

**МИНИСТЕРСТВО ОБРАЗОВАНИЯ И НАУКИ РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ**

Федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение высшего профессионального образования «Санкт-Петербургский государственный архитектурно-строительный университет»

На правах рукописи

Семенов Алексей Александрович

**ГЕОМЕТРИЧЕСКИ НЕЛИНЕЙНАЯ МАТЕМАТИЧЕСКАЯ МОДЕЛЬ РАСЧЕТА  
ПРОЧНОСТИ И УСТОЙЧИВОСТИ ОРТОТРОПНЫХ ОБОЛОЧЕЧНЫХ  
КОНСТРУКЦИЙ**

Специальность 05.23.17 – Строительная механика

**Диссертация**  
на соискание ученой степени  
кандидата технических наук

Научный руководитель:  
доктор технических наук,  
профессор Карпов В.В.

Санкт-Петербург – 2014 г.

# ОГЛАВЛЕНИЕ

ОГЛАВЛЕНИЕ .....	2
ОСНОВНЫЕ ОБОЗНАЧЕНИЯ И СОКРАЩЕНИЯ .....	4
ВВЕДЕНИЕ .....	7
ГЛАВА 1. МАТЕМАТИЧЕСКАЯ МОДЕЛЬ ДЕФОРМИРОВАНИЯ ТОНКОСТЕННЫХ ОРТОТРОПНЫХ ОБОЛОЧЕК, ПОДКРЕПЛЕННЫХ РЕБРАМИ ЖЕСТКОСТИ.....	28
1.1 ОБОБЩЕННЫЙ ЗАКОН ГУКА ДЛЯ АНИЗОТРОПНОГО, ОРТОТРОПНОГО И ИЗОТРОПНОГО ТЕЛА .....	29
1.2 ГЕОМЕТРИЧЕСКИЕ СООТНОШЕНИЯ ТЕОРИИ ОБОЛОЧЕК.....	34
1.3 ФИЗИЧЕСКИЕ СООТНОШЕНИЯ ТЕОРИИ УПРУГИХ ОБОЛОЧЕК С УЧЕТОМ ОРТОТРОПИИ МАТЕРИАЛА .....	38
1.4 УЧЕТ ПОДКРЕПЛЕНИЯ ОБОЛОЧКИ РЕБРАМИ ЖЕСТКОСТИ.....	40
1.4.1 Задание расположения ребер .....	40
1.4.2 Метод конструктивной анизотропии .....	41
1.5 ФУНКЦИОНАЛ ПОЛНОЙ ЭНЕРГИИ ДЕФОРМАЦИИ ОБОЛОЧЕК, ПОДКРЕПЛЕННЫХ РЕБРАМИ .....	44
1.6 КРАЕВЫЕ УСЛОВИЯ.....	47
1.7 ВЫВОДЫ.....	48
ГЛАВА 2. АЛГОРИТМЫ ИССЛЕДОВАНИЯ ПРОЧНОСТИ И УСТОЙЧИВОСТИ ОРТОТРОПНЫХ ОБОЛОЧЕК .....	50
2.1 МЕТОД РИТЦА ДЛЯ СВЕДЕНИЯ ВАРИАЦИОННОЙ ЗАДАЧИ К СИСТЕМЕ НЕЛИНЕЙНЫХ АЛГЕБРАИЧЕСКИХ УРАВНЕНИЙ .....	50
2.1.1 Выбор аппроксимирующих функций для различных видов закрепления контура оболочки .....	51
2.1.2 Минимизация функционала полной энергии деформации оболочки методом Ритца и получение системы нелинейных алгебраических уравнений (СНАУ) .....	53
2.2 ЛИНЕАРИЗАЦИЯ СНАУ МЕТОДОМ ПРОДОЛЖЕНИЯ РЕШЕНИЯ ПО НАИЛУЧШЕМУ ПАРАМЕТРУ.....	55
2.2.1 Метод продолжения решения по параметру .....	55
2.2.2 Метод продолжения решения по наилучшему параметру.....	62
2.3 МЕТОДИКА ИССЛЕДОВАНИЯ ПРОЧНОСТИ ОБОЛОЧЕК ИЗ ОРТОТРОПНЫХ МАТЕРИАЛОВ .....	63
2.4 ПРОГРАММА РАСЧЕТА ПРОЧНОСТИ И УСТОЙЧИВОСТИ ПОДКРЕПЛЕННЫХ ОРТОТРОПНЫХ ОБОЛОЧЕК .....	64
2.5 ВЫВОДЫ.....	69
ГЛАВА 3. АНАЛИЗ КРИТЕРИЕВ ПРОЧНОСТИ ДЛЯ ОРТОТРОПНЫХ МАТЕРИАЛОВ.....	71
3.1 КРИТЕРИИ ПРЕДЕЛЬНОГО СОСТОЯНИЯ МАТЕРИАЛА .....	71
3.2 НЕКОТОРЫЕ ОРТОТРОПНЫЕ МАТЕРИАЛЫ И ИХ МЕХАНИЧЕСКИЕ И ПРОЧНОСТНЫЕ ХАРАКТЕРИСТИКИ.....	81
3.3 ОБОСНОВАНИЕ ВЫБОРА КРИТЕРИЯ ДЛЯ ИССЛЕДОВАНИЯ ПРОЧНОСТИ ОБОЛОЧЕЧНЫХ КОНСТРУКЦИЙ .....	82
3.4 ВЫВОДЫ.....	91
ГЛАВА 4. ИССЛЕДОВАНИЕ ПРОЧНОСТИ ОРТОТРОПНЫХ ОБОЛОЧЕК БЕЗ УЧЕТА ГЕОМЕТРИЧЕСКОЙ НЕЛИНЕЙНОСТИ.....	92
4.1 ХАРАКТЕРИСТИКА РАССМАТРИВАЕМЫХ КОНСТРУКЦИЙ .....	92
4.2 ИССЛЕДОВАНИЕ ПРОЧНОСТИ ПОЛОГИХ ОБОЛОЧЕК ИЗ УГЛЕПЛАСТИКА 95	
4.3 ИССЛЕДОВАНИЕ ПРОЧНОСТИ ПАНЕЛЕЙ ЦИЛИНДРИЧЕСКИХ ОБОЛОЧЕК ИЗ УГЛЕПЛАСТИКА.....	100
4.4 ВЫВОДЫ.....	101

ГЛАВА 5. ИССЛЕДОВАНИЕ ПРОЧНОСТИ И УСТОЙЧИВОСТИ ОРТОТРОПНЫХ ОБОЛОЧЕК С УЧЕТОМ ГЕОМЕТРИЧЕСКОЙ НЕЛИНЕЙНОСТИ.....	102
5.1 ПРОЧНОСТЬ И УСТОЙЧИВОСТЬ КВАДРАТНЫХ В ПЛАНЕ ПОЛОГИХ ОБОЛОЧЕК.....	103
5.2 АНАЛИЗ ВЛИЯНИЯ УЧЕТА ГЕОМЕТРИЧЕСКОЙ НЕЛИНЕЙНОСТИ НА ПРОЧНОСТЬ ПОЛОГИХ ОБОЛОЧЕК .....	109
5.3 ПРОЧНОСТЬ И УСТОЙЧИВОСТЬ КВАДРАТНЫХ В ПЛАНЕ ПОЛОГИХ ОБОЛОЧЕК, ПОДКРЕПЛЕННЫХ РЕБРАМИ ЖЕСТКОСТИ.....	110
5.4 ПРОЧНОСТЬ И УСТОЙЧИВОСТЬ ПАНЕЛЕЙ ЦИЛИНДРИЧЕСКИХ ОБОЛОЧЕК.....	117
5.5 ПРОЧНОСТЬ И УСТОЙЧИВОСТЬ ПАНЕЛЕЙ КОНИЧЕСКИХ ОБОЛОЧЕК ..	124
5.6 ЗАКРИТИЧЕСКОЕ ПОВЕДЕНИЕ ОБОЛОЧЕК .....	129
5.7 ДОСТОВЕРНОСТЬ ПОЛУЧЕННЫХ РЕЗУЛЬТАТОВ .....	130
5.8 ВЫВОДЫ.....	133
ЗАКЛЮЧЕНИЕ.....	135
СПИСОК ИСПОЛЬЗОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ .....	138
ПРИЛОЖЕНИЯ .....	147

## ОСНОВНЫЕ ОБОЗНАЧЕНИЯ И СОКРАЩЕНИЯ

В работе приняты следующие обозначения и сокращения:

$x, y, z$  – ортогональная система координат в срединной поверхности оболочки;  $x, y$  – криволинейные координаты, направленные по линиям главных кривизн,  $z$  – координата, направленная в сторону вогнутости оболочки, перпендикулярно срединной поверхности;

$a, b, h$  – линейные размеры оболочки вдоль осей  $x, y, z$  [м];

$a_1$  – смещение конструкции от начала координат вдоль оси  $x$  [м];

$y_1(x), y_2(x)$  – функции, задающие форму контура конструкции

$R_1, R_2$  – главные радиусы кривизны оболочки вдоль осей  $x, y$  [м];

$d$  – смещение образующего сектора от оси вращения для тороидальной оболочки;

$A, B$  – параметры Ляме;

$\theta$  – угол конусности конической оболочки [рад];

$k_x, k_y$  – главные кривизны оболочки вдоль осей  $x, y$  [1/м];

$D$  – область, занимаемая оболочкой;

$U^z, V^z, W^z$  – перемещения вдоль осей  $x, y, z$  в слое, отстоящем на  $z$  от срединной поверхности [м];

$U, V, W$  – перемещения точек срединной поверхности вдоль осей  $x, y, z$  [м];

$\Psi_x, \Psi_y$  – углы поворота нормали в плоскостях  $XOZ, YOZ$  [рад];

$\varepsilon_x, \varepsilon_y, \varepsilon_z$  – деформации удлинения вдоль осей  $x, y, z$ ;

$\gamma_{xy}, \gamma_{xz}, \gamma_{yz}$  – деформации сдвига в плоскостях  $XOY, XOZ, YOZ$ ;

$\{\varepsilon\}$  – вектор деформаций;

$[S]$  – матрица податливости материала;

$[G]$  – матрица жесткости материала;

$[T_1], [T_2]$  – матрицы поворота осей ортотропии;

$E_1, E_2, E_3$  – модули упругости в направлениях  $x, y$  и  $z$  [МПа];

$G_{12}, G_{13}, G_{23}$  – модули сдвига в плоскостях  $XOY, XOZ, YOZ$  соответственно [МПа];

$\mu_{12}, \mu_{21}, \mu_{13}, \mu_{31}, \mu_{23}, \mu_{32}$  – коэффициенты Пуассона;

$E, \mu, G$  – модуль упругости, коэффициент Пуассона и модуль сдвига для изотропного материала;

$\varphi$  – угол укладки армирующих элементов относительно оси  $x$  [град];

$F_x^+, F_y^+$  – предел прочности при растяжении в направлениях  $x, y$  [МПа];

$F_x^-, F_y^-$  – предел прочности при сжатии в направлениях  $x, y$  [МПа];

$F_{yz}, F_{xz}, F_{xy}$  – пределы прочности при сдвиге в плоскостях  $YOZ, XOZ, XOY$  [МПа].  
 $\left\{ F^+ \right\}, \left\{ F^- \right\}$  – вектора предельных значений растягивающих и сжимающих напряжений соответственно;  
 $\sigma_x, \sigma_y, \sigma_z$  – нормальные напряжения в направлении осей  $x, y, z$  [МПа];  
 $\tau_{xy}, \tau_{xz}, \tau_{yz}$  – касательные напряжения в плоскостях  $XOY, XOZ, YOZ$  [МПа];  
 $f(z)$  – функция, задающая распределение напряжений  $\tau_{xz}, \tau_{yz}$  по толщине оболочки;  
 $k$  – числовой коэффициент, соответствующий выбранной функции  $f(z)$ ;  
 $N_x, N_y, N_{xy}, N_{yx}$  – нормальные усилия вдоль осей  $x, y$  и сдвиговые усилия в плоскости  $XOY$  [МПа·м];  
 $M_x, M_y, M_{xy}, M_{yx}$  – изгибающие моменты в направлении осей  $x, y$  и крутящие моменты [МПа·м<sup>2</sup>];  
 $Q_x, Q_y$  – поперечные (перерезывающие) силы в плоскостях  $XOZ, YOZ$  [МПа·м];  
 $\chi_1, \chi_2$  и  $\chi_{12}$  – функции изменения кривизн и кручения;  
 $\varepsilon_i, \sigma_i$  – интенсивности деформаций и напряжений б/р, [МПа];  
 $\sigma_T$  – предел текучести для изотропного материала [МПа];  
 $H(x, y)$  – функция, характеризующая расположение и высоту ребер у оболочки;  
 $r_i, r_j$  – ширина ребер, параллельных оси  $x$  и  $y$  соответственно [м];  
 $h^i, h^j$  – высота ребер, параллельных оси  $x$  и  $y$  соответственно [м];  
 $F_x = F_x(x, y), F_y = F_y(x, y), S_x = S_x(x, y), S_y = S_y(x, y), J_x = J_x(x, y), J_y = J_y(x, y)$  – площадь поперечного или продольного сечения ребра, приходящаяся на единицу длины сечения; статический момент и момент инерции этого сечения, являющиеся функциями координат  $x, y$ ;  
 $\mathcal{E}$  – функционал полной энергии деформации оболочки;  
 $U(I), V(I), W(I), PS(I), PN(I)$  – неизвестные числовые параметры при разложении искомым функций в ряды;  
 $N$  – количество членов разложения искомым функций в ряды по методу Рунге;  
 $C1(I, l) - C25(I, l)$  – коэффициенты линейных членов в СНАУ;  
 $A1(l) - A5(l)$  – нелинейные составляющие СНАУ;  
 $X$  – вектор неизвестных числовых параметров;  
 $P$  – параметр нагрузки;  
 $\tilde{X}$  – вектор неизвестных числовых параметров, включая параметр нагрузки;  
 $F(X, P)$  – вектор-функция, характеризующая СНАУ;  
 $\lambda$  – длина дуги множества решений;

$J$  – матрица Якоби вектор-функции  $F$  ;  
 $\bar{J}$  – расширенная матрица Якоби вектор-функции  $F$  ;  
 $q$  – значение нагрузки [МПа];  
 $q_{kr}$  – значение критической нагрузки [МПа];  
 $q_{lin}$  – значение нагрузки потери прочности при линейном варианте расчета [МПа];  
 $q_{nlin}$  – значение нагрузки потери прочности при нелинейном варианте расчета [МПа];  
 $a$  – безразмерный параметр, характеризующий линейный размер пологой оболочки;  
 $k_{\xi}, k_{\eta}$  – обобщенные параметры кривизны пологой оболочки;  
 $\lambda_1$  – отношение линейных размеров панели цилиндрической оболочки;

## ВВЕДЕНИЕ

### **Актуальность темы исследования.**

В современном строительстве, а также в судостроении, машиностроении, авиастроении и других областях промышленности, большое применение получают конструкции в виде оболочек (Рисунок В.1–В.2) [25, 32, 38, 56, 71, 74, 79, 101, 123, 139, 140, 161, 164]. В настоящее время появились композитные материалы [13, 44, 48, 93, 120, 121, 158], обладающие высокой прочностью, огнеупорностью, химической и коррозионной стойкостью, легкостью и др., и их применение при проектировании оболочечных конструкций заслуживает особого внимания. Так как армирующие элементы в материале часто располагают вдоль осей криволинейной системы координат оболочки, то такие конструкции можно считать ортотропными [110, 152].

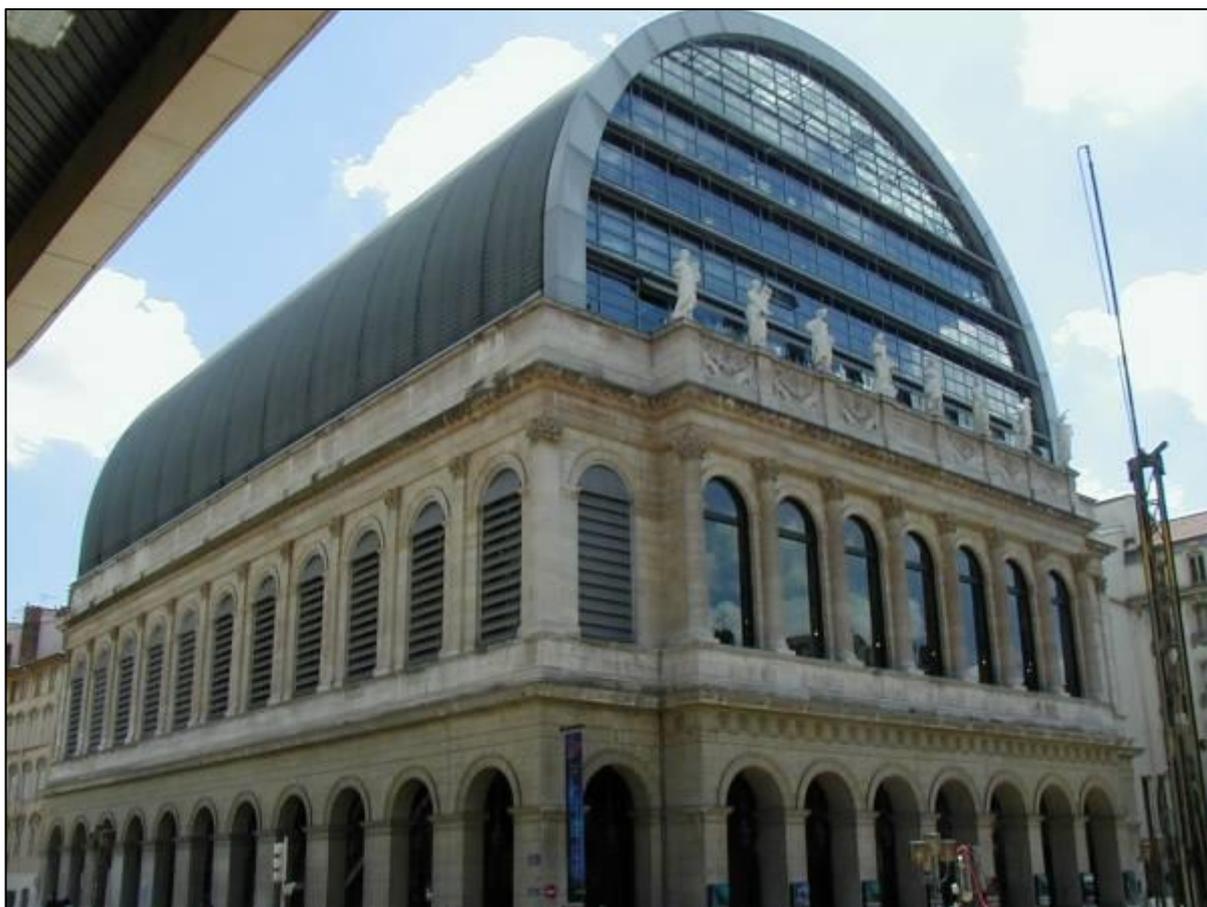


Рис. В.1. Здание Национального оперного театра в г. Lyon, Франция



Рис. В.2. Фрагмент фюзеляжа самолета

Возобновление интереса к исследованию оболочечных конструкций в последние годы вызвано не только появлением новых перспективных материалов, но и, прежде всего, развитием вычислительной техники, которая позволила теперь по-новому взглянуть на нелинейные проблемы оболочек [56, 137, 146].

Как отмечается в работе Н. А. Абросимова и В. Г. Баженова [2], «...в настоящее время значительно выросли требования к надежности и безопасности конструкций, с одной стороны, а с другой, – к их рациональному проектированию <...> в последние годы для изготовления таких конструкций наряду с традиционными материалами применяются и композиционные материалы, обладающие заранее прогнозируемым комплексом свойств, наилучшим образом отвечающих экстремальным условиям эксплуатации. Широкое использование композиционных материалов при создании конструкций современной техники потребовало учета не только физически и геометрически нелинейных эффектов

деформирования, характерных для конструкций из традиционных материалов, но выявило необходимость учета новых факторов, таких как: анизотропия жесткости и прочности; вязкоупругие свойства; неоднородность упругих и прочностных параметров, определяющих несущую способность конструкции. Решение этой проблемы невозможно без комплексных теоретико-экспериментальных исследований, направленных на выяснение физической картины процессов...» [2].

Одним из свойств тонкостенных оболочек, как отмечает Э. Л. Аксельрад [3], является их гибкость, т.е. способность к значительным упругим перемещениям (прогибам), превышающим толщину оболочки иногда в десятки раз. Как следствие этого – возможная потеря устойчивости оболочек и необходимость при их исследовании учитывать геометрическую нелинейность.

Важным является при рассмотрении задач устойчивости оболочек проводить анализ прочности их материала, так как после наступления деформаций текучести происходят необратимые изменения и исследование устойчивости конструкции в линейно-упругой постановке становится неправомерным.

Поэтому актуальным является совместное исследование прочности, устойчивости и закритического поведения оболочек из ортотропных материалов на основе наиболее точных математических моделей их деформирования, эффективных алгоритмов расчета и специально разработанного программного обеспечения.

### **История развития тематики работы. Обзор литературы.**

Исследованиям в области теории оболочек посвящено большое количество публикаций. Нелинейная теория оболочек развивается с начала XX века, и продолжает интенсивно развиваться, о чем свидетельствуют статьи и монографии последних лет [64, 65, 123, 152, 158 и др.]. Основы теории анизотропных пластин, и, в частности – ортотропных, можно найти в

работах С. А. Амбарцумяна [5, 6], В. В. Васильева [24], С. Г. Лехницкого [78] и др. Большую сложность для композиционных материалов представляет нахождение механических характеристик и предельных значений напряжений по разным направлениям. Одни из первых наиболее полных исследований по устойчивости ортотропных оболочек, касающиеся кратковременной устойчивости стеклопластиковых цилиндрических конструкций при различных внешних нагрузках, были описаны в работе А. А. Буштыркова [21]. Исследование проблем устойчивости ортотропных оболочек приводится в работе Р.Б. Рикардса и Г.А. Тетерса [110]. Модель, описанная в указанных работах, строится на основе простейших уравнений теории оболочек, не учитывающих поперечные сдвиги, а алгоритм исследования устойчивости основан на методе Эйлера решения задач на собственные значения, т.е. линеаризованных уравнениях. Оболочки из композиционных материалов рассматриваются в работе Л. Г. Белозерова и В. А. Киреева [17]. Задачи устойчивости для цилиндрических и конических ортотропных оболочек решаются в геометрически линейной постановке. Обобщенная теория анизотропных оболочек представлена в работе И. Ю. Хомы [131]. В геометрически нелинейной постановке устойчивость ортотропных оболочек рассмотрена в работе В.А. Крысько [75], где исследуются пологие гладкие оболочки. В данной области следует также отметить работы В. А. Максимюка и И. С. Чернышенко [81, 151, 152].

В развитие нелинейной теории оболочек большой вклад внесли работы Э. Л. Аксельрада, Н. А. Алумяэ, И. Г. Бубнова, В. З. Власова, А. С. Вольмира, К. З. Галимова, Э. И. Григолюка, В. Койтера, Х. М. Муштари, В. В. Новожилова, П. Ф. Папковича, Л. А. Шаповалова и др.

Проблемы длительной устойчивости оболочек из полимерных материалов были рассмотрены в работе Ю.Н. Работнова [107].

Известно достаточно много работ, посвященных расчету ортотропных оболочек, но в них недостаточно полно исследуется ряд важных факторов,

влияющих на напряженно-деформированное состояние оболочки и ее устойчивость. В частности, при расчете подкрепленных оболочек не учитываются такие факторы, как поперечные сдвиги, сдвиговая и крутильная жесткость ребер и др.

В статье [79] предложены методы и алгоритмы расчета основных параметров НДС и устойчивости оболочек вращения головных обтекателей летательных аппаратов при полете по заданной траектории. Представленная математическая модель является геометрически нелинейной, учитывает ортотропию материала и поперечные сдвиги; строится на основе уравнений равновесия. Форма оболочки задается в виде таблицы координат ее образующей, а аппроксимация производится кубическими сплайнами.

Чаще всего математическая модель в теории оболочек строится на основе уравнений равновесия. Использование вместо этих уравнений функционала полной энергии деформации оболочки позволяет применять более эффективные алгоритмы исследования. Варианты таких алгоритмов для изотропных подкрепленных оболочек можно найти в работах [15, 37, 65, 86, 128]. В работе В. М. Жгутова [47] рассматривается математическая модель деформирования подкрепленной ортотропной оболочки, однако результаты расчетов отсутствуют.

Первые исследования устойчивости оболочек из композитных материалов базировались на гипотезе прямых нормалей. Однако показано, что при исследовании устойчивости оболочек из композитных материалов необходимо учитывать поперечные сдвиги [20]. Большой теоретический интерес представляют работы А.Н. Гузя и И.Ю. Бабича [43], где приведены решения, основанные на линеаризованных уравнениях трехмерной теории упругости для осесимметричной формы выпучивания проведено сравнение результатов расчета критических нагрузок сжатой вдоль оси цилиндрической оболочки по трехмерной теории упругости с результатами расчета по классической теории и теории типа Тимошенко. Результаты расчетов,

основанные на трехмерной и уточненной теориях, в рассматриваемом случае практически совпадают. Показано, что критические усилия оболочек, имеющих малую сдвиговую жесткость, могут понижаться по сравнению с классическим значением на 20-50%. Различные варианты построения общей теории многослойных оболочек с учетом поперечных сдвигов и поперечных нормальных деформаций слоев рассмотрены в работе Э. И. Григолюка и Г. М. Куликова [38].

Много работ посвящено расчету цилиндрических оболочек, так как они наиболее часто применяются в самых разных областях техники. Исследование устойчивости оболочечных конструкций ступенчато-переменной толщины (ребра, накладки, вырезы) проводится в работах В. В. Карпова [55, 66]. Учитывается геометрическая нелинейность, поперечные сдвиги, дискретное введение ребер (вырезов), сдвиговая и крутильная жесткости ребер. Контакт ребра и обшивки происходит по полосе. Показано, что для ребристых оболочек необходимо учитывать поперечные сдвиги. Нелинейные уравнения устойчивости решаются методом последовательных нагружений В. В. Петрова. Исследовались оболочки только из изотропных материалов.

В статье [18] отмечается важность исследования нижних критических нагрузок. Получена формула для вычисления приближенного значения нижней критической нагрузки при осевом сжатии круговой цилиндрической оболочки в нелинейной постановке. Решение приводится для изотропной замкнутой цилиндрической оболочки.

Статическая потеря устойчивости цилиндрической оболочки переменной толщины, подвергнутой неоднородной по окружности сжимающей нагрузке, исследуется в работе М.К. Ahmed [138]. Перемещения точек оболочки предлагается описывать тригонометрическими функциями, а подход Фурье используется для разделения переменных. Математическая модель деформирования оболочки сводится к восьми дифференциальным

уравнениям первого порядка с переменными коэффициентами в направлении окружной координаты. Дифференциальные уравнения записываются в матричной форме. Получены критические нагрузки потери устойчивости для симметричных и несимметричных оболочек. Результаты расчетов показали чувствительность значений критических нагрузок и соответствующих форм потери устойчивости к изменению толщины сечения.

В работе [124] исследуется устойчивость к «прощелкиванию» конической полой оболочки. В рамках гипотез о физической и геометрической линейности решается задача о критической сжимающей силе, действие которой создает «прощелкивание». Задача о прямом усеченном конусе при сжатии по направлению продольной оси сводится к задаче о пластине.

Тонкостенные оболочки являются очень важными элементами многих современных конструкций в ракетно-космической и авиационной технике, судостроении и автомобилестроении, энергетическом и химическом машиностроении, жилищном и промышленном строительстве. В тонкостенных оболочках механизмы разрушения при растягивающих и сжимающих напряжениях могут быть существенно различными [32]. Если в условиях растяжения предельно допустимое состояние возникает при достижении определенной меры эквивалентного напряжения – предела прочности или предела упругого сопротивления, то при сжимающих напряжениях разрушение конструкции может проявиться задолго до достижения этого уровня нагрузок вследствие появления других опасных механизмов разрушения, вызванных общей или местной потерей устойчивости [32]. Поэтому важным моментом исследования оболочечных конструкций является исследование форм потери устойчивости.

При исследовании оболочечных конструкций необходимо знать не только критические нагрузки потери устойчивости, но и нагрузки, при которых материал конструкции достигает предельно допустимых значений

напряжений потери прочности. Потеря прочности анализируется по предельному состоянию с помощью критериев прочности. Для проверки критериев прочности необходимо знать поля напряжений  $\sigma_x, \sigma_y, \tau_{xy}, \tau_{xz}, \tau_{yz}$  при каждом значении нагрузки и предельные значения напряжений для данного материала.

Известные теории предельного состояния анизотропных сред разработаны преимущественно для пластичных материалов. Сведения о критериях прочности анизотропных материалов можно найти в работах Е. К. Ашкенази [12], В. Л. Бажанова, И. И. Гольденבלата, В. А. Копнова, А. Д. Поспелова и А. М. Синюкова [14, 33], А. К. Малмейстера [82], Г. С. Писаренко и А. А. Лебедева [102], Л. Фишера [143], Р. Хилла и др.

В работе А. А. Лебедева, Б. И. Ковальчука, Ф. Ф. Гигиняка и В. П. Ламашевского [77] описаны критерии прочности для изотропного и анизотропного материала и методы испытаний материалов при сложном напряженном состоянии.

В работе Я. С. Карпова и В. Г. Ставиченко [68] рекомендуется для композиционных материалов в конструкциях летательных аппаратов, как это делалось в ЦАГИ, использовать критерий Мизеса – Хилла. Кроме того, в этой работе также приводится критерий максимальных напряжений.

В работе П. А. Зиновьева и А. А. Смердова [49] говорится, что «...сегодня существует большое число критериев прочности, для использования которых необходимо знать различные наборы констант, описывающих прочность монослоя. В простейшем случае это пять характеристик  $F_1^+, F_1^-, F_2^+, F_2^-, F_{12}$ , соответствующих предельным напряжениям при одноосном растяжении и сжатии вдоль осей естественной системы координат и чистом сдвиге в этих осях...».

В работе [153] дан обзор теорий прочности для материалов, при сложном напряженном состоянии.

В монографии [123] разработаны прикладные методы расчета на устойчивость тонкостенных конструкций, выполненных из композитов. Проведено сравнение результатов, полученных теоретическим путем, с экспериментальными данными.

Во многих случаях безмоментное состояние в оболочках практически неосуществимо. В этих случаях эффективные оболочечные проекты могут быть осуществлены за счет создания конструктивной неоднородности [32].

Для повышения жесткости тонкостенные конструкции часто подкрепляются ребрами [10, 30, 46, 52, 64, 94, 109, 125, 138], что играет особо важную роль при строительстве большепролетных покрытий и перекрытий (Рисунок В.3 [161], В.4).

В отличие от гладких оболочек, расчету подкрепленных конструкций посвящено значительно меньшее количество работ. По-прежнему достаточно сложным является процесс задания геометрии подкрепления, даже при наличии современных программных комплексов общего назначения.

В статье [70] строится уточненная теория гладких ортотропных оболочек переменной толщины, учитывающая влияние поперечных сдвигов. Представленная математическая модель является геометрически линейной. Решения (неизвестные функции) представляются в виде степенных многочленов по поперечной координате. А в работе [31] рассматривается геометрически нелинейный вариант модели, но только для пластин переменной толщины. Также производится сравнение данных, полученных при использовании разных теорий. В обеих работах большое внимание уделяется аппроксимации неизвестных функций и учету наиболее распространенных вариантов краевых условий.



Рис. В.3. Самолетный ангар в Orvieto, Италия. Размеры 44.8x111.5 м

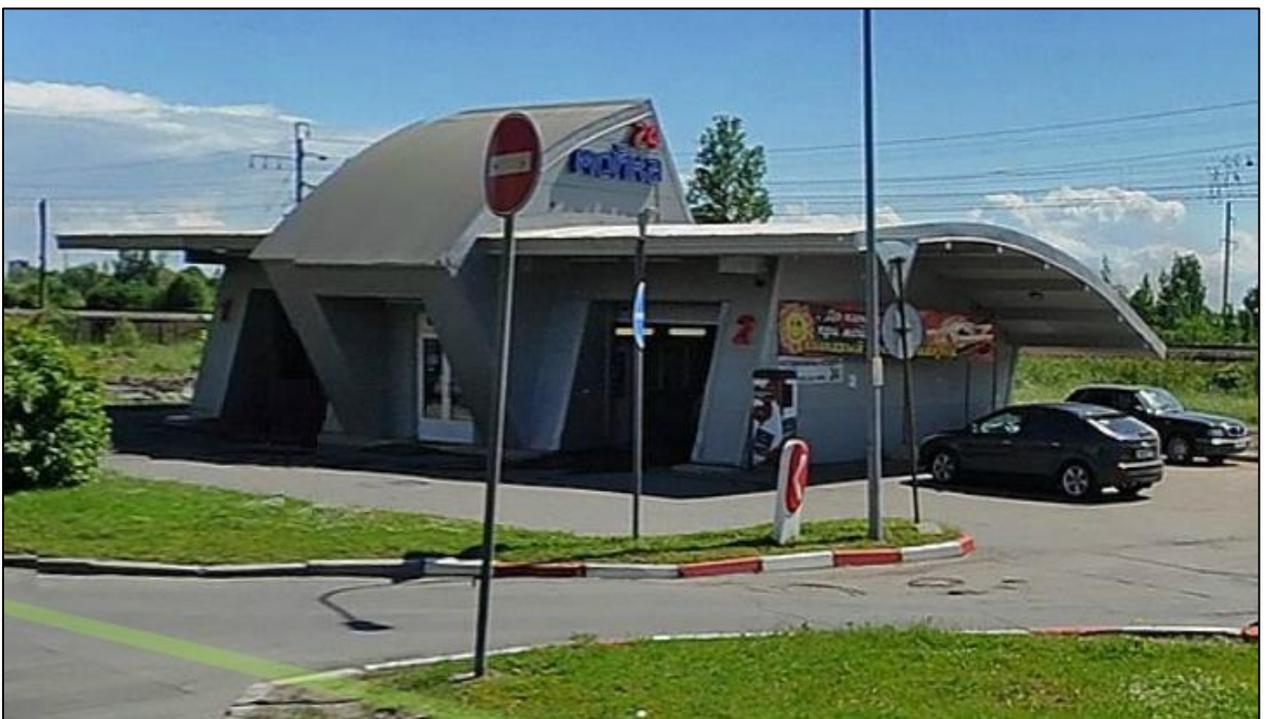


Рис. В.4. Здание автомойки, г. Санкт-Петербург, Россия

Детальное исследование тонкостенных конструкций, состоящих из нескольких оболочек разной геометрии и подкрепленных ребрами жесткости,

приводится в статье Y. Qu и соавторов [157]. Математическая модель учитывает поперечные сдвиги, но является геометрически линейной, а материал конструкции – изотропный.

В работах В.В. Карпова [58, 64, 66] был предложен метод конструктивной анизотропии, который позволяет свести оболочку ступенчато-переменной толщины к оболочке непрерывно-переменной толщины при частом расположении ребер, а в том случае, если ребра имеют одинаковую высоту – то к оболочке постоянной толщины. Данный метод учитывает такие важные факторы, влияющие на поведение оболочки, как сдвиговая и крутильная жесткость ребер.

В работе [89] подробно рассматривается подкрепление конструкции ребрами переменной высоты, что в ряде случаев является наиболее эффективным.

В ряде случаев, наиболее оптимальным является расположение ребер под углом к координатным линиям [61]: это позволяет уменьшить концентрацию напряжений в угловых точках контура оболочки и более равномерно распределить прогибы и напряжения по полю оболочки. Методы введения ребер для таких конструкций и методики их расчета также хорошо применимы при исследовании сетчатых оболочек [128].

Если оболочка замкнутая, то такая конструкция может иметь спиральное подкрепление [94].

Слоистые и подкрепленные оболочки имеют самое широкое применение в современных конструкциях – ракетной, авиационной и судостроительной технике. В настоящее время наиболее распространенными технологическими способами изготовления тонкостенных слоистых полиармированных оболочечных конструкций и пластин являются процессы выкладки и непрерывной намотки, сочетающиеся в ряде случаев с технологиями склейки и напыления упрочняющих и защитных слоев [32].

Современное состояние разных разделов теории оболочек хорошо представлено в обзорных статьях и монографиях E. Carrera [139], Y. Qu [156], J.N. Reddy [158], С.К. Голушко и Ю.В. Немировского [32], Э.И. Григолюка и Г.М. Куликова [35], В.В. Карпова [64, 65], В.А. Максимюка и И.С. Чернышенко [81, 152], В.В. Петрова, С.Н. Сухина [123] и др.

Говоря о расчете композитных конструкций, следует упомянуть не только исследования в области моделей оболочек (макромодель), но и исследования, связанные с разработкой новых видов материалов (микромодель). В последнее время появились современные конструкционные материалы в виде армированных пластиков [48]. В полимерных композиционных материалах (ПКМ) реализованы высокие упруго-прочностные свойства различных волокон. По сочетанию прочности и модуля упругости армированные ПКМ с однонаправленной ориентацией волокон существенно превосходят все современные металлические конструкционные материалы. В таких материалах армирующие волокна связаны между собой клеящей средой – полимерной матрицей. Главным элементом любой структуры армированных пластиков является однонаправленный слой, состоящий из параллельно ориентированных армирующих элементов волокон, нитей, жгутов, лент и полотен.

Постоянно проводятся новые исследования по созданию более современных материалов, обладающих дополнительными преимуществами перед существующими. В работе [13] представлены результаты экспериментальных исследований по определению деформационных и прочностных характеристик полимерных композитов (наполнитель – углеволокно, связующее – эпоксидная смола): получены диаграммы «растяжение-сжатие», диаграмма зависимости коэффициента линейного температурного расширения от температуры, определены значения предельных напряжений межслойного сдвига по результатам испытаний образца методом трехточечного изгиба.

Результаты обширных исследований композиционных материалов собраны в справочнике В.В. Васильева, В.Д. Протасова и др. авторов [23]. Излагаются принципы создания композиционных материалов, данные о составе, структуре и свойствах основных разновидностей армирующих волокон и матричных материалов, технологические процессы их совмещения и физико-механические характеристики получаемых композиционных материалов [23]. Показаны основные принципы проведения расчетов, проектирования и технологии создания элементов конструкций из таких материалов, а также примеры их наиболее эффективного применения. А в монографии [24] получены уравнения, на основе которых рассматривается широкий диапазон задач статики, динамики и устойчивости композитных конструкций, в том числе и оболочек [24]. Приведены конкретные примеры расчета.

В исследованиях А.А. Смердова [120] широко рассматриваются вопросы применения различных вариантов углепластика при проектировании корпусов ракетно-космических конструкций в виде тонкостенных оболочек. Изучается поведение материала под действием различных нагрузок и производится подбор оптимальных параметров при создании этого материала.

В работе [44] рассматривается применение композиционных материалов в строительстве. Приведено сравнение основных характеристик стали, алюминиевых сплавов и композитных материалов. Проанализированы основные аспекты проектирования.

Таким образом, существует необходимость разработки математического и программного обеспечения расчетов прочности и устойчивости подкрепленных ортотропных оболочек на основе наиболее точных математических моделей их деформирования и алгоритмов, позволяющих исследовать как докритическое, так и закритическое поведение

оболочек с нахождением всех критических нагрузок при многократном последовательном «прохлопывании» конструкции.

**Объектом исследования** являются тонкостенные ортотропные оболочки, подкрепленные ребрами жесткости.

**Предметом исследования** является напряженно-деформированное состояние, прочность и устойчивость подкрепленных ортотропных оболочек вращения при статическом механическом нагружении.

**Цель и задачи исследования.**

*Цель исследования* – разработка математической модели деформирования ортотропных оболочечных конструкций для нахождения предельных значений нагрузок потери прочности и устойчивости.

*Задачи исследования:*

1. Разработка наиболее точной математической модели деформирования ортотропных оболочек с учетом геометрической нелинейности, поперечных сдвигов, наличия ребер жесткости.

2. Разработка эффективного алгоритма исследования прочности и устойчивости оболочек из ортотропных материалов, позволяющего автоматически выбирать оптимальный по точности шаг нагружения и без смены параметра обходить особые точки кривой равновесных состояний.

3. Разработка программного обеспечения расчетов прочности и устойчивости оболочек из ортотропных материалов на основе передовых технологий программирования.

4. Проведение анализа критериев предельного сопротивления материала и выбор наиболее оптимального для определения предельных нагрузок потери прочности. Проанализировать процесс развития областей остаточных деформаций в закритической области.

5. Проведение комплексного исследования прочности и устойчивости подкрепленных ортотропных оболочечных конструкций при

статическом механическом нагружении в докритической и закритической стадиях.

6. Оценка влияния учета геометрической нелинейности на значения предельных нагрузок потери прочности.

7. Анализ местных и общих форм потери устойчивости оболочечных конструкций.

**Научная новизна исследования** заключается в следующем:

1. Разработана математическая модель деформирования ортотропных оболочек, учитывающая геометрическую нелинейность, поперечные сдвиги, введение ребер по методу конструктивной анизотропии с учетом их сдвиговой и крутильной жесткости.

2. Разработан алгоритм, основанный на методе Ритца и методе продолжения решения по наилучшему параметру с использованием адаптивного выбора сетки для повышения точности расчетов, позволяющий находить верхние и нижние критические нагрузки, точки бифуркации, а также исследовать закритическое поведение конструкции для анализа местной и общей форм потери устойчивости.

3. Разработана программа «OrthShell: strength and stability of orthotropic shells», позволяющая проводить комплексные исследования прочности и устойчивости оболочек из ортотропных материалов (свидетельство о регистрации в Реестре программ для ЭВМ № 2014614627 от 29.04.2014 г.).

4. Проведен анализ критериев прочности для выбора оптимального критерия предельного сопротивления материала и анализ развития областей остаточных деформаций при закритическом деформировании.

5. Проведен анализ закритического поведения рассматриваемых конструкций, который показал, что до полной потери устойчивости оболочек зачастую происходят несколько раз местные потери устойчивости.

6. Выявлено, что потеря устойчивости для некоторых вариантов оболочек наступает раньше потери прочности, но имеет место и обратное, поэтому необходимо проводить комплексные расчеты прочности и устойчивости конкретных конструкций.

7. Выявлено, что для тонкостенных пологих оболочек прямоугольного плана и панелей цилиндрических оболочек, выполненных из углепластика, при учете геометрической нелинейности предельные нагрузки потери прочности уменьшаются по сравнению с расчетами, проведенными при геометрически линейной постановке (в 5-10 раз).

8. При подкреплении ортотропных оболочек ребрами жесткости критические нагрузки возрастают в 2 – 6 раз в зависимости от числа подкрепляющих конструкцию ребер. Также существенно увеличивается нагрузка потери прочности (в 1.5 – 3 раза).

**Методологической основой** диссертационного исследования послужили метод Ритца для сведения вариационной задачи нахождения минимума функционала к решению системы нелинейных алгебраических уравнений; метод продолжения решения по наилучшему параметру для решения системы нелинейных алгебраических уравнений; метод конструктивной анизотропии для учета подкрепления конструкции; методы строительной механики, вычислительной математики и разработки программного обеспечения.

**Область исследования** соответствует требованиям паспорта научной специальности ВАК: 05.23.17 – Строительная механика, а именно: содержанию специальности, каковым являются методы расчета сооружений и их элементов на прочность, устойчивость при силовых воздействиях, а также следующим основным направлениям: п. 2 «Линейная и нелинейная механика конструкций и сооружений, разработка физико-математических моделей их расчета», п. 4 «Численные методы расчета сооружений и их элементов».

**Личный вклад соискателя.** Все результаты диссертационной работы принадлежат лично автору. Во всех работах, опубликованных в соавторстве, автору в равной степени принадлежит постановка задач и формулировка основных положений, определяющих научную новизну исследований.

**Практическое значение работы** состоит в том, что разработанная компьютерная программа для исследования напряженно-деформированного состояния, прочности и устойчивости оболочек из ортотропных материалов может быть использована в проектных организациях, научных исследованиях и учебном процессе. Результаты работы внедрены в отчет по проекту №2.1.2/10824 Аналитическая ведомственная целевая программа Министерства образования и науки РФ «Развитие научного потенциала высшей школы» (2011 г.), в отчет по проекту в рамках государственного задания Министерства образования и науки РФ № 8.1046.2011 «Математическое и программное обеспечение расчетов прочности и устойчивости подкрепленных оболочек вращения» (2012-2013 годы), а также в учебном процессе. Результаты исследования прочности и устойчивости ортотропных оболочечных конструкций приняты к внедрению в проектно-конструкторской деятельности ООО «ПускМонтажПроект».

**Основные научные положения, выносимые на защиту:**

1. Математическая модель деформирования оболочек из ортотропных материалов в виде функционала полной энергии деформации оболочки, комплексно учитывающая ортотропию материала, геометрическую нелинейность, поперечные сдвиги, введение ребер по методу конструктивной анизотропии с учетом их сдвиговой и крутильной жесткости.

2. Алгоритм исследования модели, основанный на методе Ритца и методе продолжения решения по наилучшему параметру, позволяющий исследовать напряженно-деформированное состояние, прочность и устойчивость оболочек из ортотропных материалов, их критическое

поведение, находить верхние и нижние критические нагрузки, а также точки бифуркации.

3. Результаты анализа критериев прочности для выбора оптимального критерия предельного сопротивления материала и результаты анализа развития областей остаточных деформаций при закритическом деформировании.

4. Результаты исследования прочности и устойчивости ортотропных пологих оболочек, квадратных в плане; панелей цилиндрических оболочек; панелей конических оболочек. Анализ влияния учета геометрической нелинейности на значения предельных нагрузок потери прочности. Анализ местных и общих форм потери устойчивости.

5. Результаты исследования напряженно-деформированного состояния, прочности и устойчивости пологих ортотропных оболочек, подкрепленных ребрами жесткости.

**Достоверность** научных результатов обоснована применением апробированных методов строительной механики и вычислительной математики, сравнением результатов расчета тестовых задач с некоторыми решениями, полученными другими авторами, а также качественным согласованием результатов расчета с результатами экспериментов других авторов.

**Апробация работы.** Результаты работы докладывались на Десятой международной научно-практической конференции «Исследование, разработка и применение высоких технологий в промышленности» (9-11 декабря 2010 г., Санкт-Петербург), на I, II и III Международных конгрессах «Актуальные проблемы современного строительства» (10-12 апреля 2012 г., 10-12 апреля 2013 г., 9-11 апреля 2014 г., Санкт-Петербург), Международном конгрессе «Наука и инновации в современном строительстве - 2012» (10-12 октября 2012 г., Санкт-Петербург), XIII Международном форуме «Новые идеи нового века» (18-25 февраля 2013 г., Хабаровск), V Международной

конференции «Актуальные проблемы архитектуры и строительства» (25-28 июня 2013 г., Санкт-Петербург), XX Международном симпозиуме «Динамические и технологические проблемы механики конструкций и сплошных сред» им. А.Г. Горшкова (17-21 февраля 2014, Москва).

Полностью диссертация докладывалась на межкафедральном научном семинаре СПбГАСУ.

**Публикации.** По результатам исследования опубликовано 17 работ, из них публикаций по перечню ВАК – 5.

**Структура и объем работы.** Текст диссертации изложен на 183 страницах, состоит из введения, списка основных обозначений и сокращений, пяти глав, заключения, списка использованной литературы и трех приложений.

*Во введении* обосновывается актуальность темы диссертации, изложены цели и задачи исследований, отмечены научная новизна и практическая значимость работы. Также приведен краткий обзор литературных источников по теме диссертации.

*В первой главе* диссертации приводится математическая модель деформирования упругих ортотропных оболочек на основе гипотез Тимошенко-Рейсснера в геометрически-нелинейной постановке; в модели учитываются поперечные сдвиги; подкрепление оболочки ребрами жесткости вводится в соответствии с методом конструктивной анизотропии, который позволяет учитывать такие важные факторы, как сдвиговая и крутильная жесткость ребер.

*Во второй главе* приводится алгоритм исследования прочности и устойчивости ортотропных оболочек, подкрепленных ребрами жесткости, на основе метода Ритца, позволяющего свести решение вариационной задачи о нахождении минимума функционала к решению системы нелинейных алгебраических уравнений и метода продолжения решения по наилучшему

параметру, позволяющего последовательно находить решение нелинейной задачи.

*В третьей главе* проведен анализ критериев прочности для выбора оптимального критерия предельного сопротивления материала и анализ развития областей остаточных деформаций при закритическом деформировании.

*В четвертой главе* приводятся результаты исследования прочности некоторых видов квадратных в плане пологих ортотропных оболочек, а также панелей цилиндрических оболочек в геометрически линейной постановке, для последующего сравнения результатов с решениями в геометрически нелинейной постановке.

*В пятой главе* приводятся результаты исследования прочности и устойчивости ортотропных квадратных в плане пологих оболочек; панелей цилиндрических и конических оболочек в геометрически нелинейной постановке, и показано, что учет геометрической нелинейности существенно понижает допустимые нагрузки, найденные из условий прочности, по сравнению с аналогичными значениями, найденными при геометрически линейной постановке.

Проведено исследование закритического поведения рассматриваемых конструкций и показано, что до полной потери устойчивости происходит несколько местных потерь устойчивости. Показано, что некоторых вариантов оболочек потеря прочности наступает раньше потери устойчивости, для других – наоборот, т.е. в каждом конкретном случае необходимо проводить расчеты прочности и устойчивости рассматриваемых конструкций.

Показано существенное увеличение значений критических нагрузок потери устойчивости и предельных нагрузок потери прочности при подкреплении конструкции ребрами жесткости, а также на распределение напряжений по области оболочки. Для обоснования достоверности полученных результатов приведено сравнение результатов расчета тестовых

задач с некоторыми решениями, полученными другими авторами, а также показано качественное согласование результатов расчета с результатами экспериментов.

# ГЛАВА 1. МАТЕМАТИЧЕСКАЯ МОДЕЛЬ ДЕФОРМИРОВАНИЯ ТОНКОСТЕННЫХ ОРТОТРОПНЫХ ОБОЛОЧЕК, ПОДКРЕПЛЕННЫХ РЕБРАМИ ЖЕСТКОСТИ

В данной работе рассматривается математическая модель деформирования подкрепленных оболочек вращения, учитывающая ортотропию материала, геометрическую нелинейность, поперечные сдвиги, введение ребер по методу конструктивной анизотропии с учетом их сдвиговой и крутильной жесткости.

Тонкостенные оболочки характеризуются следующими свойствами [96]:

1. При моделировании пренебрегают величинами большего порядка малости, чем  $\frac{h}{\min\{a; b; R_1; R_2\}}$ . Здесь  $R_1, R_2$  – главные радиусы кривизны

оболочки;  $h$  – толщина оболочки;  $a, b$  – линейные размеры

2. Напряжения, возникающие в оболочке в направлении, перпендикулярном срединной поверхности, в сравнении с другими напряжениями считаются пренебрежимо малыми ( $\sigma_z = 0$ ).

Математическая модель деформирования тонкой ортотропной оболочки строится на основе функционала полной энергии деформации (ФПЭД) или уравнений равновесия. В данной работе рассматривается вариант математической модели, основанной на ФПЭД, так как это позволяет применять более эффективные алгоритмы исследования. Варианты таких алгоритмов для изотропных подкрепленных оболочек можно найти в работах [15, 37, 65, 86, 128]. Также модель включает в себя геометрические соотношения (связывают деформации и перемещения), физические соотношения (связывают напряжения и деформации) и краевые условия (выбираются в зависимости от способа закрепления контура конструкции).

Известно достаточно много работ по исследованию тонких оболочек, где рассматривается модель Кирхгофа-Лява, согласно которой неизвестными

являются только три функции перемещений  $U = U(x, y), V = V(x, y), W = W(x, y)$ , и в уравнениях равновесия функции  $U$  и  $V$  имеют производные второго порядка, а функция  $W$  – производные четвертого порядка. Как показано в работах [110, 139, 152], такая модель дает существенную погрешность. Для ортотропных оболочек [110] и для изотропных, подкрепленных ребрами [59], необходимо учитывать еще и поперечные сдвиги, т.е. рассматривать модель Тимошенко-Рейсснера. Тогда неизвестными будут пять функций – три функции перемещений точек координатной поверхности  $U, V, W$  и две функции, характеризующие углы поворота нормали в плоскостях  $XOZ, YOZ$ :  $\Psi_x = \Psi_x(x, y), \Psi_y = \Psi_y(x, y)$ .

## 1.1 ОБОБЩЕННЫЙ ЗАКОН ГУКА ДЛЯ АНИЗОТРОПНОГО, ОРТОТРОПНОГО И ИЗОТРОПНОГО ТЕЛА

Обобщенный закон Гука для анизотропного тела можно сформулировать так [2, 4]: в каждой точке тела компоненты вектора деформаций  $\{\varepsilon\}$  являются однородными линейными функциями компонент вектора напряжений  $\{\sigma\}$  [2, 4].

Эту формулировку можно записать в аналитическом виде:

$$\{\varepsilon\} = [S]\{\sigma\}, \quad (1.1)$$

где компоненты матрицы  $[S]$  – коэффициенты податливости материала.

Для анизотропных тел коэффициенты в матрице податливости зависят от выбранной системы координат. В общем случае для анизотропного тела коэффициенты податливости формируют полностью заполненную матрицу  $[S]$  размерностью  $6 \times 6$ . В силу теоремы взаимности работ для элементов матрицы податливости верно равенство  $S_{ij} = S_{ji}$ , поэтому здесь независимыми являются только шесть диагональных коэффициентов и половина недиагональных, т. е. всего 21 элемент, и в развернутом виде закон

Закон Гука запишется следующим образом [4]:

$$\begin{Bmatrix} \varepsilon_x \\ \varepsilon_y \\ \varepsilon_z \\ \gamma_{yz} \\ \gamma_{xz} \\ \gamma_{xy} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} S_{11} & S_{12} & S_{13} & S_{14} & S_{15} & S_{16} \\ & S_{22} & S_{23} & S_{24} & S_{25} & S_{26} \\ & & S_{33} & S_{34} & S_{35} & S_{36} \\ & & & S_{44} & S_{45} & S_{46} \\ & \text{симм.} & & & S_{55} & S_{56} \\ & & & & & S_{66} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \sigma_z \\ \tau_{yz} \\ \tau_{xz} \\ \tau_{xy} \end{Bmatrix} \quad (1.2)$$

Также обобщенный закон Гука можно записать и в виде линейной зависимости напряжений от деформаций [4]:

$$\{\sigma\} = [G]\{\varepsilon\},$$

где  $[G]$  – матрица жесткости материала размером  $6 \times 6$ . Все компоненты матрицы  $[G]$  при необходимости можно выразить через компоненты матрицы податливости  $[S]$ .

Анизотропия самого общего вида у реальных материалов, когда матрица  $[S]$  содержит 21 независимый элемент, встречается достаточно редко. В большинстве случаев структура материала такова, что его упругие свойства в нескольких направлениях совпадают. В этих случаях количество независимых коэффициентов в матрице податливости (и, следовательно, в матрице жесткости) сокращается, и при оптимальном выборе системы координат упрощается запись закона Гука [4].

Если в анизотропном теле его упругие свойства одинаковы в любых двух направлениях, симметричных относительно некоторой плоскости, то такая плоскость называется плоскостью упругой симметрии [4]. Тогда количество независимых коэффициентов, описывающих свойства материала, уменьшается до тринадцати [4], а закон Гука (1.2) принимает более простую форму при совпадении плоскости упругой симметрии с одной из координатных плоскостей.

Тело, обладающее тремя взаимно перпендикулярными плоскостями упругой симметрии, называют ортотропным. Для ортотропного тела число

независимых коэффициентов, характеризующих упругие свойства, равно девяти [4].

Закон Гука для ортотропного тела наиболее естественно и просто записывается при совмещении координатных плоскостей с плоскостями упругой симметрии; тогда матрица податливости в (1.2) примет вид [4]

$$[S] = \begin{bmatrix} S_{11} & S_{12} & S_{13} & 0 & 0 & 0 \\ S_{21} & S_{22} & S_{23} & 0 & 0 & 0 \\ S_{31} & S_{32} & S_{33} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & S_{44} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & S_{55} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & S_{66} \end{bmatrix} \quad (1.3)$$

Если выразить коэффициенты податливости через технические постоянные (модули упругости, модули сдвига и коэффициенты Пуассона), то вместо (1.3) получим [4, 6]

$$[S] = \begin{bmatrix} \frac{1}{E_1} & -\frac{\mu_{21}}{E_2} & -\frac{\mu_{31}}{E_3} & 0 & 0 & 0 \\ -\frac{\mu_{12}}{E_1} & \frac{1}{E_2} & -\frac{\mu_{32}}{E_3} & 0 & 0 & 0 \\ -\frac{\mu_{13}}{E_1} & -\frac{\mu_{23}}{E_2} & \frac{1}{E_3} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{1}{G_{23}} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{G_{13}} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{G_{12}} \end{bmatrix} \quad (1.4)$$

В матрице (1.4)  $E_1, E_2, E_3$  – модули упругости в направлениях  $x, y$  и  $z$ ;  $G_{12}, G_{13}, G_{23}$  – модули сдвига в плоскостях  $XOY, XOZ, YOZ$  соответственно;  $\mu_{12}, \mu_{21}, \mu_{13}, \mu_{31}, \mu_{23}, \mu_{32}$  – коэффициенты Пуассона (в некоторых источниках вместо переменных  $\mu_{ij}$  используется  $\nu_{ij}$ ). Число независимых коэффициентов в (1.4) сохраняется равным девяти, поскольку вследствие

симметрии матрицы коэффициентов податливости выполняются равенства

$$E_1\mu_{21} = E_2\mu_{12}, E_3\mu_{13} = E_1\mu_{31}, E_2\mu_{32} = E_3\mu_{23}.$$

Если записать обобщенный закон Гука для ортотропного тела в форме уравнений, то получим

$$\begin{aligned}\varepsilon_x &= \frac{1}{E_1}\sigma_x - \frac{\mu_{12}}{E_2}\sigma_y - \frac{\mu_{13}}{E_3}\sigma_z; \\ \varepsilon_y &= \frac{1}{E_2}\sigma_y - \frac{\mu_{21}}{E_1}\sigma_x - \frac{\mu_{23}}{E_3}\sigma_z; \\ \varepsilon_z &= \frac{1}{E_3}\sigma_z - \frac{\mu_{31}}{E_1}\sigma_x - \frac{\mu_{32}}{E_2}\sigma_y; \\ \gamma_{yz} &= \frac{1}{G_{23}}\tau_{yz}; \\ \gamma_{xz} &= \frac{1}{G_{13}}\tau_{xz}; \\ \gamma_{xy} &= \frac{1}{G_{12}}\tau_{xy}.\end{aligned}\tag{1.5}$$

Если рассматривать изотропное тело, то у него все направления эквивалентны, любая плоскость в любой точке тела есть плоскость упругой симметрии. Уравнения обобщенного закона Гука в этом случае имеют вид [4, 6]

$$\begin{aligned}\varepsilon_x &= \frac{1}{E}[\sigma_x - \mu(\sigma_y + \sigma_z)]; & \gamma_{yz} &= \frac{1}{G}\tau_{yz}; \\ \varepsilon_y &= \frac{1}{E}[\sigma_y - \mu(\sigma_x + \sigma_z)]; & \gamma_{xz} &= \frac{1}{G}\tau_{xz}; \\ \varepsilon_z &= \frac{1}{E}[\sigma_z - \mu(\sigma_x + \sigma_y)]; & \gamma_{xy} &= \frac{1}{G}\tau_{xy}.\end{aligned}\tag{1.6}$$

Здесь  $E = E_1 = E_2$  – модуль упругости;  $\mu = \mu_{12} = \mu_{21}$  – коэффициент Пуассона;  $G = \frac{E}{2(1+\mu)}$  – модуль сдвига. Число независимых упругих постоянных равно двум.

