

**Федеральное государственное автономное образовательное учреждение
высшего образования**

**«САНКТ-ПЕТЕРБУРГСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ
ПОЛИТЕХНИЧЕСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ»**

На правах рукописи

ДЕНИСОВ Григорий Валентинович

**АНАЛИТИЧЕСКИЙ МЕТОД РАСЧЕТА ЗАГЛУБЛЕННЫХ
МАГИСТРАЛЬНЫХ ТРУБОПРОВОДОВ ПРИ СЕЙСМИЧЕСКОМ
ВОЗДЕЙСТВИИ С УЧЕТОМ ЛОКАЛЬНЫХ КОЛЕБАНИЙ**

Специальность 05.23.17 – Строительная механика

диссертация на соискание ученой степени
кандидата технических наук

Научный руководитель:
д.т.н., профессор Лалин В.В.

Санкт-Петербург
2014

Оглавление

Введение.....	4
1 Особенности спектра собственных колебаний сложных конструкций.....	13
1.1 Дискретный и сплошной спектры механических колебаний.....	14
1.2 Локальные формы колебаний.....	23
1.3 Протяженные конструкции на упругом основании со сплошным спектром частот собственных колебаний	27
1.4 Выводы	31
2 Динамика трубопровода без массовых включений на однородном упругом и вязко-упругом основании.....	32
2.1 Динамика трубопровода на упругом основании	33
2.2 Динамика трубопровода на вязко-упругом основании.....	39
2.3 Длина участка распространения колебаний для случая вязко-упругого основания	45
2.4 Выводы	48
3 Динамика трубопровода с точечным массовым включением на однородном основании	49
3.1 Низкочастотные колебания. Ловушечные моды	50
3.2 Высокочастотные колебания. Коэффициенты отражения и прохождения волн	56
3.3 Выводы	64
4 Динамика трубопровода с протяженной неоднородностью в виде участка на кусочно-однородном основании.....	65
4.1 Низкочастотные колебания. Ловушечные моды	66
4.2 Высокочастотные колебания. Коэффициенты отражения и прохождения волн	70
4.3 Выводы	76
5 Оценка напряженного состояния участков трубопровода с массовыми и жесткостными неоднородностями.....	77
5.1 Напряжения при низкочастотных локальных колебаниях.....	78
5.2 Напряжения при низкочастотных ловушечных колебаниях.....	80
5.3 Напряжения при высокочастотных колебаниях.....	83

5.4 Методика оценки напряженного состояния	84
5.5 Выводы	89
Заключение	90
Список литературы	92

Введение

Актуальность темы исследования. Развитие трубопроводной системы не может быть реализовано без обеспечения высокого уровня надежности сооружений. Совершенствование технологий возведения и проектирования, применение новых материалов, строительство в сейсмически опасных районах, приводит к необходимости совершенствования расчетного аппарата.

Результаты многочисленных обследований реальных подземных трубопроводов, перенесших землетрясения, позволяют заключить, что наиболее опасными с точки зрения обеспечения прочности при динамических воздействиях являются зоны примыкания к другим трубопроводам, зданиям, сооружениям и конструктивным включениям, а так же участки сооружения, расположенные в областях с резким изменением свойств грунтов основания (Гехман, Зайнетдинов, 1988; Рашидов, Ан, 2014; Сейсмостойк. магистрал. трубопров. .. , 1980). При этом, основными фиксируемыми повреждениями подобных участков являются: разрывы, срез, смятие, гофрообразование и расстройство соединений (Гехман, Зайнетдинов, 1988; Чирков, Шутов, 2009; Flores-Berrones, Liu, 2003). Аналогичные последствия были зафиксированы и после землетрясения в Японии в 2011 (Miyajima, 2012).

Следует отметить, что повреждения заглубленных трубопроводов, не доступных визуальному осмотру, зачастую приводят к вторичным последствиям землетрясения, таким как пожары, подтопление территорий, просадки дневной поверхности и т.п. (Потапов, Ревелис, 2009). В этой связи к данным сооружениям требуется предъявлять повышенные требования обеспечения надежности.

На фоне повышенной аварийности указанных участков заглубленных трубопроводов, в действующих нормативных документах (СП 14.13330.2011, СП 36.13330.2012, СТО Газпром 2-2.1-249-2008) отсутствуют какие-либо специальные указания по расчету подобных, особых, частей сооружений.

Степень разработанности. Расчеты заглубленных трубопроводов на сейсмическое воздействие стали проводить сравнительно недавно. Крупномасштабные исследовательские работы в нашей стране были выполнены во второй половине XX в. В то время исследованиями вопросов сейсмостойкости занимались А.С. Гехман (Гехман, 1993), В.В. Болотин, Ш.Г. Напетваридзе, Б. Мардонов, Р.М. Мукурдумов, В.В. Спиридонов, Т.Р. Рашидов, Г.Х. Хожметов (Рашидов, Хожметов, Мардонов, 1975), В.П. Ильин и другие. На основе мирового опыта эксплуатации трубопроводов и анализа последствий землетрясений, был разработан сравнительно простой аналитический метод расчета сооружений, основанный на гипотезе

«замороженной волны» (Гехман, Зайнетдинов, 1988), что и было положено в основу нормативных методик, действующих и в наше время.

Согласно указанной методике, магистральные подземные и наземные (в насыпи) трубопроводы рассматриваются как заземленный в грунте стержень (т.е. неподвижный относительно грунта), воспринимающий при динамических воздействиях сейсмические волны, распространяющиеся в грунтовой среде. В указанных выше работах, уравнение сейсмической волны, распространяющейся в грунте, принято в виде:

$$u = u_{\max} \Phi \left(t - \frac{x}{V} \right), \quad (\text{B.1})$$

где u – смещение точек грунта (трубопровода), u_{\max} – максимальное смещение грунта при землетрясении, Φ – гармоническая функция, удовлетворяющая волновому уравнению, V – скорость движения фронта волны (фазовая скорость), t – время, x – координата рассматриваемой точки вдоль пути распространения волны.

Дифференцированием (B.1) можно получить выражение для продольных и изгибных деформаций. Так, для случая синусоидальной волны с круговой частотой ω , для описания продольных деформаций получаем:

$$\varepsilon = \frac{\partial u}{\partial x} = u_{\max} \frac{\omega}{V} \cos \omega \left(t - \frac{x}{V} \right), \quad (\text{B.2})$$

поперечных –

$$\varepsilon = \frac{D}{2} \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = -u_{\max} \frac{D}{2} \left(\frac{\omega}{V} \right)^2 \sin \omega \left(t - \frac{x}{V} \right), \quad (\text{B.3})$$

здесь D – наружный диаметр трубопровода.

После преобразований (B.2) можно получить выражение для определения продольных динамических напряжений, согласно требованиям действующих норм (СП 36.13330.2012 «Магистральные трубопроводы»):

$$\sigma_N = \frac{\pm 0,04 m_0 k_0 k_n a_c E_0 T_0}{c_p}, \quad (\text{B.4})$$

где m_0 – коэффициент заземления трубопровода в грунте, определяемый согласно п.12.7.6; k_0 – коэффициент, учитывающий степень ответственности трубопровода, определяемый согласно п.12.7.7; k_n – коэффициент повторяемости землетрясения, определяемый согласно п.12.7.8; a_c – сейсмическое ускорение, см/с², определяемое по данным сейсмического районирования и микрорайонирования с учетом требований п.12.7.2; E_0 – модуль упругости, МПа; T_0 – преобладающий период сейсмических колебаний грунтового массива, определяемый при

изысканиях, с; c_p – скорость распространения продольной сейсмической волны вдоль продольной оси трубопровода, см/с, в грунтовом массиве, определяемая при изысканиях, на стадии разработки проекта допускается принимать согласно табл.16 (СП 36.13330.2012).

Поперечные деформации допускается не учитывать (СП 36.13330.2012).

