xi + \\
& + \int_{t_0}^t R_1(t, \xi) \varphi_1(\xi) \int_{t_0}^{\xi} R_2(\xi, \tau) \frac{F(\tau)}{\Delta(\tau)} d\tau d\xi.
\end{aligned}$$

Таким образом выписано формальное решение системы уравнений (74) в резольвентах:

$$\left\{ \begin{aligned}
\kappa(t) &= \frac{F(t)}{\Delta(t)} + \int_{t_0}^t R_2(t, \xi) \frac{F(\xi)}{\Delta(\xi)} d\xi; \\
N_s(t) &= \varphi_1(t) \frac{F(t)}{\Delta(t)} + \int_{t_0}^t \left( \varphi_1(t) R_2(t, \xi) + R_1(t, \xi) \varphi_1(\xi) \right) \frac{F(\xi)}{\Delta(\xi)} d\xi + \\
& + \int_{t_0}^t R_1(t, \xi) \varphi_1(\xi) \int_{t_0}^{\xi} R_2(\xi, \tau) \frac{F(\tau)}{\Delta(\tau)} d\tau d\xi.
\end{aligned} \right. \quad (97)$$

### 3.4. Резольвенты в случае теории упругой наследственности

В случае если  $E_b(t) = E_b$  (бетон «старый») и подчиняется теории упругой наследственности, то выражения для меры ползучести и основного интегрального ядра имеют записываются следующим образом:

$$C(t, \xi) = C_\infty \left( 1 - e^{-\gamma(t-\xi)} \right); \quad (98)$$

$$K(t, \xi) = \frac{\partial}{\partial \xi} C(t, \xi) = -C_\infty \gamma e^{-\gamma(t-\xi)}. \quad (99)$$

При этом функции  $\varphi_1(t)$ ,  $\varphi_2(t)$ ,  $\psi_1(t)$ ,  $\psi_2(t)$  и  $F(t)$  (см. ф-лы (89)-(93)) примут вид:

$$\varphi_1 = \frac{m}{1+m} E_s A_s z_b = \frac{1}{1+m} E_b A_b z_b; \quad (100)$$

$$\varphi_2 = \frac{m z_b}{(EI)_\Sigma}; \quad (101)$$

$$\Delta = 1 - \varphi_1 \varphi_2; \quad (102)$$

$$\psi_1 = \frac{E_b}{1+m}; \quad (103)$$

$$\psi_2 = \frac{E_s I_s^0}{(EI)_\Sigma} E_b; \quad (104)$$

$$F(t) = -\frac{M_{beam} \left(1 + \varphi \left(1 - e^{-\gamma(t-t_0)}\right)\right)}{(EI)_\Sigma}. \quad (105)$$

Выражение для  $\Delta$  можно преобразовать следующим образом:

$$\begin{aligned} \Delta = 1 - \varphi_1 \varphi_2 &= 1 - \frac{m}{1+m} \cdot \frac{E_b A_b z_b^2}{(EI)_\Sigma} = \frac{E_s I_s^0 + E_b I_b^0 + E_b A_b z_b^2 - \frac{m}{1+m} E_b A_b z_b^2}{(EI)_\Sigma} = \\ &= \frac{E_s I_s^0 + E_b I_b^0 + \frac{1}{1+m} E_b A_b z_b^2}{(EI)_\Sigma} = \frac{(EI)_{sb}}{(EI)_\Sigma}. \end{aligned} \quad (106)$$

Решение интегрального уравнения

$$f(x) = g(x) + \lambda \int_{x_0}^x e^{-\gamma(t-\xi)} f(t) dt$$

записывается следующим образом:

$$f(x) = g(x) + \lambda \int_{x_0}^x e^{-(\gamma-\lambda)(x-t)} g(t) dt.$$

То есть резольвента ядра вида  $e^{-\gamma(x-t)}$  с числовым параметром  $\lambda$  есть функция вида  $e^{-(\gamma-\lambda)(x-t)}$ :

$$k(x, t | \lambda; \gamma) = \lambda e^{-\gamma(x-t)} \leftrightarrow R(x, t, | \lambda; \gamma) = \lambda e^{-(\gamma-\lambda)(x-t)} = k(x, t | \lambda; \gamma - \lambda). \quad (107)$$

Из этого соответствия вытекают два простых правила изменения резольвенты:

$$1) \quad k(x, t | \alpha\gamma; \beta\gamma) \leftrightarrow R(x, t) = k(x, t | \alpha\gamma; \gamma(\beta - \alpha)); \quad (108)$$

$$2) \quad \alpha k(x, t | \lambda; \gamma) \leftrightarrow R(x, t) = k(x, t | \alpha \lambda; \gamma - \alpha \lambda) = k(x, t | \alpha \lambda; \gamma(1 - \alpha)). \quad (109)$$

Доказательства их не вызывают затруднений, исходя из определения (107):

$$1) \quad k(x, t | \alpha \gamma; \beta \gamma) \leftrightarrow k(x, t | \lambda \gamma; \beta \gamma - \alpha \gamma) = k(x, t | \lambda \gamma; \gamma(\beta - \alpha));$$

$$2) \quad \alpha k(x, t | \lambda; \gamma) = \alpha \lambda e^{-\gamma(x-t)} = k(x, t | \alpha \lambda; \gamma) \leftrightarrow R(x, t, | \alpha \lambda; \gamma) = \alpha \lambda e^{-(\gamma - \alpha \lambda)(x-t)} = \\ = k(x, t | \alpha \lambda; \gamma - \alpha \lambda) = k(x, t | \alpha \lambda; \gamma(1 - \alpha)).$$

Воспользуемся этими правилами для того, чтобы выписать резольвенты  $R_1(t, \xi)$  и  $R_2(t, \xi)$ :

$$K_1(t, \xi) = \psi_1 K(t, \xi) = \psi_1 k(t, \xi | -\gamma C_\infty; \gamma) = k(t, \xi | -\gamma C_\infty \psi_1; \gamma) \leftrightarrow \\ \leftrightarrow R_1(t, \xi) = k(t, \xi | -\gamma C_\infty \psi_1; \gamma(1 + C_\infty \psi_1)). \quad (110)$$

Для ядра  $K_2(t, \xi)$  резольвента с учетом соотношений (99) и (108)-(110) имеет

вид:

$$K_2(t, \xi) = \frac{\varphi_2(t) R_1(t, \xi) \varphi_1(\xi) + \psi_2(t) K(t, \xi)}{\Delta(t)} = \frac{\varphi_1 \varphi_2}{\Delta} R_1(t, \xi) + \frac{\psi_2}{\Delta} K(t, \xi) = \\ = \frac{1 - \Delta}{\Delta} k(t, \xi | -\gamma C_\infty \psi_1; \gamma(1 + C_\infty \psi_1)) + \frac{\psi_2}{\Delta} k(t, \xi | -\gamma C_\infty; \gamma) = \\ = k\left(t, \xi \left| -\frac{1 - \Delta}{\Delta} \gamma C_\infty \psi_1; \gamma(1 + C_\infty \psi_1) \right.\right) + k\left(t, \xi \left| -\frac{\psi_2}{\Delta} \gamma C_\infty; \gamma \right.\right) \Rightarrow \\ K_2(t, \xi) \leftrightarrow \\ \leftrightarrow R_2(t, \xi) = k\left(t, \xi \left| -\frac{1 - \Delta}{\Delta} \gamma C_\infty \psi_1; \gamma \left(1 + C_\infty \psi_1 + \frac{1 - \Delta}{\Delta} C_\infty \psi_1\right) \right.\right) + \\ + k\left(t, \xi \left| -\frac{\psi_2}{\Delta} \gamma C_\infty; \gamma \left(1 + \frac{\psi_2}{\Delta} C_\infty\right) \right.\right) = \\ = k\left(t, \xi \left| -\frac{1 - \Delta}{\Delta} \gamma C_\infty \psi_1; \gamma \left(1 + \frac{C_\infty \psi_1}{\Delta}\right) \right.\right) + k\left(t, \xi \left| -\frac{\psi_2}{\Delta} \gamma C_\infty; \gamma \left(1 + \frac{C_\infty \psi_2}{\Delta}\right) \right.\right). \quad (111)$$

С учетом полученных развернутых выражений для резольвент и (106) решение (97) примет вид:

$$\begin{aligned}
\kappa(t) &= \frac{F(t)}{\Delta(t)} + \int_{t_0}^t R_2(t, \xi) \frac{F(\xi)}{\Delta(\xi)} d\xi = \frac{-M_{beam} \left(1 + \varphi \left(1 - e^{-\gamma(t-t_0)}\right)\right)}{(EI)_{\Sigma} \cdot \frac{(EI)_{sb}}{(EI)_{\Sigma}}} + \\
&+ \int_{t_0}^t \left( k \left( t, \xi \left| -\frac{1-\Delta}{\Delta} \gamma C_{\infty} \psi_1; \gamma \left(1 + \frac{C_{\infty} \psi_1}{\Delta}\right) \right) \right) + \\
&+ k \left( t, \xi \left| -\frac{\psi_2}{\Delta} \gamma C_{\infty}; \gamma \left(1 + \frac{\psi_2}{\Delta} C_{\infty}\right) \right) \right) \left( \frac{-M_{beam} \left(1 + \varphi \left(1 - e^{-\gamma(\xi-t_0)}\right)\right)}{(EI)_{\Sigma} \cdot \frac{(EI)_{sb}}{(EI)_{\Sigma}}} \right) d\xi = \\
&= -\frac{M_{beam}}{(EI)_{sb}} \left[ \left(1 + \varphi \left(1 - e^{-\gamma(t-t_0)}\right)\right) + \right. \\
&+ \int_{t_0}^t \left( k \left( t, \xi \left| -\frac{1-\Delta}{\Delta} \gamma C_{\infty} \psi_1; \gamma \left(1 + \frac{C_{\infty} \psi_1}{\Delta}\right) \right) \right) + \\
&+ k \left( t, \xi \left| -\frac{\psi_2}{\Delta} \gamma C_{\infty}; \gamma \left(1 + \frac{\psi_2}{\Delta} C_{\infty}\right) \right) \right) \left(1 + \varphi \left(1 - e^{-\gamma(\xi-t_0)}\right)\right) d\xi \left. \right]. \tag{112}
\end{aligned}$$

Аналогичным образом можно записать для  $N_s(t)$ :

$$\begin{aligned}
N_s(t) &= \frac{\varphi_1}{\Delta} \left[ F(t) + \int_{t_0}^t (R_1(t, \xi) + R_2(t, \xi)) F(\xi) d\xi + \int_{t_0}^t R_1(t, \xi) \left( \int_{t_0}^{\xi} R_2(\xi, \tau) F(\tau) d\tau \right) d\xi \right] = \\
&= -\frac{M_{beam} \varphi_1}{(EI)_{sb}} \left[ 1 - \varphi \left(1 - e^{-\gamma(t-t_0)}\right) + \right. \\
&+ \int_{t_0}^t d\xi R_{s1}(t, \xi) \left(1 - \varphi \left(1 - e^{-\gamma(\xi-t_0)}\right)\right) + \int_{t_0}^t d\xi R_{s2}(t, \xi, \tau) \left(1 - \varphi \left(1 - e^{-\gamma(\tau-t_0)}\right)\right) \left. \right]. \tag{113}
\end{aligned}$$

Тут обозначено:

$$R_{s1}(t, \xi) = R_1(t, \xi) + R_2(t, \xi); \tag{114}$$

$$R_{s2}(t, \xi, \tau) = R_1(t, \xi) \circ R_2(t, \xi) = R_1(t, \xi) \int_{t_0}^{\xi} d\tau R_2(\xi, \tau). \tag{115}$$

Поскольку  $N_b(t) = -N_s(t)$ , то, тем самым, выражение (113) описывает изменение интегрального продольного усилия в бетонной плите при ползучести,

в случае, когда СЖБ балка подчиняется теории упругой наследственности. При этом продольное усилие представлено тремя слагаемыми:

– вклад той части бетонного сечения, которую можно считать (условно) не подвергнувшейся ползучести (первое слагаемое);

– вклад части сечения, подвергающейся линейной ползучести, которую можно считать первичной (второе слагаемое), поскольку тут учитывается влияние элементарной нагрузки, приложенной в момент времени  $\xi$ , на усилие в рассматриваемый момент  $t$  (сумма от таких вкладов);

– вклад, обусловленный «вторичной» линейной ползучестью, которую также можно назвать «интегральной» ползучестью (третье слагаемое); тут учитывается влияние накопленных к моменту времени  $\xi$  элементарных нагрузок на усилие в рассматриваемый момент времени  $t$ .