Для тонкостенной оболочки, в силу ряда гипотез [96], компонента  $\sigma_z = 0$ . Таким образом, при линейно-упругом деформировании обобщенный закон Гука для тонкостенной ортотропной оболочки будут иметь вид:

$$\begin{aligned}
 \varepsilon_x &= \frac{1}{E_1} \sigma_x - \frac{\mu_{12}}{E_2} \sigma_y; \\
 \varepsilon_y &= \frac{1}{E_2} \sigma_y - \frac{\mu_{21}}{E_1} \sigma_x; \\
 \varepsilon_z &= -\frac{\mu_{31}}{E_1} \sigma_x - \frac{\mu_{32}}{E_2} \sigma_y; \\
 \gamma_{yz} &= \frac{1}{G_{23}} \tau_{yz}; \\
 \gamma_{xz} &= \frac{1}{G_{13}} \tau_{xz}; \\
 \gamma_{xy} &= \frac{1}{G_{12}} \tau_{xy}.
 \end{aligned} \tag{1.7}$$

В матричной форме их можно представить следующим образом

$$\begin{Bmatrix} \varepsilon_x \\ \varepsilon_y \\ \gamma_{yz} \\ \gamma_{xz} \\ \gamma_{xy} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{E_1} & -\frac{\mu_{21}}{E_2} & 0 & 0 & 0 \\ -\frac{\mu_{12}}{E_1} & \frac{1}{E_2} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{G_{23}} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{1}{G_{13}} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{G_{12}} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \tau_{yz} \\ \tau_{xz} \\ \tau_{xy} \end{Bmatrix} \tag{1.8}$$

Матричная форма записи (1.8) является наиболее удобной для программной реализации, а также упрощает процесс поворота системы координат.

Упругие характеристики материала находятся опытным путем. Для изотропного материала необходимо знать только один модуль упругости  $E$ , т.к. модуль сдвига выражается через него. Для определения  $E$  и, в общем,

зависимости « $\sigma - \varepsilon$ », растягивают образец и за секущий модуль упругости принимают  $E_C = \frac{\sigma}{\varepsilon}$ .

Гораздо сложнее находятся характеристики ортотропного материала. Композиционные материалы бывают разных классов, например, волокнистые армированные композиты с полимерной матрицей [49]. Однонаправленный волокнистый композит представляет собой совокупность волокон, ориентированных в одном направлении и расположенных в связующей их матрице [49]. Вначале необходимо определить ряд характеристик структурных элементов, чтобы по соответствующим формулам определить  $E_1$  (модуль упругости в продольном направлении). Нахождение модуля поперечной упругости  $E_2$  является наиболее сложной задачей определения упругих свойств комплекта по заданным характеристикам компонентов. Также непросто определяется коэффициент Пуассона  $\mu_{12}$  путем решения некоторой граничной задачи, а  $\mu_{21} = \frac{E_2}{E_1} \mu_{12}$ . Для определения модуля сдвига  $G_{12}$  также разработан метод, основанный на расчетной модели, содержащей неограниченное число слоев бесконечно малой толщины, и получена приближенная формула.

## 1.2 ГЕОМЕТРИЧЕСКИЕ СООТНОШЕНИЯ ТЕОРИИ ОБОЛОЧЕК

Схематичное изображение тонкостенной оболочки с осями локальной криволинейной системы координат представлено на Рисунке 1.1. В качестве координатной поверхности будем рассматривать срединную поверхность оболочки.

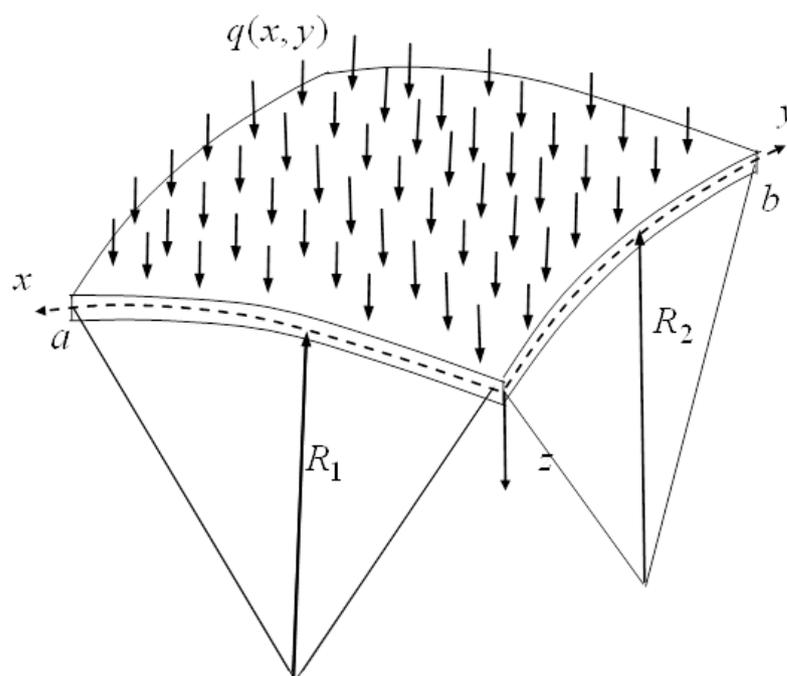


Рис. 1.1. Общий вид тонкостенной оболочки с осями локальной системы координат

Оси криволинейных координат  $x, y$  направлены по линиям главных кривизн оболочки, а ось  $z$  направлена по нормали к поверхности. Здесь  $a, b$  – линейные размеры протяженности конструкции в направлениях  $x, y$  соответственно.

Применяя гипотезы тонкостенности и учитывая поперечные сдвиги, сведем деформирование трехмерного тела к деформированию двумерного тела. Тогда перемещения в слое, находящимся на расстоянии  $z$  от срединной поверхности, примут вид [58]

$$U^z = U + z\Psi_x, \quad V^z = V + z\Psi_y, \quad W^z = W,$$

где  $U, V, W$  – перемещения точек срединной поверхности вдоль осей  $x, y, z$  соответственно;  $\Psi_x, \Psi_y$  – углы поворота нормали в плоскостях  $XOZ, YOZ$ .

Рассматриваемая модель является геометрически нелинейной, согласно ей геометрические соотношения в срединной поверхности оболочки с учетом геометрической нелинейности принимают вид [64, 96]

$$\begin{aligned}
\varepsilon_x &= \frac{1}{A} \frac{\partial U}{\partial x} + \frac{1}{AB} V \frac{\partial A}{\partial y} - k_x W + \frac{1}{2} \theta_1^2, \\
\varepsilon_y &= \frac{1}{B} \frac{\partial V}{\partial y} + \frac{1}{AB} U \frac{\partial B}{\partial x} - k_y W + \frac{1}{2} \theta_2^2, \\
\gamma_{xy} &= \frac{1}{A} \frac{\partial V}{\partial x} + \frac{1}{B} \frac{\partial U}{\partial y} - \frac{1}{AB} U \frac{\partial A}{\partial y} - \frac{1}{AB} V \frac{\partial B}{\partial x} + \theta_1 \theta_2, \\
\theta_1 &= -\left( \frac{1}{A} \frac{\partial W}{\partial x} + k_x U \right), \quad \theta_2 = -\left( \frac{1}{B} \frac{\partial W}{\partial y} + k_y V \right),
\end{aligned} \tag{1.9}$$

где  $\varepsilon_x, \varepsilon_y$  – деформации удлинения вдоль координат  $x, y$  срединной поверхности;  $\gamma_{xy}, \gamma_{xz}, \gamma_{yz}$  – деформации сдвига в плоскостях  $XOY, XOZ, YOZ$ ;

$k_x = \frac{1}{R_1}, k_y = \frac{1}{R_2}$  – главные кривизны оболочки вдоль осей  $x$  и  $y$ ;  $A, B$  – параметры Ляме, характеризующие геометрию оболочки.

Геометрические соотношения для слоя, отстоящего на расстояние  $z$  от срединной поверхности, изменяются следующим образом:

$$\begin{aligned}
\varepsilon_x^z &= \varepsilon_x + z \chi_1; \quad \varepsilon_y^z = \varepsilon_y + z \chi_2; \quad \gamma_{xy}^z = \gamma_{xy} + 2z \chi_{12}, \\
\gamma_{xz} &= k f(z) [\Psi_x - \theta_1], \quad \gamma_{yz} = k f(z) [\Psi_y - \theta_2]
\end{aligned}$$

Функции изменения кривизн  $\chi_1, \chi_2$  и кручения  $\chi_{12}$  принимают вид:

$$\begin{aligned}
\chi_1 &= \frac{1}{A} \frac{\partial \Psi_x}{\partial x} + \frac{1}{AB} \frac{\partial A}{\partial y} \Psi_y; \quad \chi_2 = \frac{1}{B} \frac{\partial \Psi_y}{\partial y} + \frac{1}{AB} \frac{\partial B}{\partial x} \Psi_x, \\
2\chi_{12} &= \frac{1}{A} \frac{\partial \Psi_y}{\partial x} + \frac{1}{B} \frac{\partial \Psi_x}{\partial y} - \frac{1}{AB} \left( \frac{\partial A}{\partial y} \Psi_x + \frac{\partial B}{\partial x} \Psi_y \right).
\end{aligned} \tag{1.10}$$

$f(z)$  является функцией, описывающей распределение компонент напряжений  $\tau_{xz}, \tau_{yz}$  по толщине оболочки [26],  $k$  – числовой коэффициент, который соответствует выбранной функции  $f(z)$ . Для гладких оболочек принимается [26]

$$f(z) = 6 \left( \frac{1}{4} - \frac{z^2}{h^2} \right), \quad k = \frac{5}{6}.$$

Функция  $f(z)$  при  $z = -\frac{h}{2}$  и  $z = \frac{h}{2}$  (верхняя и нижняя поверхности оболочки)

обращается в нуль, а также удовлетворяет условиям [26]:

$$\frac{1}{h} \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} f(z) dz = 1; \quad \frac{1}{h} \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} f^2(z) dz = \frac{1}{k}.$$

Для дальнейших преобразований будет удобно записать выражения для деформаций в векторной форме

$$\{\varepsilon\} = (\varepsilon_x \quad \varepsilon_y \quad \gamma_{yz} \quad \gamma_{xz} \quad \gamma_{xy})^T. \quad (1.11)$$

Задание геометрии оболочечной конструкции происходит через изменение параметров Ляме и значений главных кривизн оболочки. Для некоторых наиболее распространенных видов оболочек [64] они приводятся в Таблице 1.1. Здесь  $R, R_1, R_2$  – радиусы главных кривизн оболочки,  $\theta$  – угол конусности для конической оболочки,  $d$  – смещение образующего сектора от оси вращения для тороидальной оболочки.

Таблица 1.1 – Значения параметров Ляме и кривизн для некоторых видов оболочек

Параметр	Пологая оболочка	Цилиндрическая оболочка	Коническая оболочка	Сферическая оболочка	Тороидальная оболочка
$A$	1	1	1	$R$	$R$
$B$	1	$R$	$x \cdot \sin \theta$	$R \cdot \sin x$	$d + R \cdot \sin x$
$k_x$	$\frac{1}{R_1}$	0	0	$\frac{1}{R}$	$\frac{1}{R}$
$k_y$	$\frac{1}{R_2}$	$\frac{1}{R}$	$\frac{ctg \theta}{x}$	$\frac{1}{R}$	$\frac{\sin x}{d + R \cdot \sin x}$

### 1.3 ФИЗИЧЕСКИЕ СООТНОШЕНИЯ ТЕОРИИ УПРУГИХ ОБОЛОЧЕК С УЧЕТОМ ОРТОТРОПИИ МАТЕРИАЛА

Для связи деформаций и напряжений используются физические соотношения, которые строятся на основе обобщенного закона Гука (1.7). Выразив напряжения через деформации, получим физические соотношения для тонкостенной ортотропной оболочки при линейно-упругом деформировании [6, 78]:

$$\begin{aligned}\sigma_x &= \frac{E_1}{1 - \mu_{12}\mu_{21}} [\varepsilon_x + \mu_{21}\varepsilon_y + z(\chi_1 + \mu_{21}\chi_2)]; \\ \sigma_y &= \frac{E_2}{1 - \mu_{12}\mu_{21}} [\varepsilon_y + \mu_{12}\varepsilon_x + z(\chi_2 + \mu_{12}\chi_1)]; \\ \tau_{xy} &= G_{12} [\gamma_{xy} + 2z\chi_{12}]; \\ \tau_{xz} &= G_{13} kf(z)(\Psi_x - \theta_1); \\ \tau_{yz} &= G_{23} kf(z)(\Psi_y - \theta_2),\end{aligned}\tag{1.12}$$

В том случае, если ортогональные направления анизотропии 1 и 2 не совпадают с направлениями локальной ортогональной криволинейной системы координат  $x$  и  $y$ , необходимо сделать поворот системы координат. Тогда закон Гука (1.1) примет вид

$$\{\varepsilon\} = [T_2] [S] [T_1]^{-1} \{\sigma\},\tag{1.13}$$

где

$$[T_1] = \begin{bmatrix} \cos^2 & \sin^2 & 0 & 0 & -2\sin \cdot \cos \\ \sin^2 & \cos^2 & 0 & 0 & 2\sin \cdot \cos \\ 0 & 0 & \cos & \sin & 0 \\ 0 & 0 & -\sin & \cos & 0 \\ \sin \cdot \cos & -\sin \cdot \cos & 0 & 0 & \cos^2 - \sin^2 \end{bmatrix},$$

$$[T_2] = \begin{bmatrix} \cos^2 & \sin^2 & 0 & 0 & -\sin \cdot \cos \\ \sin^2 & \cos^2 & 0 & 0 & \sin \cdot \cos \\ 0 & 0 & \cos & \sin & 0 \\ 0 & 0 & -\sin & \cos & 0 \\ 2\sin \cdot \cos & -2\sin \cdot \cos & 0 & 0 & \cos^2 - \sin^2 \end{bmatrix}.$$

Для модели Кирхгофа-Лява данная методика поворота системы координат была представлена в работе [4].

В том случае, если оси ортотропии не перпендикулярны друг другу, необходимо произвести перерасчет жесткостных характеристик с учетом угла [123].

На основе физических соотношений можно сформировать выражения для усилий и моментов. Проинтегрировав напряжения (1.12) по переменной  $z$  от  $-h/2$  до  $h/2$ , получим выражения для усилий и моментов, приведенных к срединной поверхности оболочки и приходящихся на единицу длины сечения [64]. Для гладких оболочек они будут иметь вид

$$\begin{aligned} N_x &= \frac{E_1}{1 - \mu_{12}\mu_{21}} [h(\varepsilon_x + \mu_{21}\varepsilon_y)], \\ N_y &= \frac{E_2}{1 - \mu_{12}\mu_{21}} [h(\varepsilon_y + \mu_{12}\varepsilon_x)], \\ N_{xy} &= N_{yx} = G_{12} [h\gamma_{xy}], \\ M_x &= \frac{E_1}{1 - \mu_{12}\mu_{21}} \left[ \left( \frac{h^3}{12} \right) (\chi_1 + \mu_{21}\chi_2) \right], \\ M_y &= \frac{E_2}{1 - \mu_{12}\mu_{21}} \left[ \left( \frac{h^3}{12} \right) (\chi_2 + \mu_{12}\chi_1) \right], \\ M_{xy} &= M_{yx} = G_{12} \left[ 2 \left( \frac{h^3}{12} \right) \chi_{12} \right], \\ Q_x &= G_{13} kh(\psi_x - \theta_1), \\ Q_y &= G_{23} kh(\psi_y - \theta_2), \end{aligned} \tag{1.14}$$

где  $N_x, N_y, N_{xy}, N_{yx}$  – нормальные усилия в направлении осей  $x, y$  и сдвиговые усилия в плоскости  $XOY$  соответственно;  $M_x, M_y, M_{xy}, M_{yx}$  – изгибающие моменты в направлении осей  $x, y$  и крутящие моменты;  $Q_x, Q_y$  – поперечные силы в плоскостях  $XOZ$  и  $YOZ$ . Усилия и моменты для подкрепленных оболочек будут описаны в следующем пункте.

## 1.4 УЧЕТ ПОДКРЕПЛЕНИЯ ОБОЛОЧКИ РЕБРАМИ ЖЕСТКОСТИ

Подкрепление тонкостенных конструкций различными жесткостными элементами позволяет существенно улучшить эксплуатационные показатели таких конструкций. Как было показано в работах [16, 65, 88], оболочки, подкрепленные ребрами жесткости, теряют устойчивость при нагрузках, в несколько раз больших, чем гладкие. Сфера применения таких оболочек довольно обширна – судостроение, авиастроение, ракетостроение, строительство и т.д.

Манипулирование способами подкрепления конструкции позволяет найти оптимальный вариант в каждом конкретном случае.

Наиболее часто ребра располагают вдоль осей локальной системы координат оболочки в одном или двух направлениях. В таком случае, подкрепление оболочки ребрами жесткости [55, 58] дает значительное увеличение значения критической нагрузки по сравнению с гладкими оболочками [62, 89].

### 1.4.1 Задание расположения ребер

Рассмотрим геометрию подкрепленной оболочки. Со стороны вогнутости оболочка усилена ребрами жесткости, которые расположены ортогонально друг другу и параллельны координатным линиям (Рис. 1.2).

Высота и расположение ребер задается функцией [58]

$$H(x, y) = \sum_{j=1}^m h^j \bar{\delta}(x - x_j) + \sum_{i=1}^n h^i \bar{\delta}(y - y_i) - \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^m h^{ij} \bar{\delta}(x - x_j) \bar{\delta}(y - y_i),$$

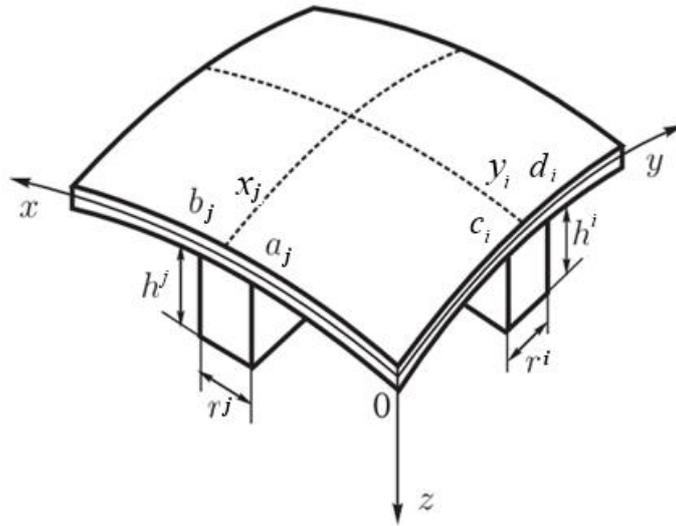


Рис. 1.2. Задание расположения ребер, параллельных координатным линиям где  $h^j, r_j, m$  – высота и ширина ребер, параллельных оси  $y$ , и число ребер этого направления;  $h^i, r_i, n$  – аналогично для ребер, параллельных оси  $x$ ;  $h^{ij} = \min\{h^i, h^j\}$ ;  $\bar{\delta}(x - x_j)$  – единичная столбчатая функция переменной  $x$ , равная единице при  $a_j \leq x \leq b_j$   $\left(a_j = x_j - \frac{r_j}{2}, b_j = x_j + \frac{r_j}{2}\right)$  и равная нулю при других значениях  $x$ ;  $\bar{\delta}(y - y_i)$  – единичная столбчатая функция переменной  $y$ , равная единице при  $c_i \leq y \leq d_i$   $\left(c_i = y_i - \frac{r_i}{2}, d_i = y_i + \frac{r_i}{2}\right)$  и равная нулю при других значениях  $y$ .

Таким образом, толщина всей конструкции равна  $h + H$ .

#### 1.4.2 Метод конструктивной анизотропии

Для оболочек, часто подкрепленных ребрами жесткости, не имеет смысла вводить ребра дискретно. Если расстояние между ребрами не превышает 0.1 от линейного размера оболочки, то эффект от дискретного введения ребер «размазывается», не внося существенной погрешности в расчеты [59]. Поэтому целесообразно использовать специально разработанный метод конструктивной анизотропии. При этом процесс вычисления коэффициентов алгебраических уравнений при использовании

метода Ритца существенно упрощается. Следует отметить, что на практике большая часть конструкций подкрепляется именно часто расположенными ребрами.

Вариант метода конструктивной анизотропии для оболочек, подкрепленных ребрами постоянной высоты, был разработан Карповым В.В. [58]. В данной работе этот метод применяется для расчета подкрепленных ортотропных оболочек.

Суть метода конструктивной анизотропии заключается в сведении оболочки дискретно-переменной толщины к оболочке равновеликой по жесткости оболочке постоянной толщины и дает возможность учитывать такие существенные факторы, как сдвиговая и крутильная жесткость ребер.

Получим выражения для усилий и моментов при введении ребер жесткости по методу конструктивной анизотропии. Для этого проинтегрируем напряжения (1.12) по  $z$  в пределах от  $-h/2$  до  $h/2+H$ . При этом, если обшивка оболочки и ребра выполнены из одного материала или имеют близкие сдвиговые жесткости, то для подкрепленных оболочек  $f(z)$  можно принять в виде [59]

$$f(z) = -\frac{6}{(h+H)^2} \left( z + \frac{h}{2} \right) \left( z - \frac{h}{2} - H \right), \quad k = \frac{5}{6}.$$

Таким образом, выражения для усилий и моментов примут вид:

$$\begin{aligned} N_x &= \frac{E_1}{1 - \mu_{12}\mu_{21}} \left[ (h + F_x)(\varepsilon_x + \mu_{21}\varepsilon_y) + S_x(\chi_1 + \mu_{21}\chi_2) \right], \\ N_y &= \frac{E_2}{1 - \mu_{12}\mu_{21}} \left[ (h + F_y)(\varepsilon_y + \mu_{12}\varepsilon_x) + S_y(\chi_2 + \mu_{12}\chi_1) \right], \\ N_{xy} &= G_{12} \left[ (h + F_y)\gamma_{xy} + 2S_y\chi_{12} \right], \quad N_{yx} = G_{12} \left[ (h + F_x)\gamma_{xy} + 2S_x\chi_{12} \right], \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
M_x &= \frac{E_1}{1 - \mu_{12}\mu_{21}} \left[ S_x (\varepsilon_x + \mu_{21}\varepsilon_y) + \left( \frac{h^3}{12} + J_x \right) (\chi_1 + \mu_{21}\chi_2) \right], \\
M_y &= \frac{E_2}{1 - \mu_{12}\mu_{21}} \left[ S_y (\varepsilon_y + \mu_{12}\varepsilon_x) + \left( \frac{h^3}{12} + J_y \right) (\chi_2 + \mu_{12}\chi_1) \right], \\
M_{xy} &= G_{12} \left[ S_y \gamma_{xy} + 2 \left( \frac{h^3}{12} + J_y \right) \chi_{12} \right], \\
M_{yx} &= G_{12} \left[ S_x \gamma_{xy} + 2 \left( \frac{h^3}{12} + J_x \right) \chi_{12} \right], \\
Q_x &= G_{13} k (h + F_x) (\Psi_x - \theta_1), \quad Q_y = G_{23} k (h + F_y) (\Psi_y - \theta_2),
\end{aligned} \tag{1.15}$$

где  $F_x, F_y, S_x, S_y, J_x, J_y$  – площадь поперечного или продольного сечения ребра, приходящуюся на единицу длины сечения; статический момент и момент инерции этого сечения, которые имеют вид [7]

$$\begin{aligned}
F_x &= \sum_{i=1}^n \frac{h^i r_i}{\tilde{b}} + \sum_{j=1}^m \left( \frac{h^j r_j}{\tilde{a}} - \sum_{i=1}^n \frac{h^{ij} r_i r_j}{\tilde{a}\tilde{b}} \right) \frac{r_j}{\tilde{a}}; \\
F_y &= \sum_{j=1}^m \frac{h^j r_j}{\tilde{a}} + \sum_{i=1}^n \left( \frac{h^i r_i}{\tilde{b}} - \sum_{j=1}^m \frac{h^{ij} r_i r_j}{\tilde{a}\tilde{b}} \right) \frac{r_i}{\tilde{b}}; \\
S_x &= \sum_{i=1}^n \frac{S^i r_i}{\tilde{b}} + \sum_{j=1}^m \left( \frac{S^j r_j}{\tilde{a}} - \sum_{i=1}^n \frac{S^{ij} r_i r_j}{\tilde{a}\tilde{b}} \right) \frac{r_j}{\tilde{a}}; \\
S_y &= \sum_{j=1}^m \frac{S^j r_j}{\tilde{a}} + \sum_{i=1}^n \left( \frac{S^i r_i}{\tilde{b}} - \sum_{j=1}^m \frac{S^{ij} r_i r_j}{\tilde{a}\tilde{b}} \right) \frac{r_i}{\tilde{b}}; \\
J_x &= \sum_{i=1}^n \frac{J^i r_i}{\tilde{b}} + \sum_{j=1}^m \left( \frac{J^j r_j}{\tilde{a}} - \sum_{i=1}^n \frac{J^{ij} r_i r_j}{\tilde{a}\tilde{b}} \right) \frac{r_j}{\tilde{a}}; \\
J_y &= \sum_{j=1}^m \frac{J^j r_j}{\tilde{a}} + \sum_{i=1}^n \left( \frac{J^i r_i}{\tilde{b}} - \sum_{j=1}^m \frac{J^{ij} r_i r_j}{\tilde{a}\tilde{b}} \right) \frac{r_i}{\tilde{b}},
\end{aligned} \tag{1.16}$$

где

$$S^i = \frac{h^i (h + h^i)}{2}, \quad S^j = \frac{h^j (h + h^j)}{2}, \quad S^{ij} = \frac{h^{ij} (h + h^{ij})}{2},$$

$$J^i = 0.25h^2h^i + 0.5h(h^i)^2 + \frac{1}{3}(h^i)^3,$$

$$J^j = 0.25h^2h^j + 0.5h(h^j)^2 + \frac{1}{3}(h^j)^3, \quad J^{ij} = 0.25h^2h^{ij} + 0.5h(h^{ij})^2 + \frac{1}{3}(h^{ij})^3.$$

Здесь  $r$  – ширина ребра;  $h$  – высота; индексы  $i$  и  $j$  указывают номер ребра, расположенного параллельно оси  $x$  и  $y$  соответственно;  $n, m$  – количество ребер;  $h^{ij} = \min\{h^i, h^j\}$ ; переменные  $\tilde{a}, \tilde{b}$  позволяют ребрам жесткости повторять геометрию оболочки и определяются как  $\tilde{a} = aA, \tilde{b} = (y_2(x) - y_1(x))B\left(\frac{a}{2}\right)$ .

## 1.5 ФУНКЦИОНАЛ ПОЛНОЙ ЭНЕРГИИ ДЕФОРМАЦИИ ОБОЛОЧЕК, ПОДКРЕПЛЕННЫХ РЕБРАМИ

Функционал Лагранжа полной энергии деформации оболочки является суммой работ внутренних и внешних сил, и принимает следующий вид:

$$\begin{aligned} \Theta = \frac{1}{2} \int_{a_1}^a \int_{y_1(x)}^{y_2(x)} \{ & N_x \varepsilon_x + N_y \varepsilon_y + \frac{1}{2} (N_{xy} + N_{yx}) \gamma_{xy} + M_x \chi_1 + M_y \chi_2 + \\ & + (M_{xy} + M_{yx}) \chi_{12} + Q_x (\Psi_x - \theta_1) + Q_y (\Psi_y - \theta_2) - 2qW \} AB dx dy. \end{aligned} \quad (1.17)$$

Способ закрепления контура конструкции учитывается через граничные условия, которые влияют в дальнейшем на выбор аппроксимирующих функций [58, 114], а область, занимаемая оболочкой, задается в пределах интегрирования [115]:  $a_1 \leq x \leq a, y_1(x) \leq y \leq y_2(x)$ . Использование функций  $y_1(x), y_2(x)$  позволяет учитывать нестандартную форму контура оболочки.

Подставив выражения для усилий и моментов (1.15) в функционал (1.17), получим

$$\begin{aligned}
\Theta = & \frac{1}{2} \int_{a_1}^a \int_{y_1(x)}^{y_2(x)} \left\{ \frac{E_1}{1 - \mu_{12}\mu_{21}} (h + F_x) (\epsilon_x^2 + \mu_{21}\epsilon_x\epsilon_y) + \frac{E_1}{1 - \mu_{12}\mu_{21}} S_x (\chi_1\epsilon_x + \mu_{21}\chi_2\epsilon_x) + \right. \\
& + \frac{E_2}{1 - \mu_{12}\mu_{21}} (h + F_y) (\epsilon_y^2 + \mu_{12}\epsilon_x\epsilon_y) + \frac{E_2}{1 - \mu_{12}\mu_{21}} S_y (\chi_2\epsilon_y + \mu_{12}\chi_1\epsilon_y) + \\
& + \frac{1}{2} G_{12} (h + F_y) \gamma_{xy}^2 + G_{12} S_y \chi_{12} \gamma_{xy} + \frac{1}{2} G_{12} (h + F_x) \gamma_{xy}^2 + G_{12} S_x \chi_{12} \gamma_{xy} + \\
& + \frac{E_1}{1 - \mu_{12}\mu_{21}} S_x (\chi_1\epsilon_x + \mu_{21}\chi_1\epsilon_y) + \frac{E_1}{1 - \mu_{12}\mu_{21}} \left( \frac{h^3}{12} + J_x \right) (\chi_1^2 + \mu_{21}\chi_2\chi_1) + \\
& + \frac{E_2}{1 - \mu_{12}\mu_{21}} S_y (\chi_2\epsilon_y + \mu_{12}\chi_2\epsilon_x) + \frac{E_2}{1 - \mu_{12}\mu_{21}} \left( \frac{h^3}{12} + J_y \right) (\chi_2^2 + \mu_{12}\chi_2\chi_1) + \\
& + G_{12} S_y \gamma_{xy} \chi_{12} + 2G_{12} \left( \frac{h^3}{12} + J_y \right) \chi_{12}^2 + G_{12} S_x \gamma_{xy} \chi_{12} + 2G_{12} \left( \frac{h^3}{12} + J_x \right) \chi_{12}^2 + \\
& \left. + G_{13} k (h + F_x) (\Psi_x - \theta_1)^2 + G_{23} k (h + F_y) (\Psi_y - \theta_2)^2 - 2qW \right\} AB dx dy
\end{aligned}$$

Приведя подобные члены, получим

$$\begin{aligned}
\Theta = & \frac{1}{2} \int_{a_1}^a \int_{y_1(x)}^{y_2(x)} \left\{ \frac{E_1}{1 - \mu_{12}\mu_{21}} (h + F_x) \epsilon_x^2 + \frac{E_2}{1 - \mu_{12}\mu_{21}} (h + F_y) \epsilon_y^2 + \right. \\
& + \left[ \frac{E_1}{1 - \mu_{12}\mu_{21}} \mu_{21} (h + F_x) + \frac{E_2}{1 - \mu_{12}\mu_{21}} \mu_{21} (h + F_y) \right] \epsilon_x \epsilon_y + \\
& + \frac{1}{2} G_{12} (2h + F_x + F_y) \gamma_{xy}^2 + G_{13} k (h + F_x) (\Psi_x - \theta_1)^2 + G_{23} k (h + F_y) (\Psi_y - \theta_2)^2 + \\
& + 2 \frac{E_1}{1 - \mu_{12}\mu_{21}} S_x \epsilon_x \chi_1 + \left( \frac{E_1}{1 - \mu_{12}\mu_{21}} \mu_{21} S_x + \frac{E_2}{1 - \mu_{12}\mu_{21}} \mu_{12} S_y \right) \epsilon_x \chi_2 + \\
& + \left( \frac{E_2}{1 - \mu_{12}\mu_{21}} \mu_{12} S_y + \frac{E_2}{1 - \mu_{12}\mu_{21}} \mu_{21} S_y \right) \epsilon_y \chi_1 + 2 \frac{E_2}{1 - \mu_{12}\mu_{21}} S_y \epsilon_y \chi_2 + \\
& + 2G_{12} (S_y + S_x) \gamma_{xy} \chi_{12} + \frac{E_1}{1 - \mu_{12}\mu_{21}} \left( \frac{h^3}{12} + J_x \right) \chi_1^2 + \frac{E_2}{1 - \mu_{12}\mu_{21}} \left( \frac{h^3}{12} + J_y \right) \chi_2^2 + \\
& + \left( \frac{E_1}{1 - \mu_{12}\mu_{21}} \mu_{21} \left( \frac{h^3}{12} + J_x \right) + \right. \\
& \left. + \left( \frac{E_2}{1 - \mu_{12}\mu_{21}} \mu_{12} \left( \frac{h^3}{12} + J_y \right) \right) \chi_1 \chi_2 + 2G_{12} \left( \frac{h^3}{6} + J_x + J_y \right) \chi_{12}^2 - 2qW \right\} AB dx dy
\end{aligned}$$

УЧИТЫВАЯ, ЧТО  $E_1\mu_{21} = E_2\mu_{12}$  И ОБОЗНАЧИВ

$$\overline{G}_2 = \frac{E_2}{E_1}, \overline{G}_{12} = \frac{G_{12}(1 - \mu_{12}\mu_{21})}{E_1}, \overline{G}_{13} = \frac{G_{13}(1 - \mu_{12}\mu_{21})}{E_1}, \overline{G}_{23} = \frac{G_{23}(1 - \mu_{12}\mu_{21})}{E_1},$$

приведем функционал к виду

$$\begin{aligned} \Theta = & \frac{E_1}{2(1 - \mu_{12}\mu_{21})} \int_{a_1}^{a_2} \int_{y_1(x)}^{y_2(x)} \left\{ (h + F_x) \varepsilon_x^2 + \overline{G}_2 (h + F_y) \varepsilon_y^2 + \right. \\ & + \mu_{21} (2h + F_x + F_y) \varepsilon_x \varepsilon_y + \frac{1}{2} \overline{G}_{12} (2h + F_x + F_y) \gamma_{xy}^2 + \\ & + \overline{G}_{13} k (h + F_x) (\Psi_x - \theta_1)^2 + \overline{G}_{23} k (h + F_y) (\Psi_y - \theta_2)^2 + 2S_x \varepsilon_x \chi_1 + \\ & + \mu_{21} (S_x + S_y) \varepsilon_x \chi_2 + \mu_{21} (S_x + S_y) \varepsilon_y \chi_1 + 2\overline{G}_2 S_y \varepsilon_y \chi_2 + 2\overline{G}_{12} (S_x + S_y) \gamma_{xy} \chi_{12} + \\ & + \left( \frac{h^3}{12} + J_x \right) \chi_1^2 + \overline{G}_2 \left( \frac{h^3}{12} + J_y \right) \chi_2^2 + \mu_{21} \left( \frac{h^3}{6} + J_x + J_y \right) \chi_1 \chi_2 + \\ & \left. + 2\overline{G}_{12} \left( \frac{h^3}{6} + J_x + J_y \right) \chi_{12}^2 - 2 \frac{q(1 - \mu_{12}\mu_{21})}{E_1} W \right\} AB dx dy \end{aligned} \quad (1.18)$$

Введем обозначения

$$\begin{aligned} a_1 = h + F_x, a_2 = \overline{G}_2 (h + F_y), a_3 = \mu_{21} (2h + F_x + F_y), \\ a_4 = \frac{1}{2} \overline{G}_{12} (2h + F_x + F_y), a_5 = \overline{G}_{13} k (h + F_x), a_6 = \overline{G}_{23} k (h + F_y), \\ a_7 = 2S_x, a_8 = \mu_{21} (S_x + S_y), a_9 = 2\overline{G}_2 S_y, a_{10} = 2\overline{G}_{12} (S_x + S_y), \\ a_{11} = \frac{h^3}{12} + J_x, a_{12} = \overline{G}_2 \left( \frac{h^3}{12} + J_y \right), a_{13} = \mu_{21} \left( \frac{h^3}{6} + J_x + J_y \right), \\ a_{14} = 2\overline{G}_{12} \left( \frac{h^3}{6} + J_x + J_y \right), a_{15} = \frac{2(1 - \mu_{12}\mu_{21})}{E_1}. \end{aligned} \quad (1.19)$$

С учетом этих обозначений функционал можно записать следующим образом:

$$\begin{aligned} \Theta = & \frac{E_1}{2(1 - \mu_{12}\mu_{21})} \int_{a_1}^{a_2} \int_{y_1(x)}^{y_2(x)} \left\{ a_1 \varepsilon_x^2 + a_2 \varepsilon_y^2 + a_3 \varepsilon_x \varepsilon_y + a_4 \gamma_{xy}^2 + a_5 (\Psi_x - \theta_1)^2 + \right. \\ & + a_6 (\Psi_y - \theta_2)^2 + a_7 \varepsilon_x \chi_1 + a_8 \varepsilon_x \chi_2 + a_8 \varepsilon_y \chi_1 + a_9 \varepsilon_y \chi_2 + a_{10} \gamma_{xy} \chi_{12} + \\ & \left. + a_{11} \chi_1^2 + a_{12} \chi_2^2 + a_{13} \chi_1 \chi_2 + a_{14} \chi_{12}^2 - a_{15} q W \right\} AB dx dy \end{aligned} \quad (1.20)$$

Таким образом, функционал полной энергии деформации, когда ребра вводятся по методу конструктивной анизотропии, по форме совпадает с аналогичным функционалом для изотропных оболочек [64], отличие заключается лишь в числовых коэффициентах  $a_1 - a_{15}$ , которые вычисляются по разным формулам. То, что функционал данного вида в задачах устойчивости оболочек имеет минимум, было доказано в работе [29].

## 1.6 КРАЕВЫЕ УСЛОВИЯ

Краевые условия выбираются в зависимости от способа закрепления контура оболочки. При использовании модели Тимошенко-Рейснера, на каждом краю оболочки должны выполняться 5 краевых условий. Если область  $D$ , занимаемая оболочкой, имеет вид  $D \{a_1 \leq x \leq a, y_1(x) \leq y \leq y_2(x)\}$ , тогда естественными краевыми условиями, которые вытекают из преобразования вариационного уравнения, являются [58]:

- При  $x = a_1, x = a$

$$\begin{aligned} N_x = 0 \text{ или } U = 0; N_{xy} = 0 \text{ или } V = 0, \\ N_x \theta_1 + N_{xy} \theta_2 - Q_x = 0 \text{ или } W = 0, \\ \Psi_x = 0 \text{ или } M_x = 0, M_{xy} = 0 \text{ или } \Psi_y = 0; \end{aligned} \quad (1.21)$$

- При  $y = y_1(x), y = y_2(x)$

$$\begin{aligned} N_{xy} = 0 \text{ или } U = 0; N_y = 0 \text{ или } V = 0, \\ N_y \theta_2 + N_{xy} \theta_1 - Q_y = 0 \text{ или } W = 0, \\ \Psi_x = 0 \text{ или } M_{xy} = 0, M_y = 0 \text{ или } \Psi_y = 0. \end{aligned} \quad (1.22)$$

Из соотношений (1.21), (1.22) можно сформировать различные виды конкретных краевых условий при различном закреплении края конструкции (Таблица 1.2).

Таблица 1.2 – Краевые условия при различном закреплении края конструкции

Закрепление	При $x = a_1, x = a$	При $y = y_1(x), y = y_2(x)$
Шарнирно-неподвижное закрепление	$U = V = W =$ $= M_x = \Psi_y = 0$	$U = V = W =$ $= \Psi_x = M_y = 0$
Жесткое закрепление	$U = V = W =$ $= \Psi_x = \Psi_y = 0$	$U = V = W =$ $= \Psi_x = \Psi_y = 0$
Жесткое при $x = a_1, x = a$ и шарнирно-неподвижное при $y = y_1(x), y = y_2(x)$	$U = V = W =$ $= \Psi_x = \Psi_y = 0$	$U = V = W =$ $= \Psi_x = M_y = 0$
Жесткое при $x = a_1, x = a$ и свободный край при $y = y_1(x), y = y_2(x)$	$U = V = W =$ $= \Psi_x = \Psi_y = 0$	$N_{xy} = N_y = Q_y =$ $= M_{xy} = M_y = 0$

В данной работе приводятся краевые условия для четырех различных способов закрепления контура оболочки: шарнирно-неподвижного, жесткой заделки, и два комбинированных: при  $x = a_1, x = a$  – жесткая заделка, а при  $y = y_1(x), y = y_2(x)$  или шарнирно-неподвижное, или свободный край.

## 1.7 ВЫВОДЫ

Таким образом, полученные соотношения представляют собой математическую модель с комплексным учетом таких факторов, как ортотропия материала, геометрическая нелинейность, поперечные сдвиги, введение ребер по методу конструктивной анизотропии с учетом их сдвиговой и крутильной жесткости.

Найдя первую вариацию функционала полной энергии деформации оболочки и приравняв ее к нулю, можно получить уравнения равновесия. Эти дифференциальные уравнения в частных производных десятого порядка будут существенно громоздкими. Поэтому целесообразно не решать

уравнения равновесия, а находить искомые функции перемещений  $U(x, y)$ ,  $V(x, y)$ ,  $W(x, y)$  и углов поворота нормали  $\Psi_x(x, y)$ ,  $\Psi_y(x, y)$ , используя метод Ритца для минимизации функционала полной энергии деформации оболочки.

## **ГЛАВА 2. АЛГОРИТМЫ ИССЛЕДОВАНИЯ ПРОЧНОСТИ И УСТОЙЧИВОСТИ ОРТОТРОПНЫХ ОБОЛОЧЕК**

В данной работе подробно рассматривается алгоритм, основанный на методе Ритца и методе продолжения решения по наилучшему параметру [76, 88, 111]. Метод продолжения решения по наилучшему параметру был предложен Е. Б. Кузнецовым и В. И. Шалашилиным, и применялся в работах Л. П. Москаленко при исследовании устойчивости пологих изотропных оболочек.

Согласно этому алгоритму, к функционалу применяется метод Ритца для сведения вариационной задачи к системе нелинейных алгебраических уравнений. Полученная система нелинейных алгебраических уравнений решается методом продолжения решения по наилучшему параметру [76, 88, 111], так как он сводит решение нелинейной задачи к последовательности решения линейных задач и позволяет находить верхние и нижние критические нагрузки, точки бифуркации; обходить особые точки кривой «нагрузка – прогиб» и исследовать закритическое поведение конструкции. Кроме того, по сравнению с другими методами продолжения решения по параметру, этот метод не требует смены параметра продолжения решения при обходе особых точек.

### **2.1 МЕТОД РИТЦА ДЛЯ СВЕДЕНИЯ ВАРИАЦИОННОЙ ЗАДАЧИ К СИСТЕМЕ НЕЛИНЕЙНЫХ АЛГЕБРАИЧЕСКИХ УРАВНЕНИЙ**

При исследовании напряженно-деформированного состояния оболочки решается вариационная задача нахождения минимума функционала [29]. Для этого к функционалу (1.20) применяется метод Ритца, и неизвестные функции представляются в виде

$$U(x, y) = \sum_{I=1}^N U(I)Z1(I); V(x, y) = \sum_{I=1}^N V(I)Z2(I);$$

$$W(x, y) = \sum_{I=1}^N W(I)Z3(I); \Psi_x(x, y) = \sum_{I=1}^N PS(I)Z4(I); \quad (2.1)$$

$$\Psi_y(x, y) = \sum_{I=1}^N PN(I)Z5(I),$$

где  $U(I), V(I), W(I), PS(I), PN(I)$  – неизвестные числовые коэффициенты, а  $Z1(I)–Z5(I)$  – известные аппроксимирующие функции аргументов  $x$  и  $y$ , удовлетворяющие заданным краевым условиям на контуре оболочки,  $N$  – количество членов разложения.

### 2.1.1 Выбор аппроксимирующих функций для различных видов закрепления контура оболочки

При рассматриваемых формах закрепления контура оболочки при непрерывной аппроксимации искомых функций удобно использовать тригонометрические функции. В данной работе предлагается выбирать аппроксимирующие функции  $Z1(I)–Z5(I)$  как произведения пар таких функций. Будем рассматривать аппроксимирующие функции, когда решаемая задача несимметричная (Таблица 2.1). При формировании разложений неизвестных функций в ряды, переменные  $l = 1..\sqrt{N}$ ,  $p = 1..\sqrt{N}$ .

Таблица 2.1 – Варианты аппроксимирующих функций для различных способов закрепления контура оболочки

Способ закрепления	Функция	При $x = a_1$ , $x = a$	При $y = y_1(x)$ , $y = y_2(x)$
Шарнирно-неподвижное	$U(x, y), V(x, y), W(x, y)$	$\sin\left(p\pi\frac{x}{a}\right)$	$\sin\left(l\pi\frac{y}{b}\right)$
	$\Psi_x(x, y)$	$\cos\left(p\pi\frac{x}{a}\right)$	$\sin\left(l\pi\frac{y}{b}\right)$
	$\Psi_y(x, y)$	$\sin\left(p\pi\frac{x}{a}\right)$	$\cos\left(l\pi\frac{y}{b}\right)$
Жесткая заделка	$U(x, y), V(x, y), W(x, y),$ $\Psi_x(x, y), \Psi_y(x, y)$	$\sin\left(p\pi\frac{x}{a}\right)$	$\sin\left(l\pi\frac{y}{b}\right)$

Жесткое при $x = a_1$ , $x = a$ и шарнирно- неподвижное при $y = y_1(x)$ , $y = y_2(x)$	$U(x, y), V(x, y), W(x, y),$ $\Psi_x(x, y)$	$\sin\left(p\pi \frac{x}{a}\right)$	$\sin\left(l\pi \frac{y}{b}\right)$
	$\Psi_y(x, y)$	$\sin\left(p\pi \frac{x}{a}\right)$	$\cos\left(l\pi \frac{y}{b}\right)$
Жесткое при $x = a_1$ , $x = a$ и свободный край при $y = y_1(x)$ , $y = y_2(x)$	$U(x, y), V(x, y), W(x, y)$ $\Psi_x(x, y), \Psi_y(x, y)$	$\sin\left(p\pi \frac{x}{a}\right)$	$\cos\left((l-1)\pi \frac{y}{b}\right)$

Рассмотрим более подробно вариант жесткого закрепления контура конструкции. В простейшем случае, когда конструкция имеет прямоугольную форму и начало координат находится в угловой точке срединной поверхности оболочки, функции можно использовать такие:  $\sin\left(p\pi \frac{x}{a}\right)$ ,  $\sin\left(l\pi \frac{y}{b}\right)$  на границах вдоль осей  $y, x$  соответственно. Если же начало координат смещено вдоль оси  $x$  на расстояние  $a_1$  (такую координатную систему удобно использовать, например, для исследования панелей конических оболочек), то соответствующая аппроксимирующая функция принимает вид  $\sin\left(p\pi \frac{x - a_1}{a - a_1}\right)$ . Это делается для того, чтобы выполнялись краевые условия (1.21): если в функцию подставить значения границ  $x = a_1, x = a$ , то она будет равна нулю.

В том случае, если контур оболочки имеет сложную форму и может быть задан гладкой непрерывной функцией, можно применить аналогичный прием. Пусть границы конструкции в направлении оси  $x$  определяются как  $y = y_1(x)$ ,  $y = y_2(x)$ . Тогда соответствующая аппроксимирующая функция будет иметь вид  $\sin\left(l\pi \frac{y - y_1(x)}{y_2(x) - y_1(x)}\right)$ .

В результате для жесткого закрепления контура при несимметричной постановке задачи получаем следующие аппроксимирующие функции (Таблица 2.2).

Таблица 2.2 – Вариант аппроксимирующих функций для жесткого закрепления контура оболочки

Способ закрепления	Функция	При $x = a_1$ , $x = a$	При $y = y_1(x)$ , $y = y_2(x)$
Жесткая заделка	$U(x, y), V(x, y), W(x, y)$ $\Psi_x(x, y), \Psi_y(x, y)$	$\sin\left(p\pi \frac{x - a_1}{a - a_1}\right)$	$\sin\left(l\pi \frac{y - y_1(x)}{y_2(x) - y_1(x)}\right)$

В качестве функций  $y_1(x), y_2(x)$  могут приниматься различные кривые, например, дуга эллипса:

$$y(x) = \frac{b}{2} + \sqrt{\left(\frac{b}{2}\right)^2 - \left(\frac{b}{a - a_1}\right)^2 \left(x - \frac{a_1 + a}{2}\right)^2} \quad (2.2)$$

### 2.1.2 Минимизация функционала полной энергии деформации оболочки методом Ритца и получение системы нелинейных алгебраических уравнений (СНАУ)

Подставив разложения неизвестных функций (2.1) в функционал (1.20), найдем производные от функционала по неизвестным числовым параметрам и приравняем их к нулю.

$$\frac{\partial \mathcal{E}}{\partial U(l)} = 0; \quad \frac{\partial \mathcal{E}}{\partial V(l)} = 0; \quad \frac{\partial \mathcal{E}}{\partial W(l)} = 0; \quad \frac{\partial \mathcal{E}}{\partial PS(l)} = 0; \quad \frac{\partial \mathcal{E}}{\partial PN(l)} = 0;$$

$$l = 1, 2, \dots, N.$$

В результате получим систему нелинейных алгебраических уравнений (подробно процесс получения коэффициентов СНАУ показан в Приложении А):

$$\sum_{l=1}^N \left[ U(l)C1(I, l) + V(l)C2(I, l) + W(l)C3(I, l) + PS(l)C4(I, l) + \right. \\ \left. + PN(l)C5(I, l) \right] + A_1(l) = 0,$$

$$\sum_{l=1}^N \left[ U(l)C6(I, l) + V(l)C7(I, l) + W(l)C8(I, l) + PS(l)C9(I, l) + \right. \\ \left. + PN(l)C10(I, l) \right] + A_2(l) = 0,$$

$$\sum_{l=1}^N \left[ U(I)C11(I,l) + V(I)C12(I,l) + W(I)C13(I,l) + \right. \\ \left. + PS(I)C14(I,l) + PN(I)C15(I,l) \right] + A_3(l) - CP(l)q = 0, \quad (2.3)$$

$$\sum_{l=1}^N \left[ U(I)C16(I,l) + V(I)C17(I,l) + W(I)C18(I,l) + \right. \\ \left. + PS(I)C19(I,l) + PN(I)C20(I,l) \right] + A_4(l) = 0,$$

$$\sum_{l=1}^N \left[ U(I)C21(I,l) + V(I)C22(I,l) + W(I)C23(I,l) + \right. \\ \left. + PS(I)C24(I,l) + PN(I)C25(I,l) \right] + A_5(l) = 0,$$

$$l = 1, 2, \dots, N.$$

Коэффициенты этой системы представляют собой двойные интегралы от комбинаций входных параметров и аппроксимирующих функций. Например,

$$C1(I,l) = \int_{a_1}^a \int_{y_1(x)}^{y_2(x)} \left\{ \left( 2a_1 \frac{1}{A} \frac{\partial Z1(l)}{\partial x} + a_3 \frac{1}{AB} \frac{\partial B}{\partial x} Z1(l) \right) \left[ \frac{1}{A} \frac{\partial Z1(I)}{\partial x} \right] + \right. \\ \left. + \left( 2a_2 \frac{1}{AB} \frac{\partial B}{\partial x} Z1(l) + a_3 \frac{1}{A} \frac{\partial Z1(l)}{\partial x} \right) \left[ \frac{1}{AB} \frac{\partial B}{\partial x} Z1(I) \right] + 2a_4 \frac{1}{B} \frac{\partial Z1(l)}{\partial y} \frac{1}{B} \frac{\partial Z1(I)}{\partial y} + \right. \\ \left. + 2a_5 k_x Z1(l) k_x Z1(I) \right\} AB dx dy.$$

Все нелинейные составляющие содержатся в коэффициентах  $A_1(l) - A_5(l)$ , например

$$A_1(l) = \int_{a_1}^a \int_{y_1(x)}^{y_2(x)} \left\{ \left( 2a_1 \frac{1}{A} \frac{\partial Z1(l)}{\partial x} + a_3 \frac{1}{AB} \frac{\partial B}{\partial x} Z1(l) - 2a_1 \theta_1 k_x Z1(l) \right) \left[ \frac{1}{2} \theta_1^2 \right] - \right. \\ \left. - 2a_1 \theta_1 k_x Z1(l) \left( \frac{1}{A} U(I) \frac{\partial Z1(I)}{\partial x} - k_x W(I) Z3(I) \right) + \right. \\ \left. + \left( 2a_2 \frac{1}{AB} \frac{\partial B}{\partial x} Z1(l) + a_3 \frac{1}{A} \frac{\partial Z1(l)}{\partial x} - a_3 \theta_1 k_x Z1(l) \right) \left[ \frac{1}{2} \theta_2^2 \right] - \right. \\ \left. - a_3 \theta_1 k_x Z1(l) \left( \frac{1}{B} V(I) \frac{\partial Z2(I)}{\partial y} + \frac{1}{AB} \frac{\partial B}{\partial x} U(I) Z1(I) - k_y W(I) Z3(I) \right) + \right. \\ \left. + \left( 2a_4 \frac{1}{B} \frac{\partial Z1(l)}{\partial y} - 2a_4 \theta_2 k_x Z1(l) \right) \left[ \theta_1 \theta_2 \right] - \right. \\ \left. - 2a_4 \theta_2 k_x Z1(l) \left( \frac{1}{A} V(I) \frac{\partial Z2(I)}{\partial x} + \frac{1}{B} U(I) \frac{\partial Z1(I)}{\partial y} - \frac{1}{AB} \frac{\partial B}{\partial x} V(I) Z2(I) \right) \right\} -$$

$$\begin{aligned}
& - a_7 \theta_1 k_x Z1(l) \left( \frac{1}{A} PS(I) \frac{\partial Z4(I)}{\partial x} \right) - \\
& - a_8 \theta_1 k_x Z1(l) \left( \frac{1}{B} PN(I) \frac{\partial Z5(I)}{\partial y} + \frac{1}{AB} \frac{\partial B}{\partial x} PS(I) Z4(I) \right) - \\
& - \frac{1}{2} a_{10} \theta_2 k_x Z1(l) \left( \frac{1}{A} PN(I) \frac{\partial Z5(I)}{\partial x} + \frac{1}{B} PS(I) \frac{\partial Z4(I)}{\partial y} - \right. \\
& \left. - \frac{1}{AB} \frac{\partial B}{\partial x} PN(I) Z5(I) \right) \Bigg\} AB dx dy;
\end{aligned}$$

Остальные коэффициенты системы, в силу громоздкости, представлены в Приложении А.

## 2.2 ЛИНЕАРИЗАЦИЯ СНАУ МЕТОДОМ ПРОДОЛЖЕНИЯ РЕШЕНИЯ ПО НАИЛУЧШЕМУ ПАРАМЕТРУ

### 2.2.1 Метод продолжения решения по параметру

Если для решения нелинейной системы алгебраических уравнений (2.3) применяется метод продолжения решения по параметру, то нелинейные члены уравнений  $A_1(l), A_2(l), A_3(l), A_4(l), A_5(l)$  необходимо записать в развернутом виде, подставив в них выражения (2.1), и провести соответствующие преобразования. Например,  $A_1(l)$  представим в виде

$$\begin{aligned}
A_1(I) = & \sum_{I=1}^N \sum_{K=1}^N C26(I, K, l)W(I)W(K) + C27(I, K, l)W(I)U(K) + \\
& + C28(I, K, l)U(I)W(K) + C29(I, K, l)U(I)U(K) + \\
& + \sum_{L=1}^N \left( \begin{aligned} & C30(I, K, L, l)W(I)W(K)W(L) + C31(I, K, L, l)W(I)U(K)W(L) + \\ & + C32(I, K, L, l)W(I)W(K)U(L) + C33(I, K, L, l)W(I)U(K)U(L) + \\ & + C34(I, K, L, l)U(I)W(K)W(L) + C35(I, K, L, l)U(I)U(K)W(L) + \\ & + C36(I, K, L, l)U(I)W(K)U(L) + C37(I, K, L, l)U(I)U(K)U(L) \end{aligned} \right) + \\
& + C38(I, K, l)U(I)W(K) + C39(I, K, l)W(I)W(K) + C40(I, K, l)U(I)U(K) + \\
& + C41(I, K, l)W(I)U(K) + C42(I, K, l)W(I)W(K) + C43(I, K, l)V(I)W(K) + \\
& + C44(I, K, l)W(I)V(K) + C45(I, K, l)V(I)V(K) + \\
& + \sum_{L=1}^N \left( \begin{aligned} & C46(I, K, L, l)W(I)W(K)W(L) + C47(I, K, L, l)W(I)V(K)W(L) + \\ & + C48(I, K, L, l)U(I)W(K)W(L) + C49(I, K, L, l)U(I)V(K)W(L) + \\ & + C50(I, K, L, l)W(I)W(K)V(L) + C51(I, K, L, l)U(I)W(K)V(L) + \\ & + C52(I, K, L, l)W(I)V(K)V(L) + C53(I, K, L, l)U(I)V(K)V(L) \end{aligned} \right) + \\
& + C54(I, K, l)V(I)W(K) + C55(I, K, l)V(I)U(K) + C56(I, K, l)U(I)W(K) + \\
& + C57(I, K, l)U(I)U(K) + C58(I, K, l)W(I)W(K) + C59(I, K, l)W(I)U(K) + \\
& + C60(I, K, l)W(I)W(K) + C61(I, K, l)W(I)V(K) + C62(I, K, l)U(I)W(K) + \\
& + C63(I, K, l)U(I)V(K) + \\
& + \sum_{L=1}^N \left( \begin{aligned} & C64(I, K, L, l)W(I)W(K)W(L) + C65(I, K, L, l)W(I)U(K)W(L) + \\ & + C66(I, K, L, l)V(I)W(K)W(L) + C67(I, K, L, l)V(I)U(K)W(L) + \\ & + C68(I, K, L, l)W(I)W(K)V(L) + C69(I, K, L, l)W(I)U(K)V(L) + \\ & + C70(I, K, L, l)V(I)W(K)V(L) + C71(I, K, L, l)V(I)U(K)V(L) \end{aligned} \right) + \\
& + C72(I, K, l)V(I)W(K) + C73(I, K, l)U(I)W(K) + \\
& + C74(I, K, l)V(I)W(K) + C75(I, K, l)V(I)V(K) + \\
& + C76(I, K, l)U(I)V(K) + C77(I, K, l)V(I)V(K) + \\
& + C78(I, K, l)PS(I)W(K) + C79(I, K, l)PS(I)U(K) + \\
& + C80(I, K, l)PN(I)W(K) + C81(I, K, l)PN(I)U(K) + \\
& + C82(I, K, l)PS(I)W(K) + C83(I, K, l)PS(I)U(K) + \\
& + C84(I, K, l)PN(I)W(K) + C85(I, K, l)PN(I)V(K) + \\
& + C86(I, K, l)PS(I)W(K) + C87(I, K, l)PS(I)V(K) + \\
& + C88(I, K, l)PN(I)W(K) + C90(I, K, l)PN(I)V(K);
\end{aligned}$$

Чтобы применить метод продолжения решения по параметру, кратко систему (2.3) запишем в векторной форме

$$F(X, P) = 0, \quad (2.4)$$

где вектор  $X = (U(I), V(I), W(I), PS(I), PN(I))^T, I = 1..N$  – вектор неизвестных числовых параметров,  $P$  – нагрузка.