Аналогичный подход к расчету заглубленных трубопроводов на сейсмическое воздействие приводится и в действующих нормах США и Японии (Окамото, 1980; Seismic analysis ... , 1986), при этом регламентируется учет не только продольных, но и поперечных волн и волн Рэлея. В (Antaki, 2003) приводится следующая зависимость для оценки деформаций грунтового массива:

$$\varepsilon_a = \frac{V_g}{\alpha C}, \quad (\text{B.5})$$

где V_g – максимальная (пиковая) скорость грунта при землетрясении; α – коэффициент, принимаемый в зависимости от типа волн (поперечные, продольные, волны Рэлея); C – скорость распространения волн, соответствующего типа. Соответствующие напряжения, обусловленные деформациями, вычисленными по (B.5), эквиваленты напряжениям вычисленными по (B.4).

Проводя аналогии с другими протяженными сооружениями, отметим, что указанный, волновой, подход принят и для расчета тоннелей мелкого и глубокого заложения (Дорман, 2000; Фотиева, 1980).

Следует отметить, что, строго говоря, такая постановка задачи справедлива только для однородных протяженных (линейных) участков сооружений. В действительности, наличие конструктивных включений (арматура, колодцы, поворотные участки и т.п.) и различия в геологических свойствах грунтов основания могут привести к возникновению локальных колебаний, по аналогии с другими строительными конструкциями (Беляев, 2001). Так же, как отмечено в (Самарин, 1979), ввиду высокой скорости распространения волн по сооружению, генератором колебаний могут выступать и отдельные участки трубопровода, наиболее подверженные воздействию, что так же упоминается и в (Гехман, Зайнетдинов, 1988). Вместе с тем, методика, изложенная в действующих нормах, предполагает статическое задание нагрузки, без учета динамических свойств самого трубопровода.

Во второй половине XX в., для расчета сложных систем подземных трубопроводов с большим количеством ответвлений и включений (системы водоснабжения, водоотведения и т.п.) Рашидовым Т. Р. была предложена «сейсмодинамическая» теория сейсмостойкости, основанная на представлении линейной части трубопровода стержневыми элементами конечной длины, а узловых соединений (конструктивные включения) – абсолютно твердыми

талами. При этом, все рассматриваемые элементы и узлы находятся во взаимодействии с вмещающим грунтовым массивом (Рашидов, 1973). В дальнейшем, были выполнены работы по совершенствованию указанной методики в части учета различного рода нелинейностей (деформация стыков, проскальзывание по грунту и т.п.) (Мухидинов, 1995; Рашидов, Хожметов, 1985). Отметим, что решение задачи в предложенной нелинейной постановке требует применение численных методов, это, без разработки специальных программных средств, делает предложенную методику труднодоступной для большинства инженеров.

Анализ публикаций последних лет показывает, что при широком распространении методов численного анализа, главным образом МКЭ (Мурзаханов, Рябцев, 2009; Лалин, Яваров, 2010), основное внимание исследователей направлено на учет разного рода нелинейностей имеющих место в системе «сооружение-основание». Так, в работе (Петров, 2004) излагается методика расчета подземных трубопроводов с учетом его контактного взаимодействия с грунтовым массивом при конструктивной нелинейности (наличие швов), в работе (Мурзаханов, Олейников, 2008) – методика оценки остаточного ресурса трубопровода. Исследуются вопросы работы трубопроводов, пересекающих активные тектонические разломы (Андреева, 2009; Сущев, 2010) и зоны воздействия потенциально оползневых грунтовых масс (Васильев и др., 2012). Рядом исследователей (Мурзаханов, Олейникова, 2008), с применением современных численных методов, была подтверждена повышенная опасность указанных выше особых участков сооружений. Вместе с тем, не было получено каких-либо аналитических зависимостей, а лишь подтверждена обоснованность нормативных требований по недопущению жесткого примыкания к зданиям и массивным сооружениям (Муравьева, 2008).

Теоретические исследования последних лет направлены на разработку методов расчета трубопровода в рамках методов теории оболочек (Соколов, 2011; Соколов, Разов, 2013; Kouretzis, Vouckovalas, Gantes, 2006). Это позволяет расширить круг рассматриваемых задач, ограниченный стержневой схематизацией, в том числе вопросы обеспечения устойчивости (Улитин, 2006), актуальные для тонкостенных труб большого диаметра (Васильев, Андреева, 2009).

В публикациях последних лет, имеющих как теоретический, так и экспериментально-исследовательский характер, комплексно не рассматриваются вопросы оценки напряженного состояния участков заглубленных магистральных трубопроводов с массовой или жесткостной неоднородностью при сейсмическом воздействии. Показательным в этом отношении являются отдельные публикации с «инженерными» попытками обеспечения надежности указанных участков (Валеев, Зотов).

Таким образом, можно заключить, что не существует общепринятых подходов к оценке сейсмостойкости участков заглубленных магистральных трубопроводов, примыкающих к конструктивным включениям, а так же расположенных на участках с резким изменением свойств грунтового основания.

Цель исследования – разработка аналитического метода расчета участков заглубленных магистральных трубопроводов при сейсмическом воздействии с учетом локальных колебаний, обусловленных наличием массовой и жесткостной неоднородности.

Объект исследования – участки подземных и наземных (в насыпи) промышленных и магистральных трубопроводов с конструктивными включениями и расположенные на неоднородном основании.

Предмет исследования – напряженное состояние участков заглубленных магистральных трубопроводов с конструктивными включениями и расположенные на неоднородном основании при динамическом, в том числе сейсмическом, воздействии.

Задачи исследования:

- 1) обзор и анализ современных методов расчета магистральных трубопроводов на динамические, в том числе сейсмические, воздействия;
- 2) исследование отклика прямолинейного однородного заглубленного трубопровода на упругом и вязко-упругом основании, в зависимости от спектра динамического воздействия;
- 3) применение и развитие известных аналитических решений для продольных и поперечных колебаний стержней к описанию динамического отклика заглубленного трубопровода с конструктивным включением и (или) кусочно-однородным грунтовым основанием;
- 4) исследование явлений трансформации (прохождения и отражения) продольных и поперечных волн, распространяющихся по стержню, вследствие наличия точечного массового включения и различий в жесткости основания;
- 5) разработка аналитического метода расчета участков заглубленного трубопровода, примыкающих к конструктивным включениям и расположенных в областях с резким изменением свойств грунтового основания.

Научная новизна исследования:

- 1) получены аналитические зависимости для описания поведения прямолинейного однородного заглубленного трубопровода, как бесконечного стержневого элемента на вязко-упругом основании, в зависимости от спектра динамического воздействия;

2) получены аналитические зависимости для коэффициентов отражения и прохождения продольных и поперечных волн, распространяющихся по трубопроводу, вследствие трансформации от точечных массовых включений;

3) получены аналитические зависимости для коэффициентов отражения и прохождения продольных и поперечных волн, распространяющихся по трубопроводу, вследствие различий в жесткости основания;

4) разработан метод расчета участков заглубленного трубопровода, примыкающих к конструктивным включениям и участков, расположенных в области резкого изменения свойств грунтового основания, при сейсмическом воздействии.

Теоретическая и практическая значимость работы. В отличие от большинства современных исследований, основанных на использовании численных методов, настоящая работа выполнена с применением аналитических решений. Это позволило получить сравнительно простые аналитические решения для участков сооружений, характеризующихся повышенной аварийностью, в рамках принятого нормативного подхода.

Полученные результаты могут быть использованы при практических расчетах следующих участков заглубленных трубопроводов, расположенных в сейсмически активных районах:

- 1) участков с конструктивной неоднородностью (участки с запорной арматурой, компенсаторами, поворотные участки и т. п.);
- 2) участков, расположенных в областях с резким изменением свойств грунтового основания (переходы через болота, тектонические разломы и т. п.).