Резольвента, входящая в третье слагаемое, представлена, как суперпозиция резольвент  $R_1(t, \xi)$  и  $R_2(t, \xi)$ , и может рассматриваться, как интегральный оператор.

Поскольку резольвенты в формулах (112), (113) имеют вид  $\alpha e^{-\beta(t-\xi)}$ , как и функция  $F(t)$ , то можно произвести прямые интегрирования. Однако получаемые выражения будут громоздкими, и, кроме того, практический интерес представляют в большей степени результаты, полученные ранее в пределе по  $t \rightarrow \infty$ .

Резольвентам  $R_1(t, \xi)$  и  $R_2(t, \xi)$  можно сопоставить меры ползучести  $C_1(t, \xi)$  и  $C_2(t, \xi)$ :

$$\begin{aligned} R_1(t, \xi) &= k(x, t | -\gamma C_\infty \psi_1; \gamma(1 + C_\infty \psi_1)) = -\gamma C_\infty \psi_1 e^{-(1+C_\infty \psi_1)\gamma(t-\xi)} = \\ &= -\frac{\gamma E_b C_\infty}{1+m} e^{-\left(1+\frac{E_b C_\infty}{1+m}\right)\gamma(t-\xi)} = E_b \frac{\partial}{\partial \xi} \left( \frac{C_\infty}{1+m+\varphi} \left( 1 - e^{-\frac{1+m+\varphi}{1+m}\gamma(t-\xi)} \right) \right) \Rightarrow \end{aligned}$$

$$C_1(t, \xi) = \frac{C_\infty}{1+m+\varphi} \left( 1 - e^{-\frac{1+m+\varphi}{1+m} \gamma(t-\xi)} \right). \quad (116)$$

Таким образом, можно утверждать, что  $R_1(t, \xi)$  соответствует мера ползучести  $C_1(t, \xi)$ , имеющая вид (116).

Аналогично для резольвенты  $R_2(t, \xi)$ :

$$\begin{aligned} R_2(t, \xi) &= k \left( t, \xi \left| -\frac{1-\Delta}{\Delta} \gamma C_\infty \psi_1; \gamma \left( 1 + \frac{C_\infty \psi_1}{\Delta} \right) \right. \right) + k \left( t, \xi \left| -\frac{\psi_2}{\Delta} \gamma C_\infty; \gamma \left( 1 + \frac{\psi_2}{\Delta} C_\infty \right) \right. \right) = \\ &= -E_b \left( \frac{1-\Delta}{\Delta} \right) \frac{1}{1+m} \gamma C_\infty e^{-\left( 1 + \frac{\varphi}{(1+m)\Delta} \right) \gamma(t-\xi)} - E_b \frac{\Delta_1}{1+\Delta_1\varphi} \gamma C_\infty e^{-(1+\Delta_1\varphi)\gamma(t-\xi)} = \\ &= E_b \left[ \frac{\partial}{\partial \xi} \left( \frac{1-\Delta}{\varphi + (1+m)\Delta} C_\infty \left( 1 - e^{-\left( 1 + \frac{\varphi}{(1+m)\Delta} \right) \gamma(t-\xi)} \right) \right) + \frac{\partial}{\partial \xi} \left( \frac{C_\infty}{\varphi + \Delta_1} \left( 1 - e^{-\left( 1 + \frac{\varphi}{\Delta_1} \right) \gamma(t-\xi)} \right) \right) \right] \Rightarrow \\ C_2(t, \xi) &= C_\infty \left( \frac{1-\Delta}{\varphi + (1+m)\Delta} \left( 1 - e^{-\left( 1 + \frac{\varphi}{(1+m)\Delta} \right) \gamma(t-\xi)} \right) + \frac{1}{\varphi + \Delta_1} \left( 1 - e^{-\left( 1 + \frac{\varphi}{\Delta_1} \right) \gamma(t-\xi)} \right) \right). \quad (117) \end{aligned}$$

Тут обозначено:

$$\Delta_1 = \frac{(EI)_{sb}}{E_s I_s^0}. \quad (118)$$

Ясно, что резольвенте  $R_{s1}(t, \xi)$  соответствует мера ползучести  $C_1(t, \xi) + C_2(t, \xi)$ . Предельные значения этих мер ползучести:

$$C_{1\infty} = \frac{C_\infty}{1+m+E_b C_\infty} = \frac{C_\infty}{1+m+\varphi}; \quad (119)$$

$$C_{2\infty} = C_\infty \left( \frac{1-\Delta}{\varphi + (1+m)\Delta} + \frac{1}{\varphi + \Delta_1} \right). \quad (120)$$

Поскольку все полученные резольвенты есть функции вида  $\alpha e^{-\beta(t-\xi)}$ , т.е. зависящие от разности  $(t-\xi)$ , то можно сделать вывод, что если бетон подчиняется теории наследственности, то и сталежелезобетон также

подчиняется теории наследственности. При этом, если для железобетона предельное значение меры ползучести меньше предельного значения меры ползучести бетона  $C_\infty$ , а характеристика скорости процесса ползучести у железобетона больше, чем у бетона (то есть ползучесть в железобетоне развивается с большей скоростью до меньшего предела, чем в бетоне), то для сталежелезобетона можно констатировать только большую, чем в бетоне скорость протекания процессов ползучести – коэффициенты перед  $\gamma$  в соответствующих показателях экспонент больше единицы. Как видно по  $C_{2\infty}$  (120), каждое слагаемое в скобках меньше единицы, при этом можно дать грубую оценку  $C_{2\infty}$ :

$$C_{2\infty} = C_\infty \left( \frac{1-\Delta}{\varphi + (1+m)\Delta} + \frac{1}{\varphi + \Delta_1} \right) < C_\infty \left( \frac{1}{\varphi} + \frac{1}{\varphi} \right) = \frac{2C_\infty}{\varphi}.$$

Для разных классов бетонов величина  $\frac{2}{\varphi}$  может быть, как больше 1, так и меньше (табл. 6.12 СП 63.13330.2012 [37]) т.е. при некотором наборе параметров предельное значение меры ползучести  $C_{2\infty}$  может превысить величину  $C_\infty$ , отвечающую бетону. Если принять, что сталежелезобетон, как и бетон, подчиняется теории наследственности, то можно утверждать, что деформации ползучести в сталежелезобетоне полностью обратимы.

### 3.5. Резольвенты в случае теории старения

Рассмотрим теперь случай, когда бетон подчиняется теории старения, то есть мера ползучести  $C(x,t)$  может быть представлена в виде

$$C(x,t) = C(x) - C(t).$$

Приведем решение интегрального уравнения Вольтерра 2-го рода с ядром вида  $K(x,t) = \frac{\partial C(x,t)}{\partial t} = -C'(t)$ . В этом случае рассматривается уравнение вида:

$$f(x) = g(x) - \lambda(x) \int_a^x C'(t) f(t) dt. \quad (121)$$

Если продифференцировать его, то получим:

$$f'(x) = g'(x) - \lambda'(x) \int_a^x C'(t) f(t) dt - \lambda(x) C'(x) f(x).$$

Выразим из исходного интегрального уравнения интеграл и подставим его в последнее выражение:

$$f'(x) = g'(x) - \lambda'(x) \frac{g(x) - f(x)}{\lambda(x)} - \lambda(x) C'(x) f(x) \Rightarrow$$

$$f'(x) + f(x) \left( -\frac{\lambda'(x)}{\lambda(x)} + \lambda(x) C'(x) \right) = g'(x) - \frac{\lambda'(x)}{\lambda(x)} g(x). \quad (122)$$

Полученное дифференциальное уравнение первого порядка можно решить методом неопределенных коэффициентов. Решение однородного дифференциального уравнения будет:

$$f(x) = A e^{-\int_0^x \left( -\frac{\lambda'(t)}{\lambda(t)} + \lambda(t) C'(t) \right) dt}. \quad (123)$$

Положим  $A = A(x)$  и подставим в (122). После упрощений получится:

$$A'(x) e^{-\int_0^x \left( -\frac{\lambda'(t)}{\lambda(t)} + \lambda(t) C'(t) \right) dt} = g'(x) - \frac{\lambda'(x)}{\lambda(x)} g(x) \Rightarrow$$

$$A'(x) = \left( g'(x) - \frac{\lambda'(x)}{\lambda(x)} g(x) \right) e^{\int_0^x \left( -\frac{\lambda'(t)}{\lambda(t)} + \lambda(t) C'(t) \right) dt}.$$

Теперь можно проинтегрировать и определить  $A(x)$ :

$$A(x) = A_0 + \int_0^x \left( g'(t) - \frac{\lambda'(t)}{\lambda(t)} g(t) \right) e^{\int_0^t \left( -\frac{\lambda'(s)}{\lambda(s)} + \lambda(s) C'(s) \right) ds} dt.$$

После подстановки  $A(x)$  в (123) получим формальное решение дифф.уравнения (122):

$$f(x) = \left( A_0 + \int_0^x \left( g'(t) - \frac{\lambda'(t)}{\lambda(t)} g(t) \right) e^{\int_0^t \left( -\frac{\lambda'(s)}{\lambda(s)} + \lambda(s) C'(s) \right) ds} dt \right) e^{-\int_0^x \left( -\frac{\lambda'(t)}{\lambda(t)} + \lambda(t) C'(t) \right) dt}. \quad (124)$$

Для определения константы  $A_0$  необходимо положить в уравнениях (121) и (124)  $x=0$ . Из уравнения (121) следует:

$$f(0) = g(0).$$

Уравнение (124) дает:

$$f(0) = A_0 \Rightarrow A_0 = g(0).$$

Теперь можно записать:

$$f(x) = \left( g(0) + \int_0^x \left( \frac{g'(t)\lambda(t) - \lambda'(t)g(t)}{\lambda(t)} \right) e^{\int_0^t \left( -\frac{\lambda'(s)}{\lambda(s)} + \lambda(s)C'(s) \right) ds} dt \right) e^{-\int_0^x \left( -\frac{\lambda'(t)}{\lambda(t)} + \lambda(t)C'(t) \right) dt} \quad (125)$$

Полученное решение нетрудно упростить. Легко видеть, что выполняется:

$$\int_0^x \frac{\lambda'(t)}{\lambda(t)} dt = \ln(\lambda(t)) \Big|_0^x = \ln\left(\frac{\lambda(x)}{\lambda(0)}\right).$$

Следовательно, для интегралов под экспонентой в (125) будем иметь:

$$e^{-\int_0^t \left( -\frac{\lambda'(s)}{\lambda(s)} + \lambda(s)C'(s) \right) ds} = e^{\ln\left(\frac{\lambda(t)}{\lambda(0)}\right) - \int_0^t \lambda(s)C'(s) ds} = e^{\ln\left(\frac{\lambda(t)}{\lambda(0)}\right)} e^{-\int_0^t \lambda(s)C'(s) ds} = \frac{\lambda(t)}{\lambda(0)} e^{-\int_0^t \lambda(s)C'(s) ds}.$$