В ненагруженном состоянии оболочки значения перемещений и углов поворота нормали равны нулю, т.е.

$$F(X^0, P^0) \equiv 0, \quad X^0 = 0, \quad P^0 = 0. \quad (2.5)$$

Продифференцируем систему (2.4) по параметру нагрузки  $P$  и, таким образом, получим систему уравнений, линейных относительно  $\frac{dX}{dP}$

$$\frac{\partial F}{\partial X} \frac{dX}{dP} + \frac{\partial F}{\partial P} = 0. \quad (2.6)$$

Здесь  $\frac{\partial F}{\partial X} = J$  – матрица Якоби вектор-функции  $F$ .  $\det(J)$  – определитель матрицы Якоби  $J$ ). Точки, в которых выполняется условие  $\det(J) \neq 0$ , называются регулярными, а точки, в которых  $\det(J) = 0$ , – особыми [76]. В особых точках возможность продолжения решения обычно по-прежнему сохраняется, но само продолжение может стать неоднозначным, т.е. возникает возможность ветвления кривой множества решений системы.

Если полученную задачу Коши (2.5), (2.6) решать методом Эйлера, то получается расчетная схема

$$X_{i+1} = X_i + \Delta X_i, \quad P_{i+1} = P_i + \Delta P_i, \quad (2.7)$$

где  $\Delta P_i$  задается, а  $\Delta X_i$  находить из решения линейной системы алгебраических уравнений

$$\frac{\partial F}{\partial X}(X_i, P_i) \Delta X_i + \frac{\partial F}{\partial P}(X_i, P_i) \Delta P_i = 0. \quad (2.8)$$

Эта схема представляет собой метод последовательных нагружений, впервые предложенный В.В. Петровым [100]. Здесь в качестве параметра

продолжения решения берется нагрузка  $P$ . Благодаря использованию этого метода было решено много практических инженерных задач.

Таким образом, вместо системы нелинейных алгебраических уравнений решается последовательность систем линейных алгебраических уравнений, коэффициенты которой на каждом шаге заново определяются с учетом предыстории продолжения решения [88].

Обозначим  $\Delta X_i = (u_i(I), v_i(I), w_i(I), ps_i(I), pn_i(I))^T, I = 1..N, \Delta P_i = (0, 0, \Delta q_i, 0, 0)^T$ .

Система линейных алгебраических уравнений (2.8) для системы (2.3) на  $i$ -м этапе нагружения будет иметь вид (здесь и далее индекс  $i$  опущен)

$$\begin{aligned} & \sum_{I=1}^N \left\{ u(I) \left( C1(I, l) + \sum_{K=1}^N \left( U(K) \left[ D1(I, K, l) + \sum_{L=1}^N U(L) D2(I, K, L, l) \right] + \right. \right. \right. \\ & + V(K) \left[ D3(I, K, l) + \sum_{L=1}^N V(L) D4(I, K, L, l) \right] + \\ & \left. \left. \left. + W(K) \left[ D5(I, K, l) + \sum_{L=1}^N W(L) D6(I, K, L, l) \right] + PS(K) D7(I, K, l) + PN(K) D8(I, K, l) \right) \right) \right\} + \\ & + v(I) \left( C2(I, l) + \sum_{K=1}^N \left( U(K) \left[ D9(I, K, l) + \sum_{L=1}^N V(L) D10(I, K, L, l) \right] + \right. \right. \\ & + V(K) \left[ D11(I, K, l) + \sum_{L=1}^N U(L) D12(I, K, L, l) \right] + \\ & \left. \left. \left. + W(K) \left[ D13(I, K, l) + \sum_{L=1}^N W(L) D14(I, K, L, l) \right] + PS(K) D15(I, K, l) + \right. \right. \\ & \left. \left. \left. + PN(K) D16(I, K, l) \right) \right) \right\} + w(I) \left( C3(I, l) + \sum_{K=1}^N \left( U(K) D17(I, K, l) + V(K) D18(I, K, l) + \right. \right. \\ & + W(K) \left[ D19(I, K, l) + \sum_{L=1}^N \left( U(L) D20(I, K, L, l) + V(L) D21(I, K, L, l) + \right. \right. \\ & \left. \left. \left. + W(L) D22(I, K, L, l) \right) \right] + PS(K) D23(I, K, l) + PN(K) D24(I, K, l) \right) \right\} + \\ & + ps(I) \left( C4(I, l) + \sum_{K=1}^N \left( U(K) D25(I, K, l) + V(K) D26(I, K, l) + W(K) D27(I, K, l) \right) \right) + \\ & \left. \left. \left. + pn(I) \left( C5(I, l) + \sum_{K=1}^N \left( U(K) D28(I, K, l) + V(K) D29(I, K, l) + W(K) D30(I, K, l) \right) \right) \right) \right\} = 0, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& \sum_{I=1}^N \left\{ u(I) \left( C6(I,l) + \sum_{K=1}^N \left( U(K) \left[ D31(I,K,l) + \sum_{L=1}^N (V(L)D32(I,K,L,l) + \right. \right. \right. \right. \\
& \left. \left. \left. + W(L)D33(I,K,L,l) \right] + V(K) \left[ D34(I,K,l) + \sum_{L=1}^N (U(L)D35(I,K,L,l) + \right. \right. \right. \right. \\
& \left. \left. \left. + W(L)D36(I,K,L,l) \right] + W(K) \left[ D37(I,K,l) + \sum_{L=1}^N (U(L)D38(I,K,L,l) + \right. \right. \right. \\
& \left. \left. \left. + V(L)D39(I,K,L,l) + W(L)D40(I,K,L,l) \right] + PS(K)D41(I,K,l) + \right. \right. \\
& \left. \left. + PN(K)D42(I,K,l) \right) \right) + v(I) \left( C7(I,l) + \sum_{K=1}^N (U(K) \left[ D43(I,K,l) + \right. \right. \\
& \left. \left. + \sum_{L=1}^N (U(L)D44(I,K,L,l) + W(L)D45(I,K,L,l) \right] + V(K) \left[ D46(I,K,l) + \right. \right. \\
& \left. \left. + \sum_{L=1}^N (V(L)D47(I,K,L,l) + W(L)D48(I,K,L,l) \right] + W(K) \left[ D49(I,K,l) + \right. \right. \\
& \left. \left. + \sum_{L=1}^N (U(L)D50(I,K,L,l) + V(L)D51(I,K,L,l) + W(L)D52(I,K,L,l) \right] + \right. \\
& \left. \left. + PS(K)D53(I,K,l) + PN(K)D54(I,K,l) \right) \right) + w(I) \left( C8(I,l) + \sum_{K=1}^N \left( U(K) \times \right. \right. \\
& \left. \left. \times \left[ D55(I,K,l) + \sum_{L=1}^N (U(L)D56(I,K,L,l) + V(L)D57(I,K,L,l) + W(L)D58(I,K,L,l) \right] + \right. \right. \\
& \left. \left. + V(K) \left[ D59(I,K,l) + \sum_{L=1}^N (U(L)D60(I,K,L,l) + V(L)D61(I,K,L,l) + W(L)D62(I,K,L,l) \right] + \right. \right. \\
& \left. \left. + W(K) \left[ D63(I,K,l) + \sum_{L=1}^N \left( U(L)D64(I,K,L,l) + V(L)D65(I,K,L,l) + \right. \right. \right. \right. \\
& \left. \left. \left. + W(L)D66(I,K,L,l) \right) \right] + PS(K)D67(I,K,l) + PN(K)D68(I,K,l) \right) \right) + \\
& + ps(I) \left( C9(I,l) + \sum_{K=1}^N \left( U(K)D69(I,K,l) + V(K)D70(I,K,l) + W(K)D71(I,K,l) \right) \right) + \\
& + pn(I) \left( C10(I,l) + \sum_{K=1}^N \left( U(K)D72(I,K,l) + V(K)D73(I,K,l) + W(K)D74(I,K,l) \right) \right) \Big\} = 0,
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& \sum_{I=1}^N \left\{ u(I) \left( C11(I,l) + \sum_{K=1}^N \left( U(K) \times \right. \right. \right. \\
& \times \left[ D75(I,K,l) + \sum_{L=1}^N (U(L)D76(I,K,L,l) + V(L)D77(I,K,L,l) + W(L)D78(I,K,L,l)) \right] + \\
& + V(K) \left[ D79(I,K,l) + \sum_{L=1}^N (V(L)D80(I,K,L,l) + W(L)D81(I,K,L,l)) \right] + W(K) \times \\
& \times \left[ D82(I,K,l) + \sum_{L=1}^N (U(L)D83(I,K,L,l) + V(L)D84(I,K,L,l) + W(L)D85(I,K,L,l)) \right] + \\
& + PS(K)D86(I,K,l) + PN(K)D87(I,K,l) \left. \left. \left. \right) \right) + v(I) \left( C12(I,l) + \sum_{K=1}^N \left( U(K) \times \right. \right. \right. \\
& \times \left[ D88(I,K,l) + \sum_{L=1}^N (U(L)D89(I,K,L,l) + V(L)D90(I,K,L,l) + W(L)D91(I,K,L,l)) \right] + \\
& + V(K) \left[ D92(I,K,l) + \sum_{L=1}^N (U(L)D93(I,K,L,l) + V(L)D94(I,K,L,l) + W(L)D95(I,K,L,l)) \right] + \\
& + W(K) \left[ D96(I,K,l) + \sum_{L=1}^N (U(L)D97(I,K,L,l) + V(L)D98(I,K,L,l) + W(L)D99(I,K,L,l)) \right] + \\
& + PS(K)D100(I,K,l) + PN(K)D101(I,K,l) \left. \left. \left. \right) \right) \right) + \\
& + w(I) \left( C13(I,l) + \sum_{K=1}^N \left( U(K) \times \right. \right. \\
& \times \left[ D102(I,K,l) + \sum_{L=1}^N (U(L)D103(I,K,L,l) + V(L)D104(I,K,L,l) + W(L)D105(I,K,L,l)) \right] + \\
& + V(K) \left[ D106(I,K,l) + \sum_{L=1}^N (U(L)D107(I,K,L,l) + V(L)D108(I,K,L,l) + W(L)D109(I,K,L,l)) \right] + \\
& + W(K) \left[ D110(I,K,l) + \sum_{L=1}^N \left( U(L)D111(I,K,L,l) + V(L)D112(I,K,L,l) + \right. \right. \\
& \left. \left. + W(L)D113(I,K,L,l) \right) \right] + PS(K)D114(I,K,l) + PN(K)D115(I,K,l) \left. \left. \left. \right) \right) \right) + \\
& + ps(I) \left( C14(I,l) + \sum_{K=1}^N \left( U(K)D116(I,K,l) + V(K)D117(I,K,l) + W(K)D118(I,K,l) \right) \right) + \\
& + pn(I) \left( C15(I,l) + \sum_{K=1}^N \left( U(K)D119(I,K,l) + V(K)D120(I,K,l) + W(K)D121(I,K,l) \right) \right) \left. \left. \right) \right\} - \\
& - CP(l)\Delta q = 0,
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& \sum_{I=1}^N \left\{ u(I) \left( C16(I,l) + \sum_{K=1}^N \left( U(K)D122(I,K,l) + V(K)D123(I,K,l) + W(K)D124(I,K,l) \right) \right) \right. \\
& + v(I) \left( C17(I,l) + \sum_{K=1}^N \left( U(K)D125(I,K,l) + V(K)D126(I,K,l) + W(K)D127(I,K,l) \right) \right) \\
& + w(I) \left( C18(I,l) + \sum_{K=1}^N \left( U(K)D128(I,K,l) + V(K)D129(I,K,l) + W(K)D130(I,K,l) \right) \right) \\
& \left. + ps(I)C19(I,l) + pn(I)C20(I,l) \right\} = 0,
\end{aligned} \tag{2.9}$$

$$\begin{aligned}
& \sum_{I=1}^N \left\{ u(I) \left( C21(I,l) + \sum_{K=1}^N \left( U(K)D131(I,K,l) + V(K)D132(I,K,l) + W(K)D133(I,K,l) \right) \right) \right. \\
& + v(I) \left( C22(I,l) + \sum_{K=1}^N \left( U(K)D134(I,K,l) + V(K)D135(I,K,l) + W(K)D136(I,K,l) \right) \right) \\
& + w(I) \left( C23(I,l) + \sum_{K=1}^N \left( U(K)D137(I,K,l) + V(K)D138(I,K,l) + W(K)D139(I,K,l) \right) \right) \\
& \left. + ps(I)C24(I,l) + pn(I)C25(I,l) \right\} = 0,
\end{aligned}$$

$l = 1, 2, \dots, N$ .

Здесь

$$\begin{aligned}
U_i(I) &= U_{i-1}(I) + u_i(I), \quad V_i(I) = V_{i-1}(I) + v_i(I), \quad W_i(I) = W_{i-1}(I) + w_i(I), \\
PS_i(I) &= PS_{i-1}(I) + ps_i(I), \quad PN_i(I) = PN_{i-1}(I) + pn_i(I), \quad q_i = q_{i-1} + \Delta q_i.
\end{aligned}$$

Причем  $U_0(I) = V_0(I) = W_0(I) = PS_0(I) = PN_0(I) = q_0$ ,  $I = 1..N$ .

Матрица Якоби  $J = \{J_{jk}(I,l)\}$ , где  $j, k = 1, 2, \dots, 5$ ,  $I, l = 1, 2, \dots, N$ , представляет собой матрицу коэффициентов при неизвестных  $u(I), v(I), w(I), ps(I), pn(I)$  в системе линейных алгебраических уравнений (2.9).

Основная сложность исследования устойчивости оболочек при использовании метода последовательных нагружений состоит в обходе особых точек. Один из способов такого обхода состоит в смене параметра продолжения. Оценивается определитель системы уравнений: если на определенном шаге алгоритма произошла смена знака, тогда приращения по всем переменным меняют знак на противоположный.

Наибольшим недостатком данной методики является невозможность его использования для обхода точек бифуркации и построения бифуркационных ветвей, а также необходимость смены параметра продолжения решения при обходе особых точек [76, 88].

### 2.2.2 Метод продолжения решения по наилучшему параметру

Существует также модификация рассматриваемого алгоритма, основанная на выборе наилучшего параметра продолжения [76]. В качестве наилучшего параметра продолжения решения предлагается брать длину дуги  $\lambda$  кривой множества решений. В отличие от предыдущего варианта метода, здесь параметр нагрузки  $P$  является равноправным с остальными неизвестными, и его удобно добавить к остальным параметрам:

$$\tilde{X} = (X, P)^T = (U(I), V(I), W(I), PS(I), PN(I), P)^T, I = 1..N.$$

Параметр  $\lambda$  не входит явно в систему уравнений (2.4) и связан с переменными задачи из вектора  $\tilde{X}$  следующим образом [76, 88]

$$(d\lambda)^2 = \sum_{I=1}^N [(dU(I))^2 + (dV(I))^2 + (dW(I))^2 + (dPS(I))^2 + (dPN(I))^2 + (dP)^2]$$

Продифференцировав (2.4) по параметру  $\lambda$ , считая, что переменные задачи от него зависят, получим систему дифференциальных уравнений

$$\bar{J} \frac{d\tilde{X}}{d\lambda} = 0, \text{ с начальным условием } \tilde{X}(\lambda_0) = 0, \lambda_0 = 0. \text{ Здесь } \bar{J} = \frac{\partial F(\tilde{X})}{\partial \tilde{X}} -$$

расширенная матрица Якоби, имеющая  $5N$  строк и  $(5N + 1)$  столбцов.

Процесс продолжения решения по наилучшему параметру системы нелинейных уравнений (2.4) на каждом шаге сводится к решению задачи Коши

$$\begin{bmatrix} \bar{J} \\ \left( \frac{d\tilde{X}}{d\lambda} \right)^T \end{bmatrix} \frac{d\tilde{X}}{d\lambda} = \begin{bmatrix} 0 \\ \dots \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad \tilde{X}(\lambda_0) = 0. \quad (2.10)$$

Система (2.10) относительно  $\frac{d\tilde{X}}{d\lambda}$  является нелинейной. Чтобы ее решить, необходимо провести линеаризацию и перейти к итерационному процессу, используя метод Эйлера:

$$\begin{bmatrix} \bar{J}(\lambda_k) \\ \left(\frac{d\tilde{X}}{d\lambda}\right)^T(\lambda_{k-1}) \end{bmatrix} \frac{d\tilde{X}}{d\lambda}(\lambda_k) = \begin{bmatrix} 0 \\ \dots \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

Таким образом, решение нелинейной системы алгебраических уравнений сводится к последовательному решению систем линейных алгебраических уравнений относительно приращений искомых функций  $\Delta\tilde{X}$ .

Чем больше разница между векторами  $\frac{d\tilde{X}}{d\lambda}$  на текущем и предыдущем шагах, тем хуже обусловленность матрицы системы и, следовательно, тем менее устойчив вычислительный процесс. В связи с этим целесообразно применять адаптивный выбор сетки для повышения точности расчетов.

Метод продолжения решения по наилучшему параметру при использовании адаптивного выбора сетки позволяет находить верхние и нижние критические нагрузки, а также точки бифуркации.

На каждом шаге нагружения происходит вычисление и оценка определителя матрицы Якоби  $\det(J)$ . Моменты смены знака определителя соответствуют либо критическим нагрузкам (верхним и нижним), либо точкам бифуркации [76, 86]. При решении нелинейных задач возникает сложность с обходом таких особых точек, т.к. система в них неустойчива.

## 2.3 МЕТОДИКА ИССЛЕДОВАНИЯ ПРОЧНОСТИ ОБОЛОЧЕК ИЗ ОРТОТРОПНЫХ МАТЕРИАЛОВ

При использовании метода продолжения решения по наилучшему параметру кривая «нагрузка – прогиб» строится пошагово. На каждом шаге анализируется напряженно-деформированное состояние конструкции. Если

для изотропной конструкции достаточно оценивать интенсивность напряжений [64], то для ортотропной и анизотропной необходимо использовать специальные критерии прочности. В этих критериях используются константы предельных значений напряжений в материале. Притом, значения пределов прочности в разных направлениях, а также на растяжение, сжатие и сдвиг, различны. Наборы этих констант удобно записать в форме векторов:

$$\{F^+\} = (F_x^+, F_y^+, F_{yz}, F_{xz}, F_{xy}, F_{xy,45}^+)^T, \quad \{F^-\} = (F_x^-, F_y^-, F_{yz}, F_{xz}, F_{xy}, F_{xy,45}^-)^T.$$

Здесь  $F_x^+, F_y^+$  – предел прочности при растяжении в направлениях  $x, y$ ;  $F_x^-, F_y^-$  – предел прочности при сжатии;  $F_{yz}, F_{xz}, F_{xy}$  – пределы прочности при сдвиге в плоскостях  $YOZ, XOZ, XOY$ ;  $F_{xy,45}^+, F_{xy,45}^-$  – пределы прочности при сдвиге в площадках, повернутых на угол  $45^\circ$ .

В работе [59] для пологих оболочек прямоугольного плана были проанализированы напряжения в разных слоях оболочки вдоль координаты  $z$ , и показано, что наибольшие напряжения возникают на внешней стороне оболочки при  $z = -h/2$ . Поэтому, при подкреплении оболочки ребрами жесткости со стороны выпуклости, оболочка становится более жесткой по сравнению с оболочкой, подкрепленной ребрами со стороны вогнутости. Однако, по технологическим соображениям оболочки зачастую подкрепляют ребрами жесткости с внутренней стороны.

Для проверки критериев прочности напряжения  $\sigma_x, \sigma_y, \tau_{xy}, \tau_{xz}, \tau_{yz}$  будем вычислять при  $z = -h/2$ .

## 2.4 ПРОГРАММА РАСЧЕТА ПРОЧНОСТИ И УСТОЙЧИВОСТИ ПОДКРЕПЛЕННЫХ ОРТОТРОПНЫХ ОБОЛОЧЕК

Современные программные комплексы для моделирования поведения различных строительных конструкций, такие как *ANSYS*, *LIRA*, *SCAD*, рассчитанные на решение широкого круга задач, не могут с достаточной

точностью и полнотой исследовать нелинейные проблемы подкрепленных оболочек [65]. Кроме того, в большинстве случаев сложно задать рассчитываемую конструкцию в виде тонкостенной оболочки, подкрепленной ребрами. Имеет смысл задавать модель оболочки в общем виде, и далее использовать какой-либо математический пакет для проведения аналитических вычислений (*MatLAB*, *Maple*, *MathCAD* и т.д.). В данной работе для реализации предложенного алгоритма используется среда аналитических вычислений *Waterloo Maple 17*.

Программу для комплексного исследования поведения оболочки можно разбить на два основных модуля:

I. Модуль формирования и вычисления коэффициентов СНАУ (размерность матрицы уравнений  $5N + 1 \times 5N + 1$ )

II. Модуль расчета напряженно-деформированного состояния (НДС) оболочки и анализа ее прочности и устойчивости.

Для получения СНАУ сначала задаются входные данные оболочки (линейные размеры, кривизны, форма контура, параметры материала, количество и расположение ребер жесткости и т.д.), а также основные соотношения модели в общем виде (геометрические и физические соотношения). Из них формируется ФПЭД (1.20).

При использовании пакета аналитических вычислений *Maple 17* нет необходимости проводить громоздкую и трудоемкую предварительную работу по выводу коэффициентов СНАУ и их дальнейшему программированию. Кроме того, при проведении таких действий вручную существенно повышается вероятность ошибки из-за человеческого фактора. Современные передовые технологии программирования позволяют хранить в памяти ЭВМ огромные символьные выражения (в данном случае – формулы) и проводить над ними сложные аналитические преобразования (например, дифференцирование, интегрирование, подстановка и т.д.)

Далее модуль формирования и вычисления коэффициентов СНАУ должен включать в себя следующие действия: подстановку в ФПЭД выражений аппроксимирующих функций, аналитическое дифференцирование (дважды) и численное интегрирование. В зависимости от того, в какой последовательности выполнять эти действия, существенно изменяется требуемая вычислительная мощность, и, как следствие, время проведения расчета. При этом та последовательность, которая была оптимальной при  $N=4$ , может оказаться неоптимальной при  $N=16$  или  $N=25$ . Как показали проведенные исследования, смена последовательности этих действий на получаемые в результате значения не влияет.

Далее рассмотрим последовательность действий, которая показала наилучшее быстродействие при  $N=1,4,9,16$ .

1. Аналитическое дифференцирование подынтегральной части функционала по всем искомым числовым параметрам. В результате получим систему  $\frac{\partial \Pi}{\partial X} = 0$ , состоящую из  $5N$  уравнений, где  $\Pi$  - подынтегральное выражение функционала полной энергии деформации оболочки (1.20) (используется функция **diff**(*выражение, переменная*)).

2. Аналитическое дифференцирование уравнений системы  $\frac{\partial \Pi}{\partial X} = 0$  по всем искомым числовым параметрам, в том числе, и по параметру нагрузки. В результате получим матрицу, каждый элемент которой в дальнейшем станет элементом расширенной матрицы Якоби:  $\frac{\partial^2 \Pi}{\partial X \partial \tilde{X}}$ . Размерность этой матрицы будет  $5N \times 5N + 1$  (используется функция **diff**(*выражение, переменная*)).

3. Подстановка в полученные элементы матрицы выражений аппроксимирующих функций (2.1). На этот момент после двойного дифференцирования элементы матрицы имеют существенно более простой

вид, чем раньше, поэтому подстановка достаточно длинных аппроксимирующих выражений делается именно здесь.

4. Двойное численное интегрирование методом Симпсона по переменным  $x, y$  (используется функция **ApproximateInt**(*выражение, переменная=начало...конец*)). Таким образом, получим расширенную матрицу Якоби:

$$\bar{J} = \left[ \int_{a_1}^a \int_{y_1(x)}^{y_2(x)} \frac{\partial^2 \Pi}{\partial X \partial \tilde{X}} dy dx \right].$$

Или, в развернутом виде:

$$\bar{J} = \begin{bmatrix} \int_{a_1}^a \int_{y_1(x)}^{y_2(x)} \frac{\partial^2 \Pi}{\partial U_1 \partial U_1} dy dx & \int_{a_1}^a \int_{y_1(x)}^{y_2(x)} \frac{\partial^2 \Pi}{\partial U_1 \partial U_2} dy dx & \dots & \int_{a_1}^a \int_{y_1(x)}^{y_2(x)} \frac{\partial^2 \Pi}{\partial U_1 \partial P_N} dy dx & \int_{a_1}^a \int_{y_1(x)}^{y_2(x)} \frac{\partial^2 \Pi}{\partial U_1 \partial P} dy dx \\ \int_{a_1}^a \int_{y_1(x)}^{y_2(x)} \frac{\partial^2 \Pi}{\partial U_2 \partial U_1} dy dx & \int_{a_1}^a \int_{y_1(x)}^{y_2(x)} \frac{\partial^2 \Pi}{\partial U_2 \partial U_2} dy dx & \dots & \int_{a_1}^a \int_{y_1(x)}^{y_2(x)} \frac{\partial^2 \Pi}{\partial U_2 \partial P_N} dy dx & \int_{a_1}^a \int_{y_1(x)}^{y_2(x)} \frac{\partial^2 \Pi}{\partial U_2 \partial P} dy dx \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \int_{a_1}^a \int_{y_1(x)}^{y_2(x)} \frac{\partial^2 \Pi}{\partial P_N \partial U_1} dy dx & \int_{a_1}^a \int_{y_1(x)}^{y_2(x)} \frac{\partial^2 \Pi}{\partial P_N \partial U_2} dy dx & \dots & \int_{a_1}^a \int_{y_1(x)}^{y_2(x)} \frac{\partial^2 \Pi}{\partial P_N \partial P_N} dy dx & \int_{a_1}^a \int_{y_1(x)}^{y_2(x)} \frac{\partial^2 \Pi}{\partial P_N \partial P} dy dx \end{bmatrix}.$$

Здесь, например,  $\frac{\partial^2 \Pi}{\partial U_1 \partial U_1}$  это  $\frac{\partial^2 \Pi}{\partial U(1) \partial U(1)}$ .

Во втором модуле реализован итерационный процесс решения СНАУ и пошагового получения точек кривой «нагрузка – прогиб». На каждом шаге расчета вычисляются перемещения характерных точек конструкции, рассчитываются компоненты вектора напряжений; находятся максимальные значения перемещений и напряжений по всей области конструкции; производится оценка прочности согласно критериям прочности и сохранение всех полученных данных в массивы. Так как процесс проведения таких вычислений требует достаточно большой вычислительной мощности, то для комплексного исследования одного варианта конструкции может потребоваться достаточно много машинного времени. Система аналитических вычислений *Maple 17* позволяет осуществлять распараллеливание вычислительных процессов и распределять нагрузку на

несколько потоков. Также для оптимизации процесса вычислений применяется адаптивный выбор сетки, что позволяет достичь достаточной точности вблизи особых точек кривой решений, и в то же время быстро проходить ровные участки кривой. Так, если угол между векторами решений на предыдущем и текущем шаге оказался слишком большим (используется функция **angle(вектор1, вектор2)**), то производится уменьшение параметра длины дуги в 10 раз и откат итерационного процесса на два шага назад (для рассматриваемых в данной работе задач такое ограничение угла было выбрано 0.0177 рад). Если значение угла находится в пределах от 0.0094 рад до 0.0177 рад, то длина дуги сохраняется такой же, как на предыдущем шаге. Если значение угла не превысило 0.0094 рад, то длина дуги увеличивается в 1.5 раза. Стартовое значение длины дуги принималось 0.00001 м. Чтобы этот параметр на линейном участке кривой случайно не принял очень больших значений, и не произошло «проскакивание» критических нагрузок и нелинейных участков кривой, для рассматриваемых задач было выбрано верхнее ограничение данного параметра в размере 0.01 м. Такой алгоритм прохождения кривой «нагрузка – прогиб» позволяет обходить особые точки графика, петли и перегибы с достаточной точностью и при существенной экономии машинного времени. Чтобы при прохождении особой точки не возникло программных сложностей с фиксацией этого момента при многократном уменьшении длины дуги и откатами итераций, при обнаружении момента смены знака определителя матрицы Якоби (критерий нахождения особой точки), длина дуги фиксируется и сохраняется такой же, как на предыдущем шаге. Такая фиксация длится еще три шага после прохождения особой точки.

Итерационный процесс завершается или по желанию пользователя, или при достижении какого-либо заранее указанного параметра нагрузки. Когда все необходимые значения получены, и итерационный процесс завершен, необходимо отобразить графики зависимостей «нагрузка – перемещение»

для всех компонент, график «нагрузка – определитель матрицы Якоби». Для работы с 2-D и 3-D графикой в пакете аналитических вычислений *Maple* есть специальная библиотека функций **plots**. Так, для построения точечных 2-D графиков удобно использовать функцию **pointplot**(*множество точек в формате  $\{[x1,y1], [x1,y1], \dots\}$* ), а для построения кривой на основе массива точек – функцию **curve**(*множество точек в формате  $\{[x1,y1], [x1,y1], \dots\}$* ), притом точки должны указываться в том порядке, в котором их следует соединять.

Также при исследовании поведения оболочечных конструкций часто бывает необходимо показать распределение значений прогибов и напряжений по области всей конструкции – т.е. отобразить поле значений. Для построения 3-D поверхностей в библиотеке **plots** присутствуют команды **plot3d**(*функция,  $x=x1..x2$ ,  $y=y1..y2$* ), **pointplot3d**(*множество точек в формате  $\{[x1,y1,z1], [x1,y1,z1], \dots\}$* ), а также ряд вспомогательных функций.

Следует отметить, что язык программирования, встроенный в среду *Waterloo Maple 17*, включает в себя не только широкий спектр математических функций, но и все стандартные конструкции, применяемые в программировании – циклы, условные операторы и т.д.

Для комплексного исследования поведения тонкостенных оболочечных конструкций из ортотропных материалов была разработана программа «OrthShell: strength and stability of orthotropic shells», с помощью которой были получены результаты, представленные в данной работе. Свидетельство о государственной регистрации в реестре программ для ЭВМ приводится в Приложении Б.

## 2.5 ВЫВОДЫ

Использование методики, основанной на методе Ритца и методе продолжения решения по наилучшему параметру с учетом адаптивного выбора сетки позволяет исследовать прочность и устойчивость оболочек, обходить особые точки кривой «нагрузка – прогиб», получать значения

верхней и нижней критических нагрузок, находить точки бифуркации и исследовать закритическое поведение конструкции.

Среда для выполнения аналитических вычислений *Maple 17* имеет полный набор всех необходимых математических и графических инструментов для решения задач устойчивости и прочности тонкостенных оболочек и позволяет использовать распараллеливание процессов вычислений.

## ГЛАВА 3. АНАЛИЗ КРИТЕРИЕВ ПРОЧНОСТИ ДЛЯ ОРТОТРОПНЫХ МАТЕРИАЛОВ

### 3.1 КРИТЕРИИ ПРЕДЕЛЬНОГО СОСТОЯНИЯ МАТЕРИАЛА

Прочность конструкций, подверженных воздействию внешних нагрузок, анализируется по предельному состоянию материалов, из которых эти конструкции изготовлены. Для анализа прочности материала конструкции необходимо:

1. Знать предельные значения напряжений, возможных для данного материала. Для этого проводят испытания стандартных образцов на растяжение и сжатие вдоль главных осей ортотропии и на сдвиг в плоскости главных осей ортотропии. Также, в ряде случаев проводят дополнительные испытания на сдвиг в плоскостях, равнонаклонных к главным направлениям ортотропии.

2. Использовать определенные критерии прочности для оценки сопротивления материалов при эксплуатации.

Суть критериев предельного состояния материала состоит в выборе некоторой функции компонент тензора напряжений, например, вида [77]

$$K = f(\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3, m_i), \quad (3.1)$$

сохраняющей свое значение при напряжениях, соответствующих предельному состоянию материала, независимо от соотношений компонент тензора напряжений, при которых производится нагружение. Здесь  $\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3$  – главные нормальные напряжения, которые находятся на трех взаимно перпендикулярных площадках, на которых касательные напряжения равны нулю. Константы материала  $m_i$  находятся по результатам испытаний, которые проводятся при одноосном растяжении или сжатии и кручении. Число этих констант для разных критериев различно. Для изотропных материалов это число обычно не превышает трех.

Геометрически условие (3.1) представляет собой некоторую предельную поверхность, которая ограничивает область безопасных состояний материала конструкции.

Если предельное состояние материала на основе критерия прочности соответствует заданному допуску на остаточную деформацию, то условие (3.1) является условием текучести; если это состояние предшествует разрушению, то (3.1) – условие разрушения. Под разрушением зачастую подразумевается возникновение микротрещин и их распространение. Таким образом, для пластичных материалов опасными являются достаточно большие остаточные деформации, а для хрупких – образование микротрещин. Поэтому критерии прочности для пластичных и хрупких материалов различны.

Для изотропных материалов основные критерии прочности были разработаны еще в конце 19 века (Г. Галилей, Г. Ламе, А. Клебша, Ф. Мариотт, М. Навье, Ш. О. Кулон, И. Баушингер, И. Максвелл, М. Т. Губер, Р. Мизес, Н. Генки и др.).

Критерий Кулона

$$\sigma_1 - \sigma_3 = \bar{\sigma}_p, \quad (\text{при } \sigma_1 > \sigma_2 > \sigma_3),$$

и критерий Мизеса

$$(\sigma_1 - \sigma_2)^2 + (\sigma_2 - \sigma_3)^2 + (\sigma_3 - \sigma_1)^2 = 2\bar{\sigma}_p^2$$

подтверждены экспериментально для пластичных материалов. Эти критерии соответствуют заданному допуску на остаточные деформации.

Критерий Мизеса применительно к исследованию прочности оболочечных конструкций записывается в виде

$$\sigma_i = \sigma_T,$$

где  $\sigma_i$  – интенсивность напряжений,  $\sigma_T$  – предел текучести материала.

Интенсивность напряжений можно представить в виде

$$\sigma_i = \sqrt{\sigma_x^2 - \sigma_x \sigma_y + \sigma_y^2 + 3(\tau_{xy}^2 + \tau_{xz}^2 + \tau_{yz}^2)}.$$

Для исследования оболочечных конструкций из хрупких материалов (например, бетона) используется критерий Кулона – Мора

$$\sigma_1 - \frac{R_{bt}}{R_b} \sigma_3 = R_{bt},$$

где  $R_{bt}, R_b$  – расчетные сопротивления бетона осевому растяжению и осевому сжатию соответственно (призменная прочность). Здесь главные напряжения расположены в порядке убывания  $\sigma_1 > \sigma_2 > \sigma_3$ . Главные нормальные напряжения для оболочечных конструкций вычисляются из решения кубического уравнения

$$\sigma^3 - (\sigma_x + \sigma_y) \sigma^2 + (\sigma_x \sigma_y - \tau_{xy}^2 - \tau_{xz}^2 - \tau_{yz}^2) \sigma - (2\tau_{xz} \tau_{yz} \tau_{xy} - \sigma_x \tau_{yz}^2 - \sigma_y \tau_{xz}^2) = 0.$$

Главные напряжения не изменяются при повороте координатных осей, следовательно, и коэффициенты этого уравнения не зависят от выбора координатной системы.

Если напряжения находятся на внешней стороне оболочки при  $z = -h/2$ , то  $\tau_{xz} = \tau_{yz} = 0$  и уравнение упрощается. В этом случае одно из главных напряжений обращается в ноль, а остальные находятся по формуле

$$\sigma_{m,n} = \frac{\sigma_x + \sigma_y}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{\sigma_x - \sigma_y}{2}\right)^2 + \tau_{xy}^2}.$$

Затем все три главных напряжения располагаются в порядке убывания  $\sigma_1 > \sigma_2 > \sigma_3$ .

Критерии прочности анизотропных материалов можно найти в работах И. И. Гольденבלата, Б. И. Ковальчука, В. А. Копнова, А. А. Лебедева, Г. С. Писаренко, Л. Фишера, Р. Хилла и др. Для анизотропных материалов критерии прочности разрабатывались по двум направлениям:

- обобщение критериев прочности для изотропных тел;
- разработка феноменологических критериев с учетом специфики деформирования и разрушения анизотропных тел.

Критерии прочности анизотропных сред, разработанные для пластичных материалов, достаточно хорошо подтверждаются экспериментально, а для квазихрупких сред – в меньшей степени.

Для анизотропных материалов критерий Кулона записывается в виде  $(\sigma_1 > \sigma_2 > \sigma_3)$

$$|\sigma_1 - \sigma_3| = \bar{\sigma}_1^p, \quad |\sigma_2 - \sigma_3| = \bar{\sigma}_2^p, \quad |\sigma_1 - \sigma_2| = \bar{\sigma}_1^c,$$

а критерий Мизеса – Хилла

$$\sigma_1^2 - \sigma_1\sigma_2 + \left(\frac{\bar{\sigma}_1^p}{\bar{\sigma}_2^p}\right)^2 \sigma_2^2 = (\bar{\sigma}_1^p)^2.$$

Здесь  $\bar{\sigma}_1^p, \bar{\sigma}_2^p$  – предельные напряжения растяжения в направлении осей анизотропии 1 и 2,  $\bar{\sigma}_1^c$  – предельное напряжение сжатия в направлении оси 1, найденные экспериментально.

В работе [68] критерий Мизеса – Хилла для ортотропного материала записан в следующем виде

$$\frac{\sigma_x^2}{F_x^2} - \frac{\sigma_x\sigma_y}{F_x F_y} + \frac{\sigma_y^2}{F_y^2} + \frac{\tau_{xy}^2}{F_{xy}^2} = 1.$$

Здесь оси  $x, y$  совпадают с осями ортотропии и  $F_x, F_y, F_{xy}$  – пределы прочности, причем  $F_x, F_y$  принимают значения при растяжении или сжатии в зависимости от знака напряжений  $\sigma_x, \sigma_y$ :

$$F_x = \begin{cases} F_x^+ & \text{при } \sigma_x \geq 0, \\ F_x^- & \text{при } \sigma_x < 0, \end{cases} \quad F_y = \begin{cases} F_y^+ & \text{при } \sigma_y \geq 0, \\ F_y^- & \text{при } \sigma_y < 0. \end{cases}$$

Кроме того, в этой работе также приводится критерий максимальных напряжений

$$|\sigma_x| \leq F_x, \quad |\sigma_y| \leq F_y, \quad |\tau_{xy}| \leq F_{xy}.$$

Критерий максимальных напряжений приводится и в работе [49].

Как отмечается в работе [77], наиболее общим критерием предельного состояния анизотропных сред, имеющих различное сопротивление при

растяжении и сжатии, а также разное сопротивление сдвигу в зависимости от знака касательных напряжений, является критерий, предложенный в работе И. И. Гольденבלата и В. А. Копнова [33].

Уравнение предельной поверхности, интерпретирующей этот критерий, можно представить в виде

$$\sum \Pi_{mn} \sigma_{mn} + \sqrt{\sum \Pi_{pqrs} \sigma_{pq} \sigma_{rs}} = 1, \quad (3.2)$$

где  $\Pi_{mn}, \Pi_{pqrs}$  – тензоры прочности, компоненты которых определяются экспериментально.

Феноменологический критерий прочности анизотропных материалов, предложенный И. И. Гольденблатом и В. А. Копновым можно записать в виде [72]

$$\Psi(\Pi_{ik} \sigma_{ik}, \Pi_{ikmn} \sigma_{ik} \sigma_{mn}, \dots) = 0.$$

Если ограничиться только линейными и квадратичными членами, то критерий примет вид [72]

$$\Pi_{ik} \sigma_{ik} + (\Pi_{ikmn} \sigma_{ik} \sigma_{mn})^{\frac{1}{2}} = 1.$$

В данной записи предполагается, что по одинаковым индексам производится суммирование; индексы принимают значения 1, 2 для плоского напряженного состояния и 1, 2, 3 для объемного напряженного состояния.

Для ортотропных материалов тензоры прочности удовлетворяют условиям симметрии [72]:

$$\Pi_{ik} = \Pi_{ki}, \quad \Pi_{ikmn} = \Pi_{kimn}, \quad \Pi_{ikmn} = \Pi_{mikn}$$

и выражаются через пределы прочности материала, которые должны определяться из опытов на простейшие сопротивления: растяжение, сжатие и сдвиг.

Для объемного напряженного состояния анизотропного материала этот критерий в развернутом виде будет иметь вид

$$\Pi_{11} \sigma_{11} + \Pi_{22} \sigma_{22} + \Pi_{33} \sigma_{33} + \left( \Pi_{1111} \sigma_{11}^2 + \Pi_{2222} \sigma_{22}^2 + \Pi_{3333} \sigma_{33}^2 + 2\Pi_{1122} \sigma_{11} \sigma_{22} + \right. \\ \left. + 2\Pi_{1133} \sigma_{11} \sigma_{33} + 2\Pi_{2233} \sigma_{22} \sigma_{33} + 4\Pi_{1212} \sigma_{12}^2 + 4\Pi_{1313} \sigma_{13}^2 + 4\Pi_{2323} \sigma_{23}^2 \right)^{\frac{1}{2}} \leq 1.$$

Тензоры прочности в этом соотношении имеют довольно громоздкий вид.

При плоском напряженном состоянии ( $\sigma_{33} = \sigma_{13} = \sigma_{23} = 0$ ) критерий упрощается и принимает вид (в форме записи [72])

$$\frac{1}{2} \left( \frac{1}{\sigma_{b1}^+} - \frac{1}{\sigma_{b1}^-} \right) \sigma_{11} + \frac{1}{2} \left( \frac{1}{\sigma_{b2}^+} - \frac{1}{\sigma_{b2}^-} \right) \sigma_{22} + \frac{1}{2} \left\{ \left( \frac{\sigma_{b1}^+ + \sigma_{b1}^-}{\sigma_{b1}^+ \sigma_{b1}^-} \right)^2 \sigma_{11}^2 + \left( \frac{\sigma_{b2}^+ + \sigma_{b2}^-}{\sigma_{b2}^+ \sigma_{b2}^-} \right)^2 \sigma_{22}^2 + \right. \\ \left. + \left[ \left( \frac{\sigma_{b1}^+ + \sigma_{b1}^-}{\sigma_{b1}^+ \sigma_{b1}^-} \right)^2 + \left( \frac{\sigma_{b2}^+ + \sigma_{b2}^-}{\sigma_{b2}^+ \sigma_{b2}^-} \right)^2 - \left( \frac{\tau_{b12,45}^+ + \tau_{b12,45}^-}{\tau_{b12,45}^+ \tau_{b12,45}^-} \right)^2 \right] \sigma_{11} \sigma_{22} + \frac{4\sigma_{12}^2}{\tau_{b12,0}^2} \right\}^{\frac{1}{2}} \leq 1.$$

Здесь  $\sigma_{11}, \sigma_{22}, \sigma_{12}$  – фактические нормальные и касательные напряжения, действующие в исследуемой конструкции в процессе ее нагружения.

Для оценки предельного состояния элемента конструкции необходимо иметь полную информацию о пределах прочности материала в направлении осей ортотропии и под углом  $45^\circ$  к ним (шесть компонент):  $\sigma_{b1}^+, \sigma_{b1}^-$  – пределы прочности на растяжение и сжатие в направлении оси 1;  $\sigma_{b2}^+, \sigma_{b2}^-$  – аналогично в направлении оси 2;  $\tau_{b12,45}^+, \tau_{b12,45}^-$  – пределы прочности на сдвиг по площадкам, наклоненным к основным под углом  $45^\circ$ . Седьмой предел прочности  $\tau_{b12,0}$  – предел прочности на сдвиг в площадке с осями 1 и 2.

На Рисунке 3.1, взятом из работы [130], приводится схема основных экспериментов для определения пределов прочности материала для критерия Гольденבלата – Копнова.

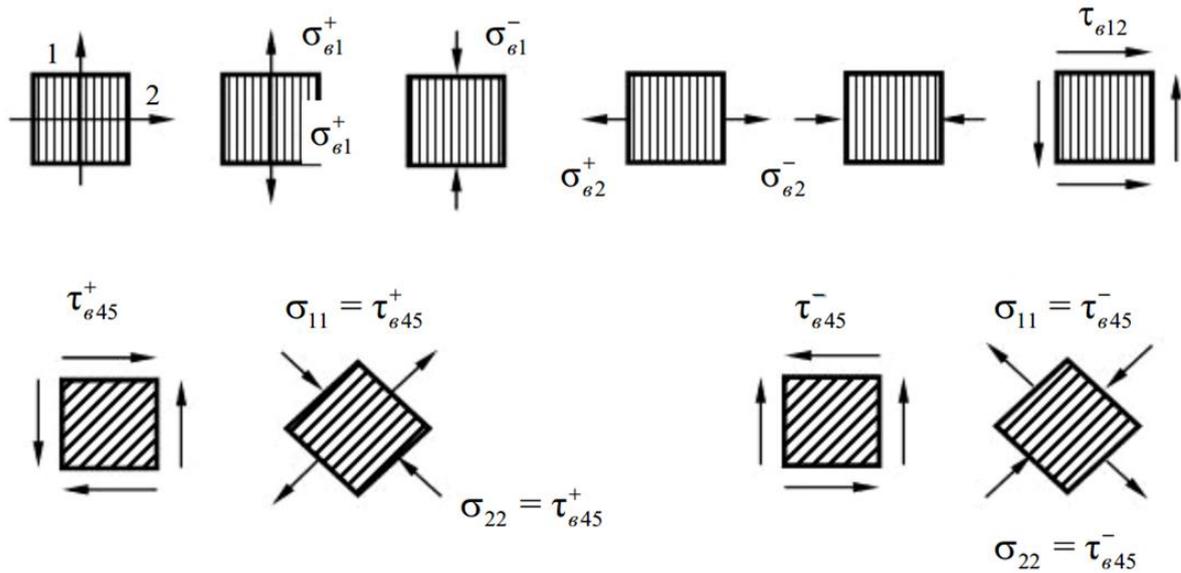


Рисунок 3.1. Схема основных экспериментов для определения компонент тензора поверхности прочности для критерия Гольденבלата – Копнова

Границы применимости критерия И. И. Гольденבלата и В. А. Копнова определяются условием совместности прочностных характеристик материала

$$\begin{aligned} & \left( \frac{1}{\sigma_{b1}^+} - \frac{1}{\sigma_{b1}^-} \right) - \left( \frac{1}{\sigma_{b2}^+} - \frac{1}{\sigma_{b2}^-} \right) - \left( \frac{1}{\sigma_{b3}^+} - \frac{1}{\sigma_{b3}^-} \right) - \left( \frac{1}{\tau_{b12,45}^+} - \frac{1}{\tau_{b12,45}^-} \right) - \\ & - \left( \frac{1}{\tau_{b23,45}^+} - \frac{1}{\tau_{b23,45}^-} \right) - \left( \frac{1}{\tau_{b13,45}^+} - \frac{1}{\tau_{b13,45}^-} \right) = 0. \end{aligned} \quad (3.3)$$

Для плоского напряженного состояния подчеркнутые члены отсутствуют.

В работе [77] утверждается, что уравнение (3.2), обладая большой общностью, не имеет однозначной геометрической интерпретации, и даже в случае плоского напряженного состояния очень громоздко. Это существенно усложняет его экспериментальную проверку и внедрение в практику расчетов. Более приемлемым, по мнению авторов работы [77], представляется условие, предложенное А. А. Лебедевым для изотропных материалов

$$\chi \sigma_i + (1 - \chi) \sigma_1 = \bar{\sigma}^p \quad \left( \chi = \frac{\bar{\sigma}^p}{\bar{\sigma}^c} \right),$$

и обобщенное на случай анизотропных сред при совпадении главных осей тензора напряжений с главными осями анизотропии

$$\sqrt{A(\sigma_1 - \sigma_2)^2 + B(\sigma_2 - \sigma_3)^2 + C(\sigma_3 - \sigma_1)^2} + D_{1,2,3}\sigma_{1,2,3} = 1,$$

где  $A, B, C, D_1, D_2, D_3$  - константы материала, определяемые из опытов. Для плоского напряженного состояния ( $\sigma_3 = 0$ ) получим (в записи работы [77] с учетом исправления опечаток)

$$\sqrt{(A + C)\sigma_1^2 - 2A\sigma_1\sigma_2 + (A + B)\sigma_2^2} + D_1\sigma_1 + D_2\sigma_2 = 1,$$

где

$$A = \frac{1}{2} \left( K^2 - \frac{1}{(\bar{\sigma}_1^c)^2} - \frac{1}{(\bar{\sigma}_2^c)^2} \right), \quad B = \frac{1}{2} \left( \frac{1}{(\bar{\sigma}_1^c)^2} + \frac{3}{(\bar{\sigma}_2^c)^2} - K^2 \right),$$

$$C = \frac{1}{2} \left( \frac{1}{(\bar{\sigma}_2^c)^2} + \frac{3}{(\bar{\sigma}_1^c)^2} - K^2 \right), \quad D_1 = \frac{1}{\bar{\sigma}_1^p} - \frac{1}{\bar{\sigma}_1^c},$$

$$D_2 = \frac{1}{\bar{\sigma}_2^p} - \frac{1}{\bar{\sigma}_2^c}, \quad K = \frac{1}{\bar{\tau}_{12,45}^+} - \frac{1}{\bar{\sigma}_1^p} + \frac{1}{\bar{\sigma}_1^c} = \frac{1}{\bar{\tau}_{12,45}^-} - \frac{1}{\bar{\sigma}_2^p} + \frac{1}{\bar{\sigma}_2^c}.$$

Из последнего двойного равенства следует условие совместности прочностных характеристик материала, которое совпадает с аналогичным условием критерия И. И. Гольденבלата и В. А. Копнова при плоском напряженном состоянии.

В работе [143] приводится критерий прочности Л. Фишера для ортотропных материалов

$$\frac{\sigma_x^2}{F_x^2} - K_f \frac{\sigma_x \sigma_y}{F_x F_y} + \frac{\sigma_y^2}{F_y^2} + \frac{\tau_{xy}^2}{F_{xy}^2} \leq 1, \quad \text{где } K_f = \frac{E_1(1 + \mu_{21}) + E_2(1 + \mu_{12})}{2\sqrt{E_1 E_2 (1 + \mu_{21})(1 + \mu_{12})}}.$$

Как и в критерии Мизеса – Хилла, здесь  $F_x, F_y$  определяются через условие

$$F_x = \begin{cases} F_x^+ & \text{при } \sigma_x \geq 0, \\ F_x^- & \text{при } \sigma_x < 0, \end{cases} \quad F_y = \begin{cases} F_y^+ & \text{при } \sigma_y \geq 0, \\ F_y^- & \text{при } \sigma_y < 0. \end{cases}$$

Рассмотренные выше критерии прочности материала оболочки подразумевают статическое воздействие нагрузки и появление мгновенных деформаций. При длительном воздействии нагрузки и возможности

появления деформаций ползучести, а также при динамическом или температурном нагружении необходимо не только использовать соответствующие критерии прочности, но и найденные с учетом временных и температурных факторов предельные значения напряжений.

Из анализа критериев прочности, применимых для ортотропных материалов [14, 49, 68, 72, 77, 102, 130, 143], следует, что не существует одного универсального критерия прочности, поэтому приходится использовать несколько критериев с последующим анализом полученных результатов. В работе В. Н. Тышкевича [130] исследована прочность труб из армированных пластиков с помощью эксперимента и по различным критериям прочности. Для критерия максимальных напряжений было получено наименьшее относительное отклонение.

В дальнейшем будем считать, что оси ортотропии 1, 2 совпадают с осями принятой локальной системы координат  $x, y$ . Итак, далее будем рассматривать следующие критерии прочности (для плоского напряженного состояния и с учетом обозначений, принятых в данной работе):

- Критерий 1 – критерий максимальных напряжений

$$F_x^- \leq \sigma_x \leq F_x^+, \quad F_y^- \leq \sigma_y \leq F_y^+, \quad |\tau_{xy}| \leq F_{xy}.$$

- Критерий 2 – критерий Мизеса – Хилла

$$\frac{\sigma_x^2}{F_x^2} - \frac{\sigma_x \sigma_y}{F_x F_y} + \frac{\sigma_y^2}{F_y^2} + \frac{\tau_{xy}^2}{F_{xy}^2} \leq 1.$$

- Критерий 3 – критерий Писаренко – Лебедева

$$\sqrt{(A+C)\sigma_x^2 - 2A\sigma_x\sigma_y + (A+B)\sigma_y^2} + D_1\sigma_x + D_2\sigma_y \leq 1.$$

Здесь

$$A = \frac{1}{2} \left( K^2 - \frac{1}{(F_x^-)^2} - \frac{1}{(F_y^-)^2} \right), \quad B = \frac{1}{2} \left( \frac{1}{(F_x^-)^2} + \frac{3}{(F_y^-)^2} - K^2 \right),$$

$$C = \frac{1}{2} \left( \frac{1}{(F_y^-)^2} + \frac{3}{(F_x^-)^2} - K^2 \right), \quad D_1 = \frac{1}{F_x^+} - \frac{1}{F_x^-},$$

$$D_2 = \frac{1}{F_y^+} - \frac{1}{F_y^-}, \quad K = \frac{1}{F_{xy,45}^-} - \frac{1}{F_y^+} + \frac{1}{F_y^-}.$$

- Критерий 4 – критерий Фишера

$$\frac{\sigma_x^2}{F_x^2} - K_f \frac{\sigma_x \sigma_y}{F_x F_y} + \frac{\sigma_y^2}{F_y^2} + \frac{\tau_{xy}^2}{F_{xy}^2} \leq 1, \quad \text{где } K_f = \frac{E_1(1 + \mu_{21}) + E_2(1 + \mu_{12})}{2\sqrt{E_1 E_2 (1 + \mu_{21})(1 + \mu_{12})}}.$$

- Критерий 5 – критерий Гольденבלата – Коппова

$$\frac{1}{2} \left( \frac{1}{F_x^+} - \frac{1}{F_x^-} \right) \sigma_x + \frac{1}{2} \left( \frac{1}{F_y^+} - \frac{1}{F_y^-} \right) \sigma_y + \frac{1}{2} \left\{ \left( \frac{F_x^+ + F_x^-}{F_x^+ F_x^-} \right)^2 \sigma_x^2 + \left( \frac{F_y^+ + F_y^-}{F_y^+ F_y^-} \right)^2 \sigma_y^2 + \right.$$

$$\left. + \left[ \left( \frac{F_x^+ + F_x^-}{F_x^+ F_x^-} \right)^2 + \left( \frac{F_y^+ + F_y^-}{F_y^+ F_y^-} \right)^2 - \left( \frac{F_{xy,45}^+ + F_{xy,45}^-}{F_{xy,45}^+ F_{xy,45}^-} \right)^2 \right] \sigma_x \sigma_y + \frac{4\tau_{xy}^2}{F_{xy}^2} \right\}^{\frac{1}{2}} \leq 1.$$

Для критериев 2 и 4

$$F_x = \begin{cases} F_x^+ & \text{при } \sigma_x \geq 0, \\ F_x^- & \text{при } \sigma_x < 0, \end{cases} \quad F_y = \begin{cases} F_y^+ & \text{при } \sigma_y \geq 0, \\ F_y^- & \text{при } \sigma_y < 0. \end{cases}$$

Перед использованием критериев 3 и 5 необходимо проверить условие совместности прочностных характеристик материала (3.3).

Следует отметить, что в некоторых источниках в предельных значениях сжимающих напряжений знак « $\leftrightarrow$ » не показан. Для единообразия и согласованности записи критериев с вычисляемыми значениями предполагается, что значения сжимающих напряжений, а также их предельные значения имеют знак « $\rightarrow$ ». С учетом этого, критерии 3 и 5, а также условие совместности прочностных характеристик материала примут вид

- Критерий 3 – критерий Писаренко – Лебедева

$$\sqrt{(A+C)\sigma_x^2 - 2A\sigma_x\sigma_y + (A+B)\sigma_y^2} + D_1\sigma_x + D_2\sigma_y \leq 1.$$

Здесь

$$A = \frac{1}{2} \left( K^2 - \frac{1}{(F_x^-)^2} - \frac{1}{(F_y^-)^2} \right), \quad B = \frac{1}{2} \left( \frac{1}{(F_x^-)^2} + \frac{3}{(F_y^-)^2} - K^2 \right),$$

$$C = \frac{1}{2} \left( \frac{1}{(F_y^-)^2} + \frac{3}{(F_x^-)^2} - K^2 \right), \quad D_1 = \frac{1}{F_x^+} + \frac{1}{F_x^-},$$

$$D_2 = \frac{1}{F_y^+} + \frac{1}{F_y^-}, \quad K = -\frac{1}{F_{xy,45}^-} - \frac{1}{F_y^+} - \frac{1}{F_y^-}.$$

- Критерий 5 – критерий Гольденבלата – Копнова

$$\begin{aligned} & \frac{1}{2} \left( \frac{1}{F_x^+} + \frac{1}{F_x^-} \right) \sigma_x + \frac{1}{2} \left( \frac{1}{F_y^+} + \frac{1}{F_y^-} \right) \sigma_y + \frac{1}{2} \left\{ \left( \frac{F_x^+ - F_x^-}{F_x^+ F_x^-} \right)^2 \sigma_x^2 + \left( \frac{F_y^+ - F_y^-}{F_y^+ F_y^-} \right)^2 \sigma_y^2 + \right. \\ & \left. + \left[ \left( \frac{F_x^+ - F_x^-}{F_x^+ F_x^-} \right)^2 + \left( \frac{F_y^+ - F_y^-}{F_y^+ F_y^-} \right)^2 - \left( \frac{F_{xy,45}^+ - F_{xy,45}^-}{F_{xy,45}^+ F_{xy,45}^-} \right)^2 \right] \sigma_x \sigma_y + \frac{4\tau_{xy}^2}{F_{xy}^2} \right\}^{\frac{1}{2}} \leq 1. \end{aligned}$$

Условие совместности прочностных характеристик материала

$$\left( \frac{1}{F_x^+} + \frac{1}{F_x^-} \right) - \left( \frac{1}{F_y^+} + \frac{1}{F_y^-} \right) - \left( \frac{1}{F_{xy,45}^+} + \frac{1}{F_{xy,45}^-} \right) = 0.$$

Если оси ортотропии 1, 2 не совпадают с осями координат  $x, y$ , то напряжения  $\sigma_x, \sigma_y, \tau_{xy}$  необходимо привести к направлениям осей ортотропии 1, 2, используя формулы поворота системы координат (1.13). При этом предельные напряжения всегда задаются для осей ортотропии 1 и 2.

### 3.2 НЕКОТОРЫЕ ОРТОТРОПНЫЕ МАТЕРИАЛЫ И ИХ МЕХАНИЧЕСКИЕ И ПРОЧНОСТНЫЕ ХАРАКТЕРИСТИКИ

Механические характеристики материалов рассматриваемых конструкций показаны в Таблице 3.1. Помимо оболочек из ортотропных

материалов (углепластика [120, 132] и стеклопластика [130]), для сравнения рассматривались изотропные оболочки, выполненные из стали и оргстекла.