Методология и методы исследования. Модель стержня и балки на упругом основании (типа Винклера) широко применяется в инженерной практике для описания линейной части заглубленного трубопровода при статических нагрузках и воздействиях (Айнбиндер, 1991). При этом для описания грунтового основания рядом авторов (Бородавкин, 1982; Виноградов, 1980) рекомендуется применение более сложных моделей грунта. Для динамического нагружения при малых деформациях можно принять абсолютно упругий характер работы грунта (Иванов, 1985; Цытович, 1963).

Действующая нормативная методика расчета (СП 36.13330.2012), основанная на квазистатическом подходе, не учитывает реакцию самого трубопровода, предполагая совместную работу системы «сооружение-основание». Данная гипотеза соответствует данным натурных наблюдений за трубопроводами, расположенных в плотных грунтах и воспринимающих несильные землетрясения (до 8 баллов) (Гехман, Зайнетдинов, 1988). Вместе с тем, натурными наблюдениями при сильном землетрясении (Султанов, 1992) установлен

эффект проскальзывания трубы, относительно грунтов, что требует применения более сложных методик (Андреева, 2009).

Отметим, что вопросы поведения заглубленных трубопроводов воспринимающих достаточно редкие сильные землетрясения, по причине нелинейного характера работы конструкции, по-видимому, не могут иметь единых аналитических решений.

В работе в качестве метода исследования принято математическое моделирование в рамках моделей «стержень на упругом основании» (при продольных колебаниях) и «балка типа Бернулли-Эйлера на упругом основании» (при изгибных колебаниях), воспринимающих сейсмическую нагрузку, задаваемую гармоникой в рамках действующего нормативного подхода.

Положения, выносимые на защиту.

- 1) аналитические зависимости для определения длины участка трубопровода подверженного влиянию динамического воздействия на локальном участке;
- 2) аналитические зависимости для коэффициентов отражения и прохождения продольных и поперечных волн, распространяющихся по трубопроводу, вследствие трансформации от точечных массовых включений и различий в жесткости основания;
- 3) метод расчета участков заглубленного трубопровода, примыкающих к конструктивным включениям и (или) расположенного в области резкого изменения свойств грунтового основания, при сейсмическом воздействии;

Степень достоверности и апробация результатов. Достоверность результатов исследований и выводов диссертационной работы подтверждаются использованием общепринятых допущений строительной механики и хорошей качественной согласованностью с результатами, полученными другими исследователями в ходе натуральных экспериментов и численного моделирования.

Основные положения работы были доложены и обсуждены на пяти научно-технических семинарах и конференциях:

- Семинар на кафедре «Строительная механика и теория упругости» Санкт-Петербургского государственного политехнического университета, 20 декабря 2012 г.;
- 25-я Международная конференция «Математическое моделирование в механике деформируемых сред и конструкций. Методы граничных и конечных элементов. ВЕМ-FEM 2013», СПбГАСУ, Санкт-Петербург, 23-26 сентября 2013 г.;
- Семинар на кафедре «Прочность материалов и конструкций» Петербургского государственного университета путей сообщения, 11 февраля 2014 г.;

- Семинар на кафедре «Строительная механика» Санкт-Петербургского государственного архитектурно-строительного университета, 18 февраля 2014 г.;
- IX Международная конференция «Проблемы прочности материалов и сооружений на транспорте», ПГУПС, Санкт-Петербург, 27-28 мая 2014 г.

Структура и объем работы. Диссертация состоит из введения, пяти глав, заключения и списка литературы, включающего в себя 111 наименований. Общий объем диссертации составляет 99 страниц машинописного текста. Работа содержит 51 рисунок и 3 таблицы.

В введении приводится обоснование актуальности рассматриваемой проблемы, приводится обзор литературных источников, формулируются цели, задачи и методология исследования.

В первой главе рассматриваются особенности спектра собственных колебаний сложных строительных конструкций. На численных примерах наглядно показано наличие смешанного спектра, образованного дискретной и сплошной частями. Рассмотрены возможности возникновения локализации колебаний. Показано, что для учета локальных колебаний, в ряде случаев имеющих определяющее значение в задачах обеспечения прочности и надежности всей конструкции, необходимо выполнение трудоемкого модального анализа либо разработка специальных аналитических решений позволяющих учесть данную особенность динамики сооружения.

Во второй главе рассматриваются вопросы динамики линейной части заглубленного трубопровода без массовых включений как стержня на однородном упругом и вязко-упругом основании. Показано существование смешанного спектра реализующегося в виде низкочастотных локальных колебаний отдельных участков и в виде высокочастотных бегущих волн. Указанное разделение спектра определяется частотой отсечки. Получено явное аналитическое выражение для определения длины участка сооружения, реагирующего на динамическое воздействие от точечного источника.

В третьей главе рассматриваются вопросы динамики участка трубопровода содержащего одно точечное массовое включение. Для низкочастотных воздействий проводятся исследования ловушечных мод, для высокочастотных воздействий – трансформации волн. Для последних получены явные аналитические выражения для коэффициентов отражения и прохождения продольных и поперечных волн, распространяющихся по трубопроводу в случае наличия массового включения.

В четвертой главе рассматриваются вопросы динамики трубопровода содержащего одно протяженное включение в виде участка на слабом основании. Для низкочастотных воздействий проводятся исследования ловушечных мод, для высокочастотных – трансформация волн.

Получены явные аналитические выражения для коэффициентов отражения и прохождения продольных и поперечных волн, распространяющихся по трубопроводу в случае неоднородности основания.

В пятой главе рассматриваются вопросы оценки напряженного состояния участков трубопроводов при сейсмических воздействиях. По результатам исследований разработана методика оценки напряженного состояния участков трубопроводов характеризующихся жесткостной и массовой неоднородностями. Выполнено сравнение с результатами полученными другими исследователями.

В заключении приводятся основные результаты, полученные в работе.

Публикации. Материалы диссертации опубликованы в 11 статьях в периодических изданиях, входящих в перечень ВАК РФ на момент написания.

1 Особенности спектра собственных колебаний сложных конструкций

В данной главе исследуются особенности спектра собственных колебаний сложных строительных конструкций.

В развитии теоретических работ (Беляев, 2001; Belyaev, 2003; Belyaev, 2004), на численных примерах наглядно показано наличие смешанного спектра, образованного дискретной и сплошной частями условно разделяемой, так называемой, граничной частотой. При этом, амплитуда вынужденных колебаний конструкции при воздействиях с частотами, превышающими граничную, определяется, в основном, жесткостными характеристиками конструкции и амплитудой внешнего воздействия.

Рассмотрены возможности возникновения в конструкции локальных колебаний отдельных ее элементов. Показано, что для учета упомянутых колебаний, в ряде случаев имеющих определяющее значение в задачах обеспечения прочности и надежности всей конструкции, необходимо выполнение трудоемкого модального анализа либо разработка специальных аналитических решений позволяющих учесть данную особенность динамики сооружения.

Проанализированы конструкции со сплошным спектром частот и методы их расчета.

Материалы главы опубликованы в следующих работах:

1. Денисов Г.В., Лалин В.В. О сплошном спектре колебаний балочных элементов конструкции при высокочастотных воздействиях // Инженерно-строительный журнал. 2012. № 1(27). С. 91-97.
2. Денисов Г.В. К вопросу о локализации колебаний в строительных конструкциях // Инженерно-строительный журнал. 2012. № 5(31). С. 60-64.

1.1 Дискретный и сплошной спектры механических колебаний

Действующие нормативные требования (СП 14.13330.2011), критикуемые рядом исследователей (Масленников, Нгуен Куок Донг, 2010; Рутман, Симборт, 2011; Уздин, Белаш, 2013), устанавливают методику расчетов зданий и сооружений на сейсмическую нагрузку, основанную на линейно-спектральной теории (Бирбраер, 1998). Таким образом, перед инженером встает вопрос о необходимом количестве учитываемых форм собственных колебаний.