Подстановка этих выражений в (124) позволяет записать:

$$f(x) = \left( g(0) + \int_0^x \left( \frac{g'(t)\lambda(t) - \lambda'(t)g(t)}{\lambda(t)} \right) \frac{\lambda(0)}{\lambda(t)} e^{\int_0^t \lambda(s)C'(s) ds} dt \right) \frac{\lambda(x)}{\lambda(0)} e^{-\int_0^x \lambda(s)C'(s) ds} =$$

$$= \left( \lambda(x) \frac{g(0)}{\lambda(0)} + \lambda(x) \int_0^x \left( \frac{g'(t)\lambda(t) - \lambda'(t)g(t)}{\lambda^2(t)} \right) e^{\int_0^t \lambda(s)C'(s) ds} dt \right) e^{-\int_0^x \lambda(s)C'(s) ds}. \quad (126)$$

Легко видеть, что первый множитель в интеграле по  $x$  есть полная производная:

$$\frac{g'(t)\lambda(t) - \lambda'(t)g(t)}{\lambda^2(t)} = \frac{d}{dt} \left( \frac{g(t)}{\lambda(t)} \right).$$

С учетом этого можно провести интегрирование в (126) по частям:

$$\begin{aligned}
& \int_0^x \left( \frac{g'(t)\lambda(t) - \lambda'(t)g(t)}{\lambda^2(t)} \right) e^{\int_0^t \lambda(s)C'(s)ds} dt = \int_0^x \frac{d}{dt} \left( \frac{g(t)}{\lambda(t)} \right) e^{\int_0^t \lambda(s)C'(s)ds} dt = \\
& = \left( \frac{g(t)}{\lambda(t)} \right) e^{\int_0^t \lambda(s)C'(s)ds} \Big|_0^x - \int_0^x \frac{g(t)}{\lambda(t)} \lambda(t) C'(t) e^{\int_0^t \lambda(s)C'(s)ds} dt = \\
& = \left( \frac{g(x)}{\lambda(x)} \right) e^{\int_0^x \lambda(s)C'(s)ds} - \frac{g(0)}{\lambda(0)} - \int_0^x g(t) C'(t) e^{\int_0^t \lambda(s)C'(s)ds} dt
\end{aligned}$$

Подставим полученное выражение в (126):

$$\begin{aligned}
f(x) &= \left( \lambda(x) \frac{g(0)}{\lambda(0)} + \lambda(x) \int_0^x \left( \frac{g'(t)\lambda(t) - \lambda'(t)g(t)}{\lambda^2(t)} \right) e^{\int_0^t \lambda(s)C'(s)ds} dt \right) e^{-\int_0^x \lambda(s)C'(s)ds} = \\
&= \left( \lambda(x) \frac{g(0)}{\lambda(0)} + \lambda(x) \left( \left( \frac{g(x)}{\lambda(x)} \right) e^{\int_0^x \lambda(s)C'(s)ds} - \frac{g(0)}{\lambda(0)} - \int_0^x g(t) C'(t) e^{\int_0^t \lambda(s)C'(s)ds} dt \right) \right) e^{-\int_0^x \lambda(s)C'(s)ds} = \\
&= g(x) - \lambda(x) \int_0^x g(t) C'(t) e^{\int_0^t \lambda(s)C'(s)ds} e^{-\int_0^x \lambda(s)C'(s)ds} dt.
\end{aligned}$$

Откуда окончательно получаем:

$$f(x) = g(x) - \lambda(x) \int_0^x C'(t) e^{-\int_t^x \lambda(s)C'(s)ds} g(t) dt. \quad (127)$$

Таким образом, резольвента ядра исходного интегрального уравнения (121) имеет следующее выражение:

$$-\lambda(x)K(x,t) = -\lambda(x)C'(t) \leftrightarrow R(x,t|\lambda(x)) = -\lambda(x)C'(t) e^{-\int_t^x \lambda(s)C'(s)ds}. \quad (128)$$

Если множитель у ядра есть постоянная, то тогда резольвента примет обычный вид:

$$\begin{aligned}
& \lambda(x) = \lambda = const; \\
& -\lambda K(x,t) = -\lambda C'(t) \leftrightarrow R(x,t|\lambda) = -\lambda C'(t) e^{-\lambda(C'(x)-C'(t))}. \quad (129)
\end{aligned}$$

Для резольвенты ядра  $K_1(x,t)$  (94) можно сразу написать:

$$-K_1(t,\xi) = -\psi_1(t)K(t,\xi) = -\psi_1(t)C'(\xi) \leftrightarrow$$

$$\leftrightarrow R_1(t, \xi | \psi_1(t)) = -\psi_1(t) C'(\xi) e^{-\int_{\xi}^t \psi_1(s) C'(s) ds}. \quad (130)$$

Выражение для резольвенты  $R_1(t, \xi | \psi_1(t))$  в общем случае не является полной производной по  $\xi$ :

$$R_1(t, \xi | \psi_1(t)) = -\psi_1(t) C'(\xi) e^{-\int_{\xi}^t \psi_1(s) C'(s) ds} = -\frac{\psi_1(t)}{\psi_1(\xi)} \cdot \frac{\partial}{\partial \xi} \left( e^{-\int_{\xi}^t \psi_1(s) C'(s) ds} \right).$$

Полная производная будет только в случае, если  $\psi_1(t) = \psi_1 = const$ :

$$R_1(t, \xi | \psi_1) = -\psi_1 C'(\xi) e^{-\psi_1 \int_{\xi}^t C'(s) ds} = -\psi_1 C'(\xi) e^{-\psi_1(C(t) - C(\xi))} = -\frac{\partial}{\partial \xi} \left( e^{-\psi_1(C(t) - C(\xi))} \right).$$

Следовательно, в общем случае резольвенте  $R_1(t, \xi | \psi_1(t))$  нельзя поставить в соответствие меру ползучести, удовлетворяющую требованиям теории старения. Это возможно только при постоянном значении модуля деформации бетона. Из этого сразу следует, что в общем случае резольвента ядра  $K_2(t, \xi) = \frac{\varphi_2(t) R_1(t, \xi) \varphi_1(\xi) + \psi_2(t) K(t, \xi)}{\Delta(t)}$  не отвечает теории старения. Следовательно, если бетон подчиняется теории старения, то сталежелезобетон не подчиняется теории старения. Это обстоятельство было отмечено Харлабом [44] для железобетона.

С сожалением необходимо констатировать, что в статье автора [47] вывод результатов для случая теории старения был сделан некорректно.

### Выводы по третьей главе

- 1) Получена разрешающая система интегральных уравнений линейной ползучести для СЖБ-балок.
- 2) Сформулирована и строго доказана лемма Харлаба, позволяющая переходить к асимптотике в интегральных уравнениях ползучести, если мера ползучести удовлетворяет условиям теории упругой наследственности.

3) В случае, если бетон подчиняется требованиям упругой наследственности, то сталежелезобетон также подчиняется теории упругой наследственности. Для теории старения это не выполняется.

## 4. УЧЕТ НЕЛИНЕЙНОЙ ПОЛЗУЧЕСТИ В СЖБ-БАЛКАХ

### 4.1. Вывод разрешающей системы уравнений

Как было уже отмечено ранее, линейная работа бетона происходит лишь при нагрузках, вызывающих относительно малые напряжения в бетоне – до величин порядка  $0.2 \div 0.3R_b$ . При более высоких уровнях напряжений появляется необходимость оценки вклада нелинейной работы бетона и способы расчета ее. Далее будет рассматриваться нелинейная ползучесть в СЖБ-балках (далее – СЖБ-балках) на основе интегрального уравнения вязко-упруго-пластичности бетона. Учет нелинейной ползучести бетона производится при следующих допущениях:

- 1) СЖБ-балка рассматривается, как классическая комплексная балка, т.е. в НДС учитываются только продольные напряжения растяжения-сжатия;
- 2) выполняется гипотеза плоских сечений;
- 3) стальная балка работает упруго;
- 4) СЖБ-балка однопролетная шарнирно-опертая;
- 5) параметры СЖБ-балки подобраны так, что бетон сжат в любом сечении;
- 6) бетон однороден и работает без трещин;
- 7) внешние силы растяжения-сжатия отсутствуют.

Продольное армирование бетонной плиты может быть включено в состав стальной балки, поскольку все последующие выкладки не накладывают никаких ограничений на геометрическую связность стального сечения, и достаточно знать положение центра тяжести стального сечения и его геометрические характеристики – площадь сечения и момент инерции. Принимается локальная система координат в центре тяжести стальной балки, т.е. по рис.22. Направление глобальных осей координат совпадают с локальными.

Относительные деформации по условию 2) принимаются в виде (59):

$$\varepsilon(z, t) = \varepsilon_s(t) - z\kappa(t).$$

где  $\varepsilon(z, t)$  – относительная деформация в сечении балки на расстоянии  $z$  от начала координат (локальных);

$\varepsilon_s(t)$ ,  $\kappa(t)$  – относительная деформация в центре тяжести стального сечения и кривизна нейтральной оси балки.

Уравнение нелинейной ползучести принимается, как и ранее, в виде (8):

$$f(\sigma_b(z, t)) = E_b(t) \varepsilon_b(z, t) + E_b(t) \int_{t_0}^t K(t, \xi) f(\sigma_b(z, \xi)) d\xi,$$

– уравнение вязко-упруго-пластичности бетона [41].

Условия равновесия в сечении СЖБ-балки:

$$\begin{cases} N_b(t) + N_s(t) = 0; \\ M_b(t) + M_s(t) = M_{beam}. \end{cases}$$

Тут, как и ранее, обозначено:

$$N_s(t) = \int_{A_s} \sigma_s(z, t) dA_s;$$

$$N_b(t) = \int_{A_b} \sigma_b(z, t) dA_b;$$

$$M_s(t) = \int_{A_s} \sigma_s(z, t) z dA_s;$$

$$M_b(t) = \int_{A_b} \sigma_b(z, t) z dA_b.$$

Нелинейную функцию в выражении нелинейном уравнении ползучести перепишем в виде:

$$f(\sigma) = \sigma + \delta(\sigma), \quad (130)$$

т.е. функция  $f(\sigma)$  представлена в виде линейной  $\sigma$  и нелинейной части  $\delta(\sigma)$ .

Проведем интегрирования. Величины  $N_s(t)$  и  $M_s(t)$  уже определены ранее (ф-лы (64) и (69)):

$$N_s(t) = \int_{A_s} \sigma_s(z, t) dA_s = \int_{A_s} E_s (\varepsilon_s(t) - z\kappa(t)) dA_s = E_s A_s \varepsilon_s(t).$$

$$M_s(t) = \int_{A_s} \sigma_s(z, t) z dA_s = \int_{A_s} E_s (\varepsilon_s(t) - z\kappa(t)) z dA_s = -E_s I_s^0 \kappa(t), \quad -$$

где  $I_s^0$  – момент инерции стального сечения.