Таблица 3.1 – Механические характеристики материалов рассматриваемых конструкций

Характеристика	Ортотропные					Изотропные	
	Углепластик				Стеклопластик	Сталь	Оргстекло
	ЛУ-П/ЭНФБ	T300/Ероху	M60J/Ероху	T300/976	T-10/УПЭ22-27		
$E_1$ , МПа	$1.4 \cdot 10^5$	$1.25 \cdot 10^5$	$3.3 \cdot 10^5$	$1.4 \cdot 10^5$	$0.294 \cdot 10^5$	$2.1 \cdot 10^5$	$0.03 \cdot 10^5$
$\mu_{12}$	0.3	0.34	0.32	0.29	0.123	0.3	0.35
$E_2$ , МПа	$0.97 \cdot 10^4$	$0.78 \cdot 10^4$	$0.59 \cdot 10^4$	$0.97 \cdot 10^4$	$1.78 \cdot 10^4$	$2.1 \cdot 10^5$	$0.03 \cdot 10^5$
$G_{12}$ , МПа	$0.46 \cdot 10^4$	$0.44 \cdot 10^4$	$0.39 \cdot 10^4$	$0.55 \cdot 10^4$	$0.301 \cdot 10^4$	$0.807 \cdot 10^5$	$0.012 \cdot 10^5$
$G_{13}$ , МПа	$0.46 \cdot 10^4$	$0.44 \cdot 10^4$	$0.39 \cdot 10^4$	$0.55 \cdot 10^4$	$0.301 \cdot 10^4$	$0.807 \cdot 10^5$	$0.012 \cdot 10^5$
$G_{23}$ , МПа	$0.46 \cdot 10^4$	$0.44 \cdot 10^4$	$0.39 \cdot 10^4$	$0.33 \cdot 10^4$	$0.301 \cdot 10^4$	$0.807 \cdot 10^5$	$0.012 \cdot 10^5$
$F_1^+$ , МПа	700	1760	1760	1517	508	–	–
$F_1^-$ , МПа	– 600	–1570	– 780	–1599	– 209	–	–
$F_2^+$ , МПа	27	80	30	46	246	–	–
$F_2^-$ , МПа	–184	–168	–168	– 253	–117	–	–
$F_{12}$ , МПа	55	98	39	41.4	43	–	–
$F_{12,45}^+$ , МПа	–	–	–	–	130	–	–
$F_{12,45}^-$ , МПа	–	–	–	–	–160	–	–
$\sigma_T$ , МПа	–	–	–	–	–	1720	75
Плотность, кг/м <sup>3</sup>	1500	1500	1500	1500	1800	7800	1190

Здесь  $\sigma_T$  – предел текучести для изотропного материала.

### 3.3 ОБОСНОВАНИЕ ВЫБОРА КРИТЕРИЯ ДЛЯ ИССЛЕДОВАНИЯ ПРОЧНОСТИ ОБОЛОЧЕЧНЫХ КОНСТРУКЦИЙ

Вычислительный эксперимент для обоснования выбора критерия прочности при исследовании оболочечных конструкций проведем на примере следующих вариантов оболочек:

1. Пологая оболочка, квадратная в плане, с линейными размерами  $a = b = 600h$ , главными радиусами кривизны  $R_1 = R_2 = 1510h$  и толщиной  $h = 0.09$  м.

1.1. Выполнена из углепластика М60J/Ероху.

2. Панель цилиндрической оболочки с параметрами  $a = 20$  м,  $R = 5.4$  м,  $h = 0.01$  м и углом разворота  $\pi$  рад.

2.1. Выполнена из углепластика ЛУ-П/ЭНФБ.

2.2. Выполнена из стеклопластика Т-10/УПЭ22-27.

3. Панель конической оболочки с параметрами  $a_1 = 50$  м,  $a = 90$  м,  $\theta = 0.78$  рад,  $h = 0.01$  м и углом разворота  $\pi$  рад.

3.1. Выполнена из стеклопластика Т-10/УПЭ22-27.

Ко всем рассматриваемым оболочечным конструкциям прикладывается равномерно-распределенная поперечная нагрузка. Закрепление контура – шарнирно-неподвижное. Расчеты проводились при удержании 16 членов в разложении искомым функций в ряды ( $N = 16$ ).

Для исследования прочности указанных оболочечных конструкций будем рассматривать следующие критерии:

- Критерий максимальных напряжений (на графиках кривая  $Max$ , черный цвет);
- Критерий Мизеса – Хилла (кривая  $M - H$ , зеленый цвет);
- Критерий Фишера (кривая  $F$ , розовый цвет);
- Критерий Гольденблата – Копнова (кривая  $G - K$ , коричневый цвет);
- Критерий Писаренко – Лебедева (кривая  $P - L$ , фиолетовый цвет).

Следует отметить, что из рассматриваемых вариантов оболочек критерии Гольденблата – Копнова и Писаренко – Лебедева применимы только к вариантам 2.2 и 3.1, т.к. для остальных рассматриваемых

материалов не выполняется условие совместности прочностных характеристик из-за отсутствия данных о предельных значениях  $\tau_{12,45}^+, \tau_{12,45}^-$ .

На Рисунках 3.1–3.8 представлены графики зависимости значений выбранных критериев  $K_r$  от нагрузки  $q$ . Здесь  $K_r$  – левая часть критерия прочности, для критерия максимальных напряжений левую часть будем

брать в виде  $K_r = \max \left\{ \left| \frac{\sigma_x}{F_x} \right|, \left| \frac{\sigma_y}{F_y} \right|, \left| \frac{\tau_{xy}}{F_{xy}} \right| \right\}$ . Момент перехода  $K_r$  через единицу

(начало потери прочности) на графиках отмечен кружком. В Таблице 3.2 приводятся значения предельных нагрузок потери прочности для рассматриваемых вариантов оболочек по выбранным критериям.

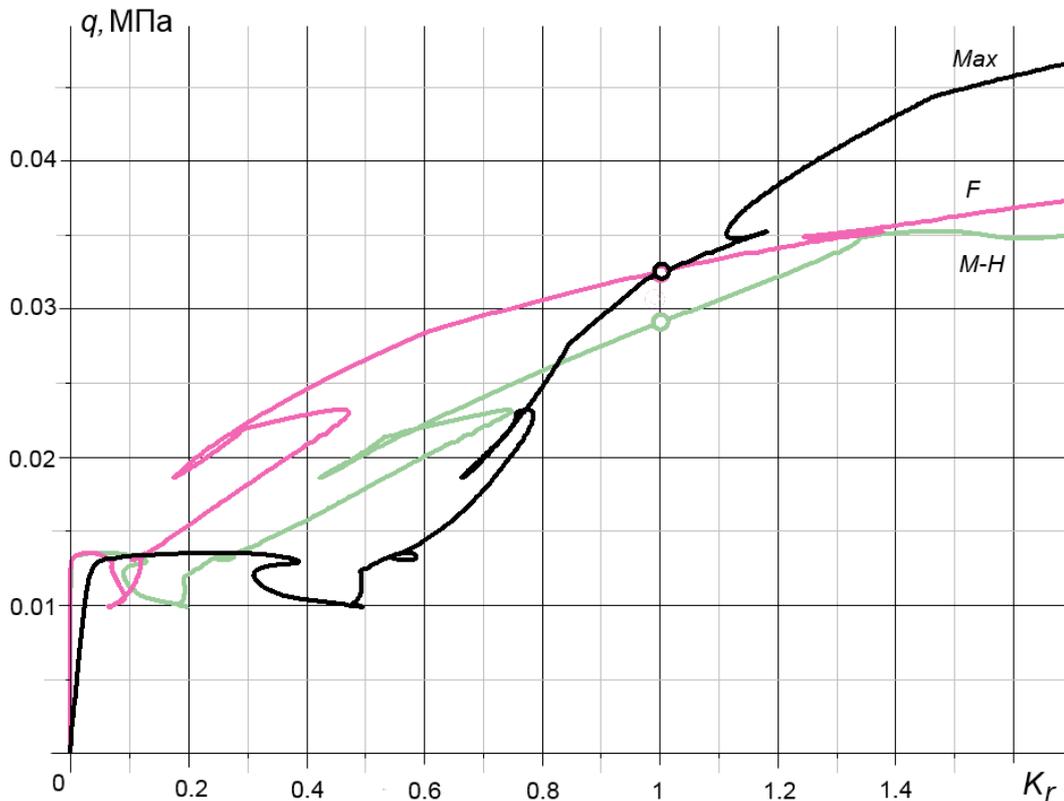


Рис. 3.1. Кривые зависимости значений выбранных критериев  $K_r$  от нагрузки  $q$  для конструкции варианта 1.1

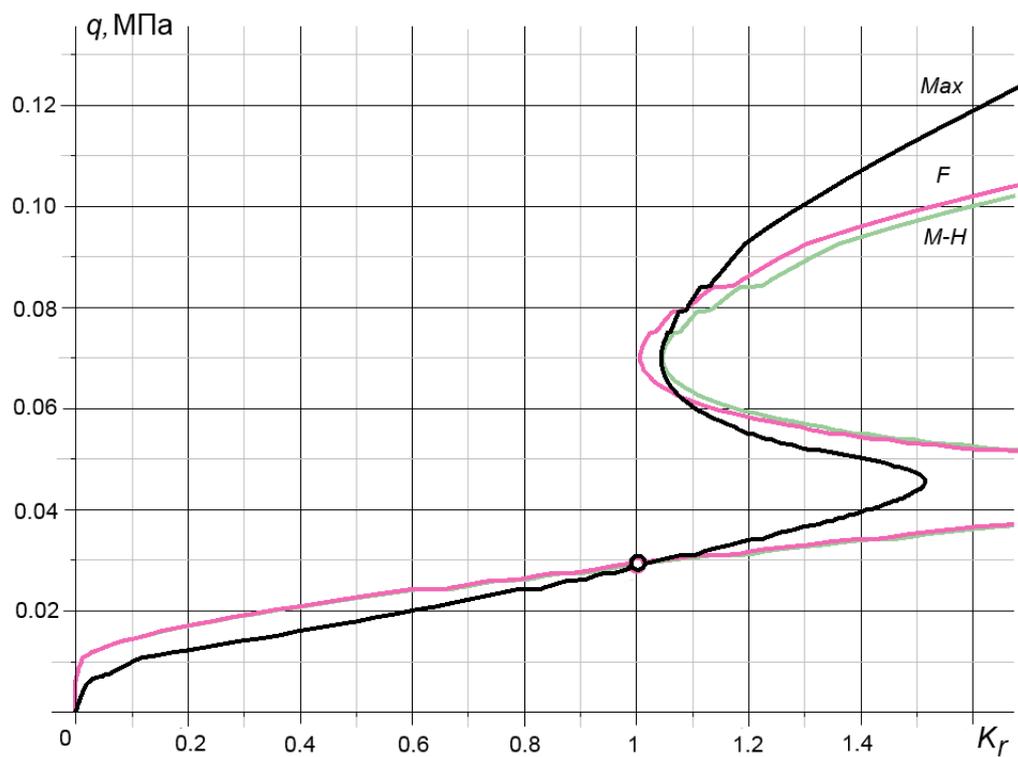


Рис. 3.2. Кривые зависимости значений выбранных критериев  $K_r$  от нагрузки  $q$  для конструкции варианта 2.1

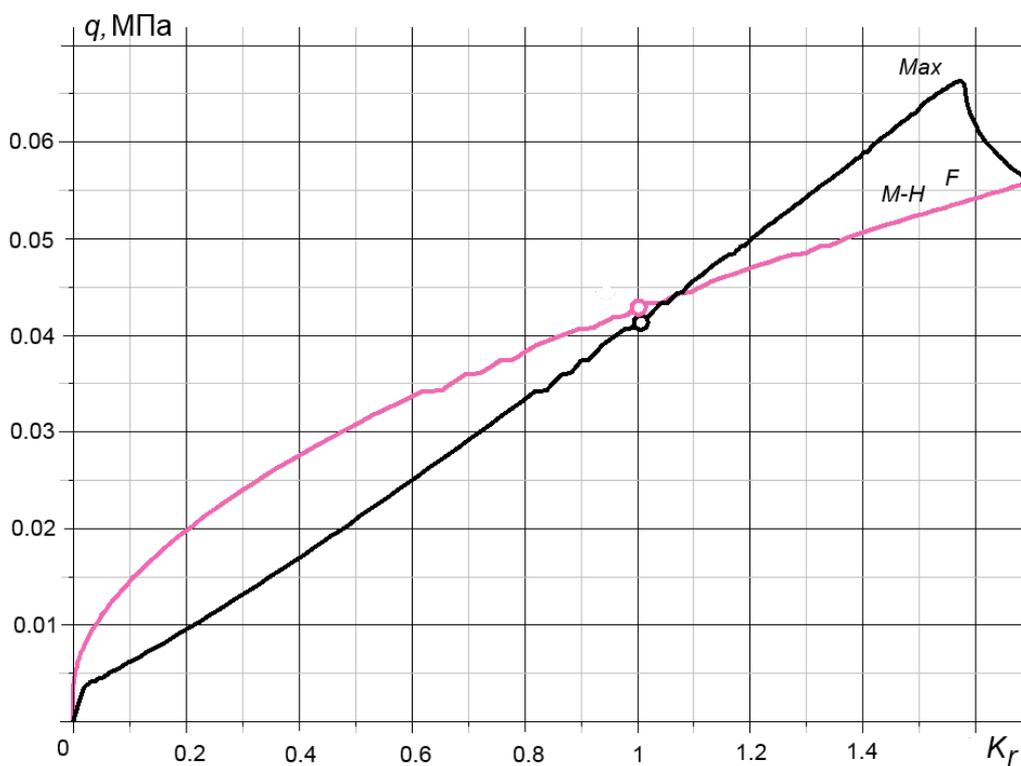


Рис. 3.3. Кривые зависимости значений выбранных критериев  $K_r$  от нагрузки  $q$  для конструкции варианта 2.2

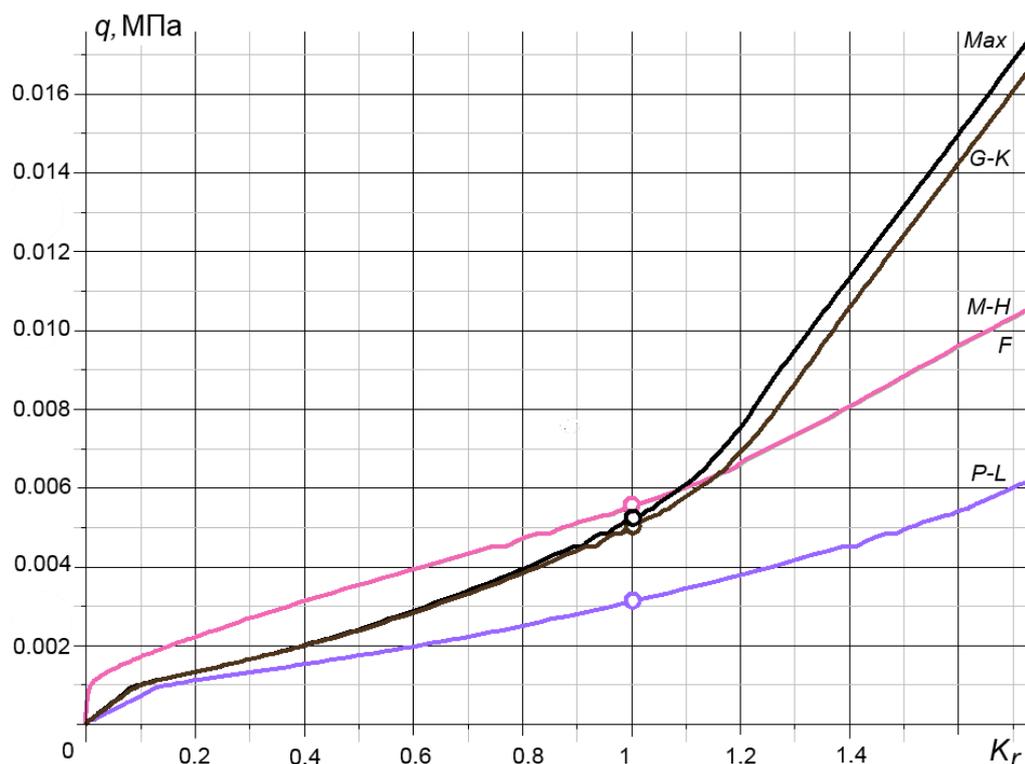


Рис. 3.4. Кривые зависимости значений выбранных критериев  $K_r$  от нагрузки  $q$  для конструкции варианта 3.1

Таблица 3.2 – Значения предельно допустимых нагрузок для рассматриваемых вариантов оболочек в зависимости от критерия прочности

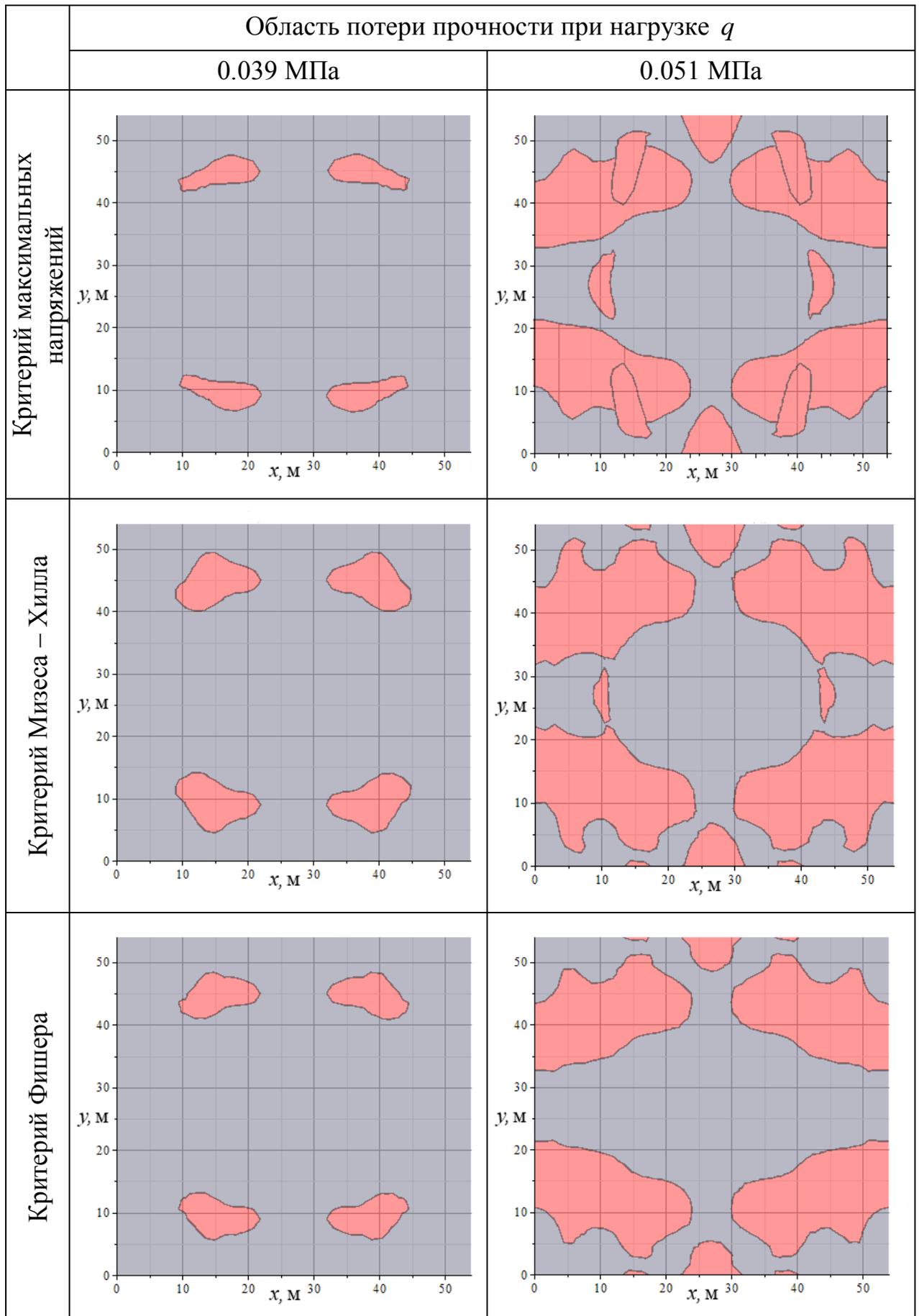
Вариант	Предельно допустимая нагрузка $q_{nlin}$ по критерию				
	Максимальных напряжений	Мизеса – Хилла	Фишера	Гольденבלата – Копнова	Писаренко – Лебедева
1.1	0.032, $F_{xy}$	0.029	0.033	–	–
2.1	0.029, $F_y^+$	0.030	0.030	–	–
2.2	0.041, $F_y^-$	0.042	0.042	0.041	0.027
3.1	0.0052, $F_y^-$	0.0055	0.0055	0.0051	0.0032

Как видно из Рисунков 3.1 – 3.4 и Таблицы 3.2, различные критерии дают близкие результаты. Исключением является критерий Писаренко – Лебедева для варианта оболочки 2.2.

В Таблице 3.3 показано развитие областей потери прочности для оболочки варианта 1.1 при увеличении значения нагрузки уже после начального разрушения материала по критериям максимальных напряжений,

Мизеса – Хилла и критерию Фишера. При построении областей для критерия максимальных напряжений учитываются предельные значения по всем трем компонентам напряжений (сделано наложение областей).

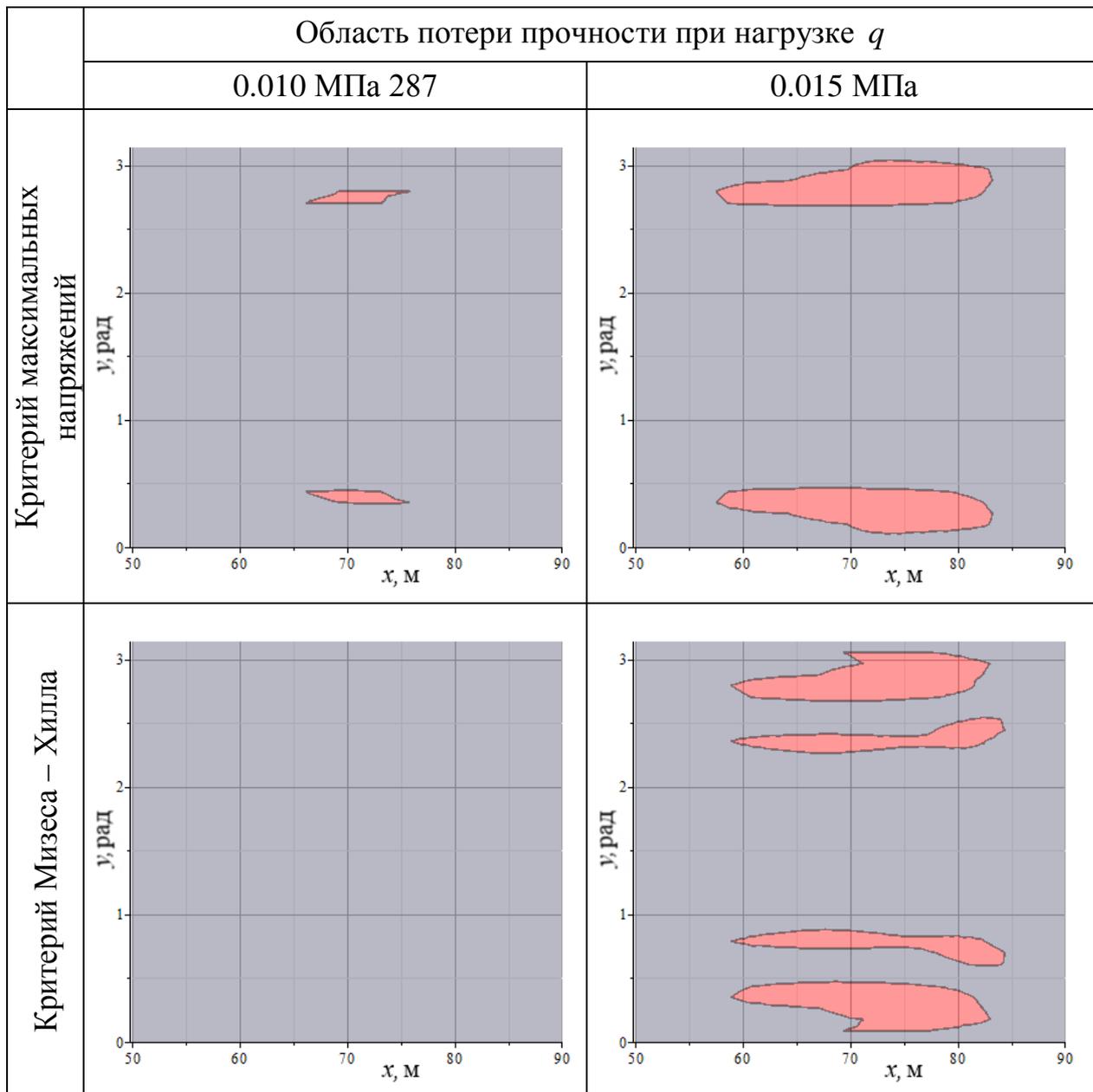
Таблица 3.3–Развитие областей потери прочности для оболочки варианта 1.1

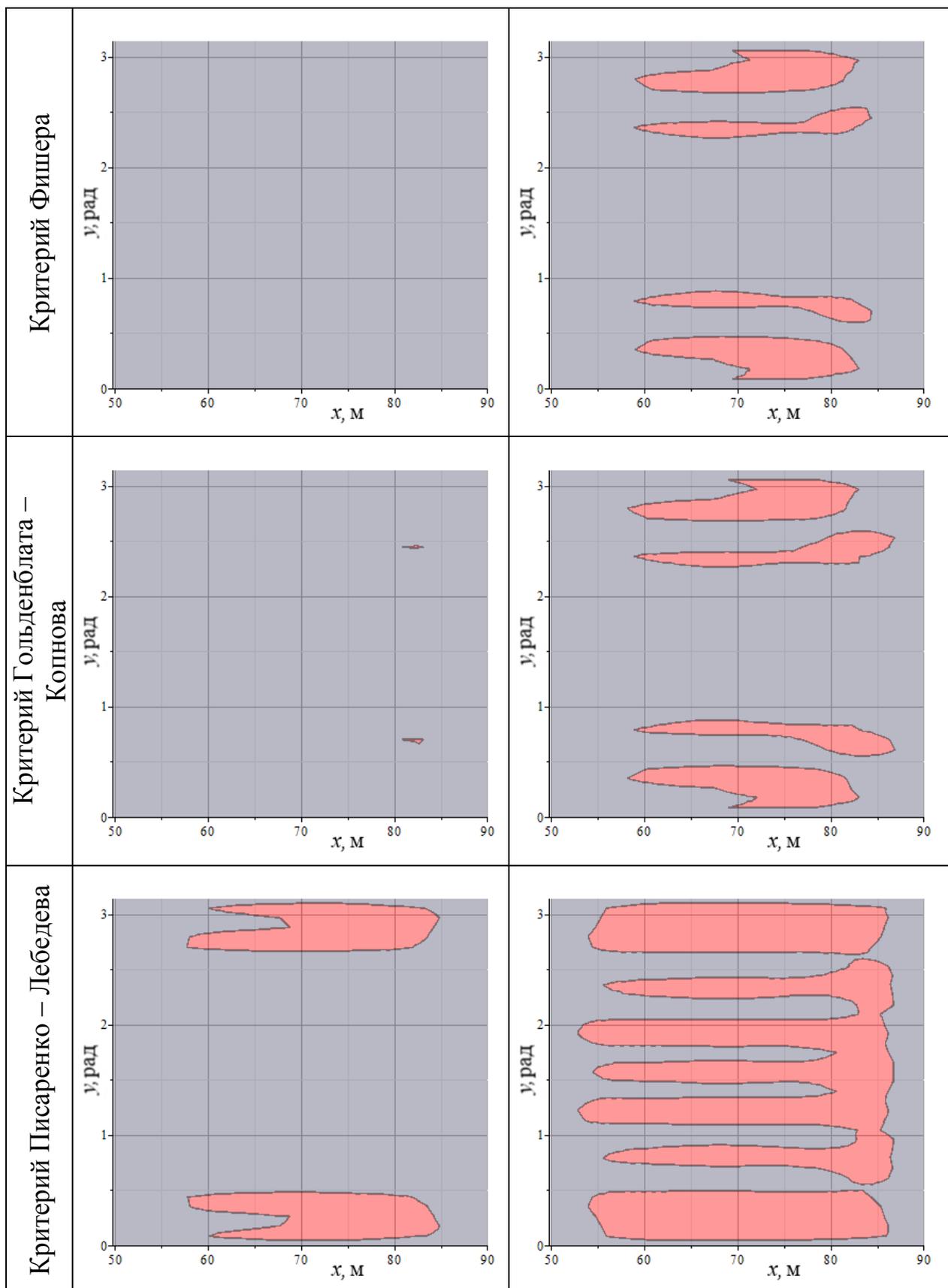


Как видно из Таблицы 3.3, развитие областей потери прочности для различных критериев имеет схожий характер.

В Таблице 3.4 показано развитие областей потери прочности для оболочки варианта 3.1 при увеличении значения нагрузки уже после начального разрушения материала по критериям максимальных напряжений, Мизеса – Хилла, Фишера, Гольденבלата – Копнова и Писаренко – Лебедева.

Таблица 3.4–Развитие областей потери прочности для оболочки варианта 3.1





Как видно из рисунков и значений в Таблицах 3.2, 3.3 и 3.4, критерии максимальных напряжений, Мизеса – Хилла и Фишера дают практически

одинаковый результат. Критерий Гольденבלата – Копнова дает также близкие к остальным критериям значения, но требует наличия дополнительных данных о материале и выполнения условия совместности (3.3). Для критерия Писаренко – Лебедева это также необходимо, но он дает результат, сравнительно отличающийся от остальных критериев.

### **3.4 ВЫВОДЫ**

Так как предельные нагрузки потери прочности, найденные по критерию максимальных напряжений практически совпадают с аналогичными нагрузками, найденными по другим критериям, и, кроме того, в отличие от других критериев он еще указывает по какой компоненте напряжений происходит потеря прочности, то в дальнейшем для исследования прочности оболочечных конструкций будем использовать именно этот критерий.

Проведен анализ развития областей остаточных деформаций при закритическом деформировании, который показал схожие результаты для разных критериев. Этот анализ дает информацию для оптимальной расстановки ребер жесткости для повышения прочности оболочечных конструкций.

# ГЛАВА 4. ИССЛЕДОВАНИЕ ПРОЧНОСТИ ОРТОТРОПНЫХ ОБОЛОЧЕК БЕЗ УЧЕТА ГЕОМЕТРИЧЕСКОЙ НЕЛИНЕЙНОСТИ

## 4.1 ХАРАКТЕРИСТИКА РАССМАТРИВАЕМЫХ КОНСТРУКЦИЙ

Для всех исследованных в данной работе конструкций направление оси ортотропии 1 совпадает с осью  $x$  локальной системы координат оболочки.

Вначале будем рассматривать пологие оболочки прямоугольного плана (Рисунок 4.1). Контур оболочек закреплен шарнирно неподвижно, все конструкции находятся под действием равномерно распределенной поперечной нагрузки. В Таблице 4.2 приведены геометрические параметры рассматриваемых вариантов конструкций. Также цветом выделен вариант, который будем рассматривать в дальнейшем более подробно.

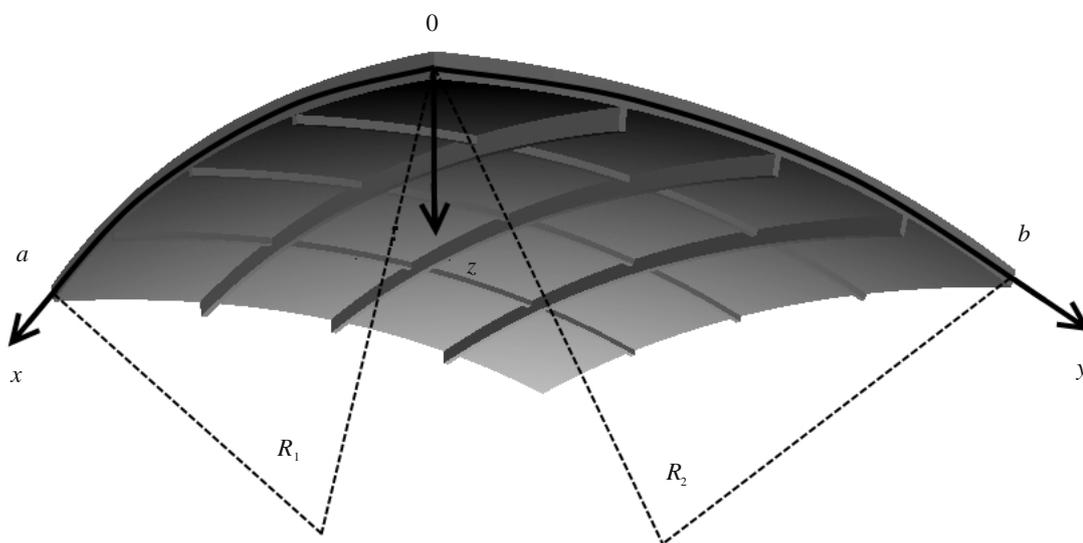


Рисунок 4.1. Схематичное изображение пологой подкрепленной оболочки

Для пологих оболочек прямоугольного плана возможен переход к безразмерным параметрам [25, 58, 100]

$$\xi = \frac{x}{a}, \eta = \frac{y}{b}, \bar{U} = \frac{Ua}{h^2}, \bar{V} = \frac{Vb}{h^2}, \bar{W} = \frac{W}{h}, \bar{\Psi}_x = \frac{\Psi_x a}{h}, \bar{\Psi}_y = \frac{\Psi_y b}{h},$$

$$\bar{P} = \frac{qa^4}{E_1 h^4}, \bar{\sigma} = \frac{\sigma a^2}{E_1 h^2}, k_\xi = \frac{a^2}{hR_1}, k_\eta = \frac{b^2}{hR_2}, \bar{a} = \frac{a}{h}.$$

Поэтому при разных размерных параметрах и одинаковых значениях безразмерных параметров  $\bar{a}, \bar{b}, k_\xi, k_\eta$  оболочки будут подобными.

В этом случае для оболочек, изготовленных из одного и того же материала при одинаковых значениях  $\bar{a}, \bar{b}, k_\xi, k_\eta$ , критические нагрузки и напряжения будут одинаковыми для оболочек, имеющих разные размерные значения  $a, b, R_1, R_2, h$ , но обладающих указанным свойством подобия. Размерные значения  $W$  необходимо смасштабировать: так как расчеты проводились для оболочек с  $h = 0.09$ , то при других размерах оболочки полученное значение прогиба необходимо умножить на  $\frac{h}{0.09}$ . Также необходимо масштабировать значения полученных усилий и моментов.

Таким образом, можно одним расчетом получить данные для целой серии подобных оболочек.

Таблица 4.2. Параметры рассматриваемых вариантов пологих оболочек

Вариант оболочки	Линейные размеры $a = b, (\text{м})$	Радиусы главных кривизн $R = R_1 = R_2, (\text{м})$	Толщина оболочки $h, (\text{м})$	Безразмерный параметр $\bar{a}$	Обобщенный параметр кривизны $k_\xi$
1	18	45.3	0.03	600	238.4
	27	67.95	0.045		
	36	90.6	0.06		
	54	135.9	0.09		
2	18	22.65	0.03	600	477
	27	34	0.045		
	36	45.3	0.06		
	54	67.95	0.09		
3	18	11.325	0.03	600	953
	27	17	0.045		
	36	22.65	0.06		
	54	34	0.09		

Варианты рассматриваемых пологих оболочек выбраны специально такими же, какие рассматривались в работе В. В. Карпова [65], где расчеты проводились для изотропных материалов, с той целью, чтобы можно было сравнить результаты расчета изотропных и ортотропных оболочек.

Также будем рассматривать панели цилиндрических оболочек, шарнирно неподвижно закрепленные по контуру и находящиеся под действием равномерно распределенной поперечной нагрузки. Принятая локальная система координат таких конструкций показана на Рисунке 4.2, а в Таблице 4.3 приведены геометрические параметры рассматриваемых вариантов оболочек. Помимо обобщенного параметра кривизны, цилиндрические панели удобно характеризовать отношением их линейных размеров  $\lambda_1 = a/(Rb)$ . Также цветом выделен вариант, который будем рассматривать в дальнейшем более подробно.

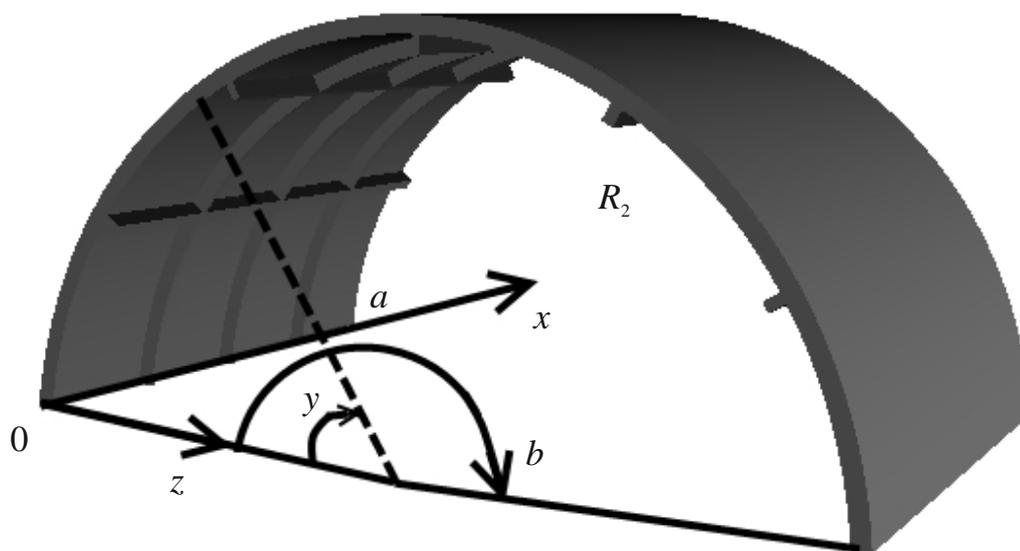


Рисунок 4.2. Схематичное изображение панели цилиндрической оболочки

Панели цилиндрических оболочек можно условно поделить на три категории: короткие, средние и длинные в зависимости от соотношения их сторон. В данном случае, панель варианта 2 относится к категории коротких, варианты 1 и 4 – к категории средних, а вариант 3 к длинным панелям.

Таблица 4.3. Параметры рассматриваемых вариантов панелей цилиндрических оболочек

Параметр	Вариант 1	Вариант 2	Вариант 3	Вариант 4
Линейный размер, $a$ (м)	10	10	20	20
Угол разворота, $b$ (рад)	$\frac{\pi}{2}$	$\pi$	$\frac{\pi}{2}$	$\pi$
Радиус кривизны, $R$ (м)	5.4	5.4	5.4	5.4
Толщина оболочки, $h$ (м)	0.01	0.01	0.01	0.01
Обобщенный параметр кривизны $k_{\eta}$	1332	5329	1332	5329
Отношение линейных размеров $\lambda_1$	1.179	0.589	2.357	1.179
Нагрузка от собственного веса (МПа)	0.00015	0.00015	0.00015	0.00015

## 4.2 ИССЛЕДОВАНИЕ ПРОЧНОСТИ ПОЛОГИХ ОБОЛОЧЕК ИЗ УГЛЕПЛАСТИКА

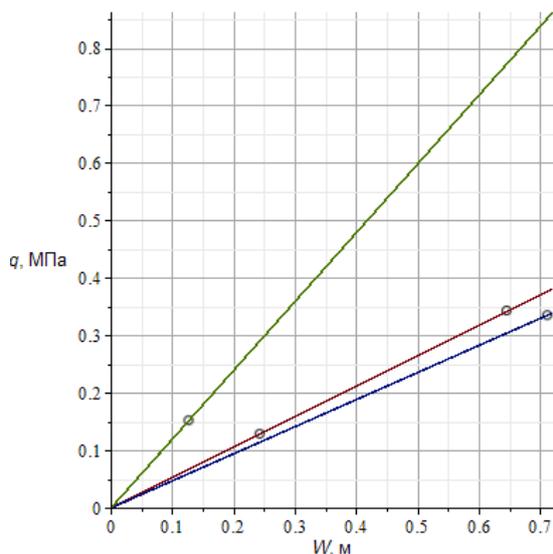
При геометрически линейном варианте расчета были получены значения предельных нагрузок потери прочности  $q_{lin}$  (МПа). Все значения напряжений вычислялись на внешней поверхности оболочки при  $z = -\frac{h}{2}$ .

На Рисунке 4.3 приводится серия графиков «нагрузка  $q$  – прогиб в центре  $W$ » для исследованных вариантов конструкций. Так как для углепластиков ЛУ-П/ЭНФБ и Т300/976 данные зависимости практически совпадают, они показаны одной линией с указанием двух значений предельных нагрузок. В Таблице 4.4 приводятся точные значения компонент напряжений и нагрузки при достижении одной из компонент вектора напряжений первого предельного значения. Во всех рассмотренных случаях первым было достигнуто предельное значение напряжения на сжатие вдоль оси  $x$ , столбец с соответствующими значениями в таблице выделен.

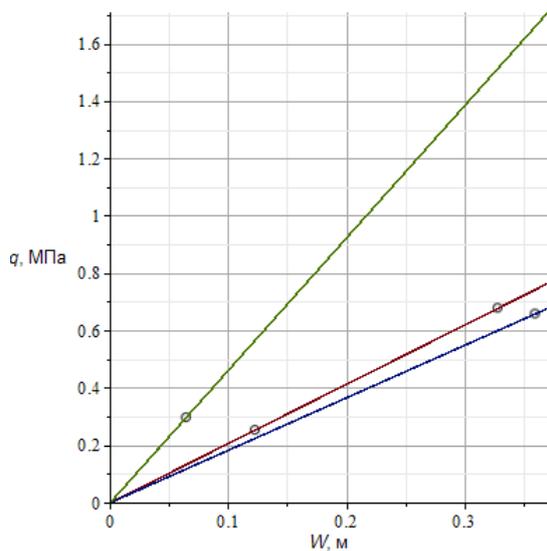
Рассмотрим более подробно оболочку варианта 1, выполненную из углепластика Т300/Ероху. На Рисунке 4.4а показано поле прогибов  $W$

конструкции при нагрузке 0.335 МПа, а на Рисунках 4.4б, 4.4в, 4.4г поля напряжений  $\sigma_x$ ,  $\sigma_y$ ,  $\tau_{xy}$  соответственно.

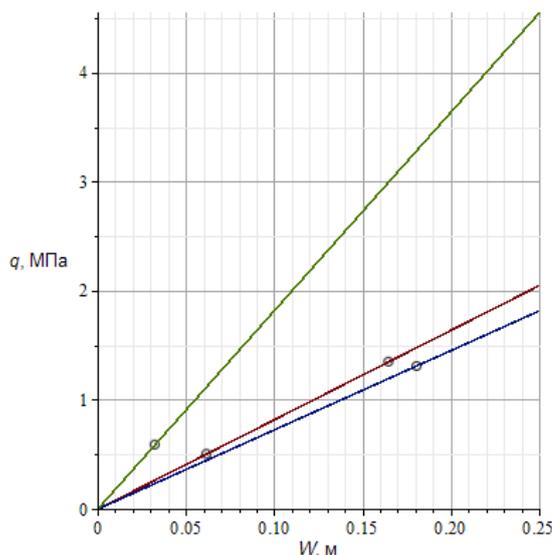
Зная распределение напряжений по полю оболочки, проектировщик для снижения концентрации напряжений может подкрепить оболочки ребрами жесткости.



а)  $k_{\xi} = 238.4$



б)  $k_{\xi} = 477$



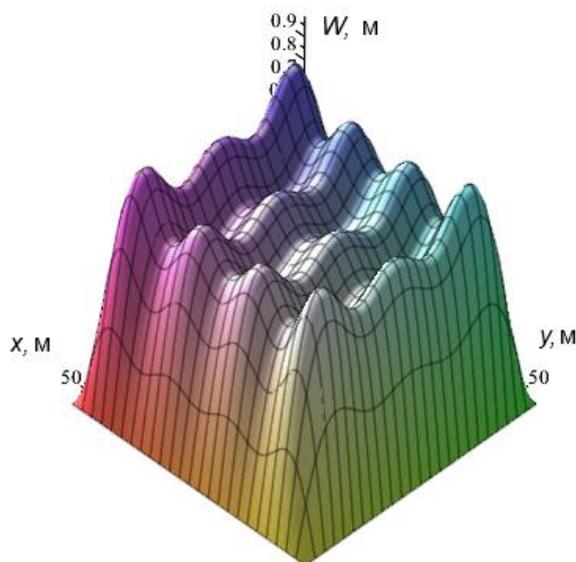
в)  $k_{\xi} = 953$

○ Достижение предела прочности — ЛУ-П/ЭНФБ, Т300/976 — Т300/Ероху — М60J/Ероху

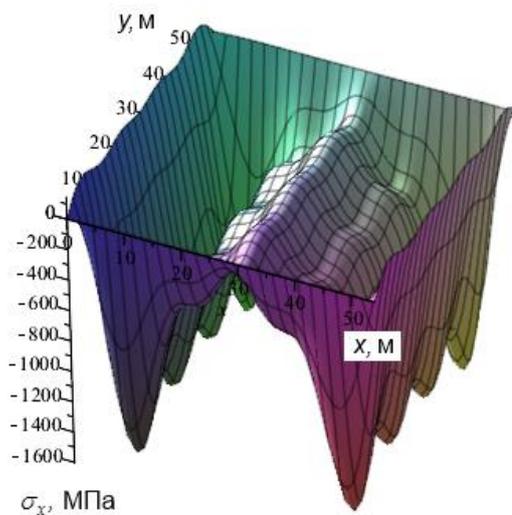
Рисунок 4.3. Графики «нагрузка  $q$  – прогиб в центре  $W$ » для рассматриваемых вариантов оболочек

Таблица 4.4. Значения компонент напряжений и нагрузки при достижении одной из компонент первого предельного значения (критерий максимальных напряжений)

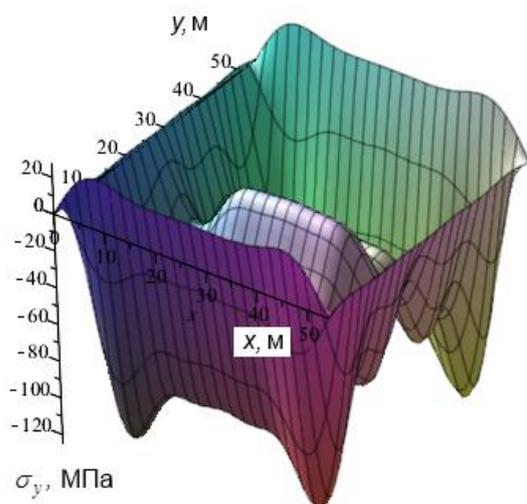
Оболочка	Углепластик	$q_{lin}$ (МПа)	$\sigma_x^+$ (МПа)	$\sigma_x^-$ (МПа)	$\sigma_y^+$ (МПа)	$\sigma_y^-$ (МПа)	$\tau_{xy}^+$ (МПа)
Вариант 1 $k_\xi = 238.4$	<i>ЛУ-П/ЭНФБ</i>	0.129	54.909	<b>-600.364</b>	10.293	-50.728	13.278
	<i>T300/Ероху</i>	0.335	148.559	<b>-1571.395</b>	27.594	-123.475	37.092
	<i>M60J/Ероху</i>	0.152	58.117	<b>-782.603</b>	4.401	-17.138	6.922
	<i>T300/976</i>	0.343	156.435	<b>-1590.724</b>	22.366	-130.649	41.404
Вариант 2 $k_\xi = 477$	<i>ЛУ-П/ЭНФБ</i>	0.253	53.547	<b>-600.029</b>	10.324	-50.838	13.075
	<i>T300/Ероху</i>	0.659	145.068	<b>-1570.026</b>	27.648	-123.683	36.474
	<i>M60J/Ероху</i>	0.297	56.146	<b>-780.239</b>	4.387	-17.125	6.746
	<i>T300/976</i>	0.679	153.876	<b>-1599.154</b>	22.532	-131.676	40.996
Вариант 3 $k_\xi = 953$	<i>ЛУ-П/ЭНФБ</i>	0.504	53.325	<b>-600.588</b>	10.343	-50.923	13.020
	<i>T300/Ероху</i>	1.310	144.467	<b>-1570.595</b>	27.674	-123.811	36.286
	<i>M60J/Ероху</i>	0.589	55.846	<b>-780.046</b>	4.387	-17.130	6.692
	<i>T300/976</i>	1.350	153.238	<b>-1599.555</b>	22.552	-131.799	40.790



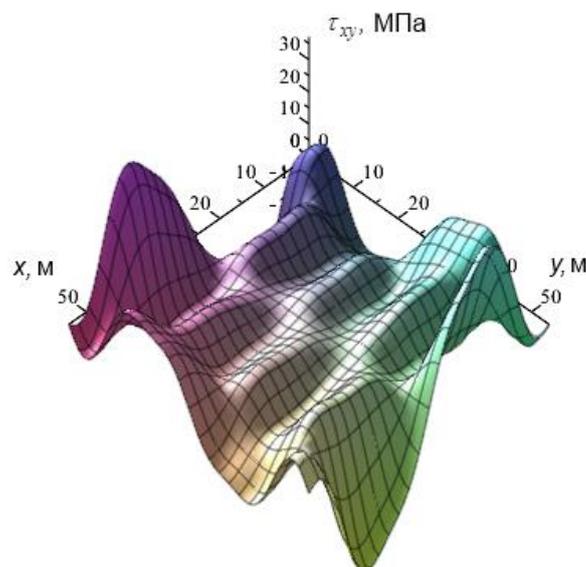
а) Поле прогибов  $W$



б) Поле напряжений  $\sigma_x$



в) Поле напряжений  $\sigma_y$



г) Поле напряжений  $\tau_{xy}$

Рисунок 4.4. Поля прогибов и напряжений для оболочки варианта 1 из углепластика *T300/Epoxy*

Так как поле прогибов, отложенное от плоскости в системе Maple (Рисунок 4.4а), не достаточно наглядно отражает поведение реальной конструкции, желательно откладывать значения прогибов от поверхности оболочки [11]. На Рисунке 4.5 показано то же поле прогибов, что и на Рисунке 4.4а, но отложенное от поверхности оболочки. Чтобы изменения в

конструкции были хорошо видны, был взят коэффициент масштабирования прогиба  $k = 5$ . Здесь и далее, изображения данного вида были получены с помощью программного модуля визуализации GraphicLibrary, разработанного в соответствии с заданием по гранту «Математическое и программное обеспечение расчетов прочности и устойчивости подкрепленных оболочек вращения» АВЦП “Развитие научного потенциала высшей школы” тема № 2.1.2/10824 на 2011 год.

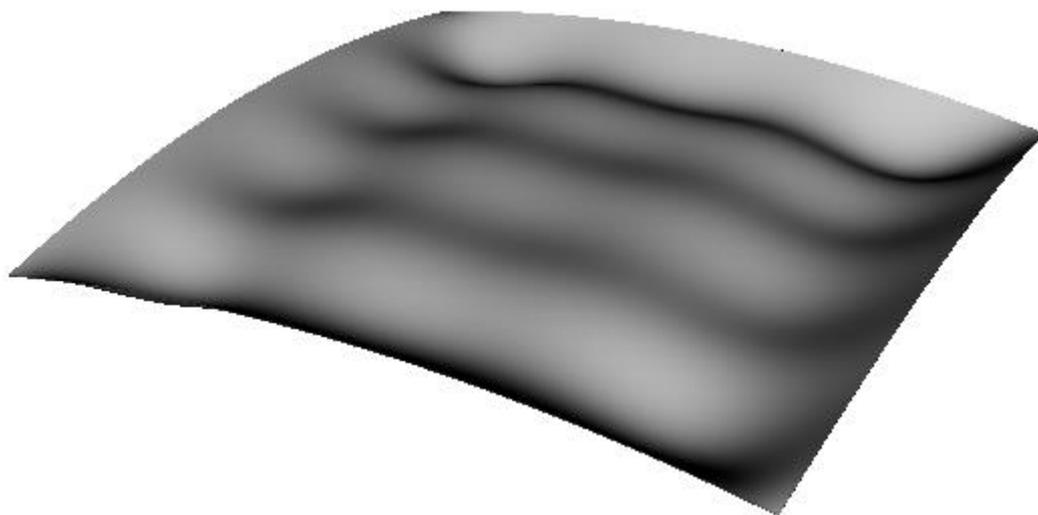


Рисунок 4.5. Поле прогибов, отложенное от поверхности оболочки

На основе полученных данных можно провести сравнение исследуемых конструкций. Для этого рассмотрим оболочки с линейным размером  $a = b = 54$  м: построим график зависимости нагрузки, при которой происходит потеря прочности, от обобщенного параметра кривизны  $k_{\xi}$  (Рисунок 4.6).

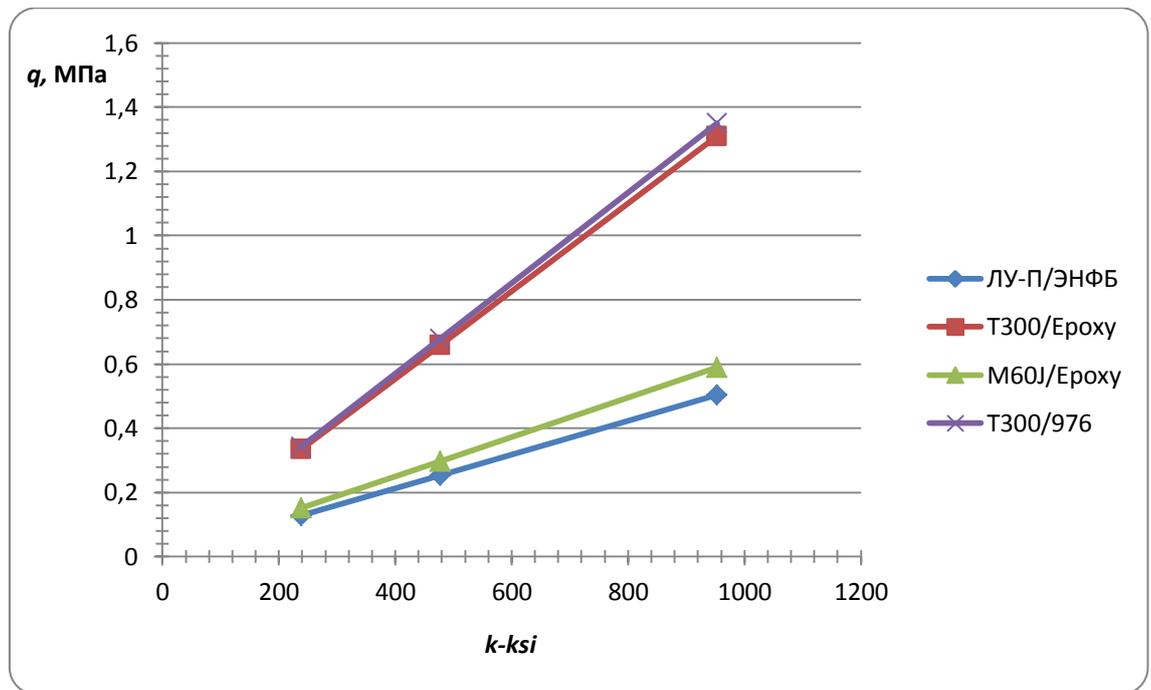


Рисунок 4.6. Зависимость нагрузки потери прочности от обобщенного параметра кривизны  $k_{\xi}$

С ростом обобщенного параметра кривизны оболочки  $k_{\xi}$  уменьшается радиус кривизны, поэтому происходит уменьшение прогибов и напряжений и, как следствие, увеличение допустимой нагрузки.

### 4.3 ИССЛЕДОВАНИЕ ПРОЧНОСТИ ПАНЕЛЕЙ ЦИЛИНДРИЧЕСКИХ ОБОЛОЧЕК ИЗ УГЛЕПЛАСТИКА

В Таблице 4.5 приводятся результаты, полученные при исследовании панелей цилиндрических оболочек.

Таблица 4.5. Значения предельных нагрузок потери прочности цилиндрических панелей при геометрически линейном варианте расчета

Оболочка	Углепластик	Линейный вариант		
		$q_{lin}$ (МПа)	Прогиб в центре, м	Компонента предельных напряжений
Вариант 1 $\lambda_1 = 1.179$	ЛУ-П/ЭНФБ	0.054	0.030	$F_2^+$
	Т300/Ероху	0.091	0.066	$F_2^-$
	М60J/Ероху	0.053	0.055	$F_2^+$
	Т300/976	0.108	0.055	$F_2^+$

Вариант 2 $\lambda_1 = 0.589$	<i>ЛУ-П/ЭНФБ</i>	0.059	0.030	$F_2^+$
	<i>T300/Ероху</i>	0.105	0.069	$F_2^-$
	<i>M60J/Ероху</i>	0.055	0.050	$F_2^+$
	<i>T300/976</i>	0.117	0.056	$F_2^+$
Вариант 3 $\lambda_1 = 2.357$	<i>ЛУ-П/ЭНФБ</i>	0.053	0.029	$F_2^+$
	<i>T300/Ероху</i>	0.086	0.062	$F_2^-$
	<i>M60J/Ероху</i>	0.051	0.053	$F_2^+$
	<i>T300/976</i>	0.105	0.053	$F_2^+$
Вариант 4 $\lambda_1 = 1.179$	<i>ЛУ-П/ЭНФБ</i>	0.054	0.029	$F_2^+$
	<i>T300/Ероху</i>	0.105	0.069	$F_2^-$
	<i>M60J/Ероху</i>	0.055	0.050	$F_2^+$
	<i>T300/976</i>	0.116	0.056	$F_2^+$

#### 4.4 ВЫВОДЫ

После проведения компьютерного моделирования напряженно-деформированного состояния оболочек при геометрически линейной постановке можно сделать следующие выводы:

1. Для рассмотренных вариантов пологих оболочек первым достигается предельное значение нормального напряжения вдоль оси  $x$  на сжатие.
2. Для рассмотренных вариантов панелей цилиндрических оболочек в большинстве случаев первым достигается предельное значение нормального напряжения вдоль оси  $y$  (окружной координаты). При этом это, в основном, значения растягивающих напряжений.
3. Сравнение результатов расчета при различном значении числа разложений искомых функций в ряды ( $N$ ), показали, что с достаточной точностью необходимо принять  $N \geq 16$ .

## ГЛАВА 5. ИССЛЕДОВАНИЕ ПРОЧНОСТИ И УСТОЙЧИВОСТИ ОРТОТРОПНЫХ ОБОЛОЧЕК С УЧЕТОМ ГЕОМЕТРИЧЕСКОЙ НЕЛИНЕЙНОСТИ

В данной главе приводятся результаты исследования прочности и устойчивости пологих оболочек, прямоугольных в плане, а также цилиндрических и конических панелей. В разложении искомым функций удерживалось 16 или 25 членов. Как показано в работе [65], для тонких оболочек этого вполне достаточно для высокой точности расчетов.

При исследовании устойчивости оболочек решается геометрически нелинейная задача и строится график зависимости «нагрузка – прогиб» в некоторой точке оболочки, например, в ее центре. Анализируются особые точки этого графика, в этих точках Якобиан (определитель матрицы Якоби  $J$ ), обращается в ноль. Таким образом, находятся верхние и нижние критические нагрузки. Этим нагрузкам соответствуют точки максимума и точки минимума кривой «нагрузка – прогиб». При этих нагрузках «хлопком» происходит переход на новое равновесное состояние. По сути дела, для нахождения критических нагрузок применяется критерий Ляпунова, когда малому изменению входного параметра (нагрузки) соответствует существенное изменение выходного параметра (прогиба).

Здесь и далее на графиках черным цветом показана кривая максимального прогиба  $W_{\max}$ , который вычисляется по всей области оболочки; красным цветом – кривая прогиба  $W_c$  в центре области конструкции  $\left(x = \frac{a_1 + a}{2}, y = \frac{b}{2}\right)$ ; синим цветом – кривая  $W_4$  в четверти

$\left(x = \frac{3a_1 + a}{4}, y = \frac{b}{4}\right)$ ; оранжевым –  $W_8$  в восьмой части  $\left(x = \frac{7a_1 + a}{8}, y = \frac{b}{8}\right)$ ;

серым цветом показываются участки кривой после достижения интенсивностью напряжений предела текучести (для изотропных оболочек).

На кривых прогиба в центре и максимального прогиба показаны точки, в

которых определитель матрицы Якоби обращается в ноль. Эти точки соответствуют верхним и нижним критическим нагрузкам или точкам бифуркации. Синим цветом на этих кривых показаны точки, соответствующие нагрузкам потери прочности. На остальных кривых эти точки не отмечены, чтобы не загромождать график. При проведении данных расчетов предполагается, что после достижения первого предельного значения напряжений конструкция не изменила своей геометрии и характера поведения. Дальнейшая кривая имеет скорее научный, чем практический интерес.