Существует ряд рекомендаций по определению количества форм колебаний, необходимых для учета при динамических расчетах (Бирбраер, 1998), так же известен практический метод «статического учета» высших форм (Chopra, 1995; Бирбраер, Сазонова, 2009). Вместе с тем указанные подходы, хоть и подразумевают ограниченность спектра механических колебаний, но не показывают этого в явной форме, соответствующей физической картине.

В работах (Беляев, 2001; Belyaev, 2003; Belyaev, 2004) автор показывает существование высокочастотной динамики, являющейся высокочастотным случаем классической динамики деформируемого твердого тела и низкочастотным термодинамики. Характерным отличием от классической динамики является оперирование со сплошным спектром собственных частот. Показано, что существует некая граничная частота, выше которой конструкция проявляет свойства системы со сплошным спектром (значительное увеличение частоты внешнего воздействия оказывает малое влияние на динамику конструкции).

Теоретический характер указанных выше работ с преобладающим математическим изложением и малым количеством примеров, затрудняет их практическое использование. Покажем наличие обозначенной выше граничной частоты с последующей реализацией сплошного спектра, а так же возможности использования этого факта при выполнении инженерных расчетов.

В качестве примера будем рассматривать колебания прямолинейных однородных стержней конечной длины.

Согласно классическому подходу (Карлов, Кириченко, 2008; Тимошенко, 1967), перемещения точек стержней определяются путем наложения перемещений, соответствующих формам собственных колебаний, и колебаний, вызванных возмущающей силой. При этом, стержень, как и любое упругое тело, имеет бесконечное множество степеней свободы, а следовательно, и бесконечно большое число форм собственных колебаний (Тимошенко, 1967). Таким образом, в случае произвольной нестационарной силы, для точного определения

перемещений, строго говоря, требуется учет всех форм собственных колебаний, что является возможным только для очень ограниченного круга задач.

Рассмотрим с физической точки зрения возможность существования бесконечного спектра собственных колебаний стержней. На Рисунке 1.1.1 приведены две изгибные формы собственных колебаний шарнирно опертого стержня, характеризуемые длинами волн λ_1 и λ_2 .

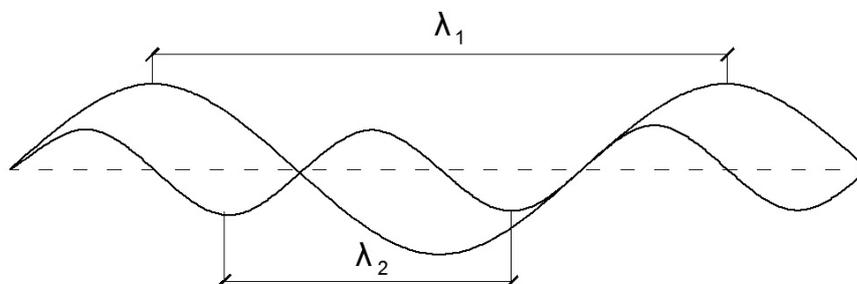


Рисунок 1.1.1. Изгибные формы колебаний шарнирно опертого стержня

На Рисунке 1.1.2 схематично показаны участки стержня с одинаковой направленностью колебательного движения (в данном случае вверх или вниз).

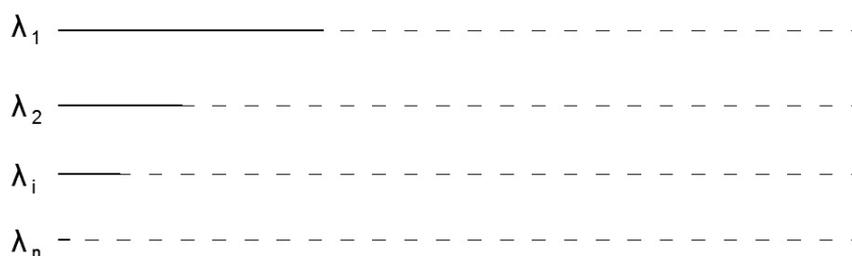


Рисунок 1.1.2. Участки стержня одинаковой направленности колебательного движения в зависимости от длины волны

Из представленных иллюстраций видно, что по мере уменьшения длины волны и, соответственно, увеличения частоты колебаний, происходит вырождение участка стержня равной направленности движения в точку. Таким образом, высшие формы представляют собой колебательные движения бесконечно большого количества участков стержня пренебрежительно малой длины, что является математической абстракцией.

Далее проанализируем амплитуды высокочастотных колебаний. Покажем, что по мере увеличения частоты происходит фактическое исчезновение резонанса.

Рассмотрим вынужденные продольные колебания консольного стержня, представляющего элементарную строительную конструкцию, под действием сосредоточенной гармонической нагрузки.

Несмотря на известные недостатки (Кочнева, 1979), для качественного анализа примем гипотезу упруго-вязкого внутреннего трения. Тогда, амплитуда n -й формы вынужденных продольных колебаний однородного прямолинейного стержня имеет вид (Пановко, 1960):

$$A_n = \frac{h_n}{\rho F p_n^2 \sqrt{\left(1 - \frac{\omega^2}{p_n^2}\right)^2 + \left(\frac{k\omega}{E}\right)^2}}, \quad (1.1.1)$$

где n – номер формы, h_n – коэффициент, определяемый конкретным законом изменения амплитуд нагрузки в соответствии с формами собственных колебаний, ρ – плотность материала стержня, F – площадь поперечного сечения стержня, p_n – значения собственных частот, ω – значение частоты вынуждающей силы, k – коэффициент вязкости, E – модуль упругости материала стержня.

Из (1.1.1) легко получить выражение амплитуды для частного случая резонансных колебаний при совпадении частоты вынуждающей силы с собственными значениями:

$$A_n^* = \frac{h_n}{\rho F p_n^2 \left(\frac{k\omega}{E}\right)}. \quad (1.1.2)$$

В выражении (1.1.2) для наглядности разделено обозначения частот ω и p_n , хотя $\omega = p_n$.

Выполним анализ подкоренного выражения в (1.1.1). Представим выражения для ω в следующем виде:

$$\omega = p_n \pm \Delta p. \quad (1.1.3)$$

Здесь второе слагаемое описывает точность совпадения частоты вынуждающей силы, с какой либо собственной частотой. При этом, значения Δp , для нерезонансного случая, должны удовлетворять условию:

$$0 < \Delta p < p_{n+1} - p_n, \quad (1.1.4)$$

для любого n . Отметим, что для стержней, значение Δp не может превышать некой постоянной величины, независимой от номера собственной формы, так как разность соседних собственных частот постоянна. Это следует из теоретического решения (Бабаков, 1958; Тимошенко, 1967).

Преобразуем подкоренное выражение в (1.1.1). Используя (1.1.3), получим:

$$\left(1 - \frac{\omega^2}{p_n^2}\right)^2 + \left(\frac{k\omega}{E}\right)^2 = \left(1 - \left(1 \pm \frac{\Delta p}{p_n}\right)^2\right)^2 + \left(\frac{k\omega}{E}\right)^2. \quad (1.1.5)$$

Проанализируем данное выражение. Отметим, что первое слагаемое характеризует отклик стержня на динамическую нагрузку в зависимости от близости вынуждающих и

собственных частот. При высоких значениях p_n , указанное слагаемое будет стремиться к нулю. Таким образом, значения нерезонансных амплитуд будут стремиться к значениям амплитуд, соответствующих резонансным колебаниям ($A_n \rightarrow A_n^*$). Это приводит к фактическому исчезновению резонанса как такового при высших формах колебаний, и выравниваю графика амплитудно-частотной характеристики с утратой резонансных всплесков.

Следует отметить, что, так как резонансные амплитуды не одинаковы для всех точек стержня и имеют меньшие значения в областях наиболее удаленных от мест приложения нагрузок (или от их максимальных значений), в этих зонах следует ожидать утрату резонансов при более низких частотах, чем в наиболее загруженных областях.