Подставим в уравнение вязко-упруго-пластичности бетона представление (131):

$$\begin{aligned} \sigma_b(z, t) = E_b(t) \varepsilon_b(z, \xi) + E_b(t) \int_{t_0}^t K(t, \xi) \sigma_b(z, \xi) d\xi - \\ - \delta(\sigma_b(z, t)) + E_b(t) \int_{t_0}^t K(t, \xi) \delta(\sigma_b(z, \xi)) d\xi. \end{aligned} \quad (132)$$

Исходя из полученного выражения для  $\sigma_b(z, t)$ , можно провести интегрирования в  $N_b(t)$  и  $M_b(t)$ :

$$\begin{aligned} N_b(t) = \int_{A_b} \sigma_b(z, t) dA_b = \int_{A_b} \left( E_b(t) (\varepsilon_s(t) - z\kappa(t)) + E_b(t) \int_{t_0}^t K(t, \xi) \sigma_b(z, \xi) d\xi \right) dA_b + \\ + \int_{A_b} \left( -\delta(\sigma_b(z, \xi)) + E_b(t) \int_{t_0}^t K(t, \xi) \delta(\sigma_b(z, \xi)) d\xi \right) dA_b = \\ = E_b(t) A_b (\varepsilon_s(t) - z_b \kappa(t)) + E_b(t) \int_{t_0}^t K(t, \xi) N_b(\xi) d\xi - \\ - \int_{A_b} \delta(\sigma_b(z, t)) dA_b + E_b(t) \int_{t_0}^t K(t, \xi) \left( \int_{A_b} \delta(\sigma_b(z, \xi)) dA_b \right) d\xi = (*). \end{aligned}$$

Воспользуемся формулами (64) и (66) и введем дополнительные обозначения:

$$N_s(t) = E_s(t) A_s \varepsilon_s(t);$$

$$m(t) = \frac{E_b(t) A_b}{E_s A_s};$$

$$\Delta(t) = \frac{1}{A_b} \int_{A_b} \delta(\sigma_b(z, t)) dA_b; \quad (133)$$

$$\mu(t) = \frac{1}{A_b} \int_{A_b} \delta(\sigma_b(z, t)) z dA_b; \quad (134)$$

Тогда:

$$\begin{aligned} (*) = m(t) E_s(t) A_s \varepsilon_s(t) - E_b(t) A_b z_b \kappa(t) + E_b(t) \int_{t_0}^t K(t, \xi) N_b(\xi) d\xi - \\ - \delta(\sigma_b(t)) A_b + E_b(t) A_b \int_{t_0}^t K(t, \xi) \delta(\sigma_b(z, \xi)) d\xi = \end{aligned}$$

$$= m(t)N_s(t) - E_b(t)A_b z_b \kappa(t) + E_b(t) \int_{t_0}^t K(t, \xi) N_b(\xi) d\xi -$$

$$- \delta(\sigma_b(t)) A_b + E_b(t) A_b \int_{t_0}^t K(t, \xi) \delta(\sigma_b(z, \xi)) d\xi.$$

Из условия равновесия имеем  $N_b(t) = -N_s(t)$ , поэтому:

$$-N_s(t) = m(t)N_s(t) - E_b(t)A_b z_b \kappa(t) + E_b(t) \int_{t_0}^t K(t, \xi) N_b(\xi) d\xi -$$

$$- \delta(\sigma_b(t)) A_b + E_b(t) A_b \int_{t_0}^t K(t, \xi) \delta(\sigma_b(z, \xi)) d\xi \Rightarrow$$

$$N_s(t) - \frac{E_b(t)A_b z_b}{1+m(t)} \kappa(t) - \frac{E_b(t)}{1+m(t)} \int_{t_0}^t K(t, \xi) N_s(\xi) d\xi -$$

$$- \frac{\Delta(t)A_b}{1+m(t)} + \frac{E_b(t)A_b}{1+m(t)} \int_{t_0}^t K(t, \xi) \Delta(\xi) d\xi = 0. \quad (135)$$

Перейдем к интегрированию в  $M_b(t)$ :

$$M_b(t) = \int_{A_b} \left( E_b(t)(\varepsilon_s(t) - z\kappa(t)) + E_b(t) \int_{t_0}^t K(t, \xi) \sigma_b(z, \xi) d\xi \right) z dA_b +$$

$$+ \int_{A_b} \left( -\delta(\sigma_b(z, \xi)) + E_b(t) \int_{t_0}^t K(t, \xi) \delta(\sigma_b(z, \xi)) d\xi \right) z dA_b =$$

$$= E_b(t) \varepsilon_s(t) \int_{A_b} z dA_b - E_b(t) \kappa(t) \int_{A_b} z^2 dA_b + E_b(t) \int_{t_0}^t K(t, \xi) \left( \int_{A_b} z \sigma_b(z, \xi) dA_b \right) d\xi +$$

$$- \int_{A_b} z \delta(\sigma_b(z, \xi)) dA_b + E_b(t) \int_{t_0}^t K(t, \xi) \left( \int_{A_b} z \delta(\sigma_b(z, \xi)) dA_b \right) d\xi =$$

$$= m(t) N_s z_b - E_b(t) \kappa(t) (I_b^0 + A_b z_b^2) + E_b(t) \int_{t_0}^t K(t, \xi) M_b(\xi) d\xi - A_b \mu(t) +$$

$$+ E_b(t) A_b \int_{t_0}^t K(t, \xi) \mu(\xi) d\xi. \quad (**)$$

Из условия равновесия для внутренних интегральных моментов:

$$M_b(t) = M_{beam} - M_s(t) = M_{beam} + E_s I_s^0 \kappa(t).$$

Подставим это выражение для  $M_b(t)$  в (\*\*):

$$\begin{aligned} M_{beam} + E_s I_s^0 \kappa(t) &= m(t) N_s z_b - E_b(t) \kappa(t) (I_b^0 + A_b z_b^2) + \\ &+ E_b(t) \int_{t_0}^t K(t, \xi) (M_{beam} + E_s I_s^0 \kappa(t)) d\xi - A_b \mu(t) + E_b(t) A_b \int_{t_0}^t K(t, \xi) \mu(\xi) d\xi = \\ &= m(t) N_s z_b - E_b(t) \kappa(t) (I_b^0 + A_b z_b^2) + M_{beam} E_b(t) \Phi(t, t_0) + \\ &+ E_s I_s^0 E_b(t) \int_{t_0}^t K(t, \xi) \kappa(t) d\xi - A_b \mu(t) + E_b(t) A_b \int_{t_0}^t K(t, \xi) \mu(\xi) d\xi. \end{aligned}$$

После преобразования получается:

$$\begin{aligned} \kappa(t) - \frac{m(t) z_b}{(EI)_\Sigma} N_s(t) - \frac{E_s I_s^0}{(EI)_\Sigma} E_b(t) \int_{t_0}^t K(t, \xi) \kappa(\xi) d\xi + \frac{A_b \mu(t)}{(EI)_\Sigma} - \\ - \frac{E_b(t) A_b}{(EI)_\Sigma} \int_{t_0}^t K(t, \xi) \mu(\xi) d\xi = -M_{beam} \frac{1 - E_b(t) \Phi(t, t_0)}{(EI)_\Sigma}, \end{aligned} \quad (136)$$

Тут использованы формулы (71) и (73):

$$\Phi(t, t_0) = \int_{t_0}^t K(t, \xi) d\xi = -C(t, t_0) + \frac{1}{E_b(t)} - \frac{1}{E_b(t_0)};$$

$$(EI)_\Sigma = E_s I_s^0 + E_b(t) (I_b^0 + A_b z_b^2).$$

К полученным уравнениям (135) и (136) необходимо добавить еще одно, чтобы получить замкнутую систему. Для этого преобразуем выражение для относительных деформаций и подставим его в (132):

$$\begin{aligned} \varepsilon(z, t) = \varepsilon_s(t) - z\kappa(t) = \frac{N_s(t)}{E_s A_s} - z\kappa(t); \\ \sigma_b(z, t) - E_b(t) \left( \frac{N_s(t)}{E_s A_s} - z\kappa(t) \right) - E_b(t) \int_{t_0}^t K(t, \xi) \sigma_b(z, \xi) d\xi + \\ + \delta(\sigma_b(z, t)) - E_b(t) \int_{t_0}^t K(t, \xi) \delta(\sigma_b(z, \xi)) d\xi = 0. \end{aligned} \quad (137)$$

Таким образом, уравнения (135), (136) и (137) образуют замкнутую систему интегральных уравнений Вольтерра 2-го рода для определения  $\kappa(t)$ ,  $N_s(t)$  и  $\sigma_b(z,t)$  :

$$\begin{cases} L_1[\kappa(t), N_s(t)] + \alpha_1(t) = 0; \\ L_2[\kappa(t), N_s(t)] + \alpha_2(t) = \beta(t); \\ L_3[\kappa(t), N_s(t), \sigma_b(z,t)] + \alpha_3(z,t) = 0. \end{cases} \quad (138)$$

Тут обозначено

$$L_1[\kappa(t), N_s(t)] = N_s(t) - \frac{E_b(t)A_b z_b}{1+m(t)} \kappa(t) - \frac{E_b(t)}{1+m(t)} \int_{t_0}^t K(t, \xi) N_s(\xi) d\xi;$$

$$L_2[\kappa(t), N_s(t)] = \kappa(t) - \frac{m(t)z_b}{(EI)_\Sigma} N_s(t) - \frac{E_s I_s^0}{(EI)_\Sigma} E_b(t) \int_{t_0}^t K(t, \xi) \kappa(\xi) d\xi;$$

$$L_3[\kappa(t), N_s(t), \sigma_b(z,t)] = \sigma_b(z,t) - E_b(t) \left( \frac{N_s(t)}{E_s A_s} - z \kappa(t) \right) - E_b(t) \int_{t_0}^t K(t, \xi) \sigma_b(z, \xi) d\xi;$$

$$\alpha_1(t) = -\frac{\Delta(t)A_b}{1+m(t)} + \frac{E_b(t)A_b}{1+m(t)} \int_{t_0}^t K(t, \xi) \Delta(\xi) d\xi;$$

$$\alpha_2(t) = \frac{A_b \mu(t)}{(EI)_\Sigma} - \frac{E_b(t)A_b}{(EI)_\Sigma} \int_{t_0}^t K(t, \xi) \mu(\xi) d\xi;$$

$$\beta(t) = -M_{beam} \frac{1 - E_b(t)\Phi(t, t_0)}{(EI)_\Sigma};$$

$$\alpha_3(z,t) = \delta(\sigma_b(z,t)) - E_b(t) \int_{t_0}^t K(t, \xi) \delta(\sigma_b(z, \xi)) d\xi.$$

Операторы  $L_1, L_2, L_3$  – линейные. Очевидно, что  $\delta(\sigma_b(z, \xi))$  есть малая величина, и если ее принять равной нулю, то система (138) переходит в систему (73), отвечающую линейному уравнению ползучести Маслова-Арутюняна.