## 5.1 ПРОЧНОСТЬ И УСТОЙЧИВОСТЬ КВАДРАТНЫХ В ПЛАНЕ ПОЛОГИХ ОБОЛОЧЕК

Рассмотрим более подробно пологую оболочку варианта 1 при толщине  $h = 0.09$  м (параметры конструкции см. в Таблице 4.2). В этом случае нагрузка от собственного веса составит 0.00135 МПа. На Рисунке 5.1 приведен фрагмент графика «нагрузка  $q$  – прогиб  $W$ » для данной оболочки из углепластика М60J (значения прогибов соответствуют варианту конструкции с линейными размерами  $a = b = 54$  м).

Что касается потери устойчивости данной конструкции. Первой критической нагрузке соответствует значение 0.0135 МПа, на графике это точка  $A$ . В этот момент происходит переход на новое равновесное состояние в точку  $B$  (показано пунктиром). Таким образом, оболочка теряет устойчивость посредством «хлопка». Далее, при нагрузке 0.023 МПа происходит следующий небольшой «хлопок», в основном это заметно в четверти и восьмой части конструкции.

После этого наступает потеря прочности на сжатие вдоль оси  $x$  при нагрузке 0.0308 МПа. Таким образом, для рассмотренной конструкции потеря устойчивости наступает раньше потери прочности.

На Рисунках 5.2, 5.3 приводятся поля прогибов конструкции до и после первой критической нагрузки, отложенные не только от плоскости, но и от поверхности оболочки. Это делается в связи с тем, что поле прогибов,

отложенное от плоскости в системе Maple, не достаточно наглядно отражает поведение реальной конструкции. Чтобы изменения в конструкции были хорошо видны, был взят коэффициент масштабирования прогиба  $k = 5$ .

Также, научный интерес могут представлять графики зависимостей других неизвестных функций от нагрузки. На Рисунке 5.4 показаны соответствующие кривые для четверти оболочки, красными точками показаны моменты смены знака определителя матрицы Якоби. Перемещения центра оболочки в силу ее симметрии, а также симметрии прикладываемой нагрузки, равны нулю (красная кривая). Как видно из графиков, перемещения в этих направлениях достаточно малы в сравнении с перемещениями вдоль оси  $z$ .

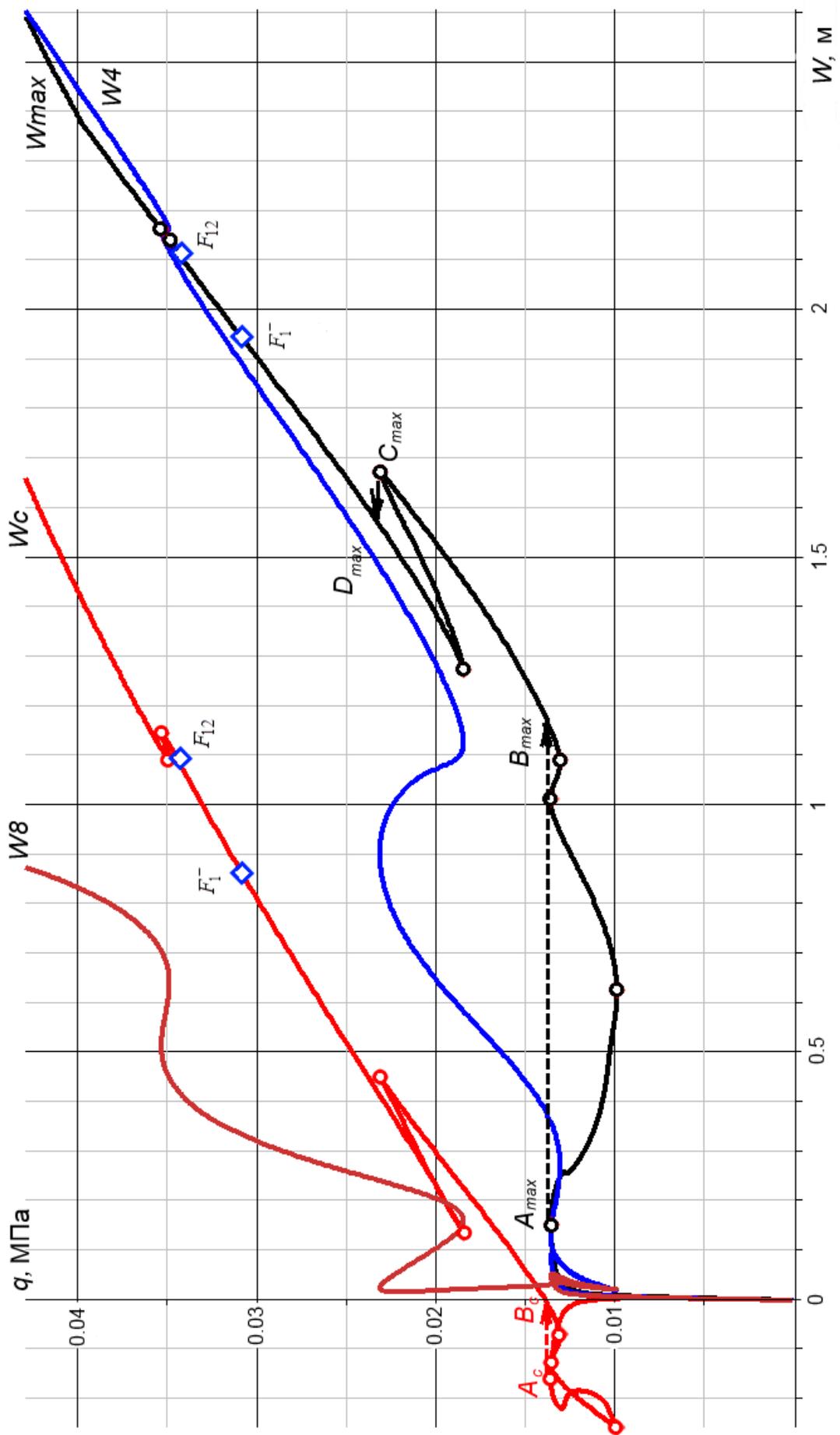


Рисунок 5.1. Фрагмент графика «нагрузка  $q$  – прогиб  $W$ » для полой оболочки варианта 1 из углепластика М60J

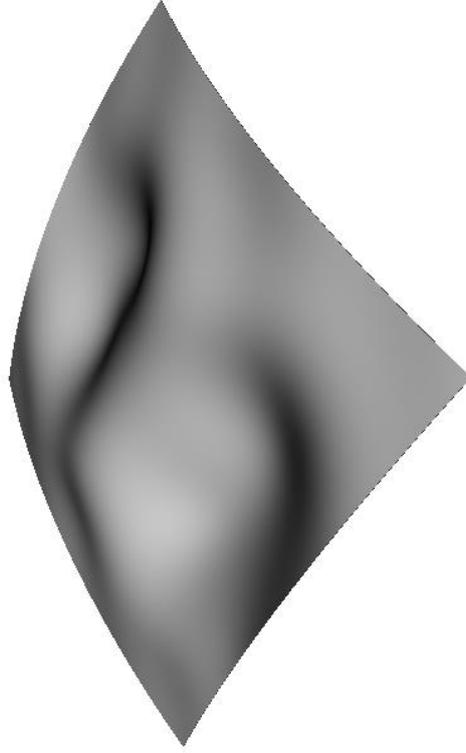
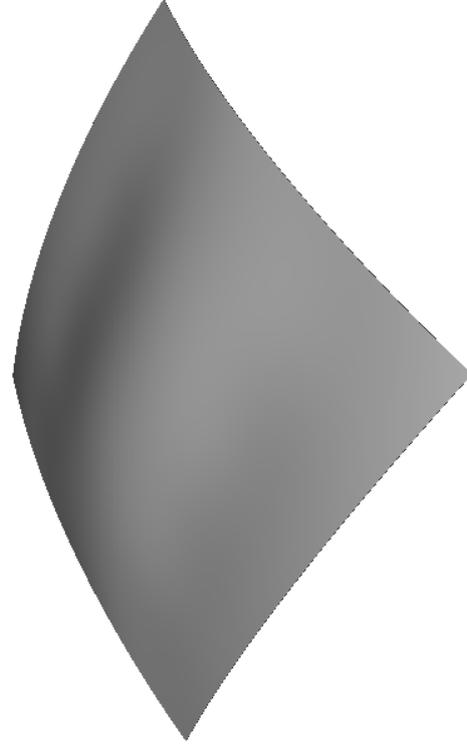
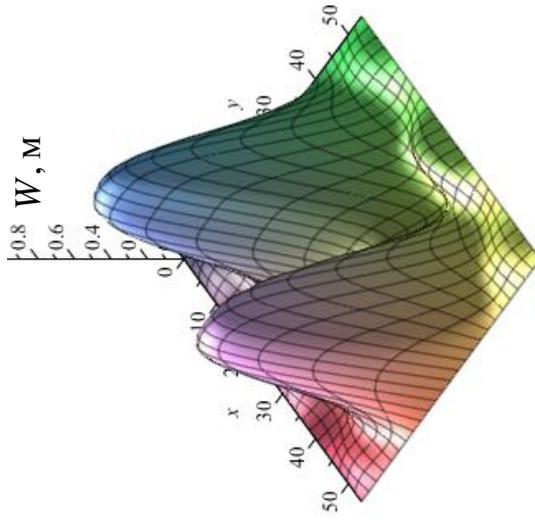
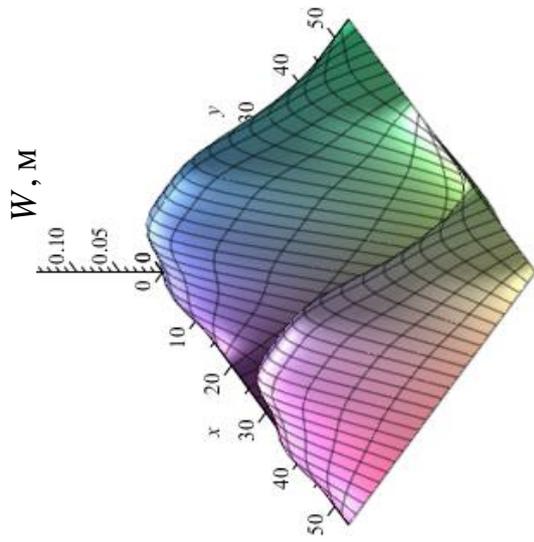


Рисунок 5.2. Поле прогибов конструкции до первой критической нагрузки для полой оболочки варианта 1 из углепластика М60J

Рисунок 5.3. Поле прогибов конструкции после первой критической нагрузки для полой оболочки варианта 1 из углепластика М60J

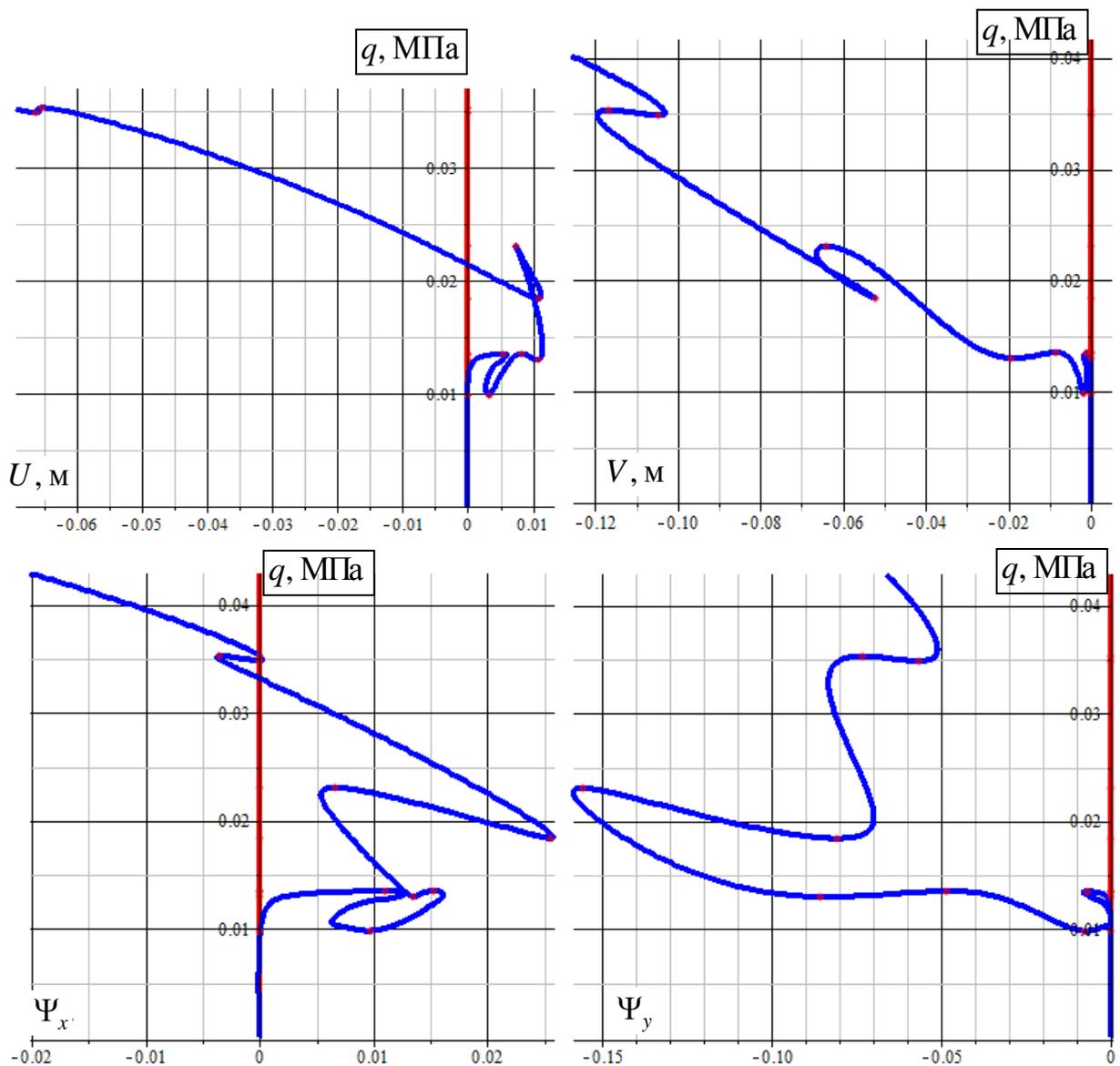


Рисунок 5.4. Графики зависимостей функций перемещений и углов поворота нормали от нагрузки

В Таблице 5.2 показаны значения критических нагрузок потери устойчивости  $q_{kr}$ , предельных нагрузок потери прочности при геометрически нелинейном варианте расчета  $q_{nlin}$  и соответствующие компоненты напряжений для всех исследованных вариантов пологих оболочек.

Значения нагрузок потери прочности при нелинейном расчете, помеченные «\*», получены в закритической области (после потери устойчивости, на нисходящей ветви графика «нагрузка  $q$  – прогиб  $W$  »).

Таблица 5.2 – Результаты расчета для всех исследованных вариантов пологих оболочек

Оболочка	Углепластик	Нелинейный вариант		
		$q_{nlin}$ , (МПа)	Компонента предельных напряжений	$q_{kr}$ , (МПа)
Вариант 1 $k_{\xi} = 238.4$	<i>ЛУ-П/ЭНФБ</i>	0.023	$F_2^+$	<b>0.013</b>
	<i>T300/Ероху</i>	0.030*	$F_2^-$	<b>0.011</b>
	<i>M60J/Ероху</i>	0.031	$F_1^-$	<b>0.013</b>
	<i>T300/976</i>	0.032	$F_2^+$	<b>0.013</b>
Вариант 2 $k_{\xi} = 477$	<i>ЛУ-П/ЭНФБ</i>	0.043*	$F_2^+$	<b>0.076</b>
	<i>T300/Ероху</i>	0.145	$F_2^+$	<b>0.064</b>
	<i>M60J/Ероху</i>	0.057*	$F_1^-$	<b>0.074</b>
	<i>T300/976</i>	0.063*	$F_{12}$	<b>0.078</b>
Вариант 3 $k_{\xi} = 953$	<i>ЛУ-П/ЭНФБ</i>	<b>0.406</b>	$F_1^-$	0.569
	<i>T300/Ероху</i>	0.292*	$F_2^+$	<b>0.487</b>
	<i>M60J/Ероху</i>	<b>0.413</b>	$F_1^-$	0.521
	<i>T300/976</i>	0.561*	$F_2^+$	<b>0.586</b>

Из данных, представленных в Таблице 4.2, можно сделать вывод, что для оболочек варианта 3 для двух видов углепластика потеря прочности происходит раньше потери устойчивости, для остальных потеря устойчивости раньше потери прочности. В половине случаев достижение предельных значений напряжений происходит на нисходящей ветви графика «нагрузка  $q$  – прогиб  $W$ ».

Так как предельные значения напряжений для разных конструкций и материалов достигались по разным компонентам вектора напряжений, для каждой конкретной конструкции необходимо проводить отдельное компьютерное моделирование и исследование ее напряженно-деформированного состояния.

Следует заметить, что определяется точки начального невыполнения условий прочности, при этом конструкция еще может не терять своей

работоспособности. Однако, при дальнейшем нагружении эти области расширяются и могут привести к разрушению конструкции.

## 5.2 АНАЛИЗ ВЛИЯНИЯ УЧЕТА ГЕОМЕТРИЧЕСКОЙ НЕЛИНЕЙНОСТИ НА ПРОЧНОСТЬ ПОЛОГИХ ОБОЛОЧЕК

В Таблице 5.3 показано отношение найденных предельных нагрузок потери прочности при геометрически линейном варианте расчета к тем же значениям при нелинейном варианте расчета.

Так как в ряде случаев при нелинейном расчете значения предельных напряжений достигались на нисходящей ветви графика «нагрузка  $q$  – прогиб  $W$ », которая на практике не реализуется, для этих вариантов в качестве значения  $q_{nlin}$  рассматривается значение нагрузки потери устойчивости  $q_{kr}$ .

Таблица 5.3 – Значения критических нагрузок потери устойчивости и критических значений потери прочности при геометрически нелинейном расчете

Оболочка	Углепластик	Нелинейный вариант			$\frac{q_{lin}}{q_{nlin}}$	$\frac{q_{lin}}{q_{kr}}$
		$q_{nlin}$ (МПа)	Компонента предельных напряжений	$q_{kr}$ (МПа)		
Вариант 1 $k_{\xi} = 238.4$	ЛУ-П/ЭНФБ	0.023	$F_2^+$	<b>0.013</b>	5.61	–
	T300/Ероху	0.030*	$F_2^-$	<b>0.011</b>	11.1	8.58
	M60J/Ероху	0.031	$F_1^-$	<b>0.013</b>	4.90	–
	T300/976	0.032	$F_2^+$	<b>0.013</b>	10.72	–
Вариант 2 $k_{\xi} = 477$	ЛУ-П/ЭНФБ	0.043*	$F_2^+$	<b>0.076</b>	5.83	3.33
	T300/Ероху	0.145	$F_2^+$	<b>0.064</b>	4.54	–
	M60J/Ероху	0.057*	$F_1^-$	<b>0.074</b>	5.17	4.01
	T300/976	0.063*	$F_{12}$	<b>0.078</b>	10.8	8.71
Вариант 3 $k_{\xi} = 953$	ЛУ-П/ЭНФБ	<b>0.406</b>	$F_1^-$	0.569	1.24	–
	T300/Ероху	0.292*	$F_2^+$	<b>0.487</b>	4.48	2.69
	M60J/Ероху	<b>0.413</b>	$F_1^-$	0.521	1.42	–
	T300/976	0.561*	$F_2^+$	<b>0.586</b>	2.41	2.30

Как видно из Таблицы 5.3, при исследовании прочности ортотропных пологих оболочек необходимо учитывать геометрическую нелинейность, иначе предельно допустимые нагрузки будут существенно завышены. Для рассмотренных вариантов конструкций эта разница в значениях может достигать одного порядка.

### **5.3 ПРОЧНОСТЬ И УСТОЙЧИВОСТЬ КВАДРАТНЫХ В ПЛАНЕ ПОЛОГИХ ОБОЛОЧЕК, ПОДКРЕПЛЕННЫХ РЕБРАМИ ЖЕСТКОСТИ**

В качестве примера расчета подкрепленной оболочки рассмотрим пологую оболочку варианта 1 (см. Таблицу 4.2), выполненную из углепластика М60J и подкрепленную ортогональной сеткой ребер постоянной высоты и ширины. Ширина всех ребер равна  $r_i = r_j = 2h$ , а высота  $h^i = h^j = 3h$ . Ребра расположены вдоль осей  $x, y$ , через равные интервалы. Конструкция была подкреплена 18 ребрами (по 9 ребер в каждом направлении), 36 ребрами (по 18 ребер в каждом направлении) и 72 ребрами (по 36 ребер в каждом направлении).

На Рисунке 5.5 приведен фрагмент графика «нагрузка  $q$  – прогиб  $W$ » для оболочки, подкрепленной сеткой ребер 9x9 из углепластика М60J, его будем рассматривать далее более подробно. На графике видно два момента потери устойчивости. Первой критической нагрузке соответствует значение 0.0347 МПа, на графике это точка  $A$ . В этот момент происходит переход на новое равновесное состояние в точку  $B$  (показано пунктиром). Таким образом, оболочка теряет устойчивость посредством «хлопка». Далее, при нагрузке 0.0529 МПа происходит следующий «хлопок» (переход из точки  $C$  в точку  $D$ ), наиболее ярко выраженный в центре конструкции, при этом четвертая и восьмая части деформировались существенно в меньшей степени.

Между первой и второй критическими нагрузками наступает потеря прочности на сжатие вдоль оси  $x$  при нагрузке 0.0479 МПа. Таким образом,

для рассмотренной конструкции потеря устойчивости наступает раньше потери прочности.

На Рисунках 5.6–5.9 приводятся поля прогибов конструкции до и после первой и второй критических нагрузок, отложенные от плоскости и от поверхности оболочки. Чтобы изменения в конструкции были хорошо видны, был взят коэффициент масштабирования прогиба при первой критической нагрузке  $k = 5$ , а при второй критической нагрузке  $k = 1$ .

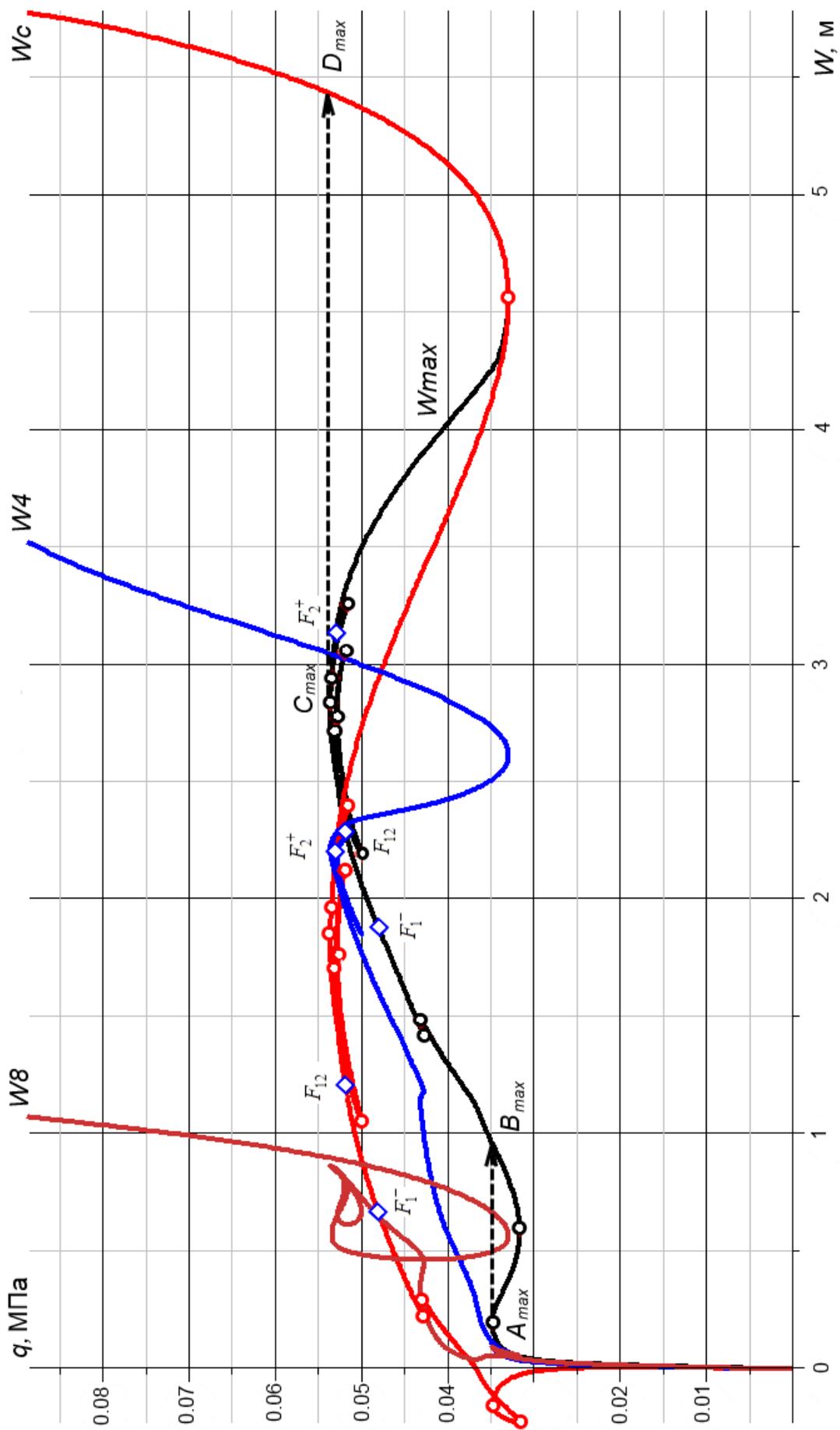


Рисунок 5.5. Фрагмент графика «нагрузка  $q$  – прогиб  $W$ » для полой подкрепленной оболочки варианта 1 из углепластика М60J

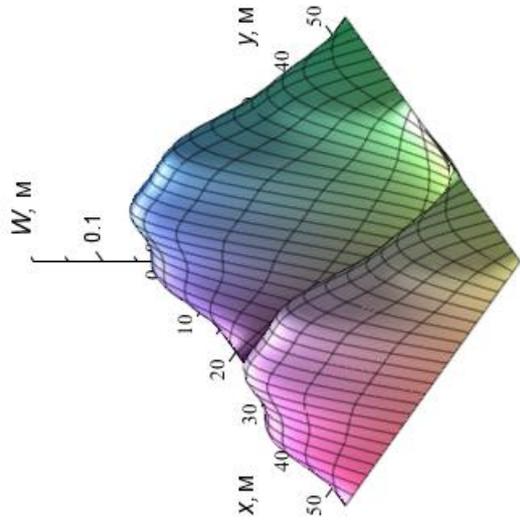


Рисунок 5.6. Поле прогибов конструкции до первой критической нагрузки для полой подкрепленной оболочки варианта 1 из углепластика М60J

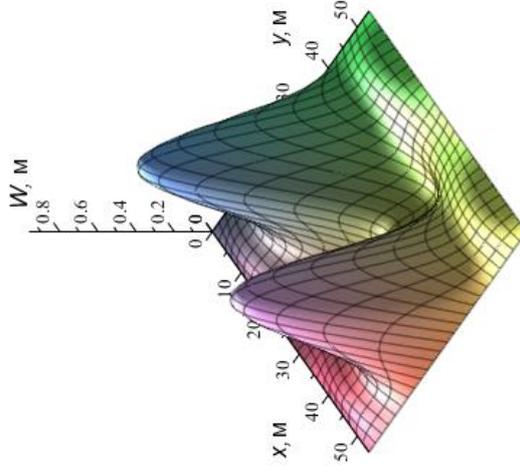
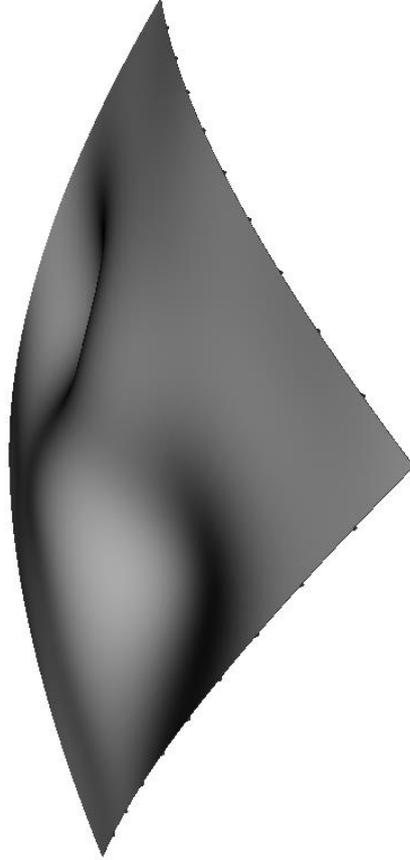
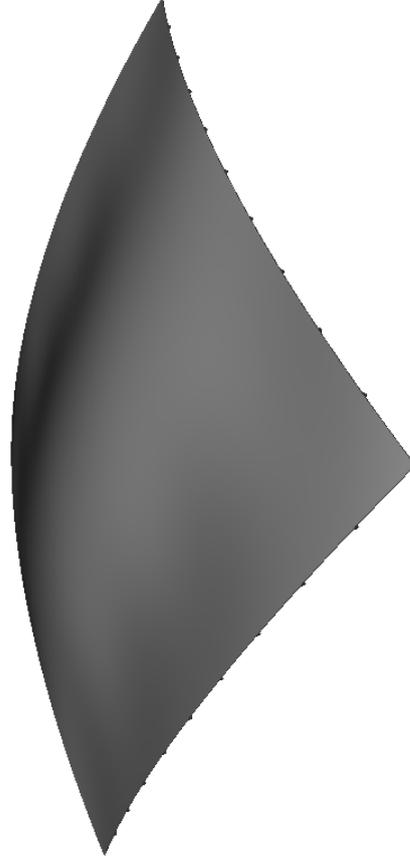


Рисунок 5.7. Поле прогибов конструкции после первой критической нагрузки для полой подкрепленной оболочки варианта 1 из углепластика М60J



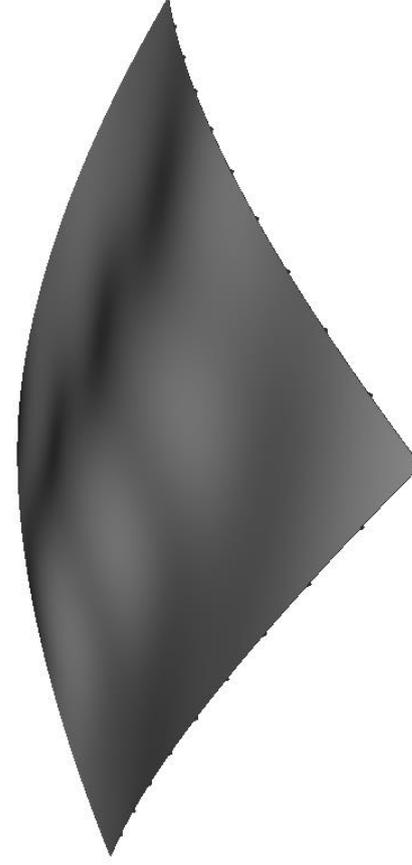
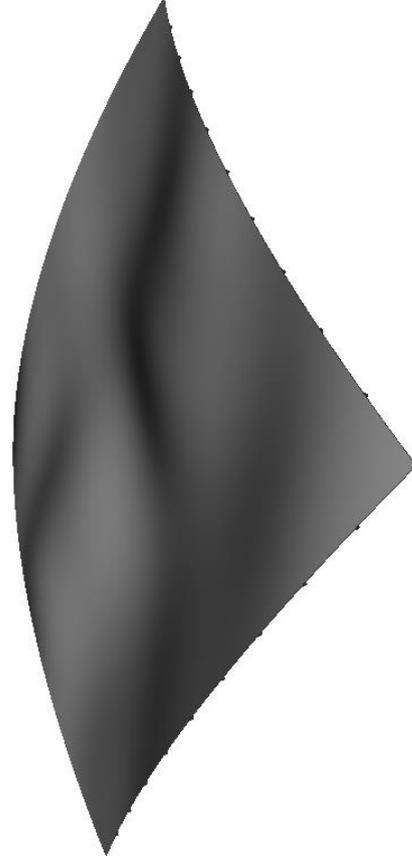
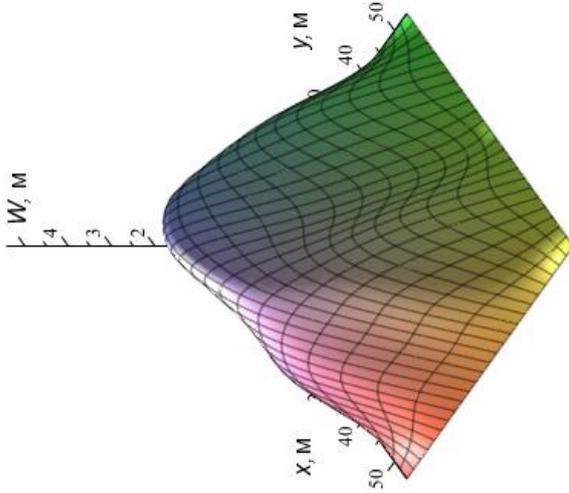
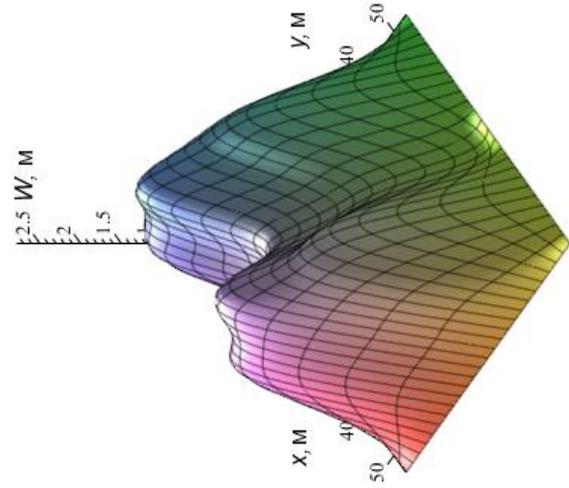


Рисунок 5.8. Поле прогибов конструкции до второй критической нагрузки для полой подкрепленной оболочки варианта 1 из углепластика М60J

Рисунок 5.9. Поле прогибов конструкции после второй критической нагрузки для полой подкрепленной оболочки варианта 1 из углепластика М60J

На Рисунках 5.10а, 5.10б показаны поля компонент напряжений  $\sigma_x, \sigma_y, \tau_{xy}$  до и после первой потери устойчивости при нагрузке 0.0347 МПа соответственно.

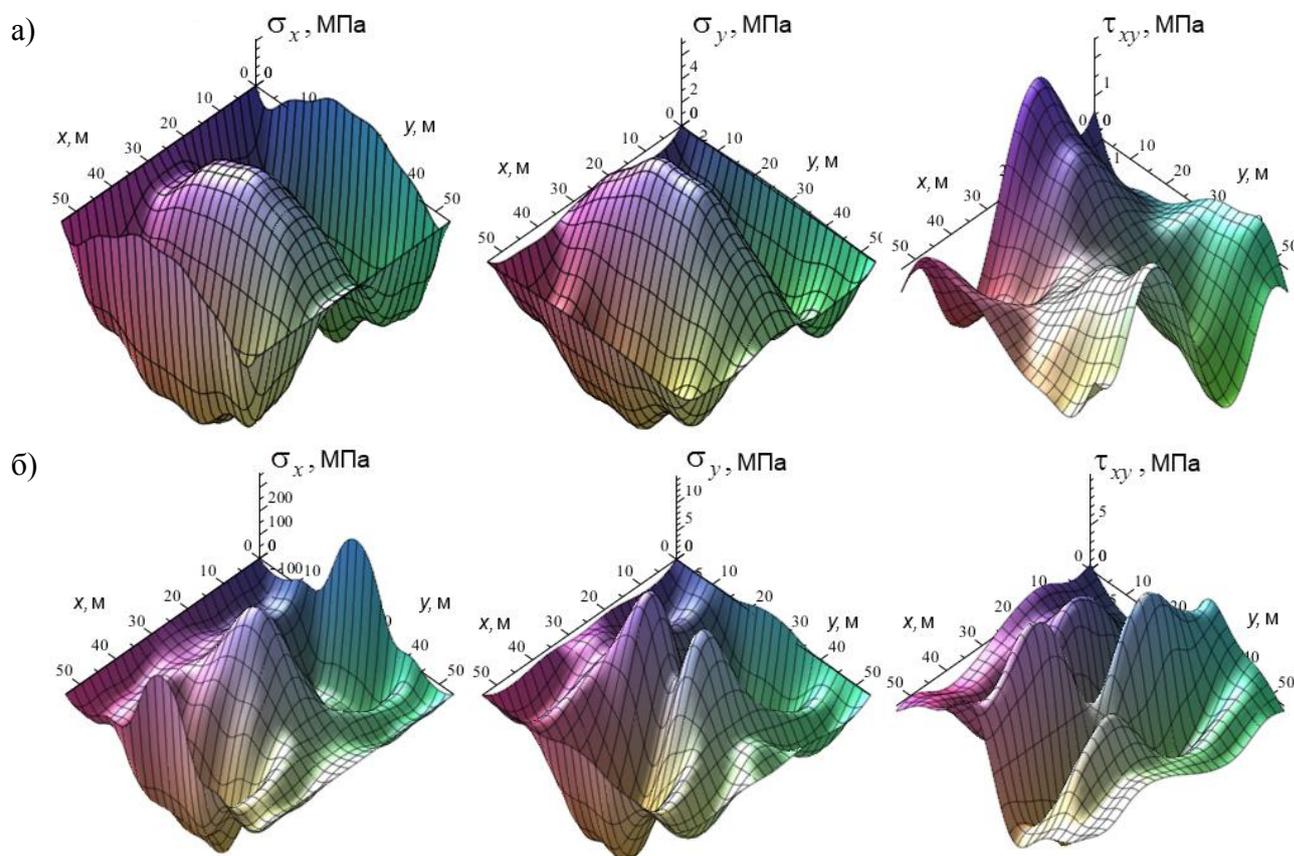


Рисунок 5.10. Поля компонент напряжений  $\sigma_x, \sigma_y, \tau_{xy}$  до и после первой потери устойчивости подкрепленной полой оболочкой

Для рассматриваемого варианта полой подкрепленной оболочки было проведено сравнение с аналогичной ей рассматриваемой ранее гладкой оболочкой. Объединенный график «нагрузка  $q$  – прогиб  $W$ » показан на Рисунке 5.11. Индексом 1 отмечены кривые и значения для гладкой оболочки, индексом 2 – для оболочки, подкрепленной сеткой ребер 9x9.

Также было исследовано влияние наличия подкрепления конструкции на значения критических нагрузок потери устойчивости и предельных нагрузок потери прочности при разном количестве ребер жесткости (Таблица 5.4).

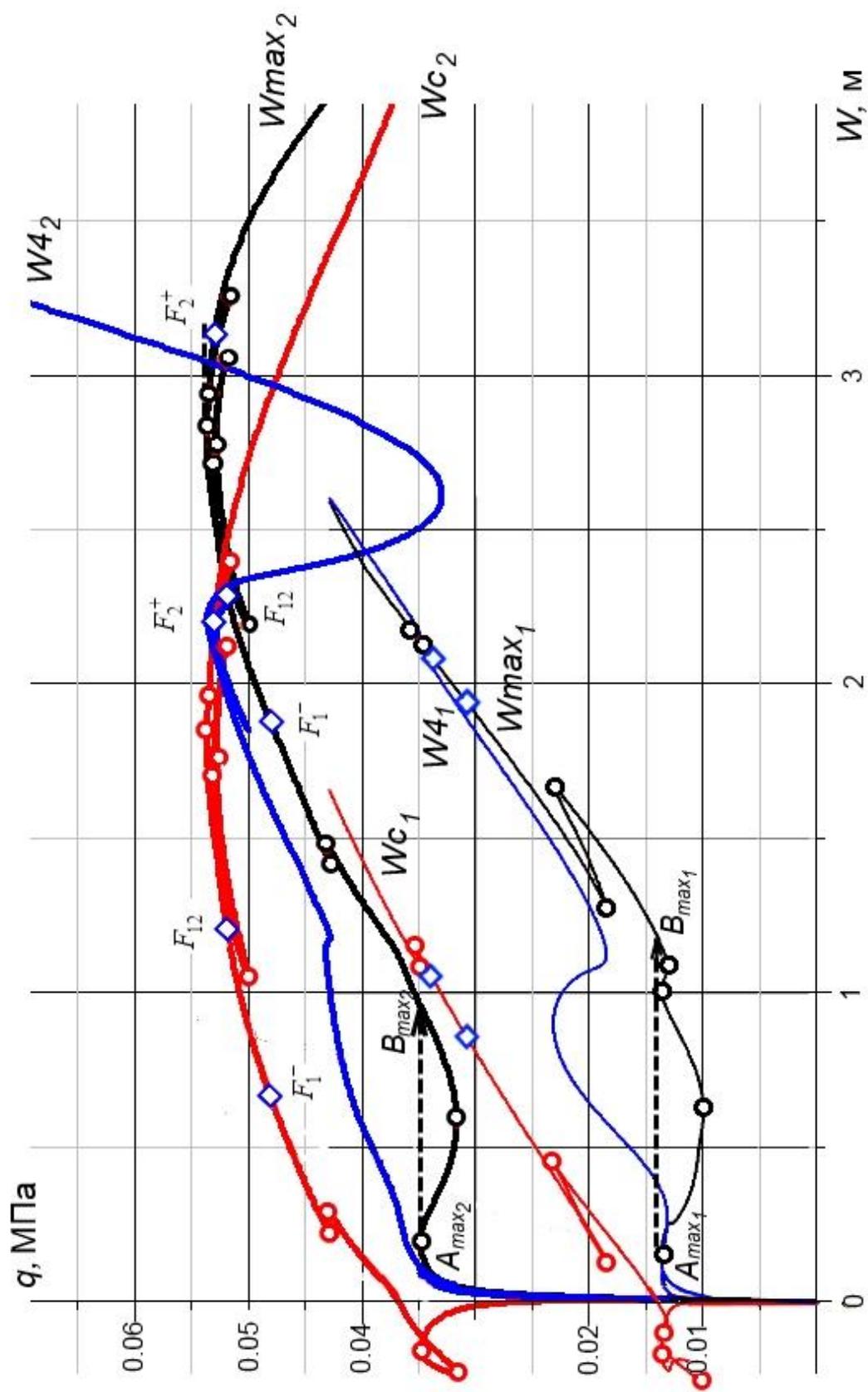


Рисунок 5.1.1. Сравнение графиков «нагрузка  $q$  – прогиб  $W$ » для полой гладкой и подкрепленной оболочки варианта 1 из углепластика М60J

Таблица 5.4 – Сравнение значений критических нагрузок для полой оболочки варианта 1 из углепластика М60J при разном количестве ребер жесткости

Оболочка	$q_{kr}$ , (МПа)	$q_{nlin}$ , (МПа)	Компонента предельных напряжений
Вариант 1, гладкая	0.0135	0.0308	$F_1^-$
Вариант 1, подкреплена ребрами жесткости 9x9	0.0347	0.0479	$F_1^-$
Вариант 1, подкреплена ребрами жесткости 18x18	0.0520	0.0605* (0.0639)	$F_1^-$
Вариант 1, подкреплена ребрами жесткости 36x36	0.0788	0.0825* (0.0883)	$F_1^-$

Как видно из представленных данных, подкрепление оболочки ребрами жесткости дает существенное увеличение значения критической нагрузки потери устойчивости (9x9 ребер – в 2.57 раза, 18x18 ребер – в 3.85 раза, 36x36 ребер – в 5.84 раза). Разница в значениях предельных нагрузок потери прочности несколько меньше, но тоже может играть существенное значение (9x9 ребер – в 1.56 раза, 18x18 ребер – в 2.07 раза, 36x36 ребер – в 2.87 раза).

#### 5.4 ПРОЧНОСТЬ И УСТОЙЧИВОСТЬ ПАНЕЛЕЙ ЦИЛИНДРИЧЕСКИХ ОБОЛОЧЕК

Ранее были рассмотрены панели цилиндрических оболочек при геометрически линейном варианте расчета. Теперь рассмотрим те же конструкции (см. Таблицу 4.3) при учете геометрической нелинейности.

На Рисунке 5.12 приведен фрагмент графика «нагрузка – прогиб» для рассматриваемой цилиндрической панели варианта 3 из углепластика ЛУ-П/ЭНФБ.

Когда оболочечная конструкция имеет достаточно большие размеры, и при этом достаточно тонкая, она редко теряет устойчивость сразу одним большим хлопком. Происходят локальные скачкообразные деформации в различных частях конструкции, это так называемые локальные потери

устойчивости. Оболочка может пытаться по несколько раз выгнуться то в одну, то в другую сторону, прежде чем произойдет один большой хлопок. Этот процесс можно отследить, наблюдая за кривыми «нагрузка – прогиб» в разных характерных точках оболочки (например, центр и четверть конструкции могут вести себя кардинально противоположно). Особый интерес представляет случай, когда в процессе нагружения происходит несколько небольших локальных потерь устойчивости подряд. На графике это показано пунктирными линиями. Одновременно с графиком будем наблюдать за полем прогибов конструкции (Рисунки 5.13а–5.13м, коэффициент масштабирования прогиба 2)

При нагружении оболочки процесс происходит следующим образом: сначала достигается нагрузка 0.0066 МПа (Точка *A*, Рисунок 5.13а,б), происходит переход на новое равновесное состояние (Точка *B* Рисунок 5.13в,г). Как видно из рисунков, в этот момент центр оболочки неожиданно выгнулся в обратную сторону, а в четвертях произошло резкое увеличение прогиба. Далее идет небольшое увеличение нагрузки до 0.0109 МПа (Точка *C*, Рисунок 5.13д,е) и переход на новое равновесное состояние в точку *D* (Рисунок 5.13ж,з). Аналогичная ситуация происходит при достижении точки *E* (Рисунок 5.13и,к). Если же происходит процесс разгрузки конструкции, то на кривой «нагрузка-прогиб» задействуются нижние критические нагрузки, и переходы на новые равновесные состояния происходят через них.

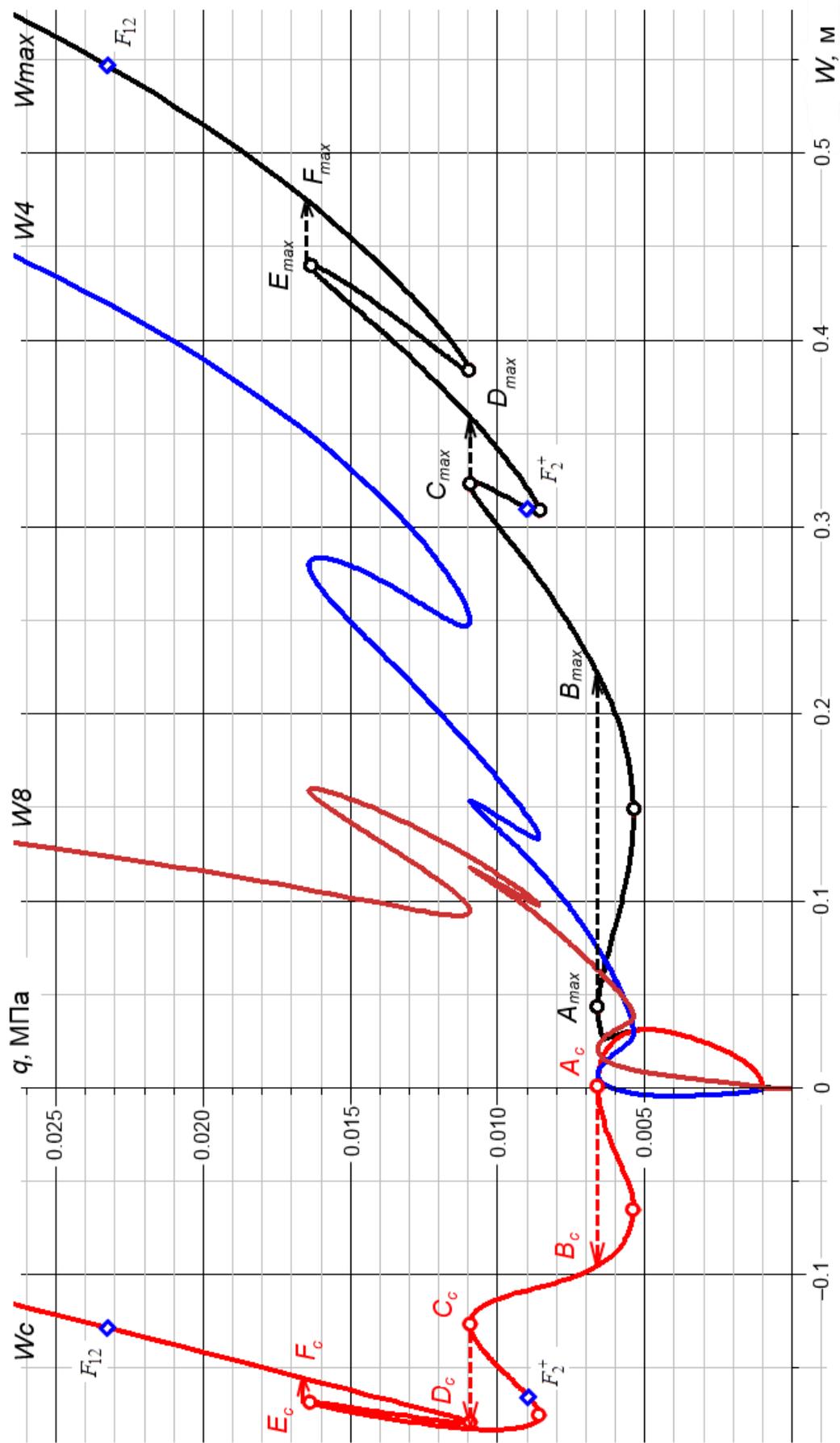
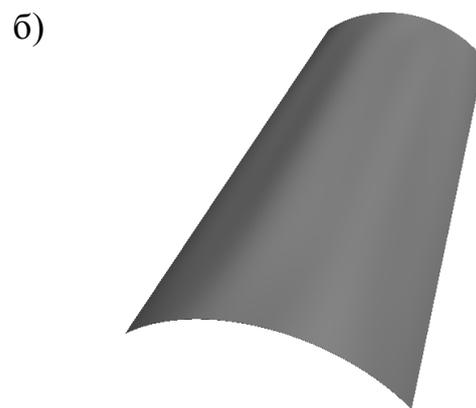
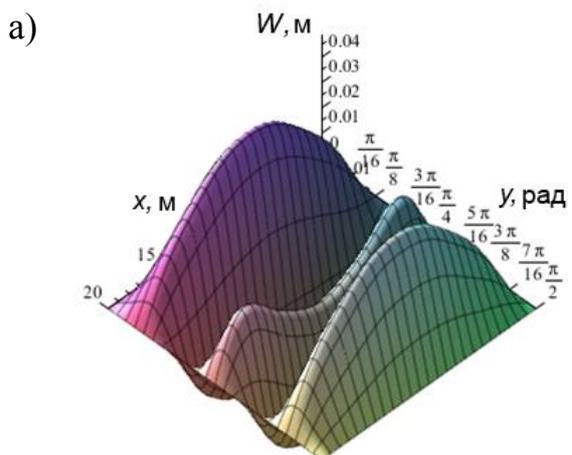
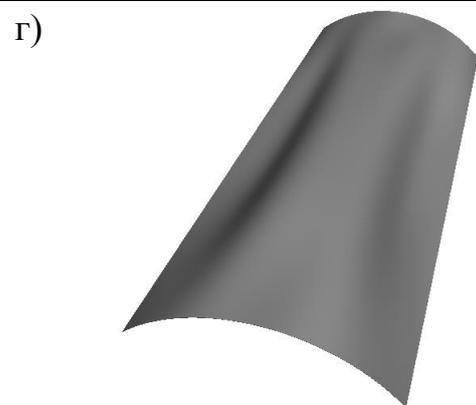
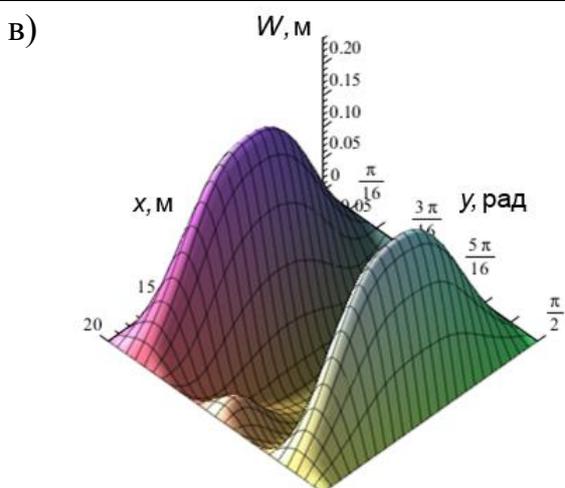


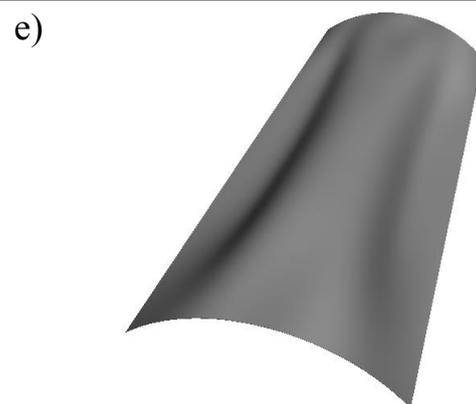
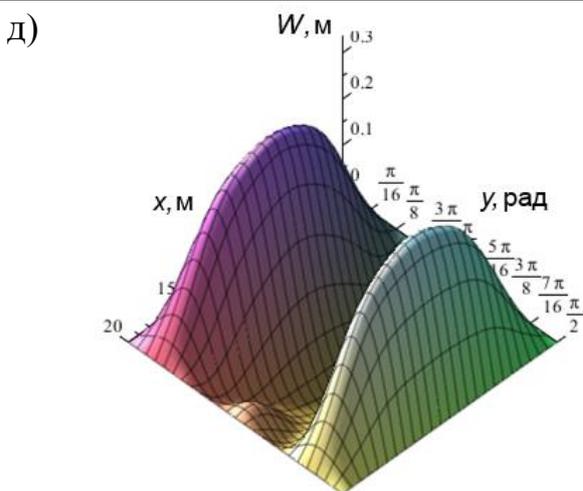
Рисунок 5.12. Фрагмент графика «нагрузка  $q$  – прогиб  $W$ » для панели цилиндрической оболочки варианта 3 из углепластика ЛУ-П/ЭНФБ



Поле прогибов при первой критической нагрузке, до потери устойчивости (Точка А, 0.0066 МПа)

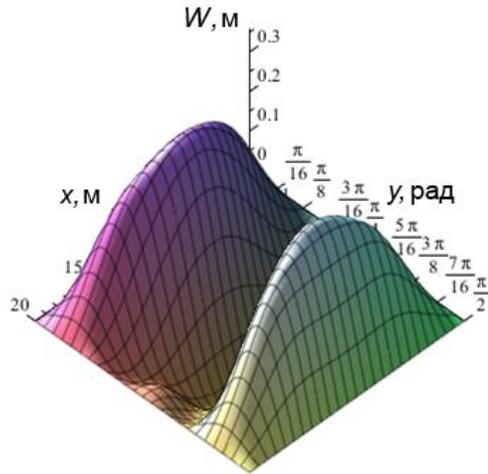


Поле прогибов при первой критической нагрузке, после потери устойчивости (Точка В, 0.0066 МПа)



Поле прогибов при второй критической нагрузке, до потери устойчивости (Точка С, 0.0109 МПа)

ж)

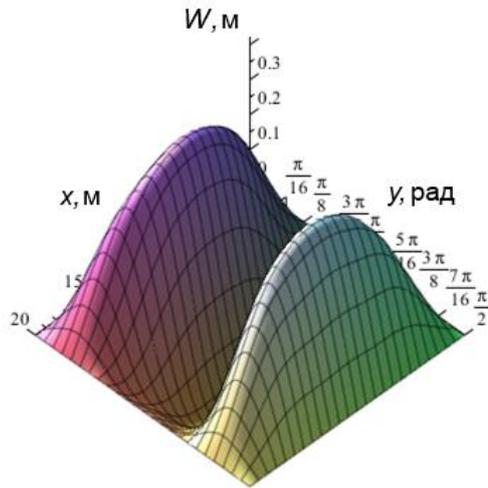


з)



Поле прогибов при второй критической нагрузке, после потери устойчивости (Точка  $D$ , 0.0109 МПа)

и)

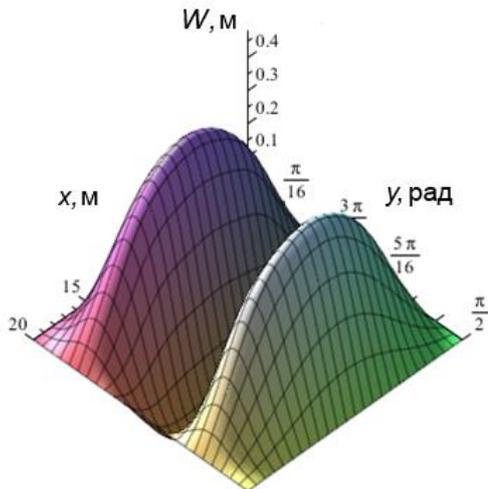


к)



Поле прогибов при третьей критической нагрузке, до потери устойчивости (Точка  $E$ , 0.0164 МПа)

л)



м)



Поле прогибов при третьей критической нагрузке, после потери устойчивости (Точка  $F$ , 0.0164 МПа)

Рисунок 5.13. Последовательная серия полей прогибов до и после локальных потерь устойчивости

Также следует отметить момент потери прочности данной оболочки, отмеченный синими точками после потери устойчивости. Здесь одна из компонент напряжений достигает своего предельного значения на нисходящей ветви. Т.к. нисходящая ветвь на практике не реализуется, а при потере устойчивости происходит переход на новое равновесное состояние, примем за нагрузку потери прочности вторую критическую нагрузку. Покажем поля разных компонент напряжений в этот момент (Рисунок 5.14). Детальное изучение полей распределения напряжений позволит в дальнейшем определять очаги их концентрации и, например, усиливать эту часть конструкции ребрами жесткости.

Как видно из Рисунков 5.14, конструкция теряет прочность на растяжение в направлении оси  $y$ . В данном случае достижение предельных значений напряжений происходит неожиданно, что может нести более разрушительные последствия, чем при плавном изменении.