На основании вышесказанного можно заключить, что существует некая условная граничная частота вынуждающей силы, которая еще может привести к резонансным явлениям. Дальнейшее увеличение частоты приводит только к равномерному уменьшению амплитуды вынужденных колебаний ввиду того, что дискретный спектр собственных частот становится сплошным (Харкевич, 2009), для которого характерно слабое изменение амплитуд в достаточно широком диапазоне частот без четко выраженных максимумов.

Таким образом, высокочастотные колебания стержня в основном будут определяться статическими характеристиками (деформационными характеристиками материала, длиной, и т.п.) и внешними нагрузками. Динамические характеристики, такие как собственные частоты и моды, по сути, теряют свой физический смысл и не оказывают существенного влияния на колебательное движение, так как не приводят к резонансу. Таким образом, собственные формы, частоты которых превышают граничную, уже не вносят существенного вклада в отклик конструкции на динамическое воздействие.

Следует отметить, что выражения (1.1.1) и (1.1.2), как показано в (Пановко, 1960), в качественном отношении справедливы для крутильных и изгибных колебаний. Это дает право распространить сделанные выше выводы и на указанные типы колебаний.

Для подтверждения сделанных выше выводов, выполним численные эксперименты в программном комплексе ANSYS. В качестве первого примера будем рассматривать вынужденные продольные колебания стального стержня под действием гармонической нагрузки (Рисунок 1.1.3). При этом частоту вынуждающей силы ω будем равномерно увеличивать для определения амплитудно-частотной характеристики (АЧХ) стержня.

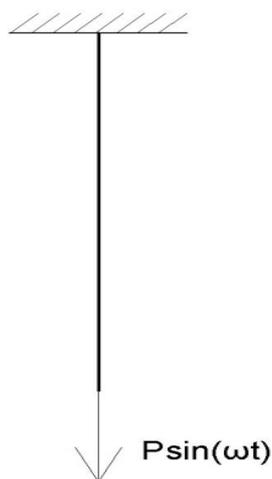


Рисунок 1.1.3. Пример 1

Примем следующие характеристики для стержня. Сечение – прямоугольное с размерами 0,1 x 0,1 м; длина – 6,00 м; плотность материала 7850 кг/м³, модуль Юнга 2,1e11 Па.

При заданных параметрах первые пять собственных частот составят 215,51, 646,48, 1077,30, 1508,00 и 1938,50 Гц. Полученные значения хорошо согласуются с теоретическим решением (Бидерман, 1980). Для построения графика АЧХ примем внешнюю нагрузку величиной 100 кН, приложенной к свободному концу стержня, в диапазоне частот ω 0 ÷ 4700 Гц. Будем проводить анализ для характерных точек стержня

при коэффициенте затухания (демпфирования) по материалу 0,1 (Коренев, Рабинович, 1972). Указанный способ учета внутренних сил сопротивления принят для большей наглядности моделирования, в отличие от широко применяемой модели Рэлея (Тяпин, 2009).

На Рисунке 1.1.4 приведены графики АЧХ в диапазоне вынуждающих частот ω 0 ÷ 1000 Гц для точек равномерно расположенных по длине стержня. На иллюстрации четко просматриваются резонансные отклики первых собственных частот.

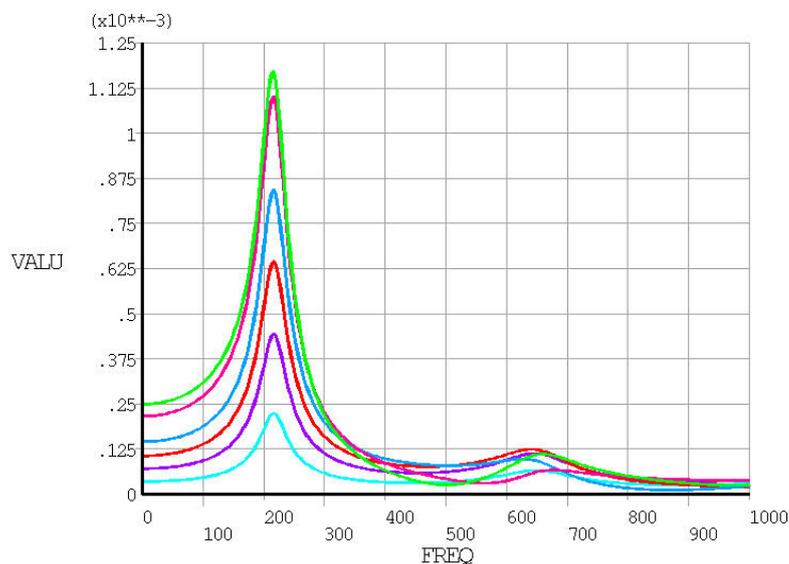


Рисунок 1.1.4. Графики АЧХ точек стержня для диапазона частот 0 ÷ 1000 Гц

Принимая во внимание большую разницу между величинами амплитуд колебаний отдельных точек стержня, дальнейший анализ будем проводить по отдельности для точек, расположенных в непосредственной близости от заделки и от свободного края.

На Рисунке 1.1.5 приведены графики АЧХ для точек расположенных в окрестности заделки, на Рисунке 1.1.6 – для точек расположенных в окрестности свободного края.

Анализируя Рисунок 1.1.5 отметим, что по мере увеличения частоты вынуждающей силы происходит выравнивание графика АЧХ с утратой резонансных всплесков, что подтверждает выводы, сделанные выше. Так, видно, что значение граничной частоты меньше 2500 Гц, что соответствует 6-й форме собственных колебаний с частотой 2368,50 Гц.

Сделанные заключения подтверждаются так же и Рисунком 1.1.6. Следует отметить, что характерная частота, для указанного участка стержня, превышает величину 2500 Гц, полученную ранее (Рисунок 1.1.5), и составляет 3227,40 Гц, что соответствует 8-й форме собственных колебаний.

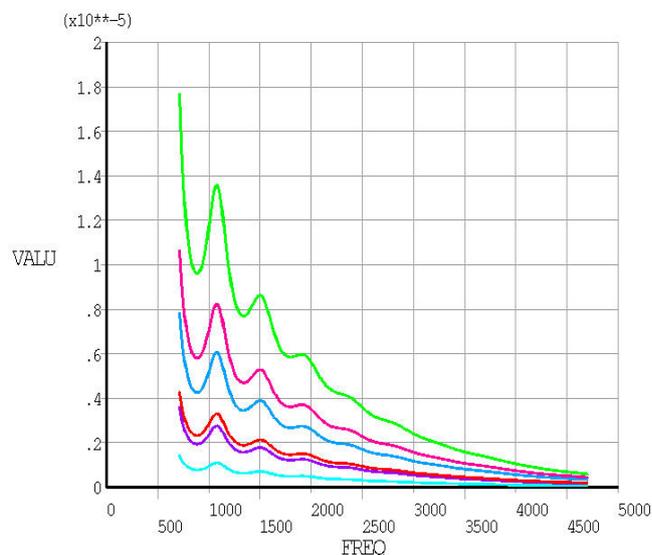


Рисунок 1.1.5. Графики АЧХ точек стержня, расположенных в окрестности заделки, для диапазона частот 700 ÷ 4700 Гц

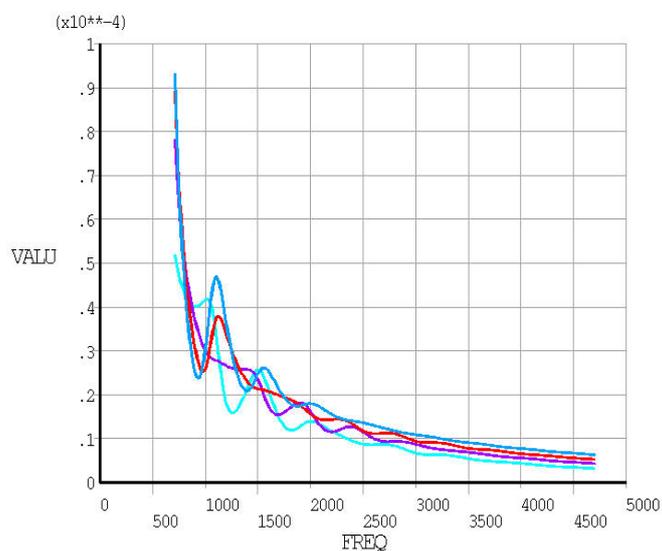


Рисунок 1.1.6. Графики АЧХ точек стержня, расположенных в окрестности свободного края, для диапазона частот 700 ÷ 4700 Гц

В качестве второго примера рассмотрим изгибные колебания того же стержня (Рисунок 1.1.7).