## 4.2. Асимптотика в случае теории упругой наследственности

Если бетон подчиняется требованиям теории упругой наследственности, то из системы (138) можно получить систему нелинейных уравнений, отвечающую асимптотическому решению. В этом случае  $E_b(t) = E_b$ . Произведем в системе (138) предельные переходы по  $t \rightarrow \infty$ , воспользовавшись сформулированной ранее теоремой Харлаба. Ядра интегральных операторов и функции, входящие в интегральные уравнения, удовлетворяют условиям теоремы. Поэтому, переходя к пределу, имеем (символы со звездочкой соответствуют асимптотическим значениям):

$$C(t, t_0) \xrightarrow{t \rightarrow \infty} C_\infty = const;$$

$$\Phi(t, t_0) = \int_{t_0}^t K(t, \xi) d\xi = \int_{t_0}^t \frac{\partial}{\partial \xi} \left( C(t, \xi) + \frac{1}{E_b(\xi)} \right) d\xi = -C(t, t_0) \xrightarrow{t \rightarrow \infty} -C_\infty;$$

$$\sigma_b^*(z) = \lim_{t \rightarrow \infty} \sigma_b(z, t);$$

$$\int_{t_0}^t K(t, \xi) \sigma_b(z, \xi) d\xi \xrightarrow{t \rightarrow \infty} -C_\infty \sigma_b^*(z);$$

$$L_1[\kappa(t), N_s(t)] \xrightarrow{t \rightarrow \infty} \frac{1+m+\varphi}{1+m} N_s^* - \frac{E_b A_b z_b}{1+m} \kappa^*;$$

$$L_2[\kappa(t), N_s(t)] \xrightarrow{t \rightarrow \infty} (1+\varphi) \frac{E_s I_s^0 + \frac{E_b}{1+\varphi} (I_b^0 + A_b z_b^2)}{(EI)_\Sigma} \kappa^* - \frac{m z_b}{(EI)_\Sigma} N_s^*;$$

$$L_3[\kappa(t), N_s(t), \sigma_b(z, t)] \xrightarrow{t \rightarrow \infty} (1+\varphi) \sigma_b^*(z) - E_b \left( \frac{N_s^*}{E_s A_s} - z \kappa^* \right);$$

$$\beta(t) = -M_{beam} \frac{1 - E_b(t) \Phi(t, t_0)}{(EI)_\Sigma} \xrightarrow{t \rightarrow \infty} -M_{beam} \frac{1+\varphi}{(EI)_\Sigma};$$

$$\alpha_1(t) = \xrightarrow{t \rightarrow \infty} -\frac{(1+\varphi) A_b \Delta^*}{1+m};$$

$$\alpha_2(t) = \xrightarrow{t \rightarrow \infty} \frac{(1+\varphi) A_b \mu^*}{(EI)_\Sigma};$$

$$\alpha_3(z, t) = \xrightarrow{t \rightarrow \infty} (1+\varphi) \delta(\sigma_b^*(z));$$

Тут везде  $\varphi = E_b C_\infty$ .

Система (138) после подстановки полученных предельных значений примет вид:

$$\begin{cases} N_s^* - \frac{E_b A_b z_b}{(1+m+\varphi)} \kappa^* - \frac{(1+\varphi) A_b \Delta^*}{1+m+\varphi} = 0; \\ \kappa^* - \frac{m z_b}{(1+\varphi)(EI)_\Sigma^*} N_s^* + \frac{A_b \mu^*}{(EI)_\Sigma^*} = -\frac{M_{beam}}{(EI)_\Sigma^*}; \\ \sigma_b^*(z) - \frac{E_b}{(1+\varphi)} \left( \frac{N_s^*}{E_s A_s} - z \kappa^* \right) + \delta(\sigma_b^*(z)) = 0. \end{cases} \quad (139)$$

Здесь обозначено:

$$(EI)_\Sigma^* = E_s I_s^0 + \frac{E_b I_b^0}{1+\varphi} + \frac{E_b A_b z_b^2}{1+\varphi}.$$

$N_s^*$  и  $\kappa^*$  можно выразить через  $\Delta^*$  и  $\mu^*$ :

$$\kappa^* = -\frac{M_{beam}}{(EI)_{sb,\tau}^*} - \frac{A_b}{(EI)_{sb,\tau}^*} \left( \mu^* - \frac{m}{1+m+\varphi} \Delta^* z_b \right); \quad (140)$$

$$\begin{aligned} N_s^* = & -\frac{M}{(1+m+\varphi)(EI)_{sb,\tau}^*} + \\ & + \frac{A_b}{1+m+\varphi} \left( \left( 1+\varphi + \frac{m}{1+m+\varphi} \cdot \frac{E_b A_b z_b^2}{(EI)_{sb,\tau}^*} \right) \Delta^* - \frac{E_b A_b z_b}{(EI)_{sb,\tau}^*} \mu^* \right). \end{aligned} \quad (141)$$

Тут в соответствии с (80):

$$(EI)_{sb,\tau}^* = E_s I_s^0 + \frac{E_b I_b^0}{1+\varphi} + \frac{E_b A_b z_b^2}{1+m+\varphi}, -$$

асимптотическая изгибная жесткость СЖБ-балки в линейном приближении (линейное уравнение ползучести Маслова-Арутюняна). Первые слагаемые в выражениях (140), (141) для  $N_s^*$  и  $\kappa^*$  также есть асимптотические решения линейного уравнения Маслова-Арутюняна.

Подстановка  $N_s^*$  и  $\kappa^*$  в последнее уравнение системы (139) приводит к решению интегрального уравнения относительно  $\sigma_b^*(z)$  ( $\sigma_b^*(z)$  входит под интегралы в выражениях для  $\Delta^*$  и  $\mu^*$ ), что возможно лишь численно. Если задаться определением только напряжения в центре тяжести бетонного сечения

(оно близко к среднему напряжению в сечении), то можно ограничиться следующим подходом. Воспользовавшись интегральной теоремой о среднем, имеем:

$$\Delta^* = \frac{1}{A_b} \int_{A_b} \delta(\sigma_b^*(z)) dA_b = \frac{1}{A_b} \delta(\sigma_b^*(\xi)) A_b = \delta(\sigma_b^*(\xi)) \approx \delta(\sigma_b^*(z_b)) = \delta(\bar{\sigma}_b^*);$$

$$\mu^* = \frac{1}{A_b} \int_{A_b} \delta(\sigma_b^*(z)) z dA_b = \delta(\sigma_b^*(\xi)) \xi_b \approx \delta(\sigma_b^*(z_b)) z_b = \delta(\bar{\sigma}_b^*) z_b,$$

где  $\xi$  – некоторая точка бетонного сечения, а  $\bar{\sigma}_b^* = \sigma_b^*(z_b)$ .

В этом случае из системы (139) можно получить:

$$\kappa^* = -\frac{M_{beam}}{(EI)_{sb,\tau}^*} - \frac{1+\varphi}{1+m+\varphi} \cdot \frac{A_b z_b \delta(\bar{\sigma}_b^*)}{(EI)_{sb,\tau}^*};$$

$$N_s^* = -\frac{M E_b A_b z_b}{(1+m+\varphi)(EI)_{sb,\tau}^*} + \frac{(1+\varphi) A_b \delta(\bar{\sigma}_b^*)}{1+m+\varphi} \cdot \frac{E_s I_s^0 + \frac{E_b I_b^0}{1+\varphi}}{(EI)_{sb,\tau}^*};$$

$$\bar{\sigma}_b^* + \frac{1+\varphi}{1+m+\varphi} \cdot \frac{E_s I_s^0 + \frac{E_b I_b^0}{1+\varphi}}{(EI)_{sb,\tau}^*} \delta(\bar{\sigma}_b^*) - \frac{M E_b z_b}{(1+m+\varphi)(EI)_{sb,\tau}^*} = 0.$$

Последнее нелинейное уравнение легко решается численно, если известен вид функции напряжений  $f(\sigma)$ .

Более точное решение можно получить, используя квадратурные формулы для интегралов, соответствующих  $\Delta^*$  и  $\mu^*$ . Удобным представляется воспользоваться формулой Симпсона. В этом случае будут определяться напряжения нижних и верхних волокна бетонного сечения, а также в его центре тяжести.

Пусть:

$$\sigma|_{z=z_b+h/2} = \sigma_1; \quad \sigma|_{z=z_b} = \sigma_2; \quad \sigma|_{z=z_b-h/2} = \sigma_3;$$

$$\delta(\sigma_1) = \delta_1; \quad \delta(\sigma_2) = \delta_2; \quad \delta(\sigma_3) = \delta_3.$$

В этих обозначениях:

$$\Delta^* = \frac{1}{A_b} \int_{A_b} \delta(\sigma_b^*(z)) dA_b = \frac{1}{6} (\delta_1 + 4\delta_2 + \delta_3);$$

$$\begin{aligned}\mu^* &= \frac{1}{A_b} \int_{A_b} \delta(\sigma_b^*(z)) z dA_b = \frac{1}{6} \left( \delta_1 \left( z_b + \frac{h}{2} \right) + 4\delta_2 z_b + \delta_3 \left( z_b - \frac{h}{2} \right) \right) = \\ &= \frac{1}{6} (\delta_1 + 4\delta_2 + \delta_3) z_b + \frac{\delta_1 - \delta_3}{12} h = \Delta^* z_b + \frac{\delta_1 - \delta_3}{12} h;\end{aligned}$$

$$s_1(\Delta^*, \mu^*) = \frac{m}{1+m+\varphi} \left( \left( 1 + \frac{m}{1+m+\varphi} \cdot \frac{E_b A_b z_b^2}{(1+\varphi)(EI)_{sb,\tau}^*} \right) \Delta^* - \frac{E_b A_b z_b}{(1+\varphi)(EI)_{sb,\tau}^*} \mu^* \right);$$

$$s_2(\Delta^*, \mu^*) = -\frac{E_b A_b}{(EI)_{sb,\tau}^*} \frac{h}{2} \left( \mu^* - \frac{m}{1+m+\varphi} \Delta^* z_b \right).$$

В этих обозначениях система (139) приводится к эквивалентной системе:

$$\begin{cases} f(\sigma_1^*) - \frac{M_{beam} E_b}{(1+\varphi)(EI)_{\Sigma}^*} \left( \frac{1+\varphi}{1+m+\varphi} z_b + \frac{h}{2} \right) - s_1(\Delta^*, \mu^*) + s_2(\Delta^*, \mu^*) = 0; \\ f(\sigma_2^*) - \frac{M_{beam} E_b z_b}{(1+m+\varphi)(EI)_{\Sigma}^*} - s_1(\Delta^*, \mu^*) = 0; \\ f(\sigma_3^*) - \frac{M_{beam} E_b}{(1+\varphi)(EI)_{\Sigma}^*} \left( \frac{1+\varphi}{1+m+\varphi} z_b - \frac{h}{2} \right) - s_1(\Delta^*, \mu^*) + s_2(\Delta^*, \mu^*) = 0. \end{cases} \quad (142)$$

В качестве начального приближения при решении системы (142) можно взять упругое решение. В принятой системе координат:

$$\begin{cases} \sigma_1^{(0)} = \frac{M_{beam} E_b}{(1+\varphi)(EI)_{sb,\tau}^*} \left( \frac{1+\varphi}{1+m+\varphi} z_b + \frac{h}{2} \right); \\ \sigma_2^{(0)} = \frac{M_{beam} E_b}{(1+\varphi)(EI)_{sb,\tau}^*} \frac{1+\varphi}{1+m+\varphi} z_b; \\ \sigma_3^{(0)} = \frac{M_{beam} E_b}{(1+\varphi)(EI)_{sb,\tau}^*} \left( \frac{1+\varphi}{1+m+\varphi} z_b - \frac{h}{2} \right). \end{cases} \quad (143)$$

Вид функции напряжений  $f(\sigma)$  можно взять, как и ранее, в соответствии с формулой Сарджина зависимости напряжений от относительных деформаций ([34], [50]):

$$\sigma_b(\eta) = R_* \frac{\eta(k-\eta)}{1+(k-2)\eta},$$

где обозначено

$$k = \frac{E_b \varepsilon_{b0}}{R_*};$$

$$\eta = \frac{\varepsilon}{\varepsilon_{bo}};$$

$\varepsilon_{bo}$  – величина относительной деформации, соответствующая  $R_*$  (табличная величина);

$$R_* = \begin{cases} R_{b,ser} & \text{– в расчетах по деформациям} \\ R_b & \text{– в расчетах по прочности.} \end{cases}$$

В формуле Сарджина функция  $\sigma_b(\eta)$  не является нечетной, т.е. несимметрична относительно начала координат и вид формулы будет меняться при смене знака относительных деформаций. Поскольку предполагается, что бетон сжат в любом сечении, то для отрицательных значений относительных деформаций напряжения должны также быть отрицательными. Тем самым, формулу можно переписать в следующем виде:

$$\sigma_b(\eta) = R_* \frac{\eta(k + \eta)}{1 - (k - 2)\eta}, \quad \eta < 0.$$

Полагая в (8) интеграл равным 0, имеем:

$$f(\sigma_b(z, 0)) = E_b(0)\varepsilon_b(z, 0).$$

Воспользовавшись вместо  $f(\sigma_b(z, 0))$  формулой Сарджина можно выразить относительные деформации через напряжение:

$$\eta = \frac{\varepsilon}{\varepsilon_{bo}} = \frac{1}{2} \left( - \left( k + (k - 2) \frac{\sigma}{R_*} \right) \pm \sqrt{\left( k + (k - 2) \frac{\sigma}{R_*} \right)^2 + 4 \frac{\sigma}{R_*}} \right) \Rightarrow$$

$$f(\sigma) = \frac{E_b \varepsilon_{bo}}{2} \left( - \left( k + (k - 2) \frac{\sigma}{R_*} \right) + \sqrt{\left( k + (k - 2) \frac{\sigma}{R_*} \right)^2 + 4 \frac{\sigma}{R_*}} \right). \quad (144)$$

В скобках взят корень со знаком «плюс», поскольку в этом случае  $f(\sigma)|_{\sigma=0} = 0$  (вторая ветвь не рассматривается).