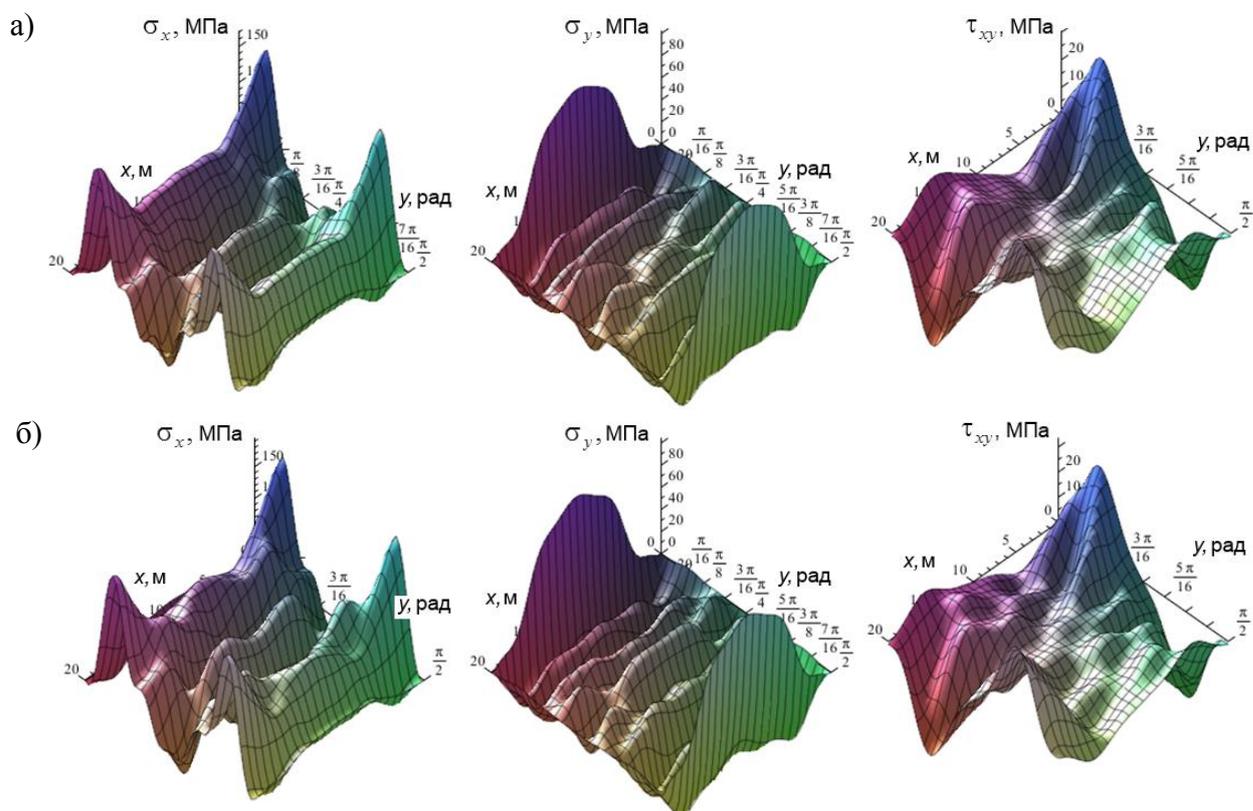


Рисунок 5.14. Поля компонент напряжений  $\sigma_x, \sigma_y, \tau_{xy}$  до и после достижения предельных значений одновременно с локальной потерей устойчивости

В Таблице 5.5 показаны результаты расчета для всех исследованных вариантов цилиндрических панелей.

Таблица 5.5 Значения критических нагрузок потери прочности и нагрузок потери устойчивости для рассматриваемых панелей цилиндрических оболочек

Оболочка	Углепластик	Линейный вариант		Нелинейный вариант			$\frac{q_{lin}}{q_{nlin}}$
		$q_{lin}$ (МПа)	$F$	$q_{nlin}$ (МПа)	$F$	$q_{kr}$ (МПа)	
Вариант 1	<i>ЛУ-П/ЭНФБ</i>	0.054	$F_2^+$	0.025	$F_2^+$	0.014	2.21
	<i>T300/Ероху</i>	0.091	$F_2^-$	0.072	$F_2^-$	0.151	1.26
	<i>M60J/Ероху</i>	0.053	$F_2^+$	0.033	$F_2^+$	0.072	1.59
	<i>T300/976</i>	0.108	$F_2^+$	0.045	$F_2^+$	0.194	2.42
Вариант 2	<i>ЛУ-П/ЭНФБ</i>	0.059	$F_2^+$	0.063	$F_2^+$	0.443	0.94
	<i>T300/Ероху</i>	0.105	$F_2^-$	0.089	$F_2^-$	0.377	1.18
	<i>M60J/Ероху</i>	0.055	$F_2^+$	0.167	$F_2^-$	0.539	0.33
	<i>T300/976</i>	0.117	$F_2^+$	0.095	$F_2^+$	0.465	1.23
Вариант 3	<i>ЛУ-П/ЭНФБ</i>	0.053	$F_2^+$	0.009	$F_2^+$	<b>0.007</b>	5.90
	<i>T300/Ероху</i>	0.086	$F_2^-$	0.189	$F_2^-$	<b>0.006</b>	0.45
	<i>M60J/Ероху</i>	0.051	$F_2^+$	0.060	$F_{12}$	<b>0.005</b>	0.85
	<i>T300/976</i>	0.105	$F_2^+$	0.016	$F_{12}$	0.007	6.47
Вариант 4	<i>ЛУ-П/ЭНФБ</i>	0.054	$F_2^+$	<b>0.034</b>	$F_2^+$	0.632	1.59
	<i>T300/Ероху</i>	0.105	$F_2^-$	<b>0.072</b>	$F_2^-$	0.445	1.46
	<i>M60J/Ероху</i>	0.055	$F_2^+$	<b>0.043</b>	$F_2^+$	0.250	1.28
	<i>T300/976</i>	0.116	$F_2^+$	<b>0.065</b>	$F_2^+$	0.566	1.78

На Рисунке 5.15 показана гистограмма значений предельно допустимых нагрузок для всех материалов и всех вариантов панелей.

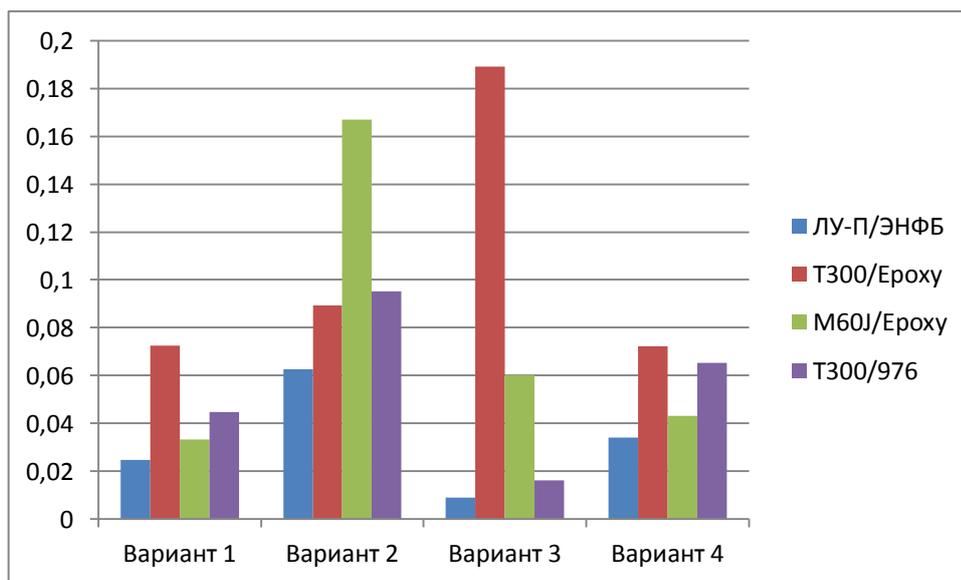


Рисунок 5.15. Гистограмма значений предельно допустимых нагрузок для всех материалов и всех вариантов панелей

В большинстве исследованных случаев первыми предельные значения достигались компонентой напряжений вдоль оси  $y$  на растяжение, реже  $y$  на сжатие и сдвиг в плоскости.

Следует отметить, что для цилиндрических панелей 1, 2 и 4 вариантов характерно следующее поведение: сначала при очень малой нагрузке (порядка 0,005 МПа) происходит постепенное продавливание центра оболочки (кривая нагрузка-прогиб в центре неожиданно начинает развиваться в направлении, близком к горизонтальному), далее кривая снова начинает расти, происходит потеря прочности, а затем и потеря устойчивости.

Для многих вариантов также характерно образование большой петли на графике «нагрузка – прогиб», что и говорит о потере устойчивости.

## 5.5 ПРОЧНОСТЬ И УСТОЙЧИВОСТЬ ПАНЕЛЕЙ КОНИЧЕСКИХ ОБОЛОЧЕК

Наиболее широкое применение конические оболочки находят в авиационной технике и машиностроении. В области исследования

устойчивости конических оболочек одной из первых была работа Х.М. Муштари [92]. Также здесь необходимо отметить вклад Н.А. Алумяэ, Э.И. Григолюка, А.В. Саченкова и др. В работе [27] задача устойчивости конических оболочек была сведена к отысканию собственных значений системы дифференциальных уравнений в частных производных с переменными коэффициентами, и было показано, что решение необходимо искать приближенно.

Одним из применяемых ранее подходов к решению данной проблемы было сведение конической оболочки к цилиндрической. Радиус цилиндрической оболочки принимался как среднее между большим и малым радиусами конической оболочки. Данная методика хорошо себя показала при расчете оболочек с малым углом конусности [105], но при его увеличении специфичность строения конической оболочки начинает сильнее сказываться на ее устойчивости, и такой подход становится неприемлемым.

По сравнению с расчетом цилиндрических оболочек, исследовать такие конструкции труднее. Это проявляется, прежде всего, в усложнении геометрических соотношений (1.9), если подставить в них формулы кривизн и параметров Ляме из Таблицы 1.1. Таким образом, из-за наличия в формулах

$B = x \cdot \sin \theta$  и  $k_y = \frac{ctg \theta}{x}$  зависимости от координаты  $x$ , сложность системы (2.4) существенно возрастает.

К недавним работам в данной области следует отнести статью F. Shadmehri, S.V. Ноа и M. Hojjati [160], в которой рассматриваются замкнутые конические оболочки из композиционных материалов, но математическая модель строится на теории первого порядка, а также не учитывается геометрическая нелинейность.

Схематичное изображение панели конической оболочки показано на Рисунке 5.16, а параметры рассматриваемых конструкций в Таблице 5.6.

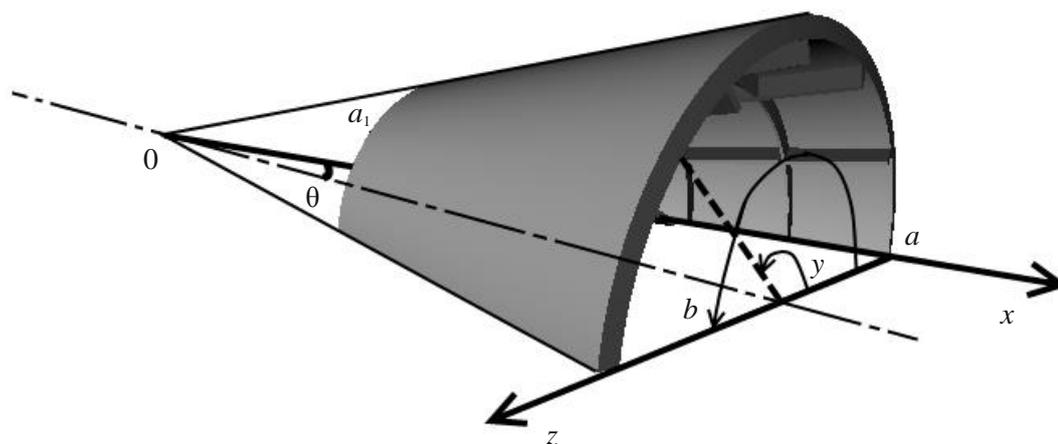


Рисунок 5.16. Схематичное изображение панели конической оболочки и принятая локальная система координат

Таблица 5.6 – Параметры рассматриваемых вариантов конических панелей

Параметр	Вариант 1	Вариант 2	Вариант 3
$a_1$ – начало оболочки вдоль оси $x$ , м	5	5	5
$a$ – конец оболочки вдоль оси $x$ , м	25	25	25
$\theta$ – угол конусности, рад	0.78	0.78	0.78
$b$ – угол разворота, рад	$\pi$	$\pi$	$\pi$
$h$ – толщина оболочки, м	0.01	0.01	0.01
Материал	оргстекло, изотропный	сталь, изотропный	углепластик Т300/976, ортотропный
Нагрузка от собственного веса, МПа	0.00012	0.00078	0.00015

На Рисунке 5.17 приводится график «нагрузка  $q$  – прогиб  $W$ » для конической ортотропной панели варианта 3. Как видно из графика, конструкция не теряет устойчивость, однако, при нагрузке 0.023 МПа происходит потеря прочности.

На Рисунках 5.18а,б показано поле прогибов, отложенное от плоскости в системе Maple в момент достижения предельной нагрузки потери прочности (0.023 МПа), а на Рисунке 5.18в показано то же поле прогибов, но

отложенное от поверхности оболочки. Чтобы изменения в конструкции были хорошо видны, был взят коэффициент масштабирования прогиба  $k = 2$ .

Значения критических нагрузок потери устойчивости и предельных нагрузок потери прочности, а также соответствующих им максимальных значений прогибов для всех рассматриваемых вариантов конструкций показаны в Таблице 5.7.

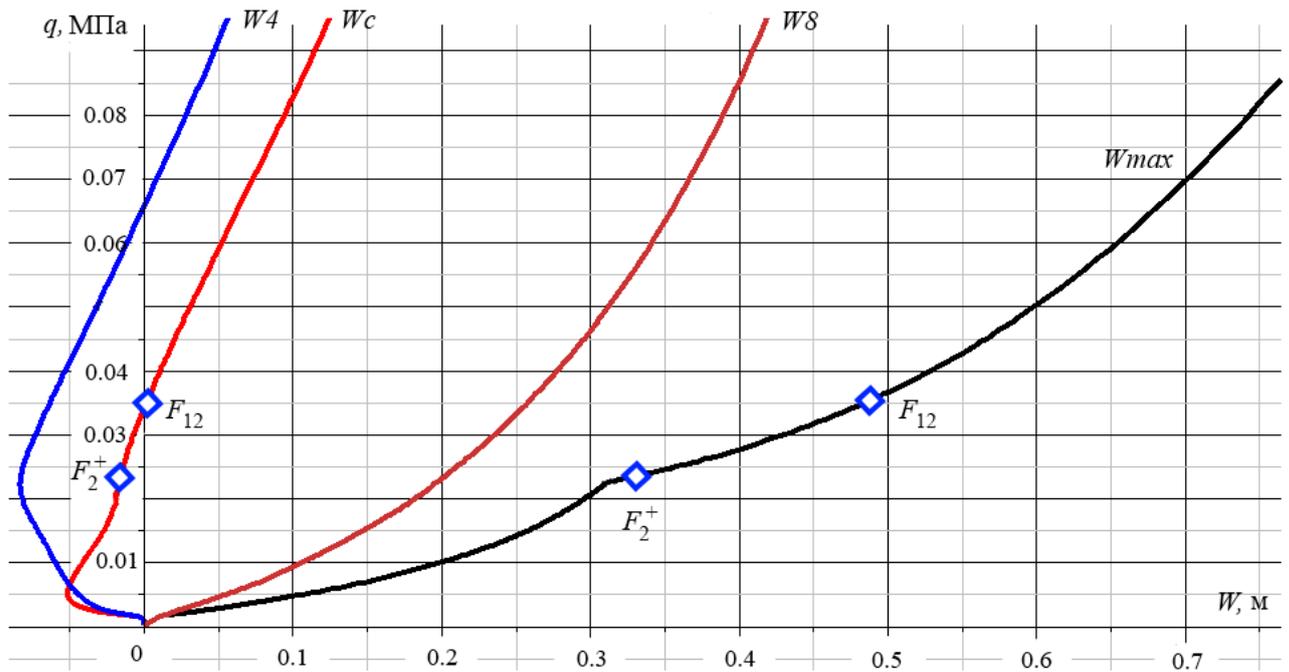
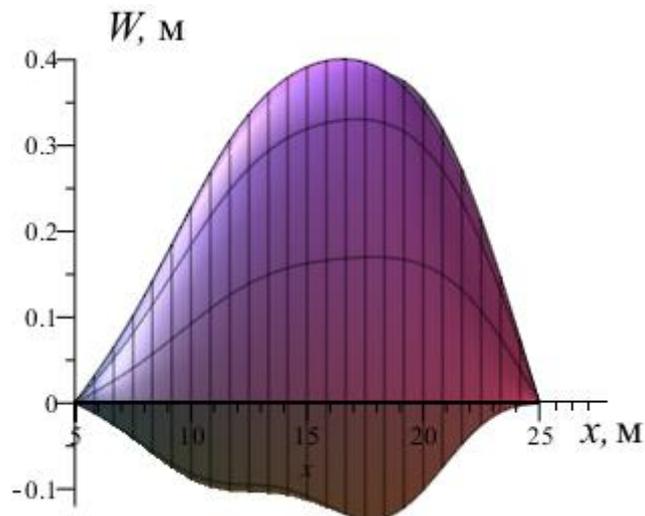
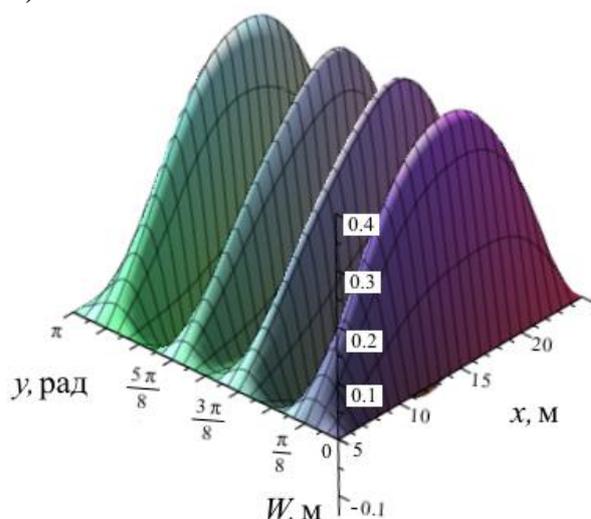


Рисунок 5.17. График «нагрузка  $q$  – прогиб  $W$ » для конической панели варианта 3

a)



б)



в)

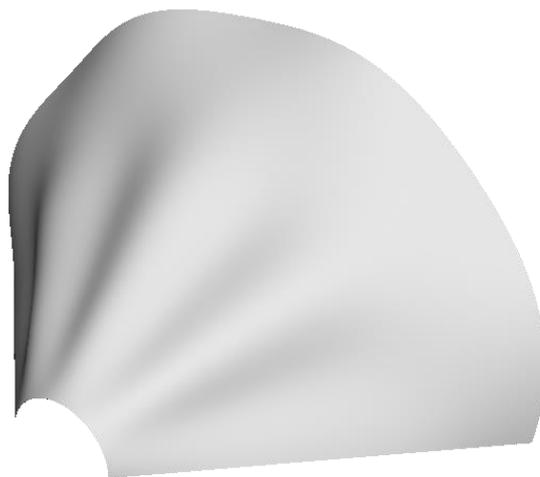


Рисунок 5.18. Поле прогибов оболочки варианта 3 в момент потери прочности при нагрузке 0.023 МПа

Для рассмотренной ортотропной конической панели (вариант 3), в силу геометрии такой конструкции, распределение значений прогибов и напряжений по области оболочки происходит неравномерно со смещением вмятин к более широкой части оболочки. Для оболочек, теряющих устойчивость, при потере устойчивости число вмятин может меняться.

Таблица 5.7 – Полученные значения для рассматриваемых вариантов панелей конических оболочек

Параметр	Панели конических оболочек		
	Вар.1, оргстекло	Вар.2, сталь	Вар.3, углепл.Т300/976
Критическая нагрузка $q_{kr}$ , МПа	0.0152	0.2847	–
Максимальный прогиб при $q_{kr}$ , м	0.971	0.3515	–
Предельная нагрузка $q_{nlin}$ , МПа	0.0113	0.2847	0.023
Нагрузка от собственного веса, МПа	0.000118	0.00078	0.00015
Компонента пред. напряжений	$\sigma_i$	$\sigma_i$	$F_2^+$

Сравнение с результатами расчетов аналогичных по геометрии, но изотропных конструкций, показало преимущество современных композиционных материалов по комбинации прочностных характеристик и их веса. Рассмотренные панели конических оболочек из изотропных материалов (оргстекло, сталь) теряли устойчивость, а панель из углепластика устойчивость не потеряла. Потеря прочности для такой панели наступила при нагрузке, в два раза превышающей нагрузку потери прочности для оболочки из оргстекла.

## 5.6 ЗАКРИТИЧЕСКОЕ ПОВЕДЕНИЕ ОБОЛОЧЕК

Когда оболочечная конструкция имеет достаточно большие размеры, и при этом достаточно тонкая, она редко теряет устойчивость сразу одним большим хлопком. Происходят локальные скачкообразные деформации в различных частях конструкции, это так называемые локальные потери устойчивости. Оболочка может пытаться по несколько раз выгнуться то в одну, то в другую сторону, прежде чем произойдет один большой хлопок. Исследование этого явления может представлять большой научный интерес.

Этот процесс можно отследить, наблюдая за кривыми «нагрузка – прогиб» в разных характерных точках оболочки (например, центр и четверть конструкции могут вести себя кардинально противоположно). Особого внимания заслуживает случай, когда в процессе нагружения происходит несколько небольших локальных потерь устойчивости подряд. В данной работе это было показано для панели цилиндрической оболочки из углепластика (Рисунки 5.13а–5.13м, коэффициент масштабирования прогиба 2). При нагружении оболочки процесс происходит следующим образом: сначала достигается нагрузка 0.0066 МПа (Точка *A*, Рисунок 5.13а,б), происходит переход на новое равновесное состояние (Точка *B* Рисунок 5.13в,г). Как видно из рисунков, в этот момент центр оболочки неожиданно выгнулся в обратную сторону, а в четвертях произошло резкое увеличение прогиба. Далее идет небольшое увеличение нагрузки до 0.0109 МПа (Точка *C*, Рисунок 5.13д,е) и переход на новое равновесное состояние в точку *D* (Рисунок 5.13ж,з). Аналогичная ситуация происходит при достижении точки *E* (Рисунок 5.13и,к). Если же происходит процесс разгрузки конструкции, то на кривой «нагрузка-прогиб» задействуются нижние критические нагрузки, и переходы на новые равновесные состояния происходят через них.

Как показали проведенные исследования, такое поведение характерно для многих вариантов панелей цилиндрических и конических оболочек перед общей потерей устойчивости. При многократной местной потере

устойчивости образуются мелкие вмятины в различных частях оболочки, а места этих вмятин перемещаются по оболочке по мере деформирования.

## 5.7 ДОСТОВЕРНОСТЬ ПОЛУЧЕННЫХ РЕЗУЛЬТАТОВ

Для обоснования достоверности было проведено сравнение результатов расчета тестовых задач с результатами, полученными другими авторами с использованием других алгоритмов и методик расчета.

Достаточно мало публикаций посвящено исследованиям устойчивости панелей цилиндрических и конических оболочек из ортотропных материалов, и в рассматриваемой постановке задачи проведенных ранее исследований в известной литературе найти не удалось. Поэтому проведем сравнение результатов расчета цилиндрической панели из изотропного материала (стали). Для этого во входных данных программы примем  $E_1 = E_2 = 2.1 \cdot 10^5$  МПа,  $\mu_1 = \mu_2 = 0.3$ ,  $G_{12} = G_{13} = G_{23} = 0.807 \cdot 10^5$  МПа. На Рисунке 5.19 показано наложение графиков «нагрузка  $q$  – прогиб  $W$ » для панели стальной цилиндрической оболочки с параметрами  $a = 20$  м, угол разворота  $b = \pi/2$  рад, радиус кривизны  $R = 5.4$  м, толщина оболочки  $h = 0.01$  м.

Сравнение проведено с результатами, полученными Д. А. Барановой в работе [62], на графике это кривые с точками.

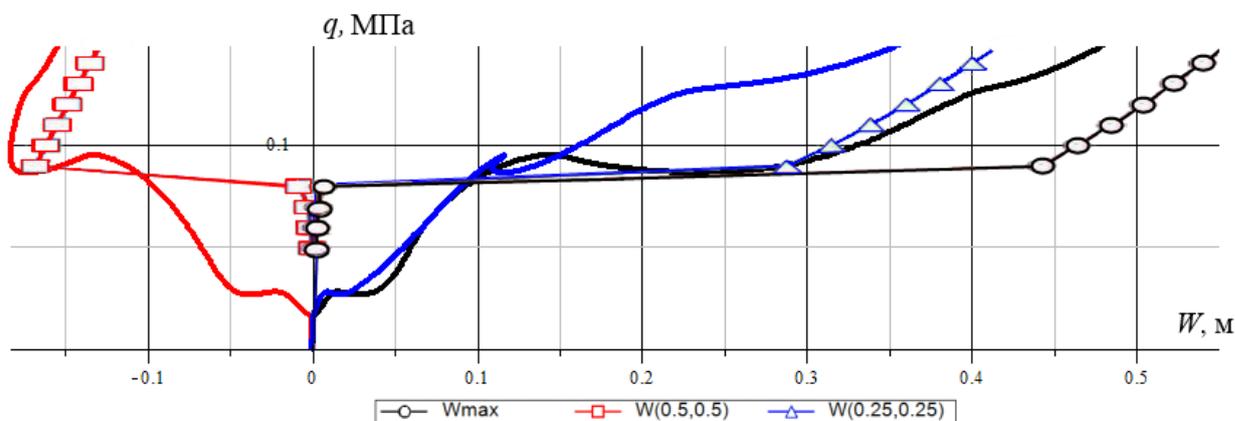


Рисунок 5.19. Сравнение с программным комплексом ShellCalc [62]

Как видно из графика, кривые прогиба в разных частях конструкции, полученные по разным алгоритмам, носят схожий характер. Также

практически совпадает нагрузка потери устойчивости. В отличие от результатов Д. А. Барановой, помимо общей потери устойчивости удалось выявить также и небольшую местную потерю устойчивости при нагрузке 0.028 МПа, и найти нижнюю критическую нагрузку.

В работе А. А. Трещева и М. Б. Шерешевского [127] было проведено исследование полой ортотропной оболочки, квадратной в плане под действием равномерно-распределенной поперечной нагрузки, и проведено сравнение с программным комплексом ANSYS.

Оболочка имеет жесткое закрепление контура. После перехода к системе координат и входным параметрам, принятым в данной работе, размеры рассматриваемой конструкции были приняты  $a = b = 1.54$  м, толщина оболочки  $h = 0.1$  м, радиусы главных кривизн  $R_1 = R_2 = 5.68$  м. В качестве материала для оболочки был принят графит 16К9-27/АТJ-S. Исследовалось напряженно-деформированное состояние оболочки при внешней нагрузке  $q = 0.0045$  МПа.

При заданной нагрузке было проведено наложение кривых прогиба вдоль оси  $x$  при  $y = b/2$  (Рисунок 5.20), а также наложение кривых нормальных напряжений  $\sigma_x$  (Рисунок 5.21). Синие кривые получены А. А. Трещевым и М. Б. Шерешевским (пунктирная кривая – в ПК ANSYS).

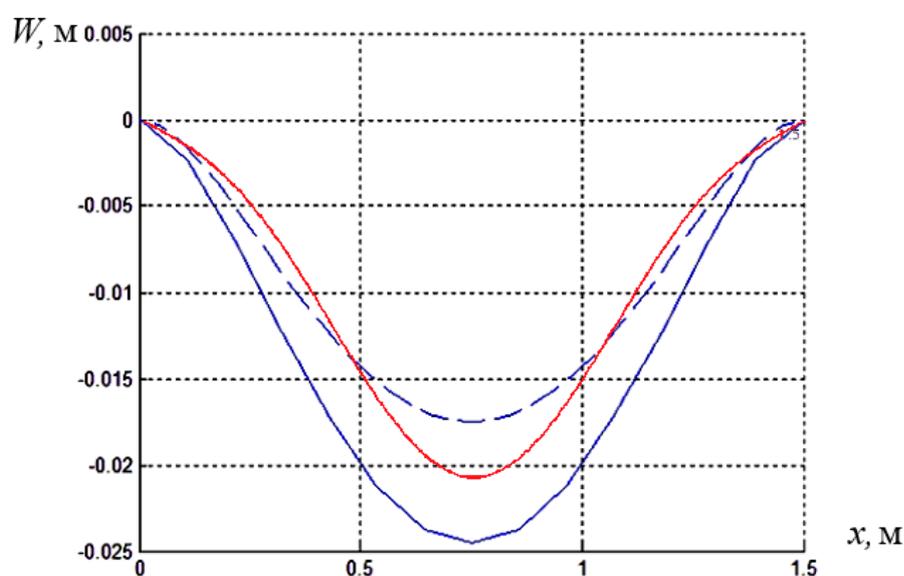


Рисунок 5.20. Сравнение кривых прогиба при нагрузке  $q = 0.0045$  МПа

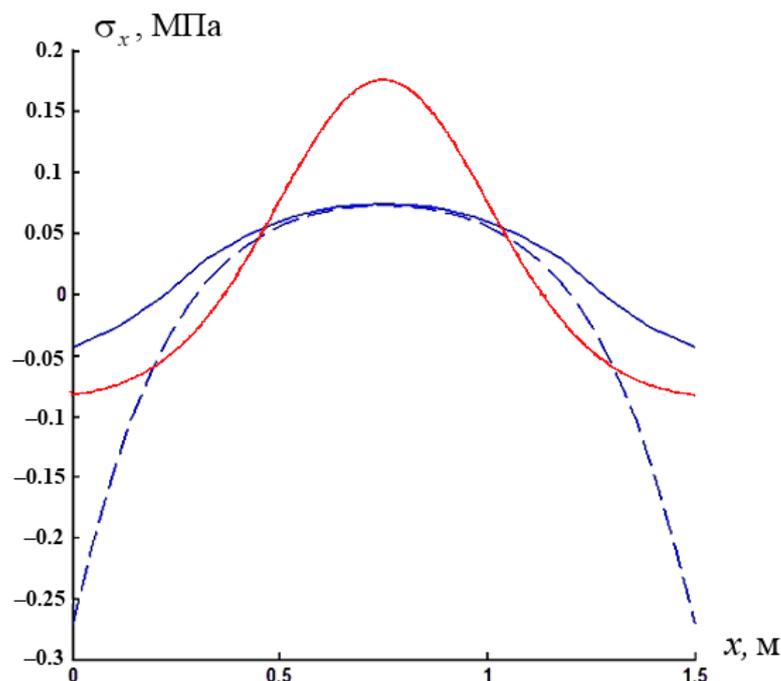


Рисунок 5.21. Сравнение кривых напряжений  $\sigma_x$  при нагрузке  $q = 0.0045$  МПа

В работе А. А. Трещева и М. Б. Шерешевского не учитываются поперечные сдвиги, в данной же работе они учитываются, т.е. оболочка имеет большее число степеней свободы, в связи с этим значения напряжений в центре конструкции больше.

Как видно из представленных рисунков, данные, полученные разными авторами по разным алгоритмам с использованием разных программных комплексов, имеют хорошую согласованность, что говорит об их достоверности.

Сравнение результатов с натурным экспериментом провести не удалось в связи с отсутствием таких экспериментов для ортотропных оболочек. Однако, имеются результаты экспериментов по исследованию устойчивости оболочек из оргстекла, проведенные в Уральском научном центре АН СССР и описанные в работе В. И. Климанова и С. А. Тимашева [71]. В результате проведения испытаний над 18 образцами пологой квадратной в плане оболочки, параметры которой  $a = b = 600h$ ,  $R_1 = R_2 = 1510h$ ,  $h = 0.09$  м, были получены критические нагрузки, которые дали разброс от  $0.411 \cdot 10^{-2}$  МПа до

$0.703 \cdot 10^{-2}$  МПа. Наблюдалось первоначальное появление вмятин, которые при дальнейшем нагружении развивались до глубины  $0.55 h$ . В среднем, при нагрузке  $q = 0.195 \cdot 10^{-2}$  МПа прогибы центров моделей составляли  $2.5 h$ ; для  $q = 0.389 \cdot 10^{-2}$  они были равны  $7 h$  [71]. Аналогичные качественные результаты процесса потери устойчивости рассматриваемой оболочки были получены в данной работе.

## 5.8 ВЫВОДЫ

1. Для рассмотренных пологих оболочек, прямоугольных в плане, панелей цилиндрических и конических оболочек, в большинстве случаев первыми предельные значения достигались компонентой напряжений вдоль оси  $y$  на растяжение. Для пологих оболочек варианта 3 для двух видов углепластика потеря прочности происходит раньше потери устойчивости, для остальных потеря устойчивости наступает раньше потери прочности.

2. Так как предельные значения напряжений для разных конструкций и материалов достигались по разным компонентам вектора напряжений, для каждой конкретной конструкции необходимо проводить отдельное компьютерное моделирование и исследование ее напряженно-деформированного состояния. Исключение представляют подобные конструкции: данные, полученные для рассмотренных вариантов пологих оболочек, можно масштабировать на аналогичные конструкции, но с пропорционально измененными размерами. Таким образом, полученные результаты соответствуют серии подобных оболочек. Данная методика была предложена и обоснована в работе [64].

3. Как показал анализ учета геометрической нелинейности, при исследовании прочности пологих ортотропных оболочек необходимо учитывать этот фактор, иначе предельно допустимые нагрузки будут существенно завышены, что не идет в запас прочности. Для рассмотренных вариантов конструкций эта разница в значениях может достигать одного

порядка. Это связано с тем, что деформирование оболочек из композиционных материалов (углепластики, стеклопластики и др.) носит существенно нелинейный характер. При геометрически нелинейном варианте расчета график «нагрузка  $q$  – прогиб  $W$ » представляет собой прямую линию, т.е. прогиб прямо пропорционально зависит от нагрузки. При учете геометрической нелинейности прогиб существенно отклоняется от прямолинейной зависимости при увеличении нагрузки. Причем происходит, зачастую, изменение первоначальной формы изогнутой поверхности. Как следствие увеличения значений прогибов – увеличение деформаций и напряжений, что приводит к достижению предельных значений напряжений при гораздо меньших нагрузках.

4. Для рассмотренного варианта полой оболочки, квадратной в плане, при подкреплении конструкции ребрами жесткости значения критических нагрузок возрастают в 2 – 6 раз в зависимости от числа подкрепляющих оболочку ребер. Также существенно увеличивается нагрузка потери прочности (в 1.5 – 3 раза).

5. Следует отметить, что для цилиндрических панелей 1, 2 и 4 вариантов характерно следующее поведение: сначала при очень малой нагрузке (порядка 0.005 МПа) происходит постепенное продавливание центра оболочки (кривая нагрузка-прогиб в центре неожиданно начинает развиваться в направлении, близком к горизонтальному), далее кривая снова начинает расти, происходит потеря прочности, а затем и потеря устойчивости.

6. Для многих вариантов панелей цилиндрических оболочек перед общей потерей устойчивости происходит многократная местная потеря устойчивости с образованием мелких вмятин в различных частях оболочки. Места этих вмятин перемещаются по оболочкам по мере деформирования.

## ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Разработана математическая модель с комплексным учетом ортотропии материала, геометрической нелинейности, поперечных сдвигов, введения ребер по методу конструктивной анизотропии с учетом их сдвиговой и крутильной жесткости.

Применена методика расчета, основанная на методе Ритца и методе продолжения решения по наилучшему параметру с учетом адаптивного выбора сетки для повышения точности расчетов, которая позволяет исследовать прочность и устойчивость оболочек, обходить особые точки кривой «нагрузка – прогиб», получать значения верхней и нижней критических нагрузок, находить точки бифуркации и исследовать закритическое поведение конструкции.

Разработано программное обеспечение расчетов прочности и устойчивости подкрепленных оболочек на основе передовых технологий программирования, что позволяет использовать его как в научных исследованиях, так и при проектировании оболочечных конструкций.

Проведено комплексное исследование прочности и устойчивости ортотропных тонкостенных оболочек, которое позволило сделать следующие выводы:

1. Оболочки из ортотропных материалов наиболее эффективны в качестве элементов строительных конструкций. Рассмотренные панели конических оболочек из изотропных материалов (оргстекло, сталь) теряли устойчивость, а панель из углепластика устойчивость не потеряла. Потеря прочности для такой панели наступила при нагрузке, в два раза превышающей нагрузку потери прочности для оболочки из оргстекла.

2. Проведенный анализ различных критериев прочности материала показал близкие результаты в предельных нагрузках потери прочности. За оптимальный критерий, как наиболее информативный, выбран критерий максимальных напряжений. Развитие областей текучести материала конструкции при увеличении нагрузки показало схожие результаты для

разных критериев. Этот анализ дает информацию для оптимальной расстановки ребер жесткости для повышения прочности оболочечных конструкций.

3. Неучет геометрической нелинейности при исследовании прочности ортотропных оболочек существенно завышает допустимые нагрузки, найденные при геометрически нелинейном варианте расчета. Для рассмотренных вариантов конструкций эта разница в значениях может достигать одного порядка. Это связано с существенно нелинейным характером деформирования оболочек из композиционных материалов, когда прогибы, а, следовательно, и деформации и напряжения в несколько раз превосходят те значения, что получаются при геометрически линейном варианте расчета при одной и той же нагрузке.

4. Для рассмотренных пологих оболочек, прямоугольных в плане, панелей цилиндрических и конических оболочек, в большинстве случаев первыми предельные значения достигались компонентой напряжений вдоль оси  $u$  на растяжение.

5. Для рассмотренных оболочек из углепластика потеря прочности происходит после потери устойчивости, однако имеет место и обратное. Поэтому при исследовании устойчивости оболочечных конструкций необходимо одновременно исследовать и прочность оболочки, так как после наступления деформаций текучести происходят необратимые изменения и исследование устойчивости конструкции в линейно-упругой постановке становится неправомерным. Так как предельные значения напряжений для разных конструкций и материалов достигались по разным компонентам вектора напряжений, для каждой конкретной конструкции необходимо проводить отдельное компьютерное моделирование и исследование ее напряженно-деформированного состояния.

6. При подкреплении оболочечной конструкции ребрами жесткости значения критических нагрузок возрастают в 2 – 6 раз в зависимости от числа

подкрепляющих оболочку ребер. Также существенно увеличивается нагрузка потери прочности (в 1.5 – 3 раза).

7. Для многих вариантов панелей цилиндрических и конических оболочек перед общей потерей устойчивости происходит многократная местная потеря устойчивости с образованием мелких вмятин в различных частях оболочки. Места этих вмятин перемещаются по оболочкам по мере деформирования. Если потеря прочности наступает после потери устойчивости, то после снятия нагрузки конструкция может не терять несущей способности.

## СПИСОК ИСПОЛЬЗОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

1. Абовский, Н. П. Вариационные принципы теории упругости и теории оболочек / Н. П. Абовский, Н. П. Андреев, А. П. Деруга; Под ред. Н. П. Абовского. – М.: Наука, 1978. – 228 с.
2. Абросимов, Н. А. Нелинейные задачи динамики композитных конструкций / Н. А. Абросимов, В. Г. Баженов. – Н. Новгород: Изд-во ННГУ, 2002. – 400 с.
3. Аксельрад, Э. Л. Гибкие оболочки / Э. Л. Аксельрад. – М.: Наука, 1976. – 376 с.
4. Алфутов, Н. А. Расчет многослойных пластин и оболочек из композиционных материалов / Н. А. Алфутов, П. А. Зиновьев, Б. Г. Попов. – М.: Машиностроение, 1984. – 264 с.
5. Амбарцумян, С. А. Некоторые вопросы теории оболочек из композиционных материалов / С. А. Амбарцумян // Успехи механики. – 1983. – Т.6, вып.3 – 4.
6. Амбарцумян, С. А. Теория анизотропных оболочек / С. А. Амбарцумян. – М.: Физматлит, 1961. – 384 с.
7. Амиро, И. Я. Методы расчета оболочек. Т. 2. Теория ребристых оболочек / И. Я. Амиро, В. А. Заруцкий. – Киев: Наукова думка, 1980. – 368 с.
8. Андреев, Л. В. Устойчивость оболочек при неосесимметричной деформации / Л. В. Андреев, Н. И. Ободан, А. Г. Лебедев. – М.: Наука, 1988. – 208 с.
9. Анохин, Н. Н. Численный анализ пологих ортотропных цилиндрических оболочек, находящихся в температурном поле / Н. Н. Анохин // Строительная механика инженерных конструкций и сооружений. – № 2. – 2007. – С. 18–22.
10. Антуфьев, Б. А. Локальное деформирование дискретно подкрепленных оболочек / Б. А. Антуфьев. – М.: Изд-во МАИ, 2013. – 182 с.
11. Асеев, А. В. Визуализация напряженно-деформированного состояния тонкостенных ребристых оболочек / А. В. Асеев, А. А. Макаров, А. А. Семенов // Вестник гражданских инженеров. – 2013. – № 38(3). – С. 226–232.
12. Ашкенази, Е. К. Вопросы анизотропии прочности / Е. К. Ашкенази // Механика полимеров, 1965, № 2.
13. Афанасьев, А. В. Экспериментальное определение деформационных и прочностных характеристик полимерных композиционных материалов / А. В. Афанасьев, Л. Н. Рабинский, П. В. Шершак // Механика композиционных материалов и конструкций. – Т. 16, № 2. – 2010. – С. 214–222.
14. Бажанов В. Л. Пластинки и оболочки из стеклопластиков / В. Л. Бажанов, И. И. Гольденблат, В. А. Копнов, А. Д. Поспелов, А. М. Синюков. – М.: Изд-во Высшая школа. – 1970. – 408 с.
15. Баранова, Д. А. Алгоритм исследования устойчивости подкрепленных оболочек вращения на основе метода L-BFGS / Д. А. Баранова // Промышленное и гражданское строительство. – № 3. – 2012. – С. 58–59.
16. Баранова, Д. А. Сравнительный анализ расчета прочности и устойчивости подкрепленных оболочек на основе ПК Оболочка и ПК ANSYS / Д. А. Баранова, А. Л. Волюнин, В. В. Карпов // Известия Саратовского университета. Новая серия. Серия: Математика. Механика. Информатика. – 2010. – Т. 10, № 4. – С. 23–27.
17. Белозеров, Л. Г. Композитные оболочки при силовых и тепловых воздействиях / Л. Г. Белозеров, В. А. Киреев. – М.: Физматлит, 2003. – 388 с.
18. Блинов, А. Н. О нижней критической нагрузке упругой цилиндрической оболочки при осевом сжатии / А. Н. Блинов // Вестник Сибирского федерального университета. Математика и физика. – № 5 (3). – 2012. – С. 359–362.
19. Болотин, В. В. Пластины и оболочки из армированных материалов. Основные уравнения, количественные результаты / В. В. Болотин, В. Н. Москаленко // Докл.

- научно-техн. конф. по итогам научно-исслед. работ МЭИ за 1966–67 гг., секция энергомаш. – М., 1967.
20. Болотин, В. В. Теория пластин и оболочек из армированных материалов / В. В. Болотин, В. Н. Москаленко. – V всесоюзная конф. по теории пластин и оболочек. – М., 1965.
  21. Буштырков, А. А. Нелинейная задача устойчивости цилиндрической ортотропной оболочки при осевом сжатии и поперечном давлении / А. А. Буштырков. – В кн.: Проблемы устойчивости в строительной механике. – М.: Госстройиздат, 1965. – С. 193–202.
  22. Валеев, Р. М. Усиление железобетонных конструкций с применением полимерных композитов / Р. М. Валеев, А. С. Куваев, Д. В. Курлапов, А. В. Родионов // Инженерно-строительный журнал. – № 3. – 2009. – С. 22–24.
  23. Васильев, В. В. Композиционные материалы: Справочник / В. В. Васильев, В. Д. Протасов, В. В. Болотин [и др.]; Под общ. ред. В. В. Васильева, Ю. М. Тарнопольского. – М.: Машиностроение, 1990. – 512 с.
  24. Васильев, В. В. Механика конструкций из композиционных материалов / В. В. Васильев. – М.: Машиностроение, 1988. – 272 с.
  25. Власов, В. З. Общая теория оболочек и ее приложение в технике / В. З. Власов. – М.; Л.: Гостехиздат, 1949. – 784 с.
  26. Вольмир, А. С. Нелинейная динамика пластинок и оболочек / А. С. Вольмир. – М.: Наука, 1972. – 432 с.
  27. Вольмир, А. С. Устойчивость деформируемых систем / А. С. Вольмир. – М.: Наука, 1967. – 984 с.
  28. Ворович, И. И. Математические проблемы нелинейной теории пологих оболочек / И. И. Ворович. – М.: Наука, 1989. – 376 с.
  29. Ворович, И. И. О существовании решений в нелинейной теории оболочек / И. И. Ворович // Изв. АН СССР. Сер. Математика. – Т. 19, № 4. – 1955. – С. 203–206.
  30. Гавриленко, Г. Д. Устойчивость несовершенных ребристых цилиндрических оболочек при линейном и нелинейном докритическом состоянии / Г. Д. Гавриленко // Устойчивость пластин и оболочек. – Саратов: Изд-во Саратов. ун-та. – 1981. – С. 20–22.
  31. Геворкян, Г. З. К геометрически нелинейной уточненной теории ортотропных пластин переменной толщины / Г. З. Геворкян, Р. М. Киракосян // Известия национальной академии наук Армении. – № 4 (60). – 2007. – С. 43–52.
  32. Голушко, С. К. Прямые и обратные задачи механики упругих композитных пластин и оболочек вращения / С. К. Голушко, Ю. В. Немировский. – М.: Физматлит, 2008. – 432 с.
  33. Гольденблат, И. И. Критерий прочности анизотропных материалов / И. И. Гольденблат, В. А. Копнов // Механика, 1965, № 6.
  34. Григолюк, Э. И. Конечные прогибы, устойчивость и закритическое поведение тонких пологих оболочек / Э. И. Григолюк, Е. А. Лопаницын. – М.: МГТУ «МАМИ», 2004. – 162 с.
  35. Григолюк, Э. И. Многослойные армированные оболочки: Расчет пневматических шин / Э. И. Григолюк, Г. М. Куликов. – М.: Машиностроение, 1988. – 287 с.
  36. Григолюк, Э. И. О методе непрерывного продолжения решения по параметру / Э. И. Григолюк, Е. А. Лопаницын // Доклады РАН. – 1994. – Т. 335, № 5. – С. 582–585.
  37. Григолюк, Э. И. Проблемы нелинейного деформирования: Метод продолжения решения по параметру в нелинейных задачах механики твердого деформируемого тела / Э. И. Григолюк, В. И. Шалашин. – М.: Наука, 1988. – 232 с.
  38. Григолюк, Э. И. Пути развития теории упругих многослойных пластин и оболочек / Э. И. Григолюк, Г. М. Куликов // Вестник ТГТУ. – Т. 11, № 2. – 2005. – С. 439–448.
  39. Григолюк, Э. И. Устойчивость оболочек / Э. И. Григолюк, В. В. Кабанов. – М.: Наука, 1978. – 359 с.

40. Григолюк, Э. И. Уточнение решения нелинейных уравнений в окрестности точки бифуркации / Э. И. Григолюк, Е. А. Лопаницын // Пространства жизни. К 85-летию Б. В. Раушенбаха. – М.: Наука, 1999. – С. 192–199.
41. Гроздов, В. Т. Реконструкция зданий и сооружений, техническое обследование, испытание и усиление строительных конструкций / В. Т. Гроздов, В. Н. Татаренко. – СПб.: ВИТУ, 2004. – 244 с.
42. Гузь, А. Н. О напряженном состоянии тонкостенных элементов конструкций, изготовленных из нелинейно-упругих композитных материалов / А. Н. Гузь, И. С. Чернышенко, В. П. Георгиевский, В. А. Максимюк // Прикладная механика. – 1988. – Т. 24, № 4. – С. 25–32.
43. Гузь, А. Н. О применимости двумерных прикладных теорий в задачах устойчивости при осевом сжатии цилиндрических оболочек, выполненных из материалов с низкой сдвиговой жесткостью / А. Н. Гузь, И. Ю. Бабич, Б. А. Пелех, Г. А. Тетерс // Механика полимеров. – 1970, № 1.
44. Дубинчик, Е. В. Особенности применения композитных материалов в строительстве / Е. В. Дубинчик, В. Г. Пастушков, Л. В. Янковский // Модернизация и научные исследования в транспортном комплексе. – № 3. – 2013. – С. 175–181.
45. Дьячкова, А. А. Расчет усиления железобетонных плит углеродными композиционными материалами / А. А. Дьячкова, В. Д. Кузнецов // Инженерно-строительный журнал. – № 3. – 2009. – С. 25–28.
46. Енджиевский, Л. В. Нелинейные деформации ребристых оболочек / Л. В. Енджиевский. – Красноярск: Изд.-во Красноярск. ун-та, 1982. – 295 с.
47. Жгутов, В. М. Прочность и устойчивость упругих ортотропных и изотропных ребристых оболочек. I / В. М. Жгутов // Инженерно-строительный журнал. – № 7. – 2009. – С. 55–64.
48. Зеленский, Э. С. Армированные пластики – современные конструкционные материалы / Э. С. Зеленский, А. М. Куперман, Ю. А. Горбаткина, В. Г. Иванова-Мумжиева, А. А. Берлин // Рос. хим. ж. (Ж. Рос. хим. об-ва им. Д.И. Менделеева). – 2001. – Т. XLV, № 2. – С. 56–74.
49. Зиновьев, П. А. Оптимальное проектирование композитных материалов: Учебное пособие по курсу «Проектирование композитных конструкций. Ч. II» / П. А. Зиновьев, А. А. Смердов. – М.: Изд-во МГТУ им. Н.Э. Баумана, 2006. – 103 с.
50. Игнатъев, О. В. Вариационно-параметрический подход к расчету пологих оболочек ступенчато-переменной толщины / О. В. Игнатъев, И. А. Игнатъева, В. В. Карпов // Исследования по механике материалов и конструкций. – Вып. 9. – СПб.: ПГУПС, 1996. – С. 44–54.
51. Ильин, В. П. Нелинейные деформации пологих оболочек эксцентрично подкрепленных ортогональной сеткой ребер / В. П. Ильин, В. В. Карпов, Б. К. Михайлов // Всесоюз. конф. «Современные проблемы строительной механики и прочности летательных аппаратов»: Тез. докл. – М., 1983. – С. 24.
52. Ильин, В. П. Устойчивость ребристых оболочек при больших перемещениях / В. П. Ильин, В. В. Карпов. – Л.: Стройиздат. Ленигр. отд-ние, 1986. – 168 с.
53. Ильин, В. П. Численные методы решения задач строительной механики / В. П. Ильин, В. В. Карпов, А. М. Масленников. – Минск: Высшая школа, 1990. – 349 с.
54. Кармишин, А. В. Статика и динамика тонкостенных оболочечных конструкций / А. В. Кармишин, В. А. Лясковец, В. И. Мяченков, А. Н. Фролов. – М.: Машиностроение, 1975. – 376 с.
55. Карпов, В. В. Геометрически нелинейные задачи для пластин и оболочек и методы их решения / В. В. Карпов. – Изд-во АСВ; СПбГАСУ. – М.; СПб., 1999. – 154 с.
56. Карпов, В. В. Компьютерные технологии расчета покрытий строительных сооружений оболочечного типа / В. В. Карпов // Вестник гражданских инженеров. – 2005. – Вып. 2. – С. 17–25.

57. Карпов, В. В. Математическая модель деформирования подкрепленных ортотропных оболочек вращения / В. В. Карпов, А. А. Семенов // Инженерно-строительный журнал. – № 5. – 2013. С. 100–106.
58. Карпов, В. В. Математическое моделирование, алгоритмы исследования модели, вычислительный эксперимент в теории оболочек / В. В. Карпов. – СПб.: СПбГАСУ, 2006. – 330 с.
59. Карпов, В. В. Нелинейные математические модели деформирования оболочек переменной толщины и алгоритмы их исследования / В. В. Карпов, О. В. Игнатьев, А. Ю. Сальников. – М.: Изд-во АСВ; СПб.: СПбГАСУ, 2002. – 420 с.
60. Карпов, В. В. Несимметричные формы потери устойчивости пологих ребристых оболочек при линейно и нелинейно-упругом деформировании / В. В. Карпов, А. Л. Волюнин, Д. Е. Мухин // Успехи строительной механики и теории сооружений. – Саратов: СГТУ. – 2010. – С. 105–112.
61. Карпов, В. В. Оболочки, подкрепленные ребрами, проходящими под углом к координатным линиям / В. В. Карпов // Вестник гражданских инженеров. – 2013. – № 2(37). – С. 215–219.
62. Карпов, В. В. Программный комплекс исследования устойчивости оболочек / В. В. Карпов, Д. А. Баранова, Р. Т. Беркалиев. – СПб.: СПбГАСУ, 2009. – 102 с.
63. Карпов, В. В. Прочность и устойчивость ортотропных оболочек / В. В. Карпов, А. А. Семенов // Материалы XX Международного симпозиума "Динамические и технологические проблемы механики конструкций и сплошных сред" им. А.Г. Горшкова. Т.1. – М.: ООО "ТР-принт", 2014. – С. 92–93.
64. Карпов, В. В. Прочность и устойчивость подкрепленных оболочек вращения: в 2 ч. Ч.1: Модели и алгоритмы исследования прочности и устойчивости подкрепленных оболочек вращения / В. В. Карпов. – М.: Физматлит, 2010. – 288 с.
65. Карпов, В. В. Прочность и устойчивость подкрепленных оболочек вращения: в 2 ч. Ч.2: Вычислительный эксперимент при статическом механическом воздействии / В. В. Карпов. – М.: Физматлит, 2011. – 248 с.
66. Карпов, В. В. Различные схемы конструктивно-ортотропных оболочек и их применение к расчету оболочек дискретно-переменной толщины / В. В. Карпов // Исследования по механике строительных конструкций и материалов: Межвуз. темат. сб. тр. – Л.: ЛИСИ. – 1988.
67. Карпов, В. В. Устойчивость тонкостенных оболочек при учете различных способов закрепления контура / В. В. Карпов, А. А. Семенов // Новые идеи нового века – 2013: Материалы Тринадцатой Международной научной конференции. Т.2 // Тихоокеанский государственный университет. – Хабаровск: Изд-во Тихоокеан. гос. ун-та, 2013. С.309–314.
68. Карпов, Я. С. Методика расчета на прочность слоистых композиционных материалов при термомеханическом нагружении / Я. С. Карпов, В. Г. Ставиченко // Проблемы прочности. – 2010. № 4. С. 154–164.
69. Каюк, Я. Ф. Концентрация напряжений в тонких оболочках при больших прогибах / Я. Ф. Каюк // Концентрация напряжений. Т. 2. – Киев: Наукова думка, 1968.
70. Киракосян, Р. М. Об одной уточненной теории гладких ортотропных оболочек переменной толщины / Р. М. Киракосян // Доклады национальной академии наук Армении. – 2011. – № 2. С. 148–156.
71. Климанов, В. И. Нелинейные задачи подкрепленных оболочек / В. И. Климанов, С. А. Тимашев. – Свердловск: УНЦ АН СССР, 1985. – 291 с.
72. Копнов, В. А. Оценка прочности композиционных материалов и других сред с различными видами анизотропии / В. А. Копнов, Г. П. Белов // Известия РАН. МТТ. – 2014. – № 2 (32). – С. 73–80.
73. Корнишин, М. С. Нелинейные задачи теории пластин и оболочек и методы их решения / М. С. Корнишин. – М.: Наука, 1964. – 192 с.

74. Кривошапко, С. Н. О возможностях оболочечных сооружений в современной архитектуре и строительстве / С. Н. Кривошапко // Строительная механика инженерных конструкций и сооружений. – № 1. – 2013. – С. 51–56.
75. Крысько, В. А. Нелинейная статика и динамика неоднородных оболочек / В. А. Крысько. – Саратов: Изд.-во Саратов. ун-та, 1976. – 216 с.
76. Кузнецов, Е. Б. Метод продолжения решения и наилучшая параметризация / Е. Б. Кузнецов. – М.: Изд-во МАИ-ПРИНТ, 2010. – 160 с.
77. Лебедев, А. А. Механические свойства конструкционных материалов при сложном напряженном состоянии: Справочник / А. А. Лебедев, Б. И. Ковальчук, Ф. Ф. Гигиняк, В. П. Ламашевский. – Киев: Наукова думка, 1983. – 366 с.
78. Лехницкий, С. Г. Анизотропные пластинки / С. Г. Лехницкий. – М.: Физматгиз, 1957. – 463 с.
79. Липовцев, Ю. В. К вопросу расчета параметров потока, напряженного состояния и устойчивости головных обтекателей летательных аппаратов в условиях полета по заданным траекториям / Ю. В. Липовцев, М. Ю. Русин, А. С. Хамицаев, В. М. Юдин // Авиационно-космическая техника и технология. – 2005. – №1(17). – С. 12–21.
80. Лурье, А. И. Общая теория упругих тонких оболочек / А. И. Лурье // Прикладная математика и механика. – Т. 4, № 2. – 1940.
81. Максимюк, В. А. Смешанные функционалы в теории нелинейно-упругого деформирования оболочек / В. А. Максимюк, И. С. Чернышенко // Прикладная механика. – Т. 40, № 11. – 2004. – С. 45–83.
82. Малмейстер, А. К. Геометрия теорий прочности / А. К. Малмейстер // Механика полимеров, 1966, № 4.
83. Милейковский, И. Е. Расчет тонкостенных конструкций / И. Е. Милейковский, С. И. Трушин. – М.: Стройиздат, 1989. – 200 с.
84. Милейковский, И. Е. Устойчивость прямоугольных в плане пологих оболочек / И. Е. Милейковский, И. П. Гречанинов // Расчет пространственных конструкций: Сб. статей. – М.: Стройиздат, 1969. – Вып. 12. – С. 168–176.
85. Михлин, С. Г. Численная реализация вариационных методов / С. Г. Михлин. – М.: Наука, 1966. – 432 с.
86. Москаленко, Л. П. Алгоритм нахождения точек бифуркации для тонкостенных оболочек / Л. П. Москаленко, А. А. Семенов // Высокие технологии и фундаментальные исследования. Т.4: сборник трудов Десятой международной научно-практической конференции «Исследование, разработка и применение высоких технологий в промышленности». 09-11.12.2010, Санкт-Петербург, Россия / под ред. А.П. Кудинова. – СПб.: Изд-во Политехн. ун-та, 2010. С. 215–216.
87. Москаленко, Л. П. Бифуркационные проблемы тонкостенных оболочек / Л. П. Москаленко // Материалы XVII международного симпозиума «Динамические и технологические проблемы механики конструкций и сплошных сред» им. А.Г. Горшкова. Т.1. – Ч.: ГУП «ИПК «Чувашия», 2011. С. 115–116.
88. Москаленко, Л. П. Методика исследования устойчивости пологих ребристых оболочек на основе метода продолжения решения по наилучшему параметру / Л. П. Москаленко // Вестник гражданских инженеров. – № 4 (29). – 2011. – С. 161–164.
89. Москаленко, Л. П. Эффективность подкрепления пологих оболочек ребрами переменной высоты / Л. П. Москаленко // Вестник гражданских инженеров. – № 3(28). – 2011. – С. 46–50.
90. Муштари, Х. М. Некоторые обобщения теории тонких оболочек с приложениями к решению задач устойчивости упругого равновесия / Х. М. Муштари // Прикладная математика и механика. – 1939. – Т. 2, № 4. – С. 439–456.
91. Муштари, Х. М. Нелинейная теория упругих оболочек / Х. М. Муштари, К. З. Галимов. – Казань: Таткнигоиздат, 1957. – 431 с.