Рисунок 1.1.7. Пример 2

Первые пять собственных частот составят 122,61, 367,80, 613,10, 858,30 и 1103,50 Гц. Для выполнения анализа будем использовать алгоритм, аналогичный примеру 1. Рассмотрим колебания стержня при величине вынуждающей силы 10 кН в диапазоне частот $\omega 0 \div 2700$ Гц.

На Рисунке 1.1.8 приведены графики АЧХ в диапазоне вынуждающих частот $\omega 0 \div 800$ Гц для точек равномерно расположенных по длине стержня. Полученные значения хорошо согласуются с теоретическими решениями (Бидерман, 1980), при этом, так же четко просматриваются резонансные отклики первых собственных частот.

На Рисунках 1.1.9, 1.1.10 приведены графики АЧХ для точек расположенных в окрестности заделки и в окрестности свободного края для диапазона частот $700 \div 2700$ Гц.

Анализируя Рисунки 1.1.9, 1.1.10 можно заключить, что граничная частота для участка стержня, примыкающего к заделке, составляет 1348,80 Гц (Рисунок 1.1.9), что соответствует 6-й форме собственных колебаний, для свободного края – 1839,30 Гц (Рисунок 1.1.10), что соответствует 8-й форме.

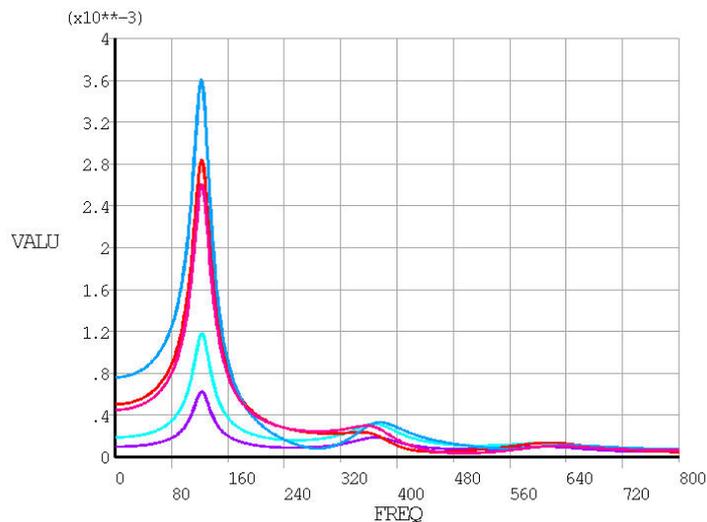


Рисунок 1.1.8. Графики АЧХ точек стержня для диапазона частот $0 \div 800$ Гц

Далее, проанализируем часть спектра собственных частот, лежащую за граничной частотой.

Для наглядности, представим АЧХ для точки стержня первого примера (Рисунок 1.1.3) в диапазоне частот 2000 ÷ 10000 Гц на Рисунке 1.1.11.

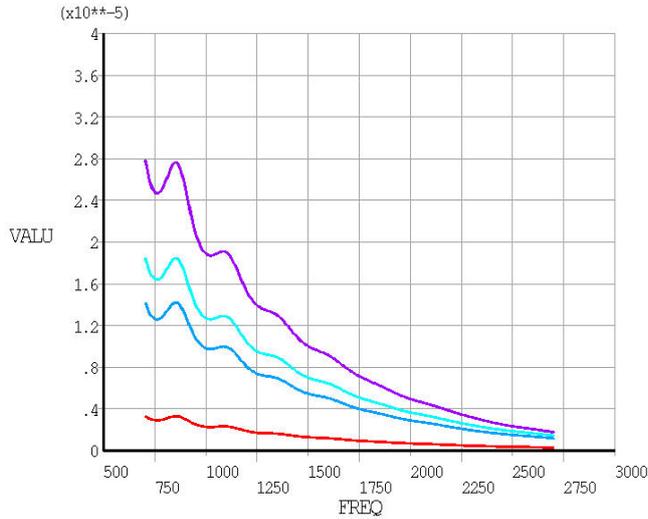


Рисунок 1.1.9. Графики АЧХ точек стержня, расположенных в окрестности заделки, для диапазона частот 700 ÷ 2700 Гц

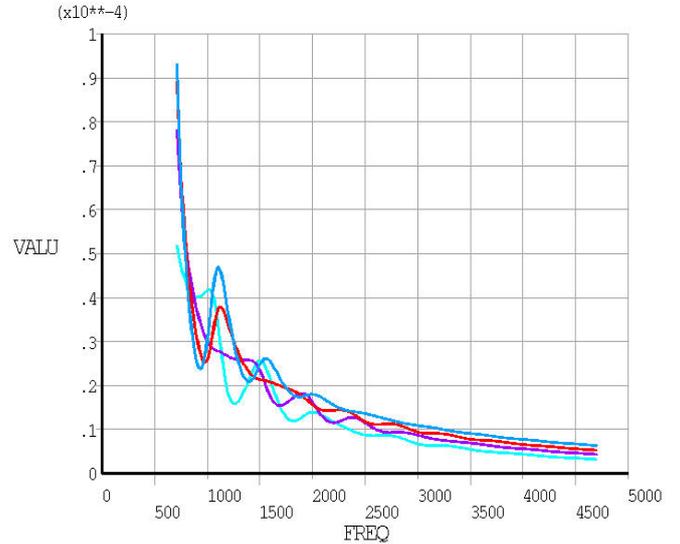


Рисунок 1.1.10. Графики АЧХ точек стержня, расположенных в окрестности свободного края, для диапазона частот 700 ÷ 2700 Гц

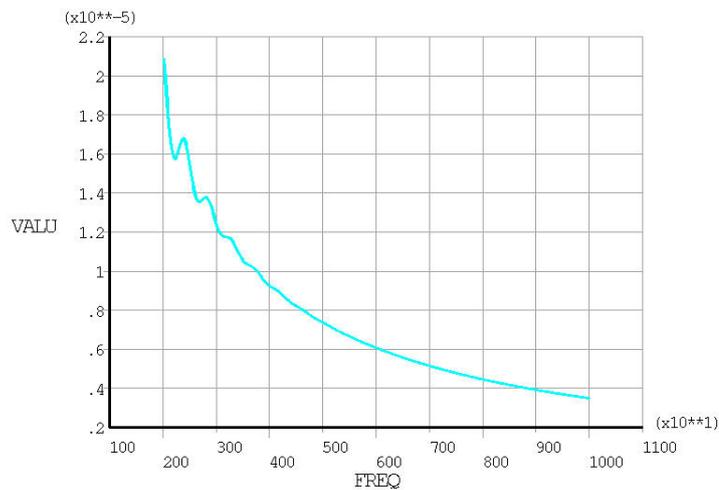


Рисунок 1.1.11. Графики АЧХ точки стержня примера 1, расположенной в окрестности свободного края, для диапазона частот 2000 ÷ 10000 Гц

Из графика на Рисунке 1.1.11 видно, что амплитуда вынужденных колебаний обратно пропорциональна частоте вынуждающей силы ω . Таким образом, АЧХ данного стержня свыше

граничной частоты представляет собой обратно пропорциональную зависимость от частоты вынуждающей силы.