С учетом (144) функция  $\delta(\sigma)$  запишется следующим образом:

$$\delta(\sigma) = \frac{E_b \varepsilon_{bo}}{2} \left( - \left( k + (k - 2) \frac{\sigma}{R_*} \right) + \sqrt{\left( k + (k - 2) \frac{\sigma}{R_*} \right)^2 + 4 \frac{\sigma}{R_*}} \right) - \sigma. \quad (145)$$

При малых значениях  $\left| \frac{\sigma}{R_*} \right| \ll 1$  функция напряжений  $f(\sigma)$  имеет

«традиционный» вид:

$$\bar{f}(\sigma) \approx \sigma - \left( \frac{k-1}{k} \right)^2 \frac{\sigma^2}{R_*}. \quad (146)$$

При величинах  $\left| \frac{\sigma}{R_*} \right| > 0.5$  приближение становится плохим (см. рис. 25;

графики построены для бетона класса В25).

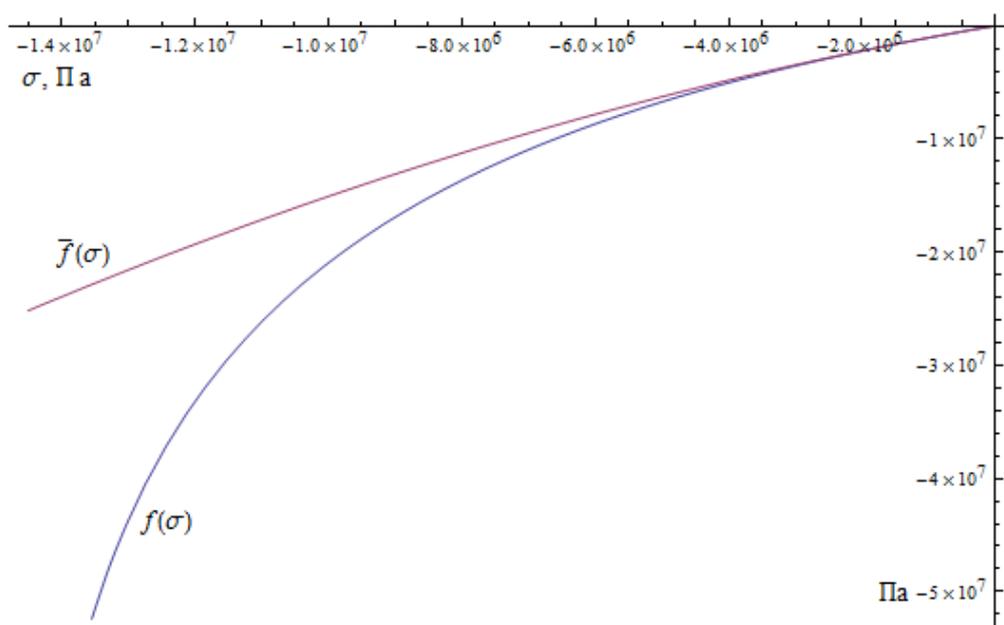


Рис. 25

### 4.3. Примеры расчета асимптотических напряжений в бетоне

Полученные результаты можно проиллюстрировать примерами.

Рассмотрим следующие СЖБ-балки:

1) пролет 8 м; бетон (2 варианта) – классов В10 и В25; бетонное сечение – ширина 1.5 м, высота 0.12 м; стальная балка – двутавр 40Б1 (по ГОСТ Р 57837-2017),  $H_s = 0.396$  м,  $A_s = 72.16 \cdot 10^{-4}$  м<sup>2</sup>,  $I_s = 20020 \cdot 10^{-8}$  м<sup>4</sup>;

2) пролет 35 м; бетон (2 варианта) – классов В35 и В50; бетонное сечение – ширина 2 м, высота 0.15 м; стальная балка – сварной двутавр,  $H_s = 1.006$  м,  $A_s = 0.0362$  м<sup>2</sup>,  $I_s = 0.00584$  м<sup>4</sup>.

Второй вариант взят из статьи [45] (в статье имеется опечатка – значение момента инерции указано  $I_s = 0.0584 \text{ м}^4$ ).

На рисунках 26-29 приведены графики напряжений в крайних волокнах в бетонной плите в зависимости от нагрузки для вариантов 1) и 2) соответственно. На рисунках 30, 31 – то же для стальных балок. Результаты расчета по линейной и нелинейной теории совмещены. В иллюстративных целях максимальная нагрузка принята заведомо большой.