92. Муштари, Х. М. Об устойчивости тонкостенных конических оболочек круглого сечения при кручении парами. – В кн.: Сборник научных трудов КАИ. / Х. М. Муштари. – Казань; Изд-во Казанского авиационного ин-та, 1935. С. 39–40.
93. Назмеева, Т. В. Усиление строительных конструкций с помощью углеродных композиционных материалов / Т. В. Назмеева, Н. В. Параничева // Инженерно-строительный журнал. – № 2. – 2010. – С. 19–22.
94. Нерубайло, Б. В. К вопросу об устойчивости цилиндрических оболочек со спиральным подкреплением при внешнем давлении / Б. В. Нерубайло, Г. Д. Зубков, М. В. Мочалов // Инженерно-физический журнал. – № 1. – 2006. – С. 196–198.
95. Новожилов, В. В. Основы нелинейной теории упругости / В. В. Новожилов. – М.: Гостехиздат, 1948. – 212 с.
96. Новожилов, В. В. Теория тонких оболочек / В. В. Новожилов. – Л.: Судпромиздат, 1962. – 431 с.
97. Образцов, И. Ф. Вариационные методы расчета тонкостенных авиационных пространственных конструкций / И. Ф. Образцов. – М.: Машиностроение. – 1966. – 392 с.
98. Огибалов, П. М. Устойчивость ортотропных вязкоупругих оболочек / П. М. Огибалов, М. А. Колтунов // Прикладная механика. – Т. 3, № 8. – 1967.
99. Петров, В. В. К расчету пологих оболочек при конечных прогибах / В. В. Петров // Научн. доклады высшей школы. Строительство. – 1959. – № 1. – С. 27–35.
100. Петров, В. В. Метод последовательных нагружений в нелинейной теории пластинок и оболочек / В. В. Петров. – Саратов: Изд-во Саратов. ун-та, 1975. – 119 с.
101. Пикуль, В. В. Современное состояние теории устойчивости оболочек / В. В. Пикуль // Вестник ДВО РАН. Математика. – № 3. – 2008. – С. 3–9.
102. Писаренко, Г. С. Деформирование и прочность материалов при сложном напряженном состоянии / Г. С. Писаренко, А. А. Лебедев // Прикладная механика, 1968, № 4, вып. 3, С. 45-50.
103. Поливанов, А. А. Расчет оптимальных геометрических характеристик оболочечных конструкций при статическом нагружении / А. А. Поливанов // Современные проблемы науки и образования. – 2009. – № 6. – С. 111–115.
104. Постнов, В. В. Численные методы расчета судовых конструкций / В. В. Постнов. – Л.: Судостроение, 1977. – 277 с.
105. Преображенский, И. Н. Устойчивость и колебания конических оболочек / И. Н. Преображенский, В. З. Гришак. – М.: Машиностроение, 1986. – 240 с.
106. Пшеничнов, Г. И. Теория тонких упругих сетчатых оболочек и пластин / Г. И. Пшеничнов. – М.: Наука, 1982. – 352 с.
107. Работнов, Ю. Н. Длительная устойчивость пластин и оболочек / Ю. Н. Работнов. – Механика полимеров, 1966. – № 2. – С. 314–318.
108. Работнов, Ю. Н. Механика деформируемого твердого тела / Ю. Н. Работнов. – М.: Наука, 1988. – 712 с.
109. Рикардс, Р. Б. Оптимизация ребристых оболочек из композитов, работающих на устойчивость при внешнем давлении / Р. Б. Рикардс, М. В. Голдманис // Механика композитных материалов. – М., 1980. – № 3. – С. 468–475.
110. Рикардс, Р. Б. Устойчивость оболочек из композитных материалов / Р. Б. Рикардс, Г. А. Тетерс. – Рига: Зинатне, 1974. – 310 с.
111. Семенов, А. А. Алгоритмы исследования прочности и устойчивости подкрепленных ортотропных оболочек / А. А. Семенов // Строительная механика инженерных конструкций и сооружений. – № 1. – 2014. – С.49–63.
112. Семенов, А. А. Исследование прочности и устойчивости тонкостенных пологих ортотропных оболочек / А. А. Семенов // Математическое моделирование, численные методы и комплексы программ: межвуз. темат. сб. тр. Вып. 19. – СПб.: СПбГАСУ, 2013. – С. 40–53.

113. Семенов, А. А. Исследование прочности тонкостенных оболочек из ортотропных материалов / А. А. Семенов // Актуальные проблемы архитектуры и строительства: материалы V Международной конференции. 25-28 июня 2013 г.; под общей редакцией Е. Б. Смирнова; СПбГАСУ. – В 2 ч. Ч. I. – СПб., 2013. – С. 425–432.
114. Семенов, А. А. Компьютерное моделирование докритического и закритического поведения тонкостенных оболочек при разных способах закрепления контура / А. А. Семенов // Вестник гражданских инженеров. – 2012. – № 4 (33). – С. 247–251.
115. Семенов, А. А. Методика учета формы контура тонкостенной оболочки, заданного функционально / А. А. Семенов // Актуальные проблемы современного строительства и пути их эффективного решения: материалы Международной научно-практической конференции. 10-12 октября 2012 г.; под общей редакцией А. Н. Егорова, А. Г. Черных; СПбГАСУ. – В 2 ч. Ч. I. – СПб., 2012. – С. 233–237.
116. Семенов, А. А. Применение математического программного пакета MAPLE для решения задач устойчивости и прочности тонкостенных оболочек / А. А. Семенов // Математическое моделирование, численные методы и комплексы программ: межвуз. темат. сб. тр. Вып. 18. – СПб.: СПбГАСУ, 2012. – С. 53–59.
117. Семенов, А. А. Программная реализация исследования устойчивости оболочек / А. А. Семенов // Актуальные проблемы современного строительства: 64-я Международная научно-техническая конференция молодых ученых. – В 3 ч. Ч. III. – СПб.: СПбГАСУ, 2011. – С. 72–77.
118. Семенов, А. А. Учет различных способов закрепления контура тонкостенных пологих оболочек / А. А. Семенов // Актуальные проблемы экономики и управления в строительстве: Международная научно-практическая конференция студентов, аспирантов, молодых ученых и докторантов / СПбГАСУ. – СПб., 2012. – С. 58–60.
119. Семенов, А. А. Физические соотношения для тонкостенных оболочек из ортотропных материалов / А. А. Семенов // Актуальные проблемы экономики и управления в строительстве: Международная научно-практическая конференция студентов, аспирантов, молодых ученых и докторантов / СПбГАСУ. – СПб., 2013. – С. 97–99.
120. Смердов, А. А. Анализ оптимальных сочетаний требований к разрабатываемым углепластикам для крупногабаритных ракетно-космических конструкций / А. А. Смердов, И. А. Буянов, И. В. Чуднов // Известия высших учебных заведений. Машиностроение. – 2012. – № 8. – С. 70–77.
121. Соломатов, В. И. Полимерные композиционные материалы в строительстве / В. И. Соломатов, А. Н. Бобрышев, К. Г. Химмлер; под ред. В. И. Соломатова. – М.: Стройиздат, 1988. – 312 с.
122. Старовойтов, Э. И. Деформирование трехслойных элементов конструкций на упругом основании / Э. И. Старовойтов, А. В. Яровая, Д. В. Леоненко. – М.: Физматлит, 2006. – 379 с.
123. Сухинин, С. Н. Прикладные задачи устойчивости многослойных композитных оболочек / С. Н. Сухинин. – М.: Физматлит, 2010. – 248 с.
124. Тарабрин, Г. Т. Устойчивость к прощелкиванию конической полой оболочки / Г. Т. Тарабрин // Строительная механика и расчет сооружений. – №4. – 2010. – С. 59–63.
125. Тимашев, С. А. Устойчивость подкрепленных оболочек / С. А. Тимашев. – М.: Стройиздат, 1974. – 256 с.
126. Тимошенко, С. П. Устойчивость стержней, пластин и оболочек / С. П. Тимошенко. – М.: Наука, Физматгиз, 1971. – 807 с.
127. Трещев, А. А. Исследование НДС прямоугольной в плане оболочки положительной гауссовой кривизны из ортотропных материалов с учетом свойств разносопротивляемости / А. А. Трещев, М. Б. Шерешевский // Вестник Волгогр. гос. архит.-строит. ун-та. Сер.: Стр.-во и архит. 2013. Вып. 31(50). Ч. 2. Строительные науки. – С. 414–421.

128. Трушин, С. И. Устойчивость и бифуркации гибких пологих сетчатых оболочек / С. И. Трушин, А. В. Михайлов // Вестник НИЦ Строительство. – № 2. – 2010. – С. 150–158.
129. Трушин, С. И. Устойчивость нелинейно деформируемых цилиндрических оболочек из композиционного материала при действии неравномерных нагрузок / С. И. Трушин, Е. В. Сысоева, Т. А. Журавлева // Строительная механика инженерных конструкций и сооружений. – № 2. – 2013. – С. 3–10.
130. Тышкевич, В. Н. Выбор критериев прочности для труб из армированных пластиков / В. Н. Тышкевич // Известия ВолгГТУ. – № 5 (78). – 2011 – С. 76–79.
131. Хома, И. Ю. Обобщенная теория анизотропных оболочек / И. Ю. Хома. – Киев: Наукова Думка, 1985.
132. Цепенников, М. В. Верификация численной методики расчета разрушения конструкций из композиционных материалов / М. В. Цепенников, И. А. Повышев, О. Ю. Сметанников // Вестник ПНИПУ. Прикладная математика и механика. – 2012. – № 10. – С. 225–241.
133. Черных, К. Ф. Общая нелинейная теория упругих оболочек / К. Ф. Черных, С. А. Кабриц, Е. И. Михайловский, П. Е. Товстик, В. А. Шамина. – СПб.: Изд-во СПбГУ., 2002. – 388 с.
134. Шалашилин, В. И. Алгоритмы метода продолжения по параметру для больших осесимметричных прогибов оболочек вращения / В. И. Шалашилин // Численные и экспериментальные методы исследования прочности, устойчивости и колебаний конструкций. – М.: МАИ, 1983. – С. 68–71.
135. Шалашилин, В. И. Метод продолжения по параметру и его применение к задаче больших прогибов непологой круговой арки / В. И. Шалашилин // Изв. АН СССР. МТТ. – 1979. – № 4. – С. 178–184.
136. Шилин, А. А. Внешнее армирование железобетонных конструкций композиционными материалами / А. А. Шилин, В. А. Пшеничный, Д. В. Каргузов. – М.: Стройиздат, 2007. – 184 с.
137. Якушев, В. Л. Нелинейные деформации и устойчивость тонких оболочек / В. Л. Якушев. – М.: Наука, 2004. – 276 с.
138. Ahmed, M.K. Elastic buckling behavior of a four-lobed cross section cylindrical shell with variable thickness under non-uniform axial loads / Ahmed, M.K. // Mathematical Problems in Engineering / Hindawi Publishing Corporation, Vol. 2009.
139. Carrera E., Brischetto S., Nali P. Plates and Shells for Smart Structures: Classical and Advanced Theories for Modeling and Analysis, First Edition. / Carrera E., Brischetto S., Nali P. // John Wiley & Sons, Ltd., 2011. 322 p.
140. Chamis C.C., Kiraly L.I. Rim-Spoke Composite Flywheels: Detailed Stress and Vibration Analysis//Proc. of the 1975 Flywheel Technol. Symp. Berkeley. – California., 1976.
141. Dau F., Pablo F., Polit O. New reference solutions and parametric study for multilayered cylindrical shell // IJRRAS Vol. 4, No. 2, 2010.
142. Donell L.N. A new theory for buckling of thin cylinders under axial compression and bending / Trans. ASME. 1934. 56.
143. Fisher L. How to predict structural behavior of R.P. Laminates // Modern Plastics I 1960.- №6.
144. Jabareen M., Sheinman I. Effect of the nonlinear pre-buckling state on the bifurcation point of conical shells // International Journal of Solids and Structures. – Vol. 43. – 2006. Pp. 2146–2159. doi:10.1016/j.ijsolstr.2005.05.024
145. Karman Th. and Shen Tsien H. The buckling of spherical shells by external pressure. J. Acron. Sci. 7. 1939.
146. Karpov V.V., Maslennikov A.M. Methods for Solving Non-Linear Tasks for Calculating Construction Structures // World Applied Sciences Journal, 23 (Problems of Architecture and

- Construction). 2013. Pp: 178–183. <http://idosi.org/wasj/wasj23%28pac%2913/35.pdf> DOI: 10.5829/idosi.wasj.2013.23.pac.90035
147. Karpov, V. and A. Semenov, 2014. Strength and Stability of Orthotropic Shells. *World Applied Sciences Journal*, 30 (5), pp: 617–623. [http://www.idosi.org/wasj/wasj30\(5\)14/14.pdf](http://www.idosi.org/wasj/wasj30(5)14/14.pdf) DOI: 10.5829/idosi.wasj.2014.30.05.14064
148. Le Grogne P., Le van A. Elastoplastic bifurcation and collapse of axially loaded cylindrical shells / *International Journal of Solids and Structures*. – Vol. 45. – 2008. Pp. 64–86. DOI:10.1016/j.ijsolstr.2007.07.017
149. Libai A., Simmonds J.G. *The Nonlinear Theory of Elastic Shells* // 2nd Ed., CUP, 1998. – 553 pp.
150. Lindgaard E., Lund E. A unified approach to nonlinear buckling optimization of composite structures // *Computers & Structures*. 2011. Vol. 89, issues 3–4. Pp. 357–370.
151. Maksimyuk V.A., Storozhuk E.A., Chernyshenko I.S. Nonlinear Deformation of Thin Isotropic and Orthotropic Shells of Revolution with Reinforced Holes and Rigid Inclusions // *International Applied Mechanics*. 2013. Volume 49, Issue 6. Pp. 685–692. DOI: 10.1007/s10778-013-0602-x
152. Maksimyuk V.A., Storozhuk E.A., Chernyshenko I.S. Variational finite-difference methods in linear and nonlinear problems of the deformation of metallic and composite shells (review) // *International Applied Mechanics*. 2012. Volume 48, Issue 6. Pp. 613–687. DOI: 10.1007/s10778-012-0544-8
153. Mao-Hong Yu. Advances in strength theories for materials under complex stress state the 20th century // *Appl. Mech. Rev.* – 2002. – 55, No. 3. – P. 169 – 218.
154. Pimenta P.M., Wriggers P. *New Trends in Thin Structures: Formulation, Optimization and Coupled Problems* // CISM International Centre for Mechanical Sciences, Vol. 519. Springer, 2010. 228 p.
155. Qatu M.S., Sullivan R.W., Wang W. Recent research advances on the dynamic analysis of composite shells: 2000–2009 // *Composite Structures*. 2010. No.93. Pp.14–31.
156. Qu Y., Long X., Wu S., Meng G. A unified formulation for vibration analysis of composite laminated shells of revolution including shear deformation and rotary inertia // *Composite Structures*, № 98, 2013. P.169–191.
157. Qu Y., Wu S., Chen Y., Hua H. Vibration analysis of ring-stiffened conical–cylindrical–spherical shells based on a modified variational approach // *International Journal of Mechanical Sciences*. – Vol.69. – 2013. Pp. 72–84. <http://dx.doi.org/10.1016/j.ijmecsci.2013.01.026>
158. Reddy J.N. *Mechanics of laminated composite plates and shells: theory and analysis*. 2nd ed. CRC Press, Boca Raton, FL, 2004. 856 p.
159. Reissner H. Spannungen in Kugelschale (Kuppeln). *Festschrift Muller Breslau*, 1912, s. 181.
160. Shadmehri F., Hoa S.V., Hojjati M. Buckling of conical composite shells // *Composite Structures*. – Vol. 94. – 2012. Pp.787–792. DOI:10.1016/j.compstruct.2011.09.016
161. *Structurae* – International Database and Gallery of Structures [Электронный ресурс]. – Режим доступа: <http://structurae.net>
162. Tomás A., Martí P. Shape and size optimisation of concrete shells // *Engineering Structures*. 2010. No.32. P.1650–1658.
163. Trach V.M. Stability of conical shells made of composites with one plane of elastic symmetry // *International Applied Mechanics*. 2007. Volume 43, Issue 6. Pp. 662–669. DOI: 10.1007/s10778-007-0065-z
164. Ventsel E., Krauthammer T. *Thin Plates and Shells: Theory, Analysis and Applications* // Dekker, New York, 2001. 666 pp.

## ПРИЛОЖЕНИЯ

### ПРИЛОЖЕНИЕ А.

#### ФОРМИРОВАНИЕ СИСТЕМЫ НЕЛИНЕЙНЫХ АЛГЕБРАИЧЕСКИХ УРАВНЕНИЙ

Подставим (2.1) в (1.20), найдем производные от функционала по неизвестным числовым параметрам и приравняем их к нулю, учитывая, что для оболочки вращения деформации имеют вид (1.9). В результате получим систему алгебраических уравнений

$$\frac{\partial \mathcal{E}}{\partial U(l)} = \frac{G_1}{2} \int_0^a \int_{y_1(x)}^{y_2(x)} \left\{ \begin{aligned} & a_1 2\varepsilon_x \frac{\partial \varepsilon_x}{\partial U(l)} + a_2 2\varepsilon_y \frac{\partial \varepsilon_y}{\partial U(l)} + a_3 \varepsilon_y \frac{\partial \varepsilon_x}{\partial U(l)} + \\ & + a_3 \varepsilon_x \frac{\partial \varepsilon_y}{\partial U(l)} + a_4 2\gamma_{xy} \frac{\partial \gamma_{xy}}{\partial U(l)} + \\ & + a_5 2(\psi_x - \theta_1) k_x Z1(l) + a_7 \chi_1 \frac{\partial \varepsilon_x}{\partial U(l)} + a_8 \chi_2 \frac{\partial \varepsilon_x}{\partial U(l)} + \\ & + a_8 \chi_1 \frac{\partial \varepsilon_y}{\partial U(l)} + a_9 \chi_2 \frac{\partial \varepsilon_y}{\partial U(l)} + a_{10} \chi_{12} \frac{\partial \gamma_{xy}}{\partial U(l)} \end{aligned} \right\} AB dx dy = 0;$$

$$\frac{\partial \mathcal{E}}{\partial V(l)} = \frac{G_1}{2} \int_0^a \int_{y_1(x)}^{y_2(x)} \left\{ \begin{aligned} & a_2 2\varepsilon_y \frac{\partial \varepsilon_y}{\partial V(l)} + a_3 \varepsilon_x \frac{\partial \varepsilon_y}{\partial V(l)} + a_4 2\gamma_{xy} \frac{\partial \gamma_{xy}}{\partial V(l)} + \\ & + a_6 2(\psi_y - \theta_2) k_y Z2(l) + \\ & + a_8 \chi_1 \frac{\partial \varepsilon_y}{\partial V(l)} + a_9 \chi_2 \frac{\partial \varepsilon_y}{\partial V(l)} + a_{10} \chi_{12} \frac{\partial \gamma_{xy}}{\partial V(l)} \end{aligned} \right\} AB dx dy = 0;$$

$$\frac{\partial \mathcal{E}}{\partial W(l)} = \frac{G_1}{2} \int_0^a \int_{y_1(x)}^{y_2(x)} \left\{ \begin{aligned} & a_1 2\varepsilon_x \frac{\partial \varepsilon_x}{\partial W(l)} + a_2 2\varepsilon_y \frac{\partial \varepsilon_y}{\partial W(l)} + a_3 \varepsilon_y \frac{\partial \varepsilon_x}{\partial W(l)} + \\ & + a_3 \varepsilon_x \frac{\partial \varepsilon_y}{\partial W(l)} + a_4 2\gamma_{xy} \frac{\partial \gamma_{xy}}{\partial W(l)} + \\ & + a_5 2(\psi_x - \theta_1) \frac{1}{A} \frac{\partial Z3(l)}{\partial x} + a_6 2(\psi_y - \theta_2) \frac{1}{B} \frac{\partial Z3(l)}{\partial y} + \\ & + a_7 \chi_1 \frac{\partial \varepsilon_x}{\partial W(l)} + a_8 \chi_2 \frac{\partial \varepsilon_x}{\partial W(l)} + a_8 \chi_1 \frac{\partial \varepsilon_y}{\partial W(l)} + \\ & + a_9 \chi_2 \frac{\partial \varepsilon_y}{\partial W(l)} + a_{10} \chi_{12} \frac{\partial \gamma_{xy}}{\partial W(l)} - a_{15} q Z3(l) \end{aligned} \right\} AB dx dy = 0;$$

$$\begin{aligned}
\frac{\partial \mathcal{D}}{\partial PS(l)} &= \frac{G_1}{2} \int_0^a \int_{y_1(x)}^{y_2(x)} \left\{ \begin{aligned} &a_5 2(\psi_x - \theta_1) Z4(l) + a_7 \varepsilon_x \frac{\partial \chi_1}{\partial PS(l)} + \\ &+ a_8 \varepsilon_x \frac{\partial \chi_2}{\partial PS(l)} + a_8 \varepsilon_y \frac{\partial \chi_1}{\partial PS(l)} + \\ &+ a_9 \varepsilon_y \frac{\partial \chi_2}{\partial PS(l)} + a_{10} \gamma_{xy} \frac{\partial \chi_{12}}{\partial PS(l)} + \\ &+ a_{11} 2\chi_1 \frac{\partial \chi_1}{\partial PS(l)} + a_{12} 2\chi_2 \frac{\partial \chi_2}{\partial PS(l)} + a_{13} \chi_1 \frac{\partial \chi_2}{\partial PS(l)} + \\ &+ a_{13} \chi_2 \frac{\partial \chi_1}{\partial PS(l)} + a_{14} 2\chi_{12} \frac{\partial \chi_{12}}{\partial PS(l)} \end{aligned} \right\} AB dx dy = 0; \\
\frac{\partial \mathcal{D}}{\partial PN(l)} &= \frac{G_1}{2} \int_0^a \int_{y_1(x)}^{y_2(x)} \left\{ \begin{aligned} &a_6 2(\psi_y - \theta_2) + a_8 \varepsilon_x \frac{\partial \chi_2}{\partial PN(l)} + \\ &+ a_9 \varepsilon_y \frac{\partial \chi_2}{\partial PN(l)} + a_{10} \gamma_{xy} \frac{\partial \chi_{12}}{\partial PN(l)} + \\ &+ a_{12} 2\chi_2 \frac{\partial \chi_2}{\partial PN(l)} + a_{13} \chi_1 \frac{\partial \chi_2}{\partial PN(l)} + \\ &+ a_{14} 2\chi_{12} \frac{\partial \chi_{12}}{\partial PN(l)} \end{aligned} \right\} AB dx dy = 0;
\end{aligned} \tag{A.1}$$

$l = 1..N.$

Здесь

$$\frac{\partial \varepsilon_x}{\partial U(l)} = \frac{1}{A} \frac{\partial Z1(l)}{\partial x} - \theta_1 k_x Z1(l); \quad \frac{\partial \varepsilon_y}{\partial U(l)} = \frac{1}{AB} \frac{\partial B}{\partial x} Z1(l);$$

$$\frac{\partial \gamma_{xy}}{\partial U(l)} = \frac{1}{B} \frac{\partial Z1(l)}{\partial y} - \theta_2 k_x Z1(l);$$

$$\frac{\partial \varepsilon_y}{\partial V(l)} = \frac{1}{B} \frac{\partial Z2(l)}{\partial y} - \theta_2 k_y Z2(l);$$

$$\frac{\partial \gamma_{xy}}{\partial V(l)} = \frac{1}{A} \frac{\partial Z2(l)}{\partial x} - \frac{1}{AB} \frac{\partial B}{\partial x} Z2(l) - \theta_1 k_y Z2(l);$$

$$\frac{\partial \varepsilon_x}{\partial W(l)} = -k_x Z3(l) - \theta_1 \frac{1}{A} \frac{\partial Z3(l)}{\partial x}; \quad \frac{\partial \varepsilon_y}{\partial W(l)} = -k_y Z3(l) - \theta_2 \frac{1}{B} \frac{\partial Z3(l)}{\partial y};$$

$$\frac{\partial \gamma_{xy}}{\partial W(l)} = -\theta_1 \frac{1}{B} \frac{\partial Z3(l)}{\partial y} - \theta_2 \frac{1}{A} \frac{\partial Z3(l)}{\partial x};$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial \chi_1}{\partial PS(l)} &= \frac{1}{A} \frac{\partial Z4(l)}{\partial x}; & \frac{\partial \chi_2}{\partial PS(l)} &= \frac{1}{AB} \frac{\partial B}{\partial x} Z4(l); & \frac{\partial 2\chi_{12}}{\partial PS(l)} &= \frac{1}{B} \frac{\partial Z4(l)}{\partial y}; \\ \frac{\partial \chi_2}{\partial PN(l)} &= \frac{1}{B} \frac{\partial Z5(l)}{\partial y}; & \frac{\partial 2\chi_{12}}{\partial PN(l)} &= \frac{1}{A} \frac{\partial Z5(l)}{\partial x} - \frac{1}{AB} \frac{\partial B}{\partial x} Z5(l). \end{aligned} \quad (A.2)$$

Теперь преобразуем все уравнения полученной системы алгебраических уравнений (A.1). Подставим в них выражения деформаций, функций изменения кривизн и кручения, учитывая (A.2):

$$\begin{aligned} & \sum_{l=1}^N \int_0^{y_2(x)} \int_{y_1(x)} \left\{ \left( 2a_1 \frac{1}{A} \frac{\partial Z1(l)}{\partial x} + a_3 \frac{1}{AB} \frac{\partial B}{\partial x} Z1(l) - 2a_1 \theta_1 k_x Z1(l) \right) \cdot \right. \\ & \cdot \left[ \frac{1}{A} U(I) \frac{\partial Z1(I)}{\partial x} - k_x W(I) Z3(I) + \frac{1}{2} \theta_1^2 \right] + \\ & + \left( 2a_2 \frac{1}{AB} \frac{\partial B}{\partial x} Z1(l) + a_3 \frac{1}{A} \frac{\partial Z1(l)}{\partial x} - a_3 \theta_1 k_x Z1(l) \right) \cdot \\ & \cdot \left[ \frac{1}{B} V(I) \frac{\partial Z2(I)}{\partial y} + \frac{1}{AB} \frac{\partial B}{\partial x} U(I) Z1(I) - k_y W(I) Z3(I) + \frac{1}{2} \theta_2^2 \right] + \\ & + \left( 2a_4 \frac{1}{B} \frac{\partial Z1(l)}{\partial y} - 2a_4 \theta_2 k_x Z1(l) \right) \cdot \\ & \cdot \left[ \frac{1}{A} V(I) \frac{\partial Z2(I)}{\partial x} + \frac{1}{B} U(I) \frac{\partial Z1(I)}{\partial y} - \frac{1}{AB} \frac{\partial B}{\partial x} V(I) Z2(I) + \theta_1 \theta_2 \right] + \\ & + 2a_5 k_x Z1(l) \left[ PS(I) Z4(I) + \frac{1}{A} W(I) \frac{\partial Z3(I)}{\partial x} + k_x U(I) Z1(I) \right] + \\ & + \left( a_7 \frac{1}{A} \frac{\partial Z1(l)}{\partial x} + a_8 \frac{1}{AB} \frac{\partial B}{\partial x} Z1(l) - a_7 \theta_1 k_x Z1(l) \right) \left[ \frac{1}{A} PS(I) \frac{\partial Z4(I)}{\partial x} \right] + \\ & + \left( a_8 \frac{1}{A} \frac{\partial Z1(l)}{\partial x} + a_9 \frac{1}{AB} \frac{\partial B}{\partial x} Z1(l) - a_8 \theta_1 k_x Z1(l) \right) \cdot \\ & \cdot \left[ \frac{1}{B} PN(I) \frac{\partial Z5(I)}{\partial y} + \frac{1}{AB} \frac{\partial B}{\partial x} PS(I) Z4(I) \right] + \left( \frac{1}{2} a_{10} \frac{1}{B} \frac{\partial Z1(l)}{\partial y} - \frac{1}{2} a_{10} \theta_2 k_x Z1(l) \right) \cdot \\ & \cdot \left[ \frac{1}{A} PN(I) \frac{\partial Z5(I)}{\partial x} + \frac{1}{B} PS(I) \frac{\partial Z4(I)}{\partial y} - \frac{1}{AB} \frac{\partial B}{\partial x} PN(I) Z5(I) \right] \left. \right\} AB dx dy = 0; \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& \sum_{I=1}^N \int_0^{y_2(x)} \int_{y_1(x)} \left\{ \left( 2a_2 \frac{1}{B} \frac{\partial Z2(l)}{\partial y} - 2a_2 \theta_2 k_y Z2(l) \right) \cdot \right. \\
& \cdot \left[ \frac{1}{B} V(I) \frac{\partial Z2(I)}{\partial y} + \frac{1}{AB} \frac{\partial B}{\partial x} U(I) Z1(I) - k_y W(I) Z3(I) + \frac{1}{2} \theta_2^2 \right] + \\
& + \left( a_3 \frac{1}{B} \frac{\partial Z2(l)}{\partial y} - a_3 \theta_2 k_y Z2(l) \right) \left[ \frac{1}{A} U(I) \frac{\partial Z1(I)}{\partial x} - k_x W(I) Z3(I) + \frac{1}{2} \theta_1^2 \right] + \\
& + \left( 2a_4 \frac{1}{A} \frac{\partial Z2(l)}{\partial x} - 2a_4 \frac{1}{AB} \frac{\partial B}{\partial x} Z2(l) - 2a_4 \theta_1 k_y Z2(l) \right) \cdot \\
& \cdot \left[ \frac{1}{A} V(I) \frac{\partial Z2(I)}{\partial x} + \frac{1}{B} U(I) \frac{\partial Z1(I)}{\partial y} - \frac{1}{AB} \frac{\partial B}{\partial x} V(I) Z2(I) + \theta_1 \theta_2 \right] + \\
& + 2a_6 k_y Z2(l) \left[ PN(I) Z5(I) + \frac{1}{B} W(I) \frac{\partial Z3(I)}{\partial y} + k_y V(I) Z2(I) \right] + \\
& + \left( a_8 \frac{1}{B} \frac{\partial Z2(l)}{\partial y} - a_8 \theta_2 k_y Z2(l) \right) \left[ \frac{1}{A} PS(I) \frac{\partial Z4(I)}{\partial x} \right] + \\
& + \left( a_9 \frac{1}{B} \frac{\partial Z2(l)}{\partial y} - a_9 \theta_2 k_y Z2(l) \right) \left[ \frac{1}{B} PN(I) \frac{\partial Z5(I)}{\partial y} + \frac{1}{AB} \frac{\partial B}{\partial x} PS(I) Z4(I) \right] + \\
& + \frac{1}{2} \left( a_{10} \frac{1}{A} \frac{\partial Z2(l)}{\partial x} - a_{10} \frac{1}{AB} \frac{\partial B}{\partial x} Z2(l) - a_{10} \theta_1 k_y Z2(l) \right) \cdot \\
& \cdot \left[ \frac{1}{A} PN(I) \frac{\partial Z5(I)}{\partial x} + \frac{1}{B} PS(I) \frac{\partial Z4(I)}{\partial y} - \frac{1}{AB} \frac{\partial B}{\partial x} PN(I) Z5(I) \right] AB dx dy \left. \right\} = 0;
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& \sum_{l=1}^N \int_0^{y_2(x)} \int_0^{y_1(x)} \left( -2a_1 k_x Z3(l) - 2a_1 \theta_1 \frac{1}{A} \frac{\partial Z3(l)}{\partial x} - a_3 k_y Z3(l) - a_3 \theta_2 \frac{1}{B} \frac{\partial Z3(l)}{\partial y} \right) \times \\
& \times \left[ \frac{1}{A} U(I) \frac{\partial Z1(I)}{\partial x} - k_x W(I) Z3(I) + \frac{1}{2} \theta_1^2 \right] + \\
& + \left( -2a_2 k_y Z3(l) - 2a_2 \theta_2 \frac{1}{B} \frac{\partial Z3(l)}{\partial y} - a_3 k_x Z3(l) - a_3 \theta_1 \frac{1}{A} \frac{\partial Z3(l)}{\partial x} \right) \times \\
& \times \left[ \frac{1}{B} V(I) \frac{\partial Z2(I)}{\partial y} + \frac{1}{AB} \frac{\partial B}{\partial x} U(I) Z1(I) - k_y W(I) Z3(I) + \frac{1}{2} \theta_2^2 \right] + \\
& + \left( -2a_4 \theta_1 \frac{1}{B} \frac{\partial Z3(l)}{\partial y} - 2a_4 \theta_2 \frac{1}{A} \frac{\partial Z3(l)}{\partial x} \right) \times \\
& \times \left[ \frac{1}{A} V(I) \frac{\partial Z2(I)}{\partial x} + \frac{1}{B} U(I) \frac{\partial Z1(I)}{\partial y} - \frac{1}{AB} \frac{\partial B}{\partial x} V(I) Z2(I) + \theta_1 \theta_2 \right] + \\
& + 2a_5 \frac{1}{A} \frac{\partial Z3(l)}{\partial x} \left[ PS(I) Z4(I) + \frac{1}{A} W(I) \frac{\partial Z3(I)}{\partial x} + k_x U(I) Z1(I) \right] + \\
& + 2a_6 \frac{1}{B} \frac{\partial Z3(l)}{\partial y} \left[ PN(I) Z5(I) + \frac{1}{B} W(I) \frac{\partial Z3(I)}{\partial y} + k_y V(I) Z2(I) \right] + \\
& + \left( -a_7 k_x Z3(l) - a_7 \theta_1 \frac{1}{A} \frac{\partial Z3(l)}{\partial x} - a_8 k_y Z3(l) - a_8 \theta_2 \frac{1}{B} \frac{\partial Z3(l)}{\partial y} \right) \times \\
& \times \left[ \frac{1}{A} PS(I) \frac{\partial Z4(I)}{\partial x} \right] + \\
& + \left( -a_8 k_x Z3(l) - a_8 \theta_1 \frac{1}{A} \frac{\partial Z3(l)}{\partial x} - a_9 k_y Z3(l) - a_9 \theta_2 \frac{1}{B} \frac{\partial Z3(l)}{\partial y} \right) \times \\
& \times \left[ \frac{1}{B} PN(I) \frac{\partial Z5(I)}{\partial y} + \frac{1}{AB} \frac{\partial B}{\partial x} PS(I) Z4(I) \right] + \\
& + \frac{1}{2} \left( -a_{10} \theta_1 \frac{1}{B} \frac{\partial Z3(l)}{\partial y} - a_{10} \theta_2 \frac{1}{A} \frac{\partial Z3(l)}{\partial x} \right) \times \\
& \times \left[ \frac{1}{A} PN(I) \frac{\partial Z5(I)}{\partial x} + \frac{1}{B} PS(I) \frac{\partial Z4(I)}{\partial y} - \frac{1}{AB} \frac{\partial B}{\partial x} PN(I) Z5(I) \right] - \\
& - a_{15} Z3(l) q \} AB dx dy = 0.
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& \sum_{I=1}^N \int_0^{y_2(x)} \int_{y_1(x)} \left\{ 2a_5 Z4(I) \left[ PS(I)Z4(I) + \frac{1}{A} W(I) \frac{\partial Z3(I)}{\partial x} + k_x U(I)Z1(I) \right] + \right. \\
& + \left( a_7 \frac{1}{A} \frac{\partial Z4(I)}{\partial x} + a_8 \frac{1}{AB} \frac{\partial B}{\partial x} Z4(I) \right) \left[ \frac{1}{A} U(I) \frac{\partial Z1(I)}{\partial x} - k_x W(I)Z3(I) + \frac{1}{2} \theta_1^2 \right] + \\
& + \left( a_8 \frac{1}{A} \frac{\partial Z4(I)}{\partial x} + a_9 \frac{1}{AB} \frac{\partial B}{\partial x} Z4(I) \right) \cdot \\
& \cdot \left[ \frac{1}{B} V(I) \frac{\partial Z2(I)}{\partial y} + \frac{1}{AB} \frac{\partial B}{\partial x} U(I)Z1(I) - k_y W(I)Z3(I) + \frac{1}{2} \theta_2^2 \right] + \\
& + \frac{1}{2} a_{10} \frac{1}{B} \frac{\partial Z4(I)}{\partial y} \left[ \frac{1}{A} V(I) \frac{\partial Z2(I)}{\partial x} + \frac{1}{B} U(I) \frac{\partial Z1(I)}{\partial y} - \frac{1}{AB} \frac{\partial B}{\partial x} V(I)Z2(I) + \theta_1 \theta_2 \right] + \\
& + \left( 2a_{11} \frac{1}{A} \frac{\partial Z4(I)}{\partial x} + a_{13} \frac{1}{AB} \frac{\partial B}{\partial x} Z4(I) \right) \frac{1}{A} PS(I) \frac{\partial Z4(I)}{\partial x} + \\
& + \left( 2a_{12} \frac{1}{AB} \frac{\partial B}{\partial x} Z4(I) + a_{13} \frac{1}{A} \frac{\partial Z4(I)}{\partial x} \right) \left[ \frac{1}{B} PN(I) \frac{\partial Z5(I)}{\partial y} + \frac{1}{AB} \frac{\partial B}{\partial x} PS(I)Z4(I) \right] + \\
& + \frac{1}{2} a_{14} \frac{1}{B} \frac{\partial Z4(I)}{\partial y} \left[ \frac{1}{A} PN(I) \frac{\partial Z5(I)}{\partial x} + \frac{1}{B} PS(I) \frac{\partial Z4(I)}{\partial y} - \right. \\
& \left. - \frac{1}{AB} \frac{\partial B}{\partial x} PN(I)Z5(I) \right] AB dx dy = 0.
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& \sum_{I=1}^N \int_0^{y_2(x)} \int_0^{y_1(x)} \left\{ 2a_6 Z5(I) \left[ PN(I)Z5(I) + \frac{1}{B} W(I) \frac{\partial Z3(I)}{\partial y} + k_y V(I)Z2(I) \right] + \right. \\
& + \left( a_8 \frac{1}{B} \frac{\partial Z5(I)}{\partial y} \right) \left[ \frac{1}{A} U(I) \frac{\partial Z1(I)}{\partial x} - k_x W(I)Z3(I) + \frac{1}{2} \theta_1^2 \right] + \\
& + \left( a_9 \frac{1}{B} \frac{\partial Z5(I)}{\partial y} \right) \left[ \frac{1}{B} V(I) \frac{\partial Z2(I)}{\partial y} + \frac{1}{AB} \frac{\partial B}{\partial x} U(I)Z1(I) - k_y W(I)Z3(I) + \frac{1}{2} \theta_2^2 \right] + \\
& + \frac{1}{2} \left( a_{10} \frac{1}{A} \frac{\partial Z5(I)}{\partial x} - a_{10} \frac{1}{AB} \frac{\partial B}{\partial x} Z5(I) \right) \cdot \\
& \cdot \left[ \frac{1}{A} V(I) \frac{\partial Z2(I)}{\partial x} + \frac{1}{B} U(I) \frac{\partial Z1(I)}{\partial y} - \frac{1}{AB} \frac{\partial B}{\partial x} V(I)Z2(I) + \theta_1 \theta_2 \right] + \\
& + \left( 2a_{12} \frac{1}{B} \frac{\partial Z5(I)}{\partial y} \right) \left[ \frac{1}{B} PN(I) \frac{\partial Z5(I)}{\partial y} + \frac{1}{AB} \frac{\partial B}{\partial x} PS(I)Z4(I) \right] + \\
& + \left( a_{13} \frac{1}{B} \frac{\partial Z5(I)}{\partial y} \right) \left[ \frac{1}{A} PS(I) \frac{\partial Z4(I)}{\partial x} \right] + \\
& + \frac{1}{2} \left( a_{14} \frac{1}{A} \frac{\partial Z5(I)}{\partial x} - a_{14} \frac{1}{AB} \frac{\partial B}{\partial x} Z5(I) \right) \cdot \\
& \cdot \left. \left[ \frac{1}{A} PN(I) \frac{\partial Z5(I)}{\partial x} + \frac{1}{B} PS(I) \frac{\partial Z4(I)}{\partial y} - \frac{1}{AB} \frac{\partial B}{\partial x} PN(I)Z5(I) \right] \right\} AB dx dy = 0.
\end{aligned}$$

Кратко эти уравнения можно записать в виде:

$$\begin{aligned}
& \sum_{I=1}^N \left[ U(I)C1(I,l) + V(I)C2(I,l) + W(I)C3(I,l) + \right. \\
& \left. + PS(I)C4(I,l) + PN(I)C5(I,l) \right] + A_1(l) = 0, \quad (A.3) \\
& \sum_{I=1}^N \left[ U(I)C6(I,l) + V(I)C7(I,l) + W(I)C8(I,l) + \right. \\
& \left. + PS(I)C9(I,l) + PN(I)C10(I,l) \right] + A_2(l) = 0, \\
& \sum_{I=1}^N \left[ U(I)C11(I,l) + V(I)C12(I,l) + \right. \\
& \left. + W(I)C13(I,l) + \right. \\
& \left. + PS(I)C14(I,l) + PN(I)C15(I,l) \right] + A_3(l) - CP(l)q = 0, \\
& \sum_{I=1}^N \left[ U(I)C16(I,l) + V(I)C17(I,l) + \right. \\
& \left. + W(I)C18(I,l) + \right. \\
& \left. + PS(I)C19(I,l) + PN(I)C20(I,l) \right] + A_4(l) = 0.
\end{aligned}$$

$$\sum_{I=1}^N \left[ \begin{aligned} &U(I)C21(I,l) + V(I)C22(I,l) + \\ &+ W(I)C23(I,l) + \\ &+ PS(I)C24(I,l) + PN(I)C25(I,l) \end{aligned} \right] + A_5(l) = 0.$$

где  $A_1(l), A_2(l), A_3(l), A_4(l), A_5(l)$  – нелинейные члены уравнения

$$\begin{aligned} A_1(l) = & \int_0^a \int_{y_1(x)}^{y_2(x)} \left\{ \left( 2a_1 \frac{1}{A} \frac{\partial Z1(l)}{\partial x} + a_3 \frac{1}{AB} \frac{\partial B}{\partial x} Z1(l) - 2a_1 \theta_1 k_x Z1(l) \right) \left[ \frac{1}{2} \theta_1^2 \right] - \right. \\ & - 2a_1 \theta_1 k_x Z1(l) \left( \frac{1}{A} U(I) \frac{\partial Z1(I)}{\partial x} - k_x W(I) Z3(I) \right) + \\ & + \left( 2a_2 \frac{1}{AB} \frac{\partial B}{\partial x} Z1(l) + a_3 \frac{1}{A} \frac{\partial Z1(l)}{\partial x} - a_3 \theta_1 k_x Z1(l) \right) \left[ \frac{1}{2} \theta_2^2 \right] - \\ & - a_3 \theta_1 k_x Z1(l) \left( \frac{1}{B} V(I) \frac{\partial Z2(I)}{\partial y} + \frac{1}{AB} \frac{\partial B}{\partial x} U(I) Z1(I) - k_y W(I) Z3(I) \right) + \\ & + \left( 2a_4 \frac{1}{B} \frac{\partial Z1(l)}{\partial y} - 2a_4 \theta_2 k_x Z1(l) \right) \left[ \theta_1 \theta_2 \right] - \\ & - 2a_4 \theta_2 k_x Z1(l) \left( \frac{1}{A} V(I) \frac{\partial Z2(I)}{\partial x} + \frac{1}{B} U(I) \frac{\partial Z1(I)}{\partial y} - \frac{1}{AB} \frac{\partial B}{\partial x} V(I) Z2(I) \right) - \\ & - a_7 \theta_1 k_x Z1(l) \left( \frac{1}{A} PS(I) \frac{\partial Z4(I)}{\partial x} \right) - \\ & - a_8 \theta_1 k_x Z1(l) \left( \frac{1}{B} PN(I) \frac{\partial Z5(I)}{\partial y} + \frac{1}{AB} \frac{\partial B}{\partial x} PS(I) Z4(I) \right) - \\ & - \frac{1}{2} a_{10} \theta_2 k_x Z1(l) \left( \frac{1}{A} PN(I) \frac{\partial Z5(I)}{\partial x} + \frac{1}{B} PS(I) \frac{\partial Z4(I)}{\partial y} - \right. \\ & \left. - \frac{1}{AB} \frac{\partial B}{\partial x} PN(I) Z5(I) \right) \left. \right\} AB dx dy; \end{aligned} \tag{A.4}$$

$$\begin{aligned}
A_2(I) = & \int_0^a \int_{y_1(x)}^{y_2(x)} \left\{ \left( 2a_2 \frac{1}{B} \frac{\partial Z2(I)}{\partial y} - 2a_2 \theta_2 k_y Z2(I) \right) \left[ \frac{1}{2} \theta_2^2 \right] - \right. \\
& - \left( 2a_2 \theta_2 k_y Z2(I) \right) \left[ \frac{1}{B} V(I) \frac{\partial Z2(I)}{\partial y} + \frac{1}{AB} \frac{\partial B}{\partial x} U(I) Z1(I) - k_y W(I) Z3(I) \right] + \\
& + \left( a_3 \frac{1}{B} \frac{\partial Z2(I)}{\partial y} - a_3 \theta_2 k_y Z2(I) \right) \left[ \frac{1}{2} \theta_1^2 \right] - \\
& - \left( a_3 \theta_2 k_y Z2(I) \right) \left[ \frac{1}{A} U(I) \frac{\partial Z1(I)}{\partial x} - k_x W(I) Z3(I) \right] + \\
& + \left( 2a_4 \frac{1}{A} \frac{\partial Z2(I)}{\partial x} - 2a_4 \frac{1}{AB} \frac{\partial B}{\partial x} Z2(I) - 2a_4 \theta_1 k_y Z2(I) \right) \theta_1 \theta_2 - \\
& - \left( 2a_4 \theta_1 k_y Z2(I) \right) \left[ \frac{1}{A} V(I) \frac{\partial Z2(I)}{\partial x} + \frac{1}{B} U(I) \frac{\partial Z1(I)}{\partial y} - \frac{1}{AB} \frac{\partial B}{\partial x} V(I) Z2(I) \right] - \\
& - \left( a_8 \theta_2 k_y Z2(I) \right) \left[ \frac{1}{A} PS(I) \frac{\partial Z4(I)}{\partial x} \right] - \\
& - \left( a_9 \theta_2 k_y Z2(I) \right) \left[ \frac{1}{B} PN(I) \frac{\partial Z5(I)}{\partial y} + \frac{1}{AB} \frac{\partial B}{\partial x} PS(I) Z4(I) \right] - \\
& - \frac{1}{2} \left( a_{10} \theta_1 k_y Z2(I) \right) \left[ \frac{1}{A} PN(I) \frac{\partial Z5(I)}{\partial x} + \frac{1}{B} PS(I) \frac{\partial Z4(I)}{\partial y} - \right. \\
& \left. - \frac{1}{AB} \frac{\partial B}{\partial x} PN(I) Z5(I) \right] \left. \right\} AB dx dy;
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
A_3(I) = & \int_0^a \int_{y_1(x)}^{y_2(x)} \left\{ \left( -2a_1\theta_1 \frac{1}{A} \frac{\partial Z3(I)}{\partial x} - a_3\theta_2 \frac{1}{B} \frac{\partial Z3(I)}{\partial y} \right) \right. \\
& \cdot \left[ \frac{1}{A} U(I) \frac{\partial Z1(I)}{\partial x} - k_x W(I) Z3(I) - \frac{1}{2} \theta_1 \left( \frac{1}{A} W(I) \frac{\partial Z3(I)}{\partial x} + k_x U(I) Z1(I) \right) \right] + \\
& + \frac{1}{2} \theta_1 \left( -2a_1 k_x Z3(I) - a_3 k_y Z3(I) \right) \left[ -\frac{1}{A} W(I) \frac{\partial Z3(I)}{\partial x} - k_x U(I) Z1(I) \right] + \\
& + \left( -2a_2\theta_2 \frac{1}{B} \frac{\partial Z3(I)}{\partial y} - a_3\theta_1 \frac{1}{A} \frac{\partial Z3(I)}{\partial x} \right) \cdot \\
& \cdot \left[ \frac{1}{B} V(I) \frac{\partial Z2(I)}{\partial y} + \frac{1}{AB} \frac{\partial B}{\partial x} U(I) Z1(I) - k_y W(I) Z3(I) - \right. \\
& \left. - \frac{1}{2} \theta_2 \left( \frac{1}{B} W(I) \frac{\partial Z3(I)}{\partial y} + k_y V(I) Z2(I) \right) \right] + \\
& + \frac{1}{2} \theta_2 \left( -2a_2 k_y Z3(I) - a_3 k_x Z3(I) \right) \left[ -\frac{1}{B} W(I) \frac{\partial Z3(I)}{\partial y} - k_y V(I) Z2(I) \right] + \\
& + \left( -2a_4\theta_1 \frac{1}{B} \frac{\partial Z3(I)}{\partial y} - 2a_4\theta_2 \frac{1}{A} \frac{\partial Z3(I)}{\partial x} \right) \cdot \\
& \cdot \left[ \frac{1}{A} V(I) \frac{\partial Z2(I)}{\partial x} + \frac{1}{B} U(I) \frac{\partial Z1(I)}{\partial y} - \frac{1}{AB} \frac{\partial B}{\partial x} V(I) Z2(I) + \theta_1\theta_2 \right] + \\
& + \left( -a_7\theta_1 \frac{1}{A} \frac{\partial Z3(I)}{\partial x} - a_8\theta_2 \frac{1}{B} \frac{\partial Z3(I)}{\partial y} \right) \left[ \frac{1}{A} PS(I) \frac{\partial Z4(I)}{\partial x} \right] + \\
& + \left( -a_8\theta_1 \frac{1}{A} \frac{\partial Z3(I)}{\partial x} - a_9\theta_2 \frac{1}{B} \frac{\partial Z3(I)}{\partial y} \right) \cdot \\
& \cdot \left[ \frac{1}{B} PN(I) \frac{\partial Z5(I)}{\partial y} + \frac{1}{AB} \frac{\partial B}{\partial x} PS(I) Z4(I) \right] + \\
& + \frac{1}{2} \left( -a_{10}\theta_1 \frac{1}{B} \frac{\partial Z3(I)}{\partial y} - a_{10}\theta_2 \frac{1}{A} \frac{\partial Z3(I)}{\partial x} \right) \cdot \\
& \cdot \left[ \frac{1}{A} PN(I) \frac{\partial Z5(I)}{\partial x} + \frac{1}{B} PS(I) \frac{\partial Z4(I)}{\partial y} - \right. \\
& \left. - \frac{1}{AB} \frac{\partial B}{\partial x} PN(I) Z5(I) \right] \Bigg\} AB dx dy.
\end{aligned}$$

$$A_4(l) = \int_0^a \int_{y_1(x)}^{y_2(x)} \left\{ \left( a_7 \frac{1}{A} \frac{\partial Z4(l)}{\partial x} + a_8 \frac{1}{AB} \frac{\partial B}{\partial x} Z4(l) \right) \left[ \frac{1}{2} \theta_1^2 \right] + \right. \\ \left. + \left( a_8 \frac{1}{A} \frac{\partial Z4(l)}{\partial x} + a_9 \frac{1}{AB} \frac{\partial B}{\partial x} Z4(l) \right) \left[ \frac{1}{2} \theta_2^2 \right] + \right. \\ \left. + \frac{1}{2} a_{10} \frac{1}{B} \frac{\partial Z4(l)}{\partial y} \theta_1 \theta_2 \right\} AB dx dy;$$

$$A_5(l) = \int_0^a \int_{y_1(x)}^{y_2(x)} \left\{ \left( a_8 \frac{1}{B} \frac{\partial Z5(l)}{\partial y} \right) \left[ \frac{1}{2} \theta_1^2 \right] + \right. \\ \left. + \left( a_9 \frac{1}{B} \frac{\partial Z5(l)}{\partial y} \right) \left[ \frac{1}{2} \theta_2^2 \right] + \right. \\ \left. + \frac{1}{2} \left( a_{10} \frac{1}{A} \frac{\partial Z5(l)}{\partial x} - a_{10} \frac{1}{AB} \frac{\partial B}{\partial x} Z5(l) \right) \theta_1 \theta_2 \right\} AB dx dy;$$