Таким образом, можно заключить, что по мере увеличения частоты колебаний, элементы строительных конструкции, такие как стержень, балка, плита и т.п., становятся менее динамичными, то есть менее восприимчивы к динамической нагрузке.

Данное заключение справедливо для однородных конструкций, в действительности же, реальные здания и сооружения представляют собой совокупность или «ансамбль» (Бирбраер, 1998) элементарных конструкций и неоднородностей, порождающих явление локализации колебаний, что будет рассмотрено в следующем разделе.

1.2 Локальные формы колебаний

С примерами локальных колебаний отдельных элементов, узлов или частей конструкции или некой системы мы встречаемся повсеместно. Это раскачивание веток деревьев, колебания крыла самолета, вибрация элементов салона транспорта и т.д. Казалось бы, что указанные колебания могут привести лишь к повреждениям отдельных элементов при сохранности всего сооружения в целом. В действительности, данное явление, зачастую возникающее неожиданно, может представлять не менее серьезную опасность, чем колебания всей конструкции. Особую роль локализованные колебания приобретают в свете широко используемого в последнее время расчета сооружений на, так называемое, прогрессирующее обрушение (Перельмутер, Криксунов, Мосина, 2009).

В начале, определим понятие «локальные колебания». Под локальными колебаниями будем понимать колебания отдельных элементов или частей конструкции, при относительно покоящихся прочих элементах или конструкции в целом. Возникновение локальных колебаний будем именовать локализацией колебаний.

Показательным примером локальных колебаний являются зафиксированные колебания пролета каркаса машинного зала Саяно-Шушенской ГЭС, при относительно покоящемся фундаменте (агрегатном блоке), вследствие динамической нагрузки, возникающей от работы водобойного колодца. Данное обстоятельство поставило жесткие требования по контролю состояния указанной конструкции (Брызгалов, Клюкач, 1998). Другим примером являются колебания перекрытий зданий, расположенных в непосредственной близости от транспортных магистралей, приводящие к повреждениям несущего каркаса (Алявдин, Музычкин, 2009).

Анализ отечественных и зарубежных публикаций последних лет указывает на значительный интерес исследователей к данному вопросу, который не рассматриваемый ранее ввиду невозможности моделирования поведения сложных систем при динамических воздействиях.

Особое значение локальные формы колебаний имеют при практических оценках состояния отдельных несущих элементов конструкции сооружений по их динамическим характеристикам (Atamturktur, Bornn, Nemez, 2011; Matsumoto, Yamaguchi, Yoshioka, 2010).

Условно разделим весь спектр собственных колебаний на глобальные и локальные формы.

В качестве иллюстраций на Рисунке 1.2.1 приведены формы собственных колебаний массивного сооружения, полученные математическим моделированием методом конечных элементов в программном комплексе ANSYS. Из представленных результатов видно, что 1-я и

9-я формы – глобальные, в то время как 4-я и 8-я формы – локальные формы колебаний стены. Таким образом, внешнее воздействие с частотами 14,56 Гц и 20,64 Гц приведет лишь к колебаниям отдельной стены при относительно покоящейся конструкции в целом.

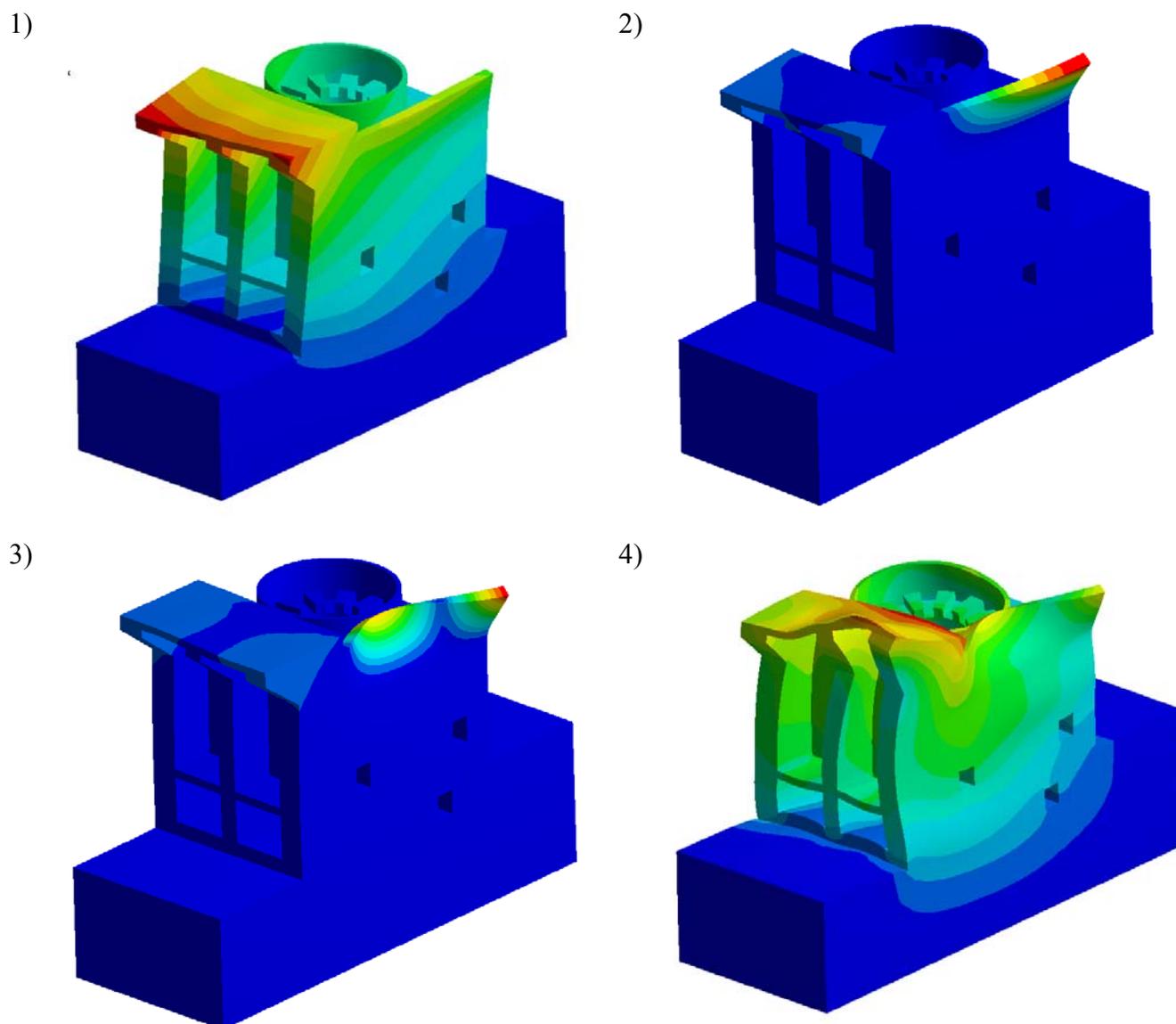


Рисунок 1.2.1. Собственные формы колебаний массивного сооружения.

- 1) 1-я форма, частота 7,13 Гц; 2) 4-я форма, частота 14,56 Гц;
3) 8-я форма, частота 20,64 Гц; 4) 9-я форма, частота 21,70 Гц.

В свою очередь, можно разделить локализации по частотному признаку на низко, средне и высокочастотные колебания, относительно исследуемого спектра колебаний конструкции, учитываемого при проектировании. Приведем примеры. В работе (Перельмутер и др., 2003) авторы указывают на возможность возникновения локальных низкочастотных колебаний покрытий и перекрытий зданий. К среднечастотным колебаниям можно отнести колебания

отдельных элементов конструкции при смешанном спектре внешней нагрузки (Мондрус, Хуэн, Сизов, 2010). Примером высокочастотных колебаний являются вибрации рельса железнодорожного пути (Markus R. Pfaffinger, 2000).