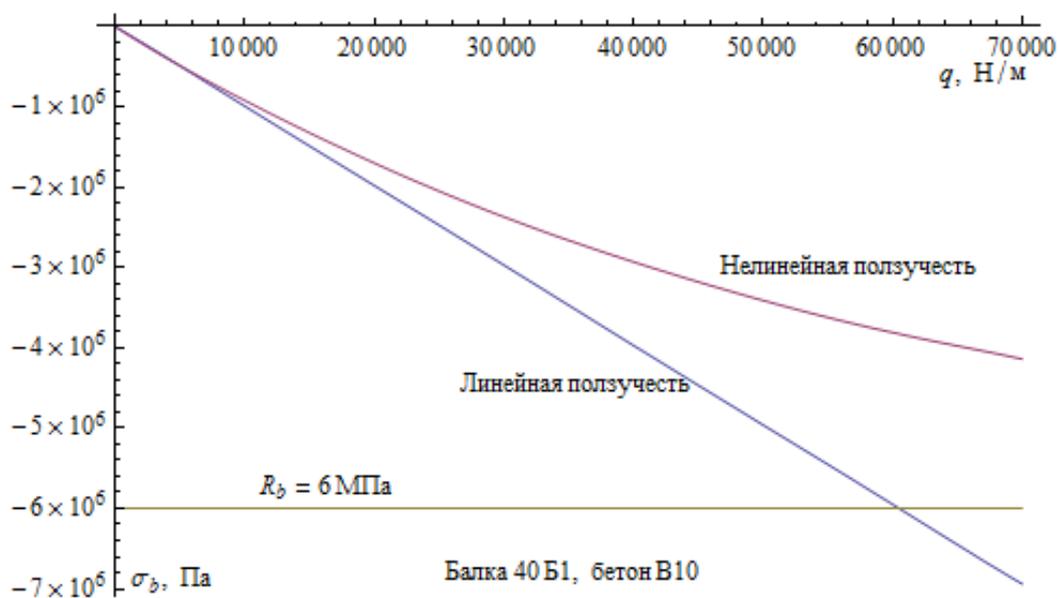


Рис. 26

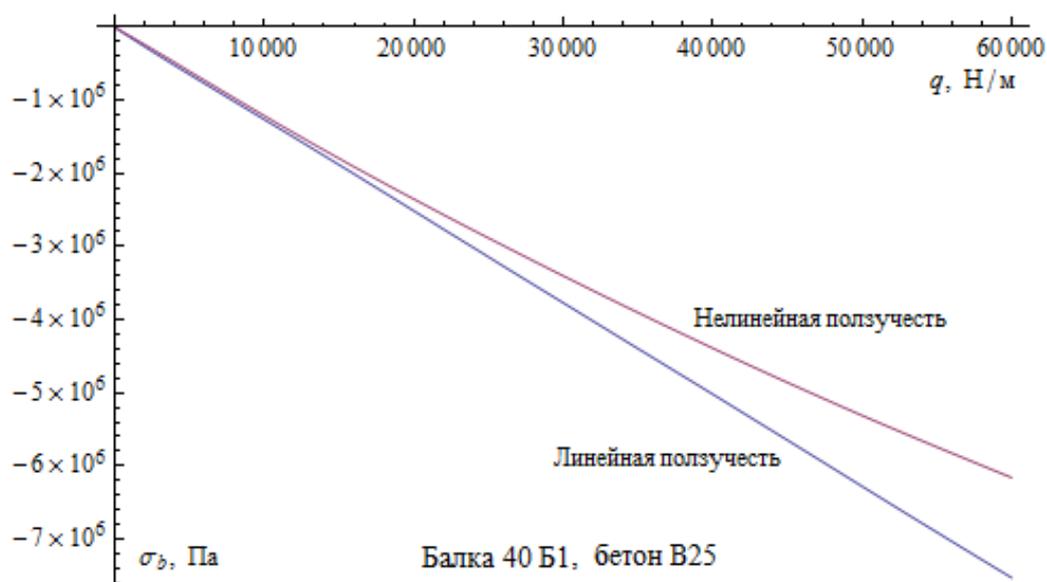


Рис. 27

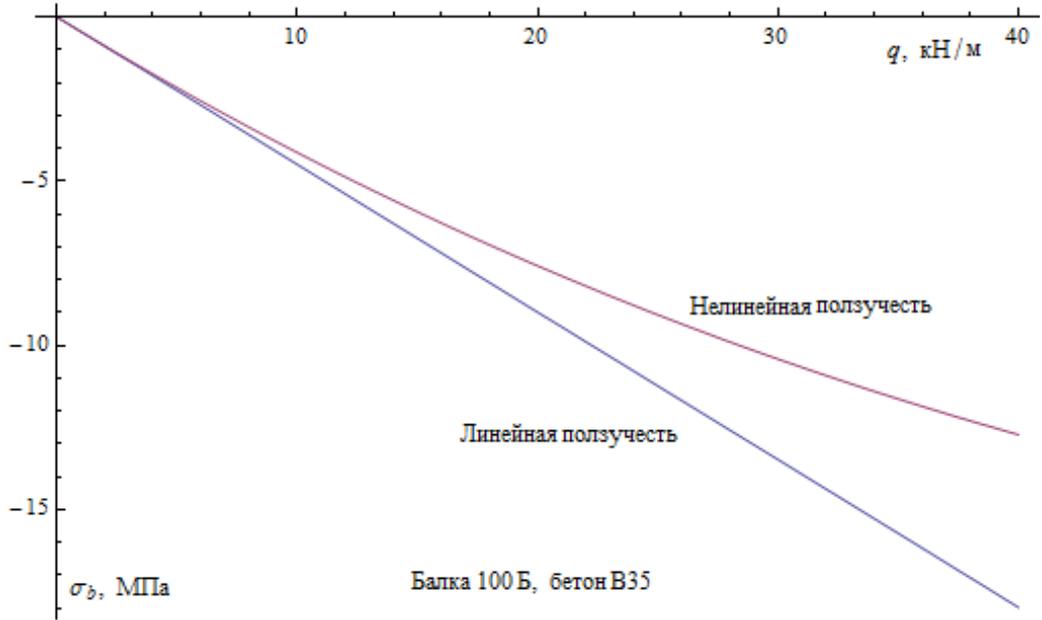


Рис. 28

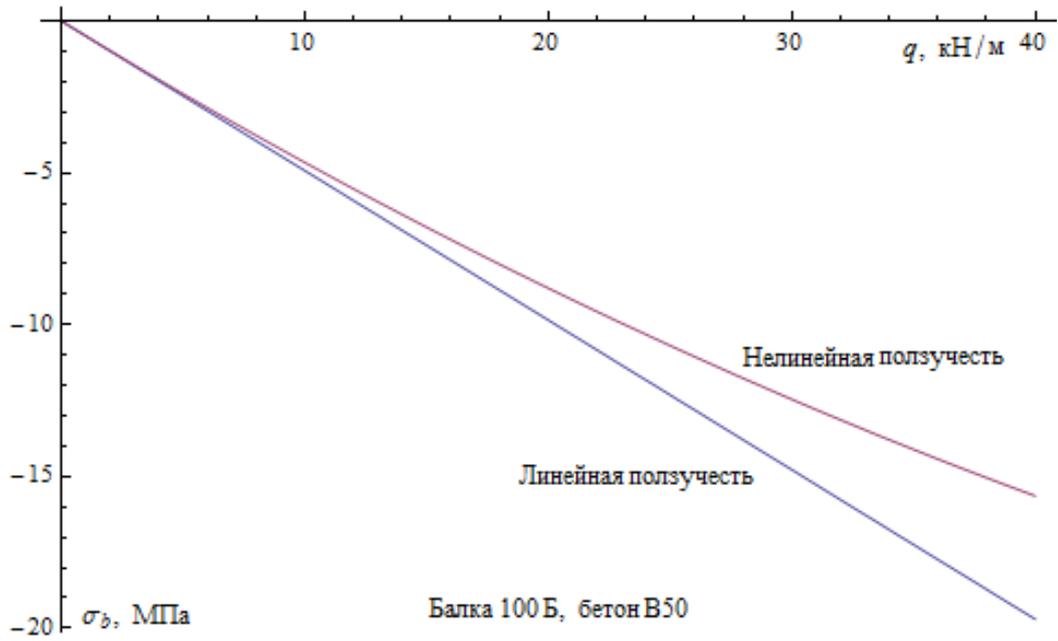


Рис. 29

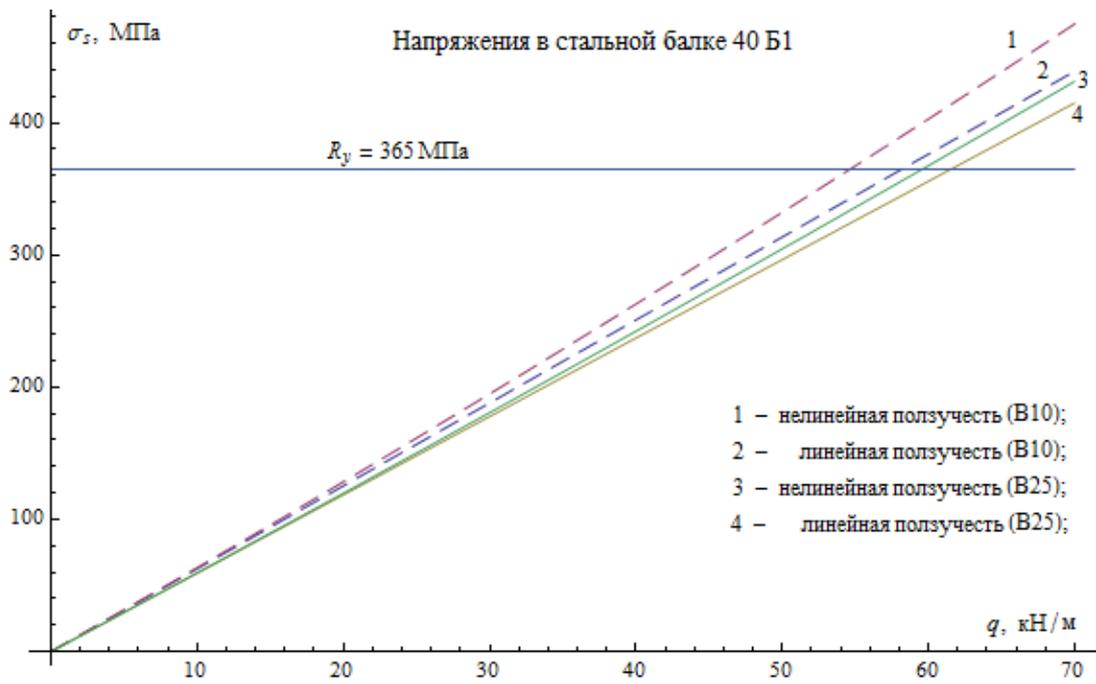


Рис. 30

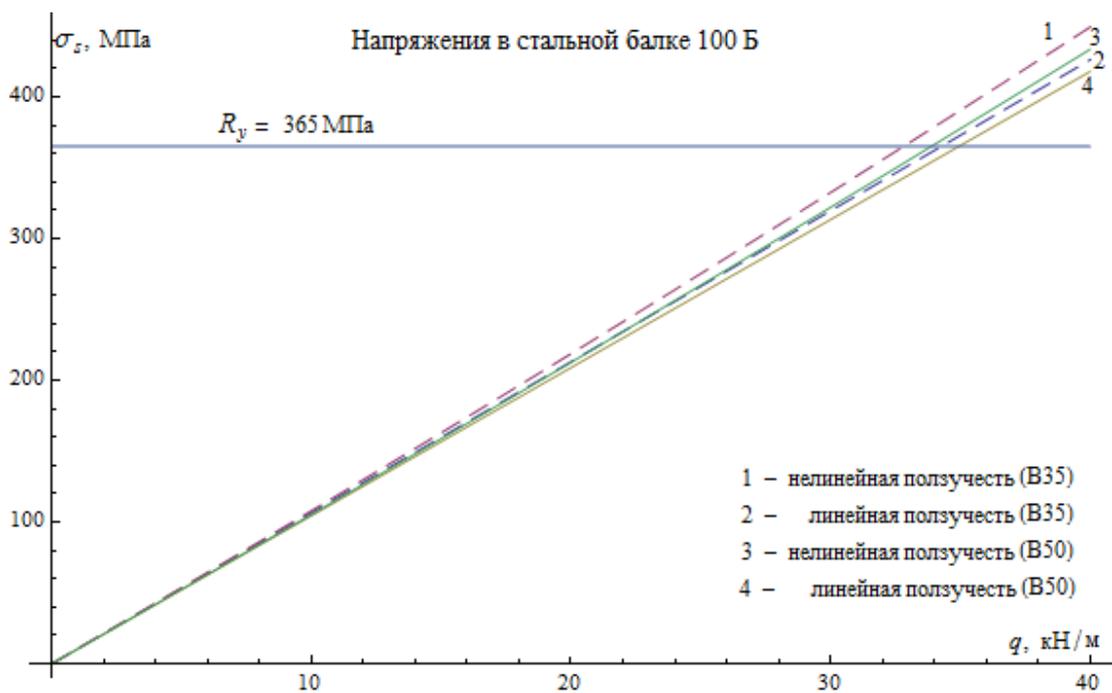


Рис. 31

Величины нагрузки, соответствующие достижению в стальных балках напряжения  $R_y = 365$  МПа (предельная нагрузка по упругой работе стальных балок) приведены в Табл.11, где обозначено:  $q_{\text{НелинРасч}}$  – нелинейный расчет для

кратковременного нагружения (расчет не приводится);  $q_{\text{ЛинПолз}}$  – линейная ползучесть;  $q_{\text{НелинПолз}}$  – нелинейная ползучесть.

Таблица 11

### Предельные погонные нагрузки в расчетах у учетом ползучести

	40Б1		100Б	
	В10	В25	В35	В50
$q_{\text{НелинРасч}}, \text{кН} / \text{м}$	60,29	66,58	35,18	36,17
$q_{\text{ЛинПолз}}, \text{кН} / \text{м}$	58,20	61,56	34,26	34,94
$q_{\text{НелинПолз}}, \text{кН} / \text{м}$	54,65	59,60	32,81	33,88

Поскольку процессы ползучести достаточно сильно растянуты во времени и при этом происходит перераспределение внутренних усилий между бетонной плитой и стальной балкой в сторону увеличения напряжений в последней, то имеется некоторый запас по упругой работе стальных балок при кратковременном нагружении. Из таблицы видно, эта величина составляет  $\approx 10\%$  для первой модельной балки и  $\approx 7\%$  для второй. Это обстоятельство представляется важным учитывать для практических применений.

В работе [45] СЖБ-балка рассматривается по упрощенной модели без учета изгибной жесткости бетонной плиты. Непосредственно в статье взята квадратичная нелинейность, но ничто не мешает использовать функцию напряжений в виде (144). Реализованный в ней подход позволяет сильно упростить анализ, поскольку вместо системы из двух уравнений (относительно  $\dot{u}(t)$  и  $N_s(t)$ ) рассматривается только одно уравнение относительно  $N_s(t)$ . Получаемая точность вполне приемлема для определения напряжений в стальной балке. Однако в упрощенной модели нельзя дать точную оценку максимальных напряжений в бетоне.

### Выводы по четвёртой главе

Численные эксперименты позволяют сделать следующие выводы:

1. Разница в максимальных напряжениях в бетоне в расчетах, учитывающих линейную и нелинейную ползучесть, становится существенной только при высоких уровнях нагружений. При этом средние напряжения по бетонному сечению отличаются незначительно. Т.е. при нелинейной работе бетона имеет место выравнивание напряжений в бетонном сечении по высоте.

2. Корректная оценка максимальных напряжений в бетонной части сечения СЖБ-балки при высоких уровнях нагружений может быть проведена только с учетом нелинейной работы бетона, как при мгновенном нагружении, так и при длительном, т.е. с учетом нелинейной ползучести.

3. Значения максимальных напряжений в стальной балке в расчетах, учитывающих линейную и нелинейную ползучесть, даже при высоких уровнях нагружений отличается незначительно.

4. В СЖБ-балках в нелинейном расчете первыми всегда начинают «течь» стальные балки. При этом исчерпание несущей способности (в расчете по предельным состояниям) первым происходит в бетоне (достижение предельных относительных деформаций в верхнем волокне  $\varepsilon_{b2}$ )

5. Поскольку нагрузка, отвечающая пределу упругой работы стальных балок, в случае учета нелинейной ползучести ниже, чем при мгновенном (кратковременном) нагружении, то эту разницу можно считать запасом по кратковременному нагружению.

6. То обстоятельство, что разница в напряжениях (максимальных и средних) в стальной балке в расчетах с учетом линейной и нелинейной ползучести невелика, позволяет делать вывод о приемлемости расчетов стальных балок в составе СЖБ-балок в статически неопределимых системах с использованием МКЭ (SCAD, ЛИРА и т.п.). Для длительных нагрузок достаточно использовать для бетона начальный модуль деформации вида

$E_{b,\tau} = \frac{E_b}{1 + \varphi_{b,cr}}$ . При этом, полученные напряжения в бетонной части сечения, будут

требовать перерасчета, который можно производить по моментам или

напряжениям в стальной балке из расчета SCAD по формулам настоящей работы.

## ЗАКЛЮЧЕНИЕ

К основным результатам диссертационной работы можно отнести следующие:

1. Получена разрешающая система нелинейных уравнений, для определения напряжений в СЖБ балке в случае мгновенного (кратковременного) нагружения.

2. Получена разрешающая система интегральных уравнений ползучести для СЖБ-балок в линейной постановке, выписано ее решение в резольвентах, а также асимптотическое решение для случая теории упругой наследственности.