Коэффициенты  $C1 - C25$  имеют вид

$$C1(I, l) = \int_0^a \int_{y_1(x)}^{y_2(x)} \left\{ \left( 2a_1 \frac{1}{A} \frac{\partial Z1(l)}{\partial x} + a_3 \frac{1}{AB} \frac{\partial B}{\partial x} Z1(l) \right) \left[ \frac{1}{A} \frac{\partial Z1(I)}{\partial x} \right] + \right. \\ \left. + \left( 2a_2 \frac{1}{AB} \frac{\partial B}{\partial x} Z1(l) + a_3 \frac{1}{A} \frac{\partial Z1(l)}{\partial x} \right) \left[ \frac{1}{AB} \frac{\partial B}{\partial x} Z1(I) \right] + \right. \\ \left. + 2a_4 \frac{1}{B} \frac{\partial Z1(l)}{\partial y} \frac{1}{B} \frac{\partial Z1(I)}{\partial y} + \right. \\ \left. + 2a_5 k_x Z1(l) k_x Z1(I) \right\} AB dx dy;$$

$$C2(I, l) = \int_0^a \int_{y_1(x)}^{y_2(x)} \left\{ \left( 2a_2 \frac{1}{AB} \frac{\partial B}{\partial x} Z1(l) + a_3 \frac{1}{A} \frac{\partial Z1(l)}{\partial x} \right) \left[ \frac{1}{B} \frac{\partial Z2(I)}{\partial y} \right] + \right. \\ \left. + \left( 2a_4 \frac{1}{B} \frac{\partial Z1(l)}{\partial y} \right) \left[ \frac{1}{A} \frac{\partial Z2(I)}{\partial x} - \frac{1}{AB} \frac{\partial B}{\partial x} Z2(I) \right] \right\} AB dx dy;$$

$$C3(I, l) = - \int_0^a \int_{y_1(x)}^{y_2(x)} \left\{ \left( 2a_1 \frac{1}{A} \frac{\partial Z1(l)}{\partial x} + a_3 \frac{1}{AB} \frac{\partial B}{\partial x} Z1(l) \right) k_x Z3(I) + \right. \\ \left. + \left( 2a_2 \frac{1}{AB} \frac{\partial B}{\partial x} Z1(l) + a_3 \frac{1}{A} \frac{\partial Z1(l)}{\partial x} \right) k_y Z3(I) - \right. \\ \left. - 2a_5 k_x Z1(l) \left[ \frac{1}{A} \frac{\partial Z3(I)}{\partial x} \right] \right\} AB dx dy;$$

$$C4(I,l) = \int_0^a \int_{y_1(x)}^{y_2(x)} \left\{ \begin{aligned} &2a_5 k_x Z1(l) [Z4(I)] + \\ &\left( a_7 \frac{1}{A} \frac{\partial Z1(l)}{\partial x} + a_8 \frac{1}{AB} \frac{\partial B}{\partial x} Z1(l) \right) \left[ \frac{1}{A} \frac{\partial Z4(I)}{\partial x} \right] + \\ &\left( a_8 \frac{1}{A} \frac{\partial Z1(l)}{\partial x} + a_9 \frac{1}{AB} \frac{\partial B}{\partial x} Z1(l) \right) \left[ \frac{1}{AB} \frac{\partial B}{\partial x} Z4(I) \right] + \\ &\left( \frac{1}{2} a_{10} \frac{1}{B} \frac{\partial Z1(l)}{\partial y} \right) \left[ \frac{1}{B} \frac{\partial Z4(I)}{\partial y} \right] \end{aligned} \right\} AB dx dy;$$

$$C5(I,l) = \int_0^a \int_{y_1(x)}^{y_2(x)} \left\{ \begin{aligned} &\left( a_8 \frac{1}{A} \frac{\partial Z1(l)}{\partial x} + a_9 \frac{1}{AB} \frac{\partial B}{\partial x} Z1(l) \right) \left[ \frac{1}{B} \frac{\partial Z5(I)}{\partial y} \right] + \\ &\left( \frac{1}{2} a_{10} \frac{1}{B} \frac{\partial Z1(l)}{\partial y} \right) \left[ \frac{1}{A} \frac{\partial Z5(I)}{\partial x} - \frac{1}{AB} \frac{\partial B}{\partial x} Z5(I) \right] \end{aligned} \right\} AB dx dy.$$

$$C6(I,l) = \int_0^a \int_{y_1(x)}^{y_2(x)} \left\{ \begin{aligned} &\left( 2a_2 \frac{1}{B} \frac{\partial Z2(l)}{\partial y} \right) \left[ \frac{1}{AB} \frac{\partial B}{\partial x} Z1(I) \right] + \\ &\left( a_3 \frac{1}{B} \frac{\partial Z2(l)}{\partial y} \right) \left[ \frac{1}{A} \frac{\partial Z1(I)}{\partial x} \right] + \\ &\left( 2a_4 \frac{1}{A} \frac{\partial Z2(l)}{\partial x} - 2a_4 \frac{1}{AB} \frac{\partial B}{\partial x} Z2(l) \right) \left[ \frac{1}{B} \frac{\partial Z1(I)}{\partial y} \right] \end{aligned} \right\} AB dx dy;$$

$$C7(I,l) = \int_0^a \int_{y_1(x)}^{y_2(x)} \left\{ \begin{aligned} &\left( 2a_2 \frac{1}{B} \frac{\partial Z2(l)}{\partial y} \right) \left[ \frac{1}{B} \frac{\partial Z2(I)}{\partial y} \right] + \\ &\left( 2a_4 \frac{1}{A} \frac{\partial Z2(l)}{\partial x} - 2a_4 \frac{1}{AB} \frac{\partial B}{\partial x} Z2(l) \right) \cdot \\ &\left[ \frac{1}{A} \frac{\partial Z2(I)}{\partial x} - \frac{1}{AB} \frac{\partial B}{\partial x} Z2(I) \right] + \\ &+ 2a_6 k_y Z2(l) [k_y Z2(I)] \end{aligned} \right\} AB dx dy;$$

$$C8(I,l) = - \int_0^a \int_{y_1(x)}^{y_2(x)} \left\{ \begin{aligned} &\left( 2a_2 \frac{1}{B} \frac{\partial Z2(l)}{\partial y} \right) [k_y Z3(I)] + \\ &\left( a_3 \frac{1}{B} \frac{\partial Z2(l)}{\partial y} \right) [k_x Z3(I)] - \\ &- 2a_6 k_y Z2(l) \left[ \frac{1}{B} \frac{\partial Z3(I)}{\partial y} \right] \end{aligned} \right\} AB dx dy;$$

$$C9(I,l) = \int_0^a \int_{y_1(x)}^{y_2(x)} \left\{ \begin{aligned} & \left( a_8 \frac{1}{B} \frac{\partial Z2(l)}{\partial y} \right) \left[ \frac{1}{A} \frac{\partial Z4(I)}{\partial x} \right] + \\ & + \left( a_9 \frac{1}{B} \frac{\partial Z2(l)}{\partial y} \right) \left[ \frac{1}{AB} \frac{\partial B}{\partial x} Z4(I) \right] + \\ & + \frac{1}{2} \left( a_{10} \frac{1}{A} \frac{\partial Z2(l)}{\partial x} - a_{10} \frac{1}{AB} \frac{\partial B}{\partial x} Z2(l) \right) \left[ \frac{1}{B} \frac{\partial Z4(I)}{\partial y} \right] \end{aligned} \right\} ABdxdy;$$

$$C10(I,l) = \int_0^a \int_{y_1(x)}^{y_2(x)} \left\{ \begin{aligned} & 2a_6 k_y Z2(l) [Z5(I)] + \\ & + \left( a_9 \frac{1}{B} \frac{\partial Z2(l)}{\partial y} \right) \left[ \frac{1}{B} \frac{\partial Z5(I)}{\partial y} \right] + \\ & + \frac{1}{2} \left( a_{10} \frac{1}{A} \frac{\partial Z2(l)}{\partial x} - a_{10} \frac{1}{AB} \frac{\partial B}{\partial x} Z2(l) \right) \cdot \\ & \left[ \frac{1}{A} \frac{\partial Z5(I)}{\partial x} - \frac{1}{AB} \frac{\partial B}{\partial x} Z5(I) \right] \end{aligned} \right\} ABdxdy.$$

$$C11(I,l) = \int_0^a \int_{y_1(x)}^{y_2(x)} \left\{ \begin{aligned} & \left( -2a_1 k_x Z3(l) - a_3 k_y Z3(l) \right) \left[ \frac{1}{A} \frac{\partial Z1(I)}{\partial x} \right] + \\ & + \left( -2a_2 k_y Z3(l) - a_3 k_x Z3(l) \right) \left[ \frac{1}{AB} \frac{\partial B}{\partial x} U(I) Z1(I) \right] + \\ & + 2a_5 \frac{1}{A} \frac{\partial Z3(l)}{\partial x} k_x Z1(I) \end{aligned} \right\} ABdxdy;$$

$$C12(I,l) = \int_0^a \int_{y_1(x)}^{y_2(x)} \left\{ \begin{aligned} & \left( -2a_2 k_y Z3(l) - a_3 k_x Z3(l) \right) \left[ \frac{1}{B} \frac{\partial Z2(I)}{\partial y} \right] + \\ & + 2a_6 \frac{1}{B} \frac{\partial Z3(l)}{\partial y} k_y Z2(I) \end{aligned} \right\} ABdxdy;$$

$$C13(I,l) = \int_0^a \int_{y_1(x)}^{y_2(x)} \left\{ \begin{aligned} & \left( 2a_1 k_x Z3(l) + a_3 k_y Z3(l) \right) k_x Z3(I) + \\ & + \left( 2a_2 k_y Z3(l) + a_3 k_x Z3(l) \right) k_y Z3(I) + \\ & + 2a_5 \frac{1}{A} \frac{\partial Z3(l)}{\partial x} \left[ \frac{1}{A} \frac{\partial Z3(I)}{\partial x} \right] + \\ & + 2a_6 \frac{1}{B} \frac{\partial Z3(l)}{\partial y} \left[ \frac{1}{B} \frac{\partial Z3(I)}{\partial y} \right] \end{aligned} \right\} ABdxdy;$$

$$\begin{aligned}
C14(I,l) &= \int_0^a \int_{y_1(x)}^{y_2(x)} \left\{ \begin{aligned} &2a_5 \frac{1}{A} \frac{\partial Z3(l)}{\partial x} Z4(I) + \\ &+ \left( -a_7 k_x Z3(l) - a_8 k_y Z3(l) \right) \left[ \frac{1}{A} \frac{\partial Z4(I)}{\partial x} \right] + \\ &+ \left( -a_8 k_x Z3(l) - a_9 k_y Z3(l) \right) \left[ \frac{1}{AB} \frac{\partial B}{\partial x} Z4(I) \right] \end{aligned} \right\} AB dx dy; \\
C15(I,l) &= \int_0^a \int_{y_1(x)}^{y_2(x)} \left\{ \begin{aligned} &2a_6 \frac{1}{B} \frac{\partial Z3(l)}{\partial y} Z5(I) + \\ &+ \left( -a_8 k_x Z3(l) - a_9 k_y Z3(l) \right) \left[ \frac{1}{B} \frac{\partial Z5(I)}{\partial y} \right] \end{aligned} \right\} AB dx dy; \\
C16(I,l) &= \int_0^a \int_{y_1(x)}^{y_2(x)} \left\{ \begin{aligned} &2a_5 Z4(l) [k_x Z1(I)] + \\ &+ \left( a_7 \frac{1}{A} \frac{\partial Z4(l)}{\partial x} + a_8 \frac{1}{AB} \frac{\partial B}{\partial x} Z4(l) \right) \left[ \frac{1}{A} \frac{\partial Z1(I)}{\partial x} \right] + \\ &+ \left( a_8 \frac{1}{A} \frac{\partial Z4(l)}{\partial x} + a_9 \frac{1}{AB} \frac{\partial B}{\partial x} Z4(l) \right) \left[ \frac{1}{AB} \frac{\partial B}{\partial x} Z1(I) \right] + \\ &+ \frac{1}{2} a_{10} \frac{1}{B} \frac{\partial Z4(l)}{\partial y} \left[ \frac{1}{B} \frac{\partial Z1(I)}{\partial y} \right] \end{aligned} \right\} AB dx dy; \\
C17(I,l) &= \int_0^a \int_{y_1(x)}^{y_2(x)} \left\{ \begin{aligned} &\left( a_8 \frac{1}{A} \frac{\partial Z4(l)}{\partial x} + a_9 \frac{1}{AB} \frac{\partial B}{\partial x} Z4(l) \right) \left[ \frac{1}{B} \frac{\partial Z2(I)}{\partial y} \right] + \\ &+ \frac{1}{2} a_{10} \frac{1}{B} \frac{\partial Z4(l)}{\partial y} \left[ \frac{1}{A} \frac{\partial Z2(I)}{\partial x} - \frac{1}{AB} \frac{\partial B}{\partial x} Z2(I) \right] \end{aligned} \right\} AB dx dy; \\
C18(I,l) &= \int_0^a \int_{y_1(x)}^{y_2(x)} \left\{ \begin{aligned} &2a_5 Z4(l) \left[ \frac{1}{A} \frac{\partial Z3(I)}{\partial x} \right] - \\ &- \left( a_7 \frac{1}{A} \frac{\partial Z4(l)}{\partial x} + a_8 \frac{1}{AB} \frac{\partial B}{\partial x} Z4(l) \right) k_x Z3(I) - \\ &- \left( a_8 \frac{1}{A} \frac{\partial Z4(l)}{\partial x} + a_9 \frac{1}{AB} \frac{\partial B}{\partial x} Z4(l) \right) k_y Z3(I) \end{aligned} \right\} AB dx dy;
\end{aligned}$$

$$C19(I,l) = \int_0^a \int_{y_1(x)}^{y_2(x)} \left\{ \begin{aligned} &2a_5 Z4(l) Z4(I) + \\ &+ \left( 2a_{11} \frac{1}{A} \frac{\partial Z4(l)}{\partial x} + a_{13} \frac{1}{AB} \frac{\partial B}{\partial x} Z4(l) \right) \frac{1}{A} \frac{\partial Z4(I)}{\partial x} + \\ &+ \left( 2a_{12} \frac{1}{AB} \frac{\partial B}{\partial x} Z4(l) + a_{13} \frac{1}{A} \frac{\partial Z4(l)}{\partial x} \right) \left[ \frac{1}{AB} \frac{\partial B}{\partial x} Z4(I) \right] + \\ &+ \frac{1}{2} a_{14} \frac{1}{B} \frac{\partial Z4(l)}{\partial y} \left[ \frac{1}{B} \frac{\partial Z4(I)}{\partial y} \right] \end{aligned} \right\} AB dx dy;$$

$$C20(I,l) = \int_0^a \int_{y_1(x)}^{y_2(x)} \left\{ \begin{aligned} &\left( 2a_{12} \frac{1}{AB} \frac{\partial B}{\partial x} Z4(l) + a_{13} \frac{1}{A} \frac{\partial Z4(l)}{\partial x} \right) \left[ \frac{1}{B} \frac{\partial Z5(I)}{\partial y} \right] + \\ &+ \frac{1}{2} a_{14} \frac{1}{B} \frac{\partial Z4(l)}{\partial y} \left[ \frac{1}{A} \frac{\partial Z5(I)}{\partial x} - \frac{1}{AB} \frac{\partial B}{\partial x} Z5(I) \right] \end{aligned} \right\} AB dx dy.$$

$$C21(I,l) = \int_0^a \int_{y_1(x)}^{y_2(x)} \left\{ \begin{aligned} &\left( a_8 \frac{1}{B} \frac{\partial Z5(l)}{\partial y} \right) \left[ \frac{1}{A} \frac{\partial Z1(I)}{\partial x} \right] + \\ &+ \left( a_9 \frac{1}{B} \frac{\partial Z5(l)}{\partial y} \right) \left[ \frac{1}{AB} \frac{\partial B}{\partial x} Z1(I) \right] + \\ &+ \frac{1}{2} \left( a_{10} \frac{1}{A} \frac{\partial Z5(l)}{\partial x} - a_{10} \frac{1}{AB} \frac{\partial B}{\partial x} Z5(l) \right) \left[ \frac{1}{B} \frac{\partial Z1(I)}{\partial y} \right] \end{aligned} \right\} AB dx dy;$$

$$C22(I,l) = \int_0^a \int_{y_1(x)}^{y_2(x)} \left\{ \begin{aligned} &2a_6 Z5(l) [k_y Z2(I)] + \left( a_9 \frac{1}{B} \frac{\partial Z5(l)}{\partial y} \right) \left[ \frac{1}{B} \frac{\partial Z2(I)}{\partial y} \right] + \\ &+ \frac{1}{2} \left( a_{10} \frac{1}{A} \frac{\partial Z5(l)}{\partial x} - a_{10} \frac{1}{AB} \frac{\partial B}{\partial x} Z5(l) \right) \cdot \\ &\cdot \left[ \frac{1}{A} \frac{\partial Z2(I)}{\partial x} - \frac{1}{AB} \frac{\partial B}{\partial x} Z2(I) \right] \end{aligned} \right\} AB dx dy;$$

$$C23(I,l) = \int_0^a \int_{y_1(x)}^{y_2(x)} \left\{ \begin{aligned} &2a_6 Z5(l) \left[ \frac{1}{B} \frac{\partial Z3(I)}{\partial y} \right] - \left( a_8 \frac{1}{B} \frac{\partial Z5(l)}{\partial y} \right) k_x Z3(I) - \\ &- \left( a_9 \frac{1}{B} \frac{\partial Z5(l)}{\partial y} \right) k_y Z3(I) \end{aligned} \right\} AB dx dy;$$

$$\begin{aligned}
C24(I, l) &= \int_0^a \int_{y_1(x)}^{y_2(x)} \left\{ \left( 2a_{12} \frac{1}{B} \frac{\partial Z5(l)}{\partial y} \right) \left[ \frac{1}{AB} \frac{\partial B}{\partial x} Z4(I) \right] + \right. \\
&\quad \left. + \left( a_{13} \frac{1}{B} \frac{\partial Z5(l)}{\partial y} \right) \left[ \frac{1}{A} \frac{\partial Z4(I)}{\partial x} \right] + \right. \\
&\quad \left. + \frac{1}{2} \left( a_{14} \frac{1}{A} \frac{\partial Z5(l)}{\partial x} - a_{14} \frac{1}{AB} \frac{\partial B}{\partial x} Z5(l) \right) \left[ \frac{1}{B} \frac{\partial Z4(I)}{\partial y} \right] \right\} AB dx dy; \\
C25(I, l) &= \int_0^a \int_{y_1(x)}^{y_2(x)} \left\{ 2a_6 Z5(l) Z5(I) + \left( 2a_{12} \frac{1}{B} \frac{\partial Z5(l)}{\partial y} \right) \left[ \frac{1}{B} \frac{\partial Z5(I)}{\partial y} \right] + \right. \\
&\quad \left. + \left( a_{13} \frac{1}{B} \frac{\partial Z5(l)}{\partial y} \right) \left[ \frac{1}{A} PS(I) \frac{\partial Z4(I)}{\partial x} \right] + \right. \\
&\quad \left. + \frac{1}{2} \left( a_{14} \frac{1}{A} \frac{\partial Z5(l)}{\partial x} - a_{14} \frac{1}{AB} \frac{\partial B}{\partial x} Z5(l) \right) \cdot \right. \\
&\quad \left. \cdot \left[ \frac{1}{A} \frac{\partial Z5(I)}{\partial x} - \frac{1}{AB} \frac{\partial B}{\partial x} Z5(I) \right] \right\} AB dx dy.
\end{aligned}$$

$$CP(l) = \int_0^a \int_{y_1(x)}^{y_2(x)} a_{15} Z3(l) AB dx dy.$$

Представим теперь нелинейные члены  $A_1(l), A_2(l), A_3(l), A_4(l), A_5(l)$  в следующем виде:

$$\begin{aligned}
A_1(l) = & \sum_{I=1}^N \sum_{K=1}^N C26(I, K, l)W(I)W(K) + C27(I, K, l)W(I)U(K) + \\
& + C28(I, K, l)U(I)W(K) + C29(I, K, l)U(I)U(K) + \\
& + \sum_{L=1}^N \left( \begin{aligned} & C30(I, K, L, l)W(I)W(K)W(L) + C31(I, K, L, l)W(I)U(K)W(L) + \\ & + C32(I, K, L, l)W(I)W(K)U(L) + C33(I, K, L, l)W(I)U(K)U(L) + \\ & + C34(I, K, L, l)U(I)W(K)W(L) + C35(I, K, L, l)U(I)U(K)W(L) + \\ & + C36(I, K, L, l)U(I)W(K)U(L) + C37(I, K, L, l)U(I)U(K)U(L) \end{aligned} \right) + \\
& + C38(I, K, l)U(I)W(K) + C39(I, K, l)W(I)W(K) + C40(I, K, l)U(I)U(K) + \\
& + C41(I, K, l)W(I)U(K) + C42(I, K, l)W(I)W(K) + C43(I, K, l)V(I)W(K) + \\
& + C44(I, K, l)W(I)V(K) + C45(I, K, l)V(I)V(K) + \\
& + \sum_{L=1}^N \left( \begin{aligned} & C46(I, K, L, l)W(I)W(K)W(L) + C47(I, K, L, l)W(I)V(K)W(L) + \\ & + C48(I, K, L, l)U(I)W(K)W(L) + C49(I, K, L, l)U(I)V(K)W(L) + \\ & C50(I, K, L, l)W(I)W(K)V(L) + C51(I, K, L, l)U(I)W(K)V(L) + \\ & + C52(I, K, L, l)W(I)V(K)V(L) + C53(I, K, L, l)U(I)V(K)V(L) \end{aligned} \right) + \\
& + C54(I, K, l)V(I)W(K) + C55(I, K, l)V(I)U(K) + C56(I, K, l)U(I)W(K) + \\
& + C57(I, K, l)U(I)U(K) + C58(I, K, l)W(I)W(K) + C59(I, K, l)W(I)U(K) + \\
& + C60(I, K, l)W(I)W(K) + C61(I, K, l)W(I)V(K) + C62(I, K, l)U(I)W(K) + \\
& + C63(I, K, l)U(I)V(K) + \\
& + \sum_{L=1}^N \left( \begin{aligned} & C64(I, K, L, l)W(I)W(K)W(L) + C65(I, K, L, l)W(I)U(K)W(L) + \\ & + C66(I, K, L, l)V(I)W(K)W(L) + C67(I, K, L, l)V(I)U(K)W(L) + \\ & C68(I, K, L, l)W(I)W(K)V(L) + C69(I, K, L, l)W(I)U(K)V(L) + \\ & + C70(I, K, L, l)V(I)W(K)V(L) + C71(I, K, L, l)V(I)U(K)V(L) \end{aligned} \right) + \\
& + C72(I, K, l)V(I)W(K) + C73(I, K, l)U(I)W(K) + \\
& + C74(I, K, l)V(I)W(K) + C75(I, K, l)V(I)V(K) + \\
& + C76(I, K, l)U(I)V(K) + C77(I, K, l)V(I)V(K) + \\
& + C78(I, K, l)PS(I)W(K) + C79(I, K, l)PS(I)U(K) + \\
& + C80(I, K, l)PN(I)W(K) + C81(I, K, l)PN(I)U(K) + \\
& + C82(I, K, l)PS(I)W(K) + C83(I, K, l)PS(I)U(K) + \\
& + C84(I, K, l)PN(I)W(K) + C85(I, K, l)PN(I)V(K) + \\
& + C86(I, K, l)PS(I)W(K) + C87(I, K, l)PS(I)V(K) + \\
& + C88(I, K, l)PN(I)W(K) + C90(I, K, l)PN(I)V(K);
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
A_2(l) = & \sum_{I=1}^N \sum_{K=1}^N \{W(I)W(K)C91(I, K, l) + V(I)W(K)C92(I, K, l) + \\
& + W(I)V(K)C93(I, K, l) + V(I)V(K)C94(I, K, l) + V(I)W(K)C95(I, K, l) + \\
& + V(I)V(K)C96(I, K, l) + U(I)W(K)C97(I, K, l) + U(I)V(K)C98(I, K, l) + \\
& + W(I)W(K)C99(I, K, l) + W(I)V(K)C100(I, K, l) + W(I)W(K)C101(I, K, l) + \\
& + W(I)U(K)C102(I, K, l) + U(I)W(K)C103(I, K, l) + U(I)U(K)C104(I, K, l) + \\
& + U(I)W(K)C105(I, K, l) + U(I)V(K)C106(I, K, l) + W(I)W(K)C107(I, K, l) + \\
& + W(I)V(K)C108(I, K, l) + W(I)W(K)C109(I, K, l) + W(I)V(K)C110(I, K, l) + \\
& + U(I)W(K)C111(I, K, l) + U(I)V(K)C112(I, K, l) + V(I)W(K)C113(I, K, l) + \\
& + V(I)U(K)C114(I, K, l) + U(I)W(K)C115(I, K, l) + U(I)U(K)C116(I, K, l) + \\
& + V(I)W(K)C117(I, K, l) + V(I)U(K)C118(I, K, l) + PS(I)W(K)C119(I, K, l) + \\
& + PS(I)V(K)C120(I, K, l) + PN(I)W(K)C121(I, K, l) + \\
& + PN(I)V(K)C122(I, K, l) + PS(I)W(K)C123(I, K, l) + \\
& + PS(I)V(K)C124(I, K, l) + PN(I)W(K)C125(I, K, l) + \\
& + PN(I)U(K)C126(I, K, l) + PS(I)W(K)C127(I, K, l) + \\
& + PS(I)U(K)C128(I, K, l) + PN(I)W(K)C129(I, K, l) + \\
& + PN(I)U(K)C130(I, K, l) + \\
& + \sum_{L=1}^N [W(I)W(K)W(L)C131(I, K, L, l) + W(I)V(K)W(L)C132(I, K, L, l) + \\
& + V(I)W(K)W(L)C133(I, K, L, l) + V(I)V(K)W(L)C134(I, K, L, l) + \\
& + W(I)W(K)V(L)C135(I, K, L, l) + W(I)V(K)V(L)C136(I, K, L, l) + \\
& + V(I)W(K)V(L)C137(I, K, L, l) + V(I)V(K)V(L)C138(I, K, L, l) + \\
& + W(I)W(K)W(L)C139(I, K, L, l) + W(I)U(K)W(L)C140(I, K, L, l) + \\
& + U(I)W(K)W(L)C141(I, K, L, l) + U(I)U(K)W(L)C142(I, K, L, l) + \\
& + W(I)W(K)V(L)C143(I, K, L, l) + W(I)U(K)V(L)C144(I, K, L, l) + \\
& + U(I)W(K)V(L)C145(I, K, L, l) + U(I)U(K)V(L)C146(I, K, L, l) + \\
& + W(I)W(K)W(L)C147(I, K, L, l) + W(I)V(K)W(L)C148(I, K, L, l) + \\
& + U(I)W(K)W(L)C149(I, K, L, l) + U(I)V(K)W(L)C150(I, K, L, l) + \\
& + W(I)W(K)U(L)C151(I, K, L, l) + W(I)V(K)U(L)C152(I, K, L, l) + \\
& + U(I)W(K)U(L)C153(I, K, L, l) + U(I)V(K)U(L)C154(I, K, L, l)];
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
A_3(l) = & \sum_{I=1}^N \sum_{K=1}^N \{ U(I)W(K)C155(I, K, l) + U(I)U(K)C156(I, K, l) + \\
& + W(I)W(K)C157(I, K, l) + W(I)U(K)C158(I, K, l) + U(I)W(K)C159(I, K, l) + \\
& + U(I)V(K)C160(I, K, l) + W(I)W(K)C161(I, K, l) + W(I)V(K)C162(I, K, l) + \\
& + W(I)W(K)C163(I, K, l) + U(I)W(K)C164(I, K, l) + U(I)U(K)C165(I, K, l) + \\
& + U(I)U(K)C166(I, K, l) + V(I)W(K)C167(I, K, l) + V(I)V(K)C168(I, K, l) + \\
& + U(I)W(K)C169(I, K, l) + U(I)V(K)C170(I, K, l) + W(I)W(K)C171(I, K, l) + \\
& + W(I)V(K)C172(I, K, l) + V(I)W(K)C173(I, K, l) + V(I)U(K)C174(I, K, l) + \\
& + U(I)W(K)C175(I, K, l) + U(I)U(K)C176(I, K, l) + W(I)W(K)C177(I, K, l) + \\
& + W(I)U(K)C178(I, K, l) + W(I)W(K)C179(I, K, l) + W(I)V(K)C180(I, K, l) + \\
& + V(I)W(K)C181(I, K, l) + V(I)V(K)C182(I, K, l) + V(I)W(K)C183(I, K, l) + \\
& + V(I)U(K)C184(I, K, l) + U(I)W(K)C185(I, K, l) + U(I)U(K)C186(I, K, l) + \\
& + V(I)W(K)C187(I, K, l) + V(I)U(K)C188(I, K, l) + V(I)W(K)C189(I, K, l) + \\
& + V(I)V(K)C190(I, K, l) + U(I)W(K)C191(I, K, l) + U(I)V(K)C192(I, K, l) + \\
& + V(I)W(K)C193(I, K, l) + V(I)V(K)C194(I, K, l) + PS(I)W(K)C195(I, K, l) + \\
& + PS(I)U(K)C196(I, K, l) + PS(I)W(K)C197(I, K, l) + PS(I)V(K)C198(I, K, l) + \\
& + PN(I)W(K)C199(I, K, l) + PN(I)U(K)C200(I, K, l) + PS(I)W(K)C201(I, K, l) + \\
& + PS(I)U(K)C202(I, K, l) + PN(I)W(K)C203(I, K, l) + PN(I)V(K)C204(I, K, l) + \\
& + PS(I)W(K)C205(I, K, l) + PS(I)V(K)C206(I, K, l) + PN(I)W(K)C207(I, K, l) + \\
& + PN(I)U(K)C208(I, K, l) + PS(I)W(K)C209(I, K, l) + PS(I)U(K)C210(I, K, l) + \\
& + PN(I)W(K)C211(I, K, l) + PN(I)U(K)C212(I, K, l) + PN(I)W(K)C213(I, K, l) + \\
& + PN(I)V(K)C214(I, K, l) + PS(I)W(K)C215(I, K, l) + PS(I)V(K)C216(I, K, l) + \\
& + PN(I)W(K)C217(I, K, l) + PN(I)V(K)C218(I, K, l) +
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& + \sum_{L=1}^N [W(I)W(K)W(L)C219(I, K, L, l) + W(I)U(K)W(L)C220(I, K, L, l) + \\
& + W(I)W(K)U(L)C221(I, K, L, l) + W(I)U(K)U(L)C222(I, K, L, l) + \\
& + U(I)W(K)W(L)C223(I, K, L, l) + U(I)U(K)W(L)C224(I, K, L, l) + \\
& + U(I)W(K)U(L)C225(I, K, L, l) + U(I)U(K)U(L)C226(I, K, L, l) + \\
& + W(I)W(K)W(L)C227(I, K, L, l) + W(I)U(K)W(L)C228(I, K, L, l) + \\
& + W(I)W(K)V(L)C229(I, K, L, l) + W(I)U(K)V(L)C230(I, K, L, l) + \\
& + U(I)W(K)W(L)C231(I, K, L, l) + U(I)U(K)W(L)C232(I, K, L, l) + \\
& + U(I)W(K)V(L)C233(I, K, L, l) + U(I)U(K)V(L)C234(I, K, L, l) + \\
& + W(I)W(K)W(L)C235(I, K, L, l) + W(I)U(K)W(L)C236(I, K, L, l) + \\
& + W(I)W(K)V(L)C237(I, K, L, l) + W(I)U(K)V(L)C238(I, K, L, l) + \\
& + U(I)W(K)W(L)C239(I, K, L, l) + U(I)U(K)W(L)C240(I, K, L, l) + \\
& + U(I)W(K)V(L)C241(I, K, L, l) + U(I)U(K)V(L)C242(I, K, L, l) + \\
& + W(I)W(K)W(L)C243(I, K, L, l) + W(I)V(K)W(L)C244(I, K, L, l) + \\
& + W(I)W(K)V(L)C245(I, K, L, l) + W(I)V(K)V(L)C246(I, K, L, l) + \\
& + U(I)W(K)W(L)C247(I, K, L, l) + U(I)V(K)W(L)C248(I, K, L, l) + \\
& + U(I)W(K)V(L)C249(I, K, L, l) + U(I)V(K)V(L)C250(I, K, L, l) + \\
& + W(I)W(K)W(L)C251(I, K, L, l) + W(I)V(K)W(L)C252(I, K, L, l) + \\
& + W(I)W(K)V(L)C253(I, K, L, l) + W(I)V(K)V(L)C254(I, K, L, l) + \\
& + V(I)W(K)W(L)C255(I, K, L, l) + V(I)V(K)W(L)C256(I, K, L, l) + \\
& + V(I)W(K)V(L)C257(I, K, L, l) + V(I)V(K)V(L)C258(I, K, L, l) + \\
& + W(I)W(K)W(L)C259(I, K, L, l) + W(I)V(K)W(L)C260(I, K, L, l) + \\
& + W(I)W(K)U(L)C261(I, K, L, l) + W(I)V(K)U(L)C262(I, K, L, l) + \\
& + V(I)W(K)W(L)C263(I, K, L, l) + V(I)V(K)W(L)C264(I, K, L, l) + \\
& + V(I)W(K)U(L)C265(I, K, L, l) + V(I)V(K)U(L)C266(I, K, L, l)];
\end{aligned}$$

$$A_4(l) = \sum_{I=1}^N \sum_{K=1}^N \left\{ \begin{aligned}
& W(I)W(K)C267(I, K, l) + U(I)W(K)C268(I, K, l) + \\
& + W(I)U(K)C269(I, K, l) + U(I)U(K)C270(I, K, l) + \\
& + W(I)W(K)C271(I, K, l) + W(I)V(K)C272(I, K, l) + \\
& + V(I)W(K)C273(I, K, l) + V(I)V(K)C274(I, K, l) + \\
& + W(I)W(K)C275(I, K, l) + W(I)V(K)C276(I, K, l) + \\
& + U(I)W(K)C277(I, K, l) + U(I)V(K)C278(I, K, l)
\end{aligned} \right\};$$

$$A_5(l) = \sum_{I=1}^N \sum_{K=1}^N \left\{ \begin{array}{l} W(I)W(K)C279(I, K, l) + W(I)U(K)C280(I, K, l) + \\ + U(I)W(K)C281(I, K, l) + U(I)U(K)C282(I, K, l) + \\ + W(I)W(K)C283(I, K, l) + V(I)W(K)C284(I, K, l) + \\ + W(I)V(K)C285(I, K, l) + V(I)V(K)C286(I, K, l) + \\ + W(I)W(K)C287(I, K, l) + W(I)V(K)C288(I, K, l) + \\ + U(I)W(K)C289(I, K, l) + U(I)V(K)C290(I, K, l) \end{array} \right\}.$$

Приведя подобные члены в этих соотношениях, получим в окончательном виде выражения для  $A_1(l), A_2(l), A_3(l), A_4(l), A_5(l)$ . Здесь коэффициенты  $C26 - C290$  сгруппированы в коэффициенты  $B1 - B107$ :

$$\begin{aligned} A_1(l) = & \sum_{I=1}^N \sum_{K=1}^N \left\{ U(I) \left( U(K) \left[ B1(I, K, l) + \sum_{L=1}^N U(L)B2(I, K, L, l) \right] + \right. \right. \\ & + V(K) \left[ B3(I, K, l) + \sum_{L=1}^N V(L)B4(I, K, L, l) \right] \left. \right) + \\ & + V(I) \left( V(K)B5(I, K, l) + W(K)B6(I, K, l) + \right. \\ & + U(K) \left[ B7(I, K, l) + \sum_{L=1}^N V(L)B8(I, K, L, l) \right] \left. \right) + \\ & + W(I) \left( U(K)B9(I, K, l) + V(K)B10(I, K, l) + W(K) \left[ B11(I, K, l) + \right. \right. \\ & + \left. \sum_{L=1}^N \left( U(L)B12(I, K, L, l) + V(L)B13(I, K, L, l) + W(L)B14(I, K, L, l) \right) \right] \left. \right) + \\ & + PS(I)(U(K)B15(I, K, l) + V(K)B16(I, K, l) + W(K)B17(I, K, l)) + \\ & + PN(I)(U(K)B18(I, K, l) + V(K)B19(I, K, l) + W(K)B20(I, K, l)); \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
A_2(l) = & \sum_{I=1}^N \sum_{K=1}^N \left\{ U(I) \left( U(K) \left[ B21(I, K, l) + \right. \right. \right. \\
& + \sum_{L=1}^N (V(L)B22(I, K, L, l) + W(L)B23(I, K, L, l)) \left. \left. \left. \right] + \right. \right. \\
& + V(K) \left[ B24(I, K, l) + \sum_{L=1}^N (U(L)B25(I, K, L, l) + W(L)B26(I, K, L, l)) \right] + \\
& + W(K) \left[ B27(I, K, l) + \right. \\
& + \left. \left. \sum_{L=1}^N (U(L)B28(I, K, L, l) + V(L)B29(I, K, L, l) + W(L)B30(I, K, L, l)) \right] \right\} + \\
& + V(I) \left( U(K)B31(I, K, l) + V(K) \left[ B32(I, K, l) + \right. \right. \\
& + \left. \left. \sum_{L=1}^N (V(L)B33(I, K, L, l) + W(L)B34(I, K, L, l)) \right] + \right. \\
& + W(K) \left[ B35(I, K, l) + \sum_{L=1}^N (V(L)B36(I, K, L, l) + W(L)B37(I, K, L, l)) \right] \left. \right) + \\
& + W(I) \left( U(K) \left[ B38(I, K, l) + \right. \right. \\
& + \left. \left. \sum_{L=1}^N (V(L)B39(I, K, L, l) + W(L)B40(I, K, L, l)) \right] + \right. \\
& + V(K) \left[ B41(I, K, l) + \sum_{L=1}^N (U(L)B42(I, K, L, l) + W(L)B43(I, K, L, l)) \right] + \\
& + W(K) \left[ B44(I, K, l) + \right. \\
& + \left. \left. \sum_{L=1}^N (U(L)B45(I, K, L, l) + V(L)B46(I, K, L, l) + W(L)B47(I, K, L, l)) \right] \right\} + \\
& + PS(I)(U(K)B48(I, K, l) + V(K)B49(I, K, l) + W(K)B50(I, K, l)) + \\
& + PN(I)(U(K)B51(I, K, l) + V(K)B52(I, K, l) + W(K)B53(I, K, l));
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
A_3(I) = & \sum_{I=1}^N \sum_{K=1}^N \left\{ U(I) \left( U(K) [B54(I, K, l) + \right. \right. \\
& + \sum_{L=1}^N (U(L)B55(I, K, L, l) + V(L)B56(I, K, L, l) + W(L)B57(I, K, L, l)) \left. \right] + \\
& + V(K) \left[ B58(I, K, l) + \sum_{L=1}^N (V(L)B59(I, K, L, l) + W(L)B60(I, K, L, l)) \right] + \\
& + W(K) \left[ B61(I, K, l) + \right. \\
& + \sum_{L=1}^N (U(L)B62(I, K, L, l) + V(L)B63(I, K, L, l) + W(L)B64(I, K, L, l)) \left. \right] \left. \right) \\
& + V(I) \left( U(K)B65(I, K, l) + V(K) \left[ B66(I, K, l) + \right. \right. \\
& + \sum_{L=1}^N (U(L)B67(I, K, L, l) + V(L)B68(I, K, L, l) + W(L)B69(I, K, L, l)) \left. \right] + \\
& + W(K) \left[ B70(I, K, l) + \right. \\
& + \sum_{L=1}^N (U(L)B71(I, K, L, l) + V(L)B72(I, K, L, l) + W(L)B73(I, K, L, l)) \left. \right] \left. \right) + \\
& + W(I) (U(K) [B74(I, K, l) + \\
& + \sum_{L=1}^N (U(L)B75(I, K, L, l) + V(L)B76(I, K, L, l) + W(L)B77(I, K, L, l)) \left. \right] + \\
& + V(K) \left[ B78(I, K, l) + \right. \\
& + \sum_{L=1}^N (U(L)B79(I, K, L, l) + V(L)B80(I, K, L, l) + W(L)B81(I, K, L, l)) \left. \right] + \\
& + W(K) \left[ B82(I, K, l) + \right. \\
& + \sum_{L=1}^N (U(L)B83(I, K, L, l) + V(L)B84(I, K, L, l) + W(L)B85(I, K, L, l)) \left. \right] \left. \right) + \\
& + PS(I) (U(K)B86(I, K, l) + V(K)B87(I, K, l) + W(K)B88(I, K, l)) + \\
& + PN(I) (U(K)B89(I, K, l) + V(K)B90(I, K, l) + W(K)B91(I, K, l));
\end{aligned}$$

$$A_4(l) = \sum_{I=1}^N \sum_{K=1}^N \left\{ \begin{array}{l} U(I)(U(K)B92(I, K, l) + V(K)B93(I, K, l) + \\ + W(K)B94(I, K, l)) + \\ + V(I)(V(K)B95(I, K, l) + W(K)B96(I, K, l)) + \\ + W(I)(U(K)B97(I, K, l) + V(K)B98(I, K, l) + \\ + W(K)B99(I, K, l)) \end{array} \right\};$$

$$A_5(l) = \sum_{I=1}^N \sum_{K=1}^N \left\{ \begin{array}{l} U(I)(U(K)B100(I, K, l) + V(K)B101(I, K, l) + \\ + W(K)B102(I, K, l)) + \\ + V(I)(V(K)B103(I, K, l) + W(K)B104(I, K, l)) + \\ + W(I)(U(K)B105(I, K, l) + V(K)B106(I, K, l) + \\ + W(K)B107(I, K, l)) \end{array} \right\}.$$

С учетом группировки коэффициентов в нелинейных членах  $A_1(l), A_2(l), A_3(l), A_4(l), A_5(l)$ , проведем линеаризацию уравнений системы (A.3):

$$\begin{aligned}
& \sum_{I=1}^N \left\{ u(I) \left( C1(I,l) + \sum_{K=1}^N \left( U(K) \left[ D1(I,K,l) + \sum_{L=1}^N U(L) D2(I,K,L,l) \right] + \right. \right. \right. \\
& + V(K) \left[ D3(I,K,l) + \sum_{L=1}^N V(L) D4(I,K,L,l) \right] + \\
& \left. \left. \left. + W(K) \left[ D5(I,K,l) + \sum_{L=1}^N W(L) D6(I,K,L,l) \right] + PS(K) D7(I,K,l) + PN(K) D8(I,K,l) \right) \right) \right\} + \\
& + v(I) \left( C2(I,l) + \sum_{K=1}^N \left( U(K) \left[ D9(I,K,l) + \sum_{L=1}^N V(L) D10(I,K,L,l) \right] + \right. \right. \\
& + V(K) \left[ D11(I,K,l) + \sum_{L=1}^N U(L) D12(I,K,L,l) \right] + \\
& + W(K) \left[ D13(I,K,l) + \sum_{L=1}^N W(L) D14(I,K,L,l) \right] + PS(K) D15(I,K,l) + \\
& \left. \left. \left. + PN(K) D16(I,K,l) \right) \right) \right\} + w(I) \left( C3(I,l) + \sum_{K=1}^N \left( U(K) D17(I,K,l) + V(K) D18(I,K,l) + \right. \right. \\
& + W(K) \left[ D19(I,K,l) + \sum_{L=1}^N \left( U(L) D20(I,K,L,l) + V(L) D21(I,K,L,l) + \right. \right. \\
& \left. \left. \left. + W(L) D22(I,K,L,l) \right) \right] + PS(K) D23(I,K,l) + PN(K) D24(I,K,l) \right) \right\} + \\
& + ps(I) \left( C4(I,l) + \sum_{K=1}^N \left( U(K) D25(I,K,l) + V(K) D26(I,K,l) + W(K) D27(I,K,l) \right) \right) \right\} + \\
& + pn(I) \left( C5(I,l) + \sum_{K=1}^N \left( U(K) D28(I,K,l) + V(K) D29(I,K,l) + W(K) D30(I,K,l) \right) \right) \right\} = 0,
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& \sum_{l=1}^N \left\{ u(I) \left( C6(I,l) + \sum_{K=1}^N \left( U(K) \left[ D31(I,K,l) + \sum_{L=1}^N (V(L)D32(I,K,L,l) + \right. \right. \right. \right. \\
& \left. \left. \left. + W(L)D33(I,K,L,l) \right] + V(K) \left[ D34(I,K,l) + \sum_{L=1}^N (U(L)D35(I,K,L,l) + \right. \right. \right. \right. \\
& \left. \left. \left. + W(L)D36(I,K,L,l) \right] + W(K) \left[ D37(I,K,l) + \sum_{L=1}^N (U(L)D38(I,K,L,l) + \right. \right. \right. \\
& \left. \left. \left. + V(L)D39(I,K,L,l) + W(L)D40(I,K,L,l) \right] + PS(K)D41(I,K,l) + \right. \right. \\
& \left. \left. + PN(K)D42(I,K,l) \right) \right) + v(I) \left( C7(I,l) + \sum_{K=1}^N (U(K) \left[ D43(I,K,l) + \right. \right. \\
& \left. \left. + \sum_{L=1}^N (U(L)D44(I,K,L,l) + W(L)D45(I,K,L,l)) \right] + V(K) \left[ D46(I,K,l) + \right. \right. \\
& \left. \left. + \sum_{L=1}^N (V(L)D47(I,K,L,l) + W(L)D48(I,K,L,l)) \right] + W(K) \left[ D49(I,K,l) + \right. \right. \\
& \left. \left. + \sum_{L=1}^N (U(L)D50(I,K,L,l) + V(L)D51(I,K,L,l) + W(L)D52(I,K,L,l)) \right] + \right. \\
& \left. \left. + PS(K)D53(I,K,l) + PN(K)D54(I,K,l) \right) \right) + w(I) \left( C8(I,l) + \sum_{K=1}^N \left( U(K) \times \right. \right. \\
& \left. \left. \times \left[ D55(I,K,l) + \sum_{L=1}^N (U(L)D56(I,K,L,l) + V(L)D57(I,K,L,l) + W(L)D58(I,K,L,l)) \right] + \right. \right. \\
& \left. \left. + V(K) \left[ D59(I,K,l) + \sum_{L=1}^N (U(L)D60(I,K,L,l) + V(L)D61(I,K,L,l) + W(L)D62(I,K,L,l)) \right] + \right. \right. \\
& \left. \left. + W(K) \left[ D63(I,K,l) + \sum_{L=1}^N \left( U(L)D64(I,K,L,l) + V(L)D65(I,K,L,l) + \right. \right. \right. \right. \\
& \left. \left. \left. + W(L)D66(I,K,L,l) \right) \right] + PS(K)D67(I,K,l) + PN(K)D68(I,K,l) \right) \right) + \\
& + ps(I) \left( C9(I,l) + \sum_{K=1}^N \left( U(K)D69(I,K,l) + V(K)D70(I,K,l) + W(K)D71(I,K,l) \right) \right) + \\
& + pn(I) \left( C10(I,l) + \sum_{K=1}^N \left( U(K)D72(I,K,l) + V(K)D73(I,K,l) + W(K)D74(I,K,l) \right) \right) \left. \right\} = 0,
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& \sum_{I=1}^N \left\{ u(I) \left( C11(I,l) + \sum_{K=1}^N \left( U(K) \times \right. \right. \right. \\
& \times \left[ D75(I,K,l) + \sum_{L=1}^N (U(L)D76(I,K,L,l) + V(L)D77(I,K,L,l) + W(L)D78(I,K,L,l)) \right] + \\
& + V(K) \left[ D79(I,K,l) + \sum_{L=1}^N (V(L)D80(I,K,L,l) + W(L)D81(I,K,L,l)) \right] + W(K) \times \\
& \times \left[ D82(I,K,l) + \sum_{L=1}^N (U(L)D83(I,K,L,l) + V(L)D84(I,K,L,l) + W(L)D85(I,K,L,l)) \right] + \\
& + PS(K)D86(I,K,l) + PN(K)D87(I,K,l) \left. \left. \left. \right) \right) + v(I) \left( C12(I,l) + \sum_{K=1}^N \left( U(K) \times \right. \right. \right. \\
& \times \left[ D88(I,K,l) + \sum_{L=1}^N (U(L)D89(I,K,L,l) + V(L)D90(I,K,L,l) + W(L)D91(I,K,L,l)) \right] + \\
& + V(K) \left[ D92(I,K,l) + \sum_{L=1}^N (U(L)D93(I,K,L,l) + V(L)D94(I,K,L,l) + W(L)D95(I,K,L,l)) \right] + \\
& + W(K) \left[ D96(I,K,l) + \sum_{L=1}^N (U(L)D97(I,K,L,l) + V(L)D98(I,K,L,l) + W(L)D99(I,K,L,l)) \right] + \\
& + PN(K)D101(I,K,l) \left. \left. \left. \right) \right) + \right. \\
& + w(I) \left( C13(I,l) + \sum_{K=1}^N \left( U(K) \times \right. \right. \\
& \times \left[ D102(I,K,l) + \sum_{L=1}^N (U(L)D103(I,K,L,l) + V(L)D104(I,K,L,l) + W(L)D105(I,K,L,l)) \right] + \\
& + V(K) \left[ D106(I,K,l) + \sum_{L=1}^N (U(L)D107(I,K,L,l) + V(L)D108(I,K,L,l) + W(L)D109(I,K,L,l)) \right] + \\
& + W(K) \left[ D110(I,K,l) + \sum_{L=1}^N \left( U(L)D111(I,K,L,l) + V(L)D112(I,K,L,l) + \right. \right. \\
& + W(L)D113(I,K,L,l) \left. \left. \right) \right] + PS(K)D114(I,K,l) + PN(K)D115(I,K,l) \left. \left. \left. \right) \right) + \right. \\
& + ps(I) \left( C14(I,l) + \sum_{K=1}^N \left( U(K)D116(I,K,l) + V(K)D117(I,K,l) + W(K)D118(I,K,l) \right) \right) + \\
& + pn(I) \left( C15(I,l) + \sum_{K=1}^N \left( U(K)D119(I,K,l) + V(K)D120(I,K,l) + W(K)D121(I,K,l) \right) \right) \left. \left. \right) \right\} - \\
& - CP(l)\Delta q = 0,
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& \sum_{I=1}^N \left\{ u(I) \left( C16(I,l) + \sum_{K=1}^N \left( U(K)D122(I,K,l) + V(K)D123(I,K,l) + W(K)D124(I,K,l) \right) \right) \right. \\
& + v(I) \left( C17(I,l) + \sum_{K=1}^N \left( U(K)D125(I,K,l) + V(K)D126(I,K,l) + W(K)D127(I,K,l) \right) \right) \\
& + w(I) \left( C18(I,l) + \sum_{K=1}^N \left( U(K)D128(I,K,l) + V(K)D129(I,K,l) + W(K)D130(I,K,l) \right) \right) \\
& \left. + ps(I)C19(I,l) + pn(I)C20(I,l) \right\} = 0,
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& \sum_{I=1}^N \left\{ u(I) \left( C21(I,l) + \sum_{K=1}^N \left( U(K)D131(I,K,l) + V(K)D132(I,K,l) + W(K)D133(I,K,l) \right) \right) \right. \\
& + v(I) \left( C22(I,l) + \sum_{K=1}^N \left( U(K)D134(I,K,l) + V(K)D135(I,K,l) + W(K)D136(I,K,l) \right) \right) \\
& + w(I) \left( C23(I,l) + \sum_{K=1}^N \left( U(K)D137(I,K,l) + V(K)D138(I,K,l) + W(K)D139(I,K,l) \right) \right) \\
& \left. + ps(I)C24(I,l) + pn(I)C25(I,l) \right\} = 0,
\end{aligned}$$

$$l = 1, 2, \dots, N.$$

Здесь через коэффициенты  $D1 - D139$  введены следующие обозначения, притом порядок индексов имеет существенное значение:

$$\begin{aligned}
D1(I, K, l) &= B1(I, K, l) + B1(K, I, l), \\
D2(I, K, L, l) &= B2(I, K, L, l) + B2(K, I, L, l) + B2(L, K, I, l), \\
D3(I, K, l) &= B3(I, K, l) + B7(K, I, l), \\
D4(I, K, L, l) &= B4(I, K, L, l) + B8(K, I, L, l), \\
D5(I, K, l) &= B9(K, I, l), \\
D6(I, K, L, l) &= B12(L, K, I, l), \\
D7(I, K, l) &= B15(K, I, l), \\
D8(I, K, l) &= B18(K, I, l), \\
D9(I, K, l) &= B3(K, I, l) + B7(I, K, l), \\
D10(I, K, L, l) &= B4(K, I, L, l) + B8(I, K, L, l) + B8(L, K, I, l), \\
D11(I, K, l) &= B5(I, K, l) + B5(K, I, l), \\
D12(I, K, L, l) &= B4(L, K, I, l), \\
D13(I, K, l) &= B6(I, K, l) + B10(K, I, l), \\
D14(I, K, L, l) &= B13(L, K, I, l), \\
D15(I, K, l) &= B16(K, I, l), \\
D16(I, K, l) &= B19(K, I, l), \\
D17(I, K, l) &= B9(I, K, l), \\
D18(I, K, l) &= B6(K, I, l) + B10(I, K, l), \\
D19(I, K, l) &= B11(I, K, l) + B11(K, I, l), \\
D20(I, K, L, l) &= B12(I, K, L, l) + B12(K, I, L, l), \\
D21(I, K, L, l) &= B13(K, I, L, l) + B13(I, K, L, l), \\
D22(I, K, L, l) &= B14(I, K, L, l) + B14(K, I, L, l) + B14(L, K, I, l), \\
D23(I, K, l) &= B17(K, I, l), \\
D24(I, K, l) &= B20(K, I, l), \\
D25(I, K, l) &= B15(I, K, l), \\
D26(I, K, l) &= B16(I, K, l), \\
D27(I, K, l) &= B17(I, K, l), \\
D28(I, K, l) &= B18(I, K, l), \\
D29(I, K, l) &= B19(I, K, l), \\
D30(I, K, l) &= B20(I, K, l), \\
D31(I, K, l) &= B21(I, K, l) + B21(K, I, l), \\
D32(I, K, L, l) &= B22(I, K, L, l) + B22(K, I, L, l), \\
D33(I, K, L, l) &= B23(K, I, L, l) + B23(I, K, L, l),
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
D34(I, K, l) &= B24(I, K, l) + B31(K, I, l), \\
D35(I, K, L, l) &= B25(L, K, I, l) + B25(I, K, L, l), \\
D36(I, K, L, l) &= B26(I, K, L, l) + B42(L, K, I, l), \\
D37(I, K, l) &= B27(I, K, l) + B38(K, I, l), \\
D38(I, K, L, l) &= B28(I, K, L, l) + B28(L, K, I, l), \\
D39(I, K, L, l) &= B29(I, K, L, l) + B39(K, I, L, l), \\
D40(I, K, L, l) &= B30(I, K, L, l) + B40(K, I, L, l) + B45(L, K, I, l), \\
D41(I, K, l) &= B48(K, I, l), \\
D42(I, K, l) &= B51(K, I, l), \\
D43(I, K, l) &= B31(I, K, l) + B24(K, I, l), \\
D44(I, K, L, l) &= B22(L, K, I, l) + B25(K, I, L, l), \\
D45(I, K, L, l) &= B26(K, I, L, l) + B39(L, K, I, l), \\
D46(I, K, l) &= B32(I, K, l) + B32(K, I, l), \\
D47(I, K, L, l) &= B33(K, I, L, l) + B33(L, K, I, l) + B33(I, K, L, l), \\
D48(I, K, L, l) &= B34(K, I, L, l) + B34(I, K, L, l), \\
D49(I, K, l) &= B35(I, K, l) + B41(K, I, l), \\
D50(I, K, L, l) &= B29(L, K, I, l) + B42(K, I, L, l), \\
D51(I, K, L, l) &= B36(I, K, L, l) + B36(L, K, I, l), \\
D52(I, K, L, l) &= B37(I, K, L, l) + B43(K, I, L, l) + B46(L, K, I, l), \\
D53(I, K, l) &= B49(K, I, l), \\
D54(I, K, l) &= B52(K, I, l), \\
D55(I, K, l) &= B38(I, K, l) + B27(K, I, l), \\
D56(I, K, L, l) &= B23(L, K, I, l) + B28(K, I, L, l), \\
D57(I, K, L, l) &= B39(I, K, L, l) + B29(K, I, L, l), \\
D58(I, K, L, l) &= B40(I, K, L, l) + B40(L, K, I, l) + B30(K, I, L, l), \\
D59(I, K, l) &= B41(I, K, l) + B35(K, I, l), \\
D60(I, K, L, l) &= B42(I, K, L, l) + B26(L, K, I, l), \\
D61(I, K, L, l) &= B34(L, K, I, l) + B36(K, I, L, l), \\
D62(I, K, L, l) &= B43(I, K, L, l) + B37(K, I, L, l) + B43(L, K, I, l), \\
D63(I, K, l) &= B44(I, K, l) + B44(K, I, l),
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
D64(I, K, L, l) &= B45(I, K, L, l) + B30(L, K, I, l) + B45(K, I, L, l), \\
D65(I, K, L, l) &= B46(I, K, L, l) + B37(L, K, I, l) + B46(K, I, L, l), \\
D66(I, K, L, l) &= B47(I, K, L, l) + B47(K, I, L, l) + B47(L, K, I, l), \\
D67(I, K, l) &= B50(K, I, l), \\
D68(I, K, l) &= B53(K, I, l), \\
D69(I, K, l) &= B48(I, K, l), \\
D70(I, K, l) &= B49(I, K, l), \\
D71(I, K, l) &= B50(I, K, l), \\
D72(I, K, l) &= B51(I, K, l), \\
D73(I, K, l) &= B52(I, K, l), \\
D74(I, K, l) &= B53(I, K, l), \\
D75(I, K, l) &= B54(I, K, l) + B54(K, I, l), \\
D76(I, K, L, l) &= B55(I, K, L, l) + B55(K, I, L, l) + B55(L, K, I, l), \\
D77(I, K, L, l) &= B56(I, K, L, l) + B56(K, I, L, l), \\
D78(I, K, L, l) &= B57(I, K, L, l) + B57(K, I, L, l) + B75(L, K, I, l), \\
D79(I, K, l) &= B58(I, K, l) + B65(K, I, l), \\
D80(I, K, L, l) &= B67(L, K, I, l) + B59(I, K, L, l), \\
D81(I, K, L, l) &= B60(I, K, L, l) + B79(L, K, I, l), \\
D82(I, K, l) &= B61(I, K, l) + B74(K, I, l), \\
D83(I, K, L, l) &= B62(I, K, L, l) + B62(L, K, I, l) + B75(K, I, L, l), \\
D84(I, K, L, l) &= B63(I, K, L, l) + B71(L, K, I, l) + B76(K, I, L, l), \\
D85(I, K, L, l) &= B64(I, K, L, l) + B77(K, I, L, l) + B83(L, K, I, l), \\
D86(I, K, l) &= B86(K, I, l), \\
D87(I, K, l) &= B89(K, I, l), \\
D88(I, K, l) &= B65(I, K, l) + B58(K, I, l), \\
D89(I, K, L, l) &= B56(L, K, I, l), \\
D90(I, K, L, l) &= B59(K, I, L, l), \\
D91(I, K, L, l) &= B60(K, I, L, l) + B76(L, K, I, l), \\
D92(I, K, l) &= B66(I, K, l) + B66(K, I, l),
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
D93(I, K, L, l) &= B67(I, K, L, l) + B67(K, I, L, l) + B59(L, K, I, l), \\
D94(I, K, L, l) &= B68(K, I, L, l) + B68(I, K, L, l) + B68(L, K, I, l), \\
D95(I, K, L, l) &= B69(K, I, L, l) + B80(L, K, I, l) + B69(I, K, L, l), \\
D96(I, K, l) &= B70(I, K, l) + B78(K, I, l), \\
D97(I, K, L, l) &= B71(I, K, L, l) + B63(L, K, I, l) + B79(K, I, L, l), \\
D98(I, K, L, l) &= B72(I, K, L, l) + B72(L, K, I, l) + B80(K, I, L, l), \\
D99(I, K, L, l) &= B73(I, K, L, l) + B81(K, I, L, l) + B84(L, K, I, l), \\
D100(I, K, l) &= B87(K, I, l), \\
D101(I, K, l) &= B90(K, I, l), \\
D102(I, K, l) &= B74(I, K, l) + B61(K, I, l), \\
D103(I, K, L, l) &= B75(I, K, L, l) + B62(K, I, L, l) + B57(L, K, I, l), \\
D104(I, K, L, l) &= B76(I, K, L, l) + B63(K, I, L, l), \\
D105(I, K, L, l) &= B77(I, K, L, l) + B64(K, I, L, l) + B77(L, K, I, l), \\
D106(I, K, l) &= B78(I, K, l) + B70(K, I, l), \\
D107(I, K, L, l) &= B79(I, K, L, l) + B71(K, I, L, l) + B60(L, K, I, l), \\
D108(I, K, L, l) &= B80(I, K, L, l) + B72(K, I, L, l) + B69(L, K, I, l), \\
D109(I, K, L, l) &= B81(I, K, L, l) + B73(K, I, L, l) + B81(L, K, I, l), \\
D110(I, K, l) &= B82(I, K, l) + B82(K, I, l), \\
D111(I, K, L, l) &= B83(I, K, L, l) + B83(K, I, L, l) + B64(L, K, I, l), \\
D112(I, K, L, l) &= B84(I, K, L, l) + B84(K, I, L, l) + B73(L, K, I, l), \\
D113(I, K, L, l) &= B85(I, K, L, l) + B85(K, I, L, l) + B85(L, K, I, l), \\
D114(I, K, l) &= B88(K, I, l), \\
D115(I, K, l) &= B91(K, I, l), \\
D116(I, K, l) &= B86(I, K, l), \\
D117(I, K, l) &= B87(I, K, l), \\
D118(I, K, l) &= B88(I, K, l), \\
D119(I, K, l) &= B89(I, K, l), \\
D120(I, K, l) &= B90(I, K, l), \\
D121(I, K, l) &= B91(I, K, l),
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
D122(I, K, l) &= B92(I, K, l) + B92(K, I, l), \\
D123(I, K, l) &= B93(I, K, l), \\
D124(I, K, l) &= B94(I, K, l) + B97(K, I, l), \\
D125(I, K, l) &= B93(K, I, l), \\
D126(I, K, l) &= B95(I, K, l) + B95(K, I, l), \\
D127(I, K, l) &= B96(I, K, l) + B98(K, I, l), \\
D128(I, K, l) &= B97(I, K, l) + B94(K, I, l), \\
D129(I, K, l) &= B98(I, K, l) + B96(K, I, l), \\
D130(I, K, l) &= B99(I, K, l) + B99(K, I, l), \\
D131(I, K, l) &= B100(I, K, l) + B101(K, I, l), \\
D132(I, K, l) &= B101(I, K, l), \\
D133(I, K, l) &= B102(I, K, l) + B105(K, I, l), \\
D134(I, K, l) &= B101(K, I, l), \\
D135(I, K, l) &= B103(I, K, l) + B103(K, I, l), \\
D136(I, K, l) &= B104(I, K, l) + B106(K, I, l), \\
D137(I, K, l) &= B105(I, K, l) + B102(K, I, l), \\
D138(I, K, l) &= B106(I, K, l) + B104(K, I, l), \\
D139(I, K, l) &= B107(I, K, l) + B107(K, I, l).
\end{aligned}$$

**ПРИЛОЖЕНИЕ Б.**  
**СВИДЕТЕЛЬСТВО О ГОСУДАРСТВЕННОЙ РЕГИСТРАЦИИ**  
**ПРОГРАММЫ ДЛЯ ЭВМ**

РОССИЙСКАЯ ФЕДЕРАЦИЯ



**СВИДЕТЕЛЬСТВО**

о государственной регистрации программы для ЭВМ

**№ 2014614627**

**«OrthShell: strength and stability of orthotropic shells»**

Правообладатель: **Федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение высшего профессионального образования «Санкт-Петербургский государственный архитектурно-строительный университет» (RU)**

Автор: **Семенов Алексей Александрович (RU)**

Заявка № **2014611917**

Дата поступления **06 марта 2014 г.**

Дата государственной регистрации

в Реестре программ для ЭВМ **29 апреля 2014 г.**



Руководитель Федеральной службы  
по интеллектуальной собственности

Б.П. Симонов

**ПРИЛОЖЕНИЕ В.**  
**АКТЫ О ВНЕДРЕНИИ РЕЗУЛЬТАТОВ ДИССЕРТАЦИОННОЙ РАБОТЫ**



**ПускМонтажПроект**

Фактический адрес:  
190001, г. Санкт-Петербург, Измайловский пр. д.9/2;  
Тел./факс: 575-47-16  
Тел.раб: +7(921)7776409  
E-mail: [gip@gip.su](mailto:gip@gip.su)  
ИНН 7814558936, КПП 781401001  
Р/с 40702810700000032165  
ОАО «БАЛТИНВЕСТБАНК», г. СПб.  
БИК 044030705  
К/с 30101810500000000705

**27.05.14 № /57**

**(На № от )**

***Акт внедрения результатов  
диссертационной работы  
Семенова А.А.***

Для предоставления по  
требованию

**А К Т**

о внедрении результатов

кандидатской диссертационной работы

**«Геометрически нелинейная математическая модель расчета прочности и устойчивости ортотропных оболочечных конструкций»**

Семенова Алексея Александровича

Комиссия в составе:

Председатель: генеральный директор, к.т.н.

Шеховцов А.С.

члены комиссии: заместитель генерального директора  
по проектированию  
заместитель генерального директора  
по коммерческой деятельности

Федулов Е.С.

Голованов Е.О.

составили настоящий акт о том, что результаты диссертационной работы **«Геометрически нелинейная математическая модель расчета прочности и устойчивости ортотропных оболочечных конструкций»**, представленной на соискание ученой степени кандидата технических наук, приняты к внедрению в проектно-конструкторской деятельности ООО «ПускМонтажПроект» в виде:

1. Методик расчета и моделирования.
2. Рекомендаций.

Использование указанных результатов позволяет: повысить достоверность результатов численных расчетов оболочечных конструкций, качество проектирования и эффективность использования строительных материалов

Результаты будут внедрены при выполнении работ по теме:

*«Проектирование и строительство спортивного комплекса по адресу: Ленинградская обл., Тосненский район, МО Федоровское сельское поселение».*

Председатель комиссии



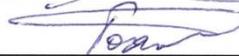
---

Шеховцов А.С.

Члены комиссии



---



---

Федулов Е.С.

Голованов Е.О.

Утверждаю

Проректор по научной  
работе СПбГАСУ,  
д.т.н., проф.

/ Е.Б. Смирнов /



**Акт**

о внедрении результатов диссертационной работы Семенова А.А.  
«Геометрически нелинейная математическая модель расчета  
прочности и устойчивости ортотропных оболочечных  
конструкций».

Математическая модель деформирования оболочек из ортотропных материалов, комплексно учитывающая ортотропию материала, геометрическую нелинейность, поперечные сдвиги, введение ребер по методу конструктивной анизотропии с учетом их сдвиговой и крутильной жесткости, и алгоритм исследования модели на основе метода продолжения решения по наилучшему параметру с адаптивным выбором сетки использованы в исследованиях по проекту №2.1.2/10824 Аналитическая ведомственная целевая программа Министерства образования и науки РФ «Развитие научного потенциала высшей школы» (2011 г.), и по проекту в рамках государственного задания Министерства образования и науки РФ № 8.1046.2011 «Математическое и программное обеспечение расчетов прочности и устойчивости подкрепленных оболочек вращения» (2012-2013 годы).

Программа «OrthShell: strength and stability of orthotropic shells», разработанная Семеновым А.А., позволяет проводить комплексные исследования прочности, устойчивости и закритического поведения оболочек из ортотропных материалов.

Руководитель НИР  
д.т.н., проф.

/ В. В. Карпов /