3. Получена разрешающая система интегральных уравнений ползучести для СЖБ-балок в нелинейной постановке, выписано ее асимптотическое решение для случая теории упругой наследственности.

4. Полученные разрешающие уравнения для мгновенного нагружения могут быть применены и к расчету обычных железобетонных балок, поскольку никаких ограничений геометрической связности на стальное сечение не накладывалось.

5. Результаты, учитывающие нелинейную работу СЖБ-балки при мгновенном нагружении, а также линейную и нелинейную ползучесть, позволяют оценивать напряжения в СЖБ-балке до момента образования зоны текучести в стальной балке (после чего необходим расчет по предельным состояниям 1-й группы).

6. Обоснована возможность использования систем САПР (ЛИРА, SCAD, и т.п.), в расчетах СЖБ-балок с последующим уточнением напряжений в бетоне, поскольку нелинейная работа бетона сравнительно слабо сказывается на работе стальной балки и ее прогибах.

7. Полученные результаты позволяют оптимизировать подбор параметров СЖБ-балок, тем самым давая возможность достигать экономии бетона и стали.

8. Выписанные в явном виде системы нелинейных уравнений могут быть численно решены в современных расчетных комплексах символьной математики, таких как Mathematica, Maple, MathCad и т.п., что делает ее доступной в использовании в повседневной инженерной практике.

### БИБЛИОГРАФИЧЕСКИЙ СПИСОК

1. Арутюнян, Н.Х. Расчет строительных конструкций с учетом ползучести/ Н.Х.Арутюнян, А.А.Зевин; М.: Стройиздат, 1988.– 357с.
2. Арутюнян, Н.Х. Некоторые вопросы теории ползучести/ Н.Х.Арутюнян; Гостехтеориздат, 1952 -323 с.
3. Байков, В.Н. Построение зависимости между напряжениями и деформациями сжатого бетона по системе нормируемых показателей./ В. Н.Байков, С.В.Горбатов, З.А.Димитров // Изв. вузов. Сер.: Стр-во и архитектура. - 1977. - № 6. С. 15–18.
4. Беглов, А.Д. Теория расчета железобетонных конструкций на прочность и устойчивость. Современные нормы и евростандарты/ А.Д.Беглов, Р.С. Санжаровский; Санкт-Петербург – Москва, изд. АСВ, 2006 – 221 с.
5. Бельский Г. Е., Одесский П. Д. О едином подходе к использованию диаграмм работы строительных сталей // Промышленное строительство. 1980. № 7. С. 4–6.
6. Бондаренко, В.М. Инженерные методы нелинейной теории железобетона/ В.М.Бондаренко, С.В.Бондаренко; М.: Стройиздат, 1982. – 287 с.
7. Варламов А. А., Шишлонов Е. А., Ткач Е. Н., Шумилин М. С., Гончаров Д. В. Закономерности связи напряжений и деформаций в бетоне/ А. А. Варламов, Е. А. Шишлонов, Е. Н. Ткач, М. С. Шумилин, Д. В. Гончаров// Academy (научно-методический журнал). – 2016. – № 2 (5). – с. 7-17.
8. Галустов, К.З. Нелинейная теория ползучести бетона и расчет железобетонных конструкций/К.З.Галустов; М.: Физматлит, 2006. – 248 с.
9. Гениев, Г.А. Теория пластичности бетона и железобетона/ Г.А.Гениев, В.Н. Киссюк, Г.А.Тюпин; М. Стройиздат, 1978. – 316 с
10. Гипшман, М.Е. Теория и расчет предварительно напряженных железобетонных мостов с учетом длительных деформаций/М.Е.Гипшман; М.: Транспорт, 1966. – 336 с.
11. Грудев И. Д. Устойчивость стержневых элементов в составе стальных конструкций. М.: МИК, 2005. 320 с.

12. *Замалиев, Ф.С.* Прочность и деформативность сталежелезобетонных изгибаемых конструкций гражданских зданий при различных видах нагружения: дис. ... д-ра тех. наук: 05.23.01/Ф.С. Замалиев, Казань, 2013. – 379 с.
13. *Замалиев Ф.С., Биккинин Э.Г.* Экспериментальные исследования сталежелезобетонных балок таврового сечения / Ф.С. Замалиев, Э.Г. Биккинин// Известия КазГАСУ. 2014. № 4 (30). С. 134–138.
14. *Замалиев Ф.С., Шаймарданов Р.И.* Экспериментальные исследования сталежелезобетонных конструкций на крупномасштабных моделях / Ф.С. Замалиев, Р.И. Шаймарданов // Известия КазГАСУ. 2008. № 2 (10). С. 47–52.
15. *Ильин, В.П.* Расчет строительных конструкций из вязко-упругих материалов/ В.П.Ильин, Л.Е.Мальцев, В.Г.Соколов; Ленинград. Стройиздат, 1991. – 190 с.
16. *Ильюшин, А.А.* Пластичность. ОГИЗ/ А.А.Ильюшин; Государственное издательство технико-теоретической литературы, 1949.
17. *Карпенко, Н. И.* Общие модели механики железобетона/Н.И.Карпенко; М.: Стройиздат,1996. – 413с.
18. *Корнеев, М.М.* Сталежелезобетонные мосты. Пособие по проектированию мостов/ М.М.Корнеев; Санкт-Петербург, ФГБОУ ВПО ПГУПС, 2015.
19. *Корнеев, М.М.* Стальные мосты. Теоретическое и практическое пособие по проектированию мостов в трех томах/ М.М.Корнеев; Киев, 2010. – 2 т.
20. *Лукаш, П.А.* Основы нелинейной строительной механики/ П.А.Лукаш; Москва, Стройиздат, 1978. – 204 с.
21. *Малинин, Н.Н.* Прикладная теория пластичности и ползучести/ Н.Н. Малинин; Москва, Машиностроение, 1975.– 399с.
22. Методические рекомендации по расчету напряженного состояния железобетонных конструкций транспортных сооружений с учетом ползучести и усадки бетона/ К.: НИИСК Госстроя СССР, 1981. – 73 с.
23. *Попов, Н.Н.* Проектирование и расчет железобетонных конструкций/ Н.Н. Попов, А.В.Забегаяев; М.: Высшая школа, 1985. – 319 с.
24. *Прокопович, И.Е.* Основы прикладной линейной теории ползучести/И.Е. Прокопович; Киев: Вища школа, 1978.
25. *Прокопович И.Е.* Прикладная теория ползучести/И.Е.Прокопович, В.А. Зегденидзе; Москва, Строиздат, 1980. – 240 с.
26. *Работнов, Ю.Н.* Ползучесть элементов конструкций/ Ю.Н.Работнов; М., Наука, 1966. – 752 с,

27. *Работнов Ю.Н.* Элементы наследственной механики твердых тел/ Ю.Н. Работнов; М., Наука, Ф-М, 1977 – 384 с.
28. *Радайкин О.В.* Сравнительный анализ различных диаграмм деформирования бетона по критерию энергозатрат на деформирование и разрушение //Вестник БГТУ им. Шухова. – 2019. - №9. – с.29-39.
29. *Ржаницын А.Р.* Теория ползучести/ А.Р.Ржаницын; М., СИ, 1968. – 418 с.
30. *Самуль В.И.* Основы теории упругости и пластичности/ В.И.Самуль; М.: Высшая школа, 1982. – 264 с.
31. *Санжаровский, Р.С.* Ошибки в теории ползучести железобетона и современные нормы/ Р.С.Санжаровский, М.М.Манченко //Строительная механика инженерных конструкций и сооружений. - 2016. - №3. – с.25-32.
32. *Санжаровский, Р.С.* Нелинейная теория ползучести бетона и железобетона и современные нормы/ Р.С.Санжаровский, М.М.Манченко// Строительная механика инженерных конструкций и сооружений. – 2017. - №1.
33. *Селяев В. П., Селяев П. В., Сорокин Е.В., Алимов М. Ф.* Аналитическое описание диаграмм деформирования бетона для расчета прогибов пластин из нелинейно деформируемого материала/ В. П. Селяев, П. В. Селяев, Е. В. Сорокин, М. Ф. Алимов // Строительство и реконструкция. – 2018. – №3 (77). – с. 22-29
34. СП 159.1325800.2014 «Сталежелезобетонные пролетные строения автодорожных мостов. Правила расчета». – введ. с 2014-09-01. – М.: Минстрой России, ФАУ "ФЦС", 2014
35. СП 16.13330.2017 «Стальные конструкции. Актуализированная редакция СНиП II-23-81\* (с Поправками, с Изменениями №1, 2) – введ. с 2017-09-28. – М.: Минстрой России, 2017.
36. СП 266.1325800.2016 «Конструкции сталежелезобетонные. Правила проектирования (с Изменением №1, с Поправкой)». – введ. с 2017-07-01. – М.: Минстрой России, 2016
37. СП 63.13330.2018 «Бетонные и железобетонные конструкции. Основные положения. Актуализированная редакция СНиП 52-01-2003 (с Изменениями №1, 2, 3)» . – введ. с 2018-12-19. – М.: Минстрой России, 2018
38. *Стрелецкий, Н.С.* Металлические конструкции /Н.С.Стрелецкий [и др.]; под ред. Н.С.Стрелецкого. - М.: Гос. Изд. По строительству, архитектуре и строительным материалам, 1961. – 776 с.
39. *Стрелецкий, Н.Н.* Сталежелезобетонные мосты /Н.Н.Стрелецкий; М.:Транспорт, 1965. – 376 с.

40. *Стрелецкий Н.Н.* Сталежелезобетонные пролетные строения мостов/Н.Н. Стрелецкий; М.: Транспорт, 1981. – 360 с.
41. *Тамразян, А.Г.* Механика ползучести бетона / А.Г.Тамразян, С.Г.Есяян; М-во образования и науки Росс. Федерации, ФГБОУ ВПО «Моск. гос. строит. ун-т». — Москва : МГСУ, 2012. — 524 с.
42. *Тимошенко, С.П.* Сопротивление материалов /С.П.Тимошенко; Москва: Наука, 1965. – 2 т.
43. *Улицкий, И.И.* Определение величин деформаций ползучести и усадки бетонов/И.И.Улицкий; Госстройиздат УССР. Киев, 1963. - 134 с.
44. *Харлаб В.Д.* Принципиальные вопросы линейной теории ползучести (с привязкой к бетону) / В.Д.Харлаб; СПбГАСУ. – СПб, 2014. – 207 с.
45. *Харлаб, В.Д.* О расчете сталежелезобетонных балок с учетом линейной и нелинейной ползучести бетона/ В.Д.Харлаб, К.В.Козлов //Вестник гражданских инженеров. – 2015. - 3(50). - 109-114 с.
46. *Чепилко, С.О.* Расчет сталежелезобетонной балки при мгновенном нагружении с учетом нелинейности диаграммы  $\epsilon$ – $\sigma$  бетона// Вестник гражданских инженеров. – 2020. - 2(79). - 85-94 с.
47. *Чепилко, С.О.* Линейная ползучесть в сталежелезобетонных балках// Вестник гражданских инженеров. – 2019. - 4(81). - 157-165 с.
48. *Чепилко, С.О.* Нелинейная ползучесть в сталежелезобетонной балке// Вестник гражданских инженеров. – 2020. - 5(82). - 108-116 с.
49. *Чепилко, С.О.* Уточненный расчет сталежелезобетонных комплексных балок по предельным состояниям. – 2021. - 6(89). – 51-65 с.
50. EN 1992 Eurocode 2: Design of concrete structures. Part 1: General rules and rules for buildings. Brussels: European Committee for Standardization, 2001, p. 225