Отметим, что при выполнении расчетов реальных конструкций на динамические воздействия перед инженерами всегда встает вопрос о количестве учитываемых форм собственных колебаний, что косвенно регулируется нормативными документами. Так, многие исследователи (Бирбраер, 1998; Гольдин, Рассказов, 2001; Зенкевич, 1975) показывают для большинства реальных конструкций значительный вклад первых форм колебаний с пренебрежительно малой долей последующих. С другой стороны, используя современные расчетные программы, реализующие метод конечных элементов и позволяющие учитывать большое количество форм собственных колебаний, инженеры упускают из виду то обстоятельство, что точность определения высших частот и форм колебаний резко уменьшается по мере увеличения частоты вследствие большой размерности задачи (Зенкевич, 1975). Таким образом, зачастую учитываемый спектр собственных частот не вполне адекватно характеризует поведение конструкции при динамических воздействиях.

Выполним оценку высших собственных форм колебаний с энергетической точки зрения. Как известно, наиболее энергоемкими являются низшие формы, так как максимальная потенциальная энергия колебаний по i -ой форме есть функция пропорциональная амплитуде колебаний, которая в свою очередь обратно пропорциональна величине i -ой частоты собственных колебаний (Бабаков, 1958). Другими словами можно сказать, что энергия колебаний, по мере увеличения частоты, уменьшается.

Вернемся к реальным конструкциям, в которых, как известно, при колебаниях возникают силы сопротивления, характеризующиеся вязким трением в материале и сухим в сочленениях (при их наличии) (Пановко, 1985; Юнин, 2009). Трение в материале описывается коэффициентом поглощения (демпфирования), который принято определять как долю рассеянной энергии за цикл колебания в максимальной энергии цикла. Как следует из многочисленных опытов, для большинства строительных материалов указанный коэффициент не зависит или слабо зависит от амплитуды и частоты колебаний (Сорокин, 1956). Сухое трение в сочленениях (конструкционное демпфирование) в физическом смысле характеризует максимальную силу, при которой тело еще находится в состоянии покоя. При этом, величина данной силы не зависит от скорости движения тела (Розенблат, 2011) и, следовательно, от частоты колебаний. Вместе с тем, низкочастотные воздействия зачастую вызывают колебания наиболее гибких элементов сооружения, в то время как узлы соединений, как элементы повышенной жесткости, начинают вовлекаться в колебания при более высоких частотах.

На основании изложенного можно заключить, что по мере увеличения частоты колебаний системы, сопровождающееся уменьшением амплитуды и энергии колебаний и увеличением количества колеблющихся узлов сочленений, происходит увеличение суммарного конструкционного демпфирования в сооружении.

Далее, локальные формы имеют большое значение при переходных колебательных процессах. Так, рядом зарубежных исследователей был выделен спектр механических колебаний, названный среднечастотным (Desmet, 2002). При этом было показано, что игнорирование колебаний в указанном частотном диапазоне, занижает действующую нагрузку, в связи с чем, были предложены методы их учета (Ladeveze, Chevreuril, 2005). Предметом указанных исследований являлись плитные элементы (Рисунок 1.2.2).

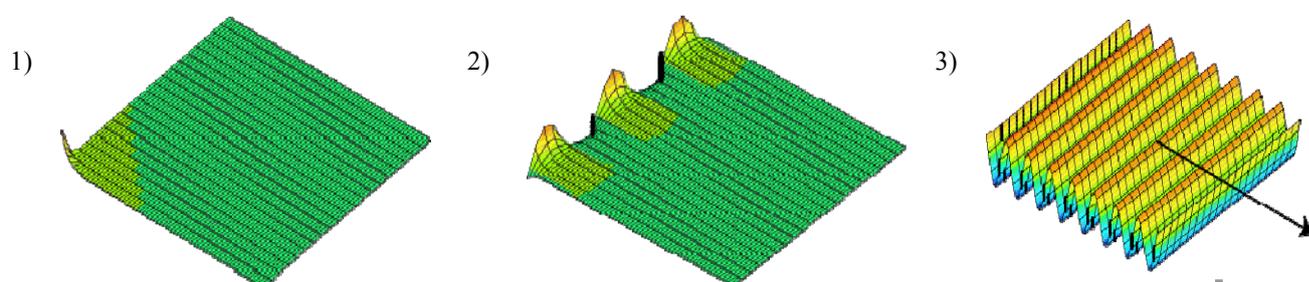


Рисунок 1.2.2. Собственные формы колебаний плиты (Ladeveze, Chevreuril, 2005).

1) локальная форма; 2) локальная форма; 3) глобальная.

В настоящее время в действующих нормативных документах (СП 14.13330.2011) отсутствуют рекомендации по учету локальных форм. Вместе с тем, рядом исследователей рекомендуется выполнять «пошаговый» сейсмический расчет, позволяющей учесть локализацию колебаний в, так называемых, «подсистемах» или «подконструкциях» (Бирбраер, 1998; Белостоцкий, Дубинский, Потапенко, 2006).

Вместе с тем, как будет показано далее, для протяженных сооружений возможно получение аналитических зависимостей для учета указанных особенностей динамики конструкций, позволяющих избежать выполнения трудоемких численных расчетов.

1.3 Протяженные конструкции на упругом основании со сплошным спектром частот собственных колебаний

Рассмотрим колебания полубесконечной струны, описываемые уравнением:

$$T \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - m \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = 0, \quad 0 < x < +\infty, \quad t > 0, \quad (1.3.1)$$

где T – сила натяжения струны, m – погонная масса струны, при следующих граничных и начальных условиях:

$$\begin{aligned} u(0, t) = f(t), \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} |u(x, t)| < const, \\ u(x, 0) = 0, \quad \left. \frac{\partial u}{\partial t} \right|_{t=0} = 0, \end{aligned} \quad (1.3.2)$$

где $f(t)$ – заданная функция.

Решение рассматриваемой задачи получено в (Голоскоков, 2004) и имеет вид:

$$\begin{cases} u(x, t) = 0, & 0 < t < \frac{x}{a}, \\ u(x, t) = f\left(t - \frac{x}{a}\right), & t > \frac{x}{a}, \end{cases} \quad (1.3.3)$$

где a – скорость распространения колебаний:

$$a = \sqrt{T/m}. \quad (1.3.4)$$

Таким образом, колебания полубесконечной струны представляют собой бегущие волны, определяемые заданным смещением $f(t)$ и физическими характеристиками струны. При этом, частота колебаний полностью определяется $f(t)$, а собственные частоты, строго говоря, образуют бесконечный сплошной спектр (Голоскоков, 2004), ограниченный нулевым значением. Сделанный вывод можно распространить на все однородные прямолинейные бесконечные элементы (стержни, балки и т.п.).

Распространяя сделанные выше выводы на протяженные конструкции на упругом основании, отметим сдвиг левой границы сплошного спектра вправо, то есть в сторону больших частот. Это обусловлено наличием, так называемой, частоты отсечки, образующей частотную область непропускания (Ерофеев и др., 2009), что будет пояснено ниже.

В инженерной практике, протяженные конструкции, в том числе и магистральные трубопроводы, в силу их большой длины принято рассматривать как бесконечные. При этом, как указано во введении, общепринятый подход к расчету указанных сооружений на сейсмическую нагрузку сводится к оценке деформаций трубы, возникающих вследствие

распространения сейсмических волн в грунте, а собственная динамика конструкции не учитывается (Гехман, 1993; Окамото, 1980; Antaki, 2003).

В математическом отношении данный подход соответствует (1.3.3). При этом, в качестве заданного смещения $f(t)$, ввиду высокой степени неопределенности нагрузки (Дмитровская, 2005; Ковалева, Рутман, Давыдова, 2013), принимается некая условная гармоническая функция (В.1) (Гехман, 1993; Окамото, 1980; Antaki, 2003), учитывающая особенности распространения сейсмических волн в грунтовом основании (Вознесенский, 1999; Павленко, 2009). Параметры указанной гармоника, такие как амплитуда и частота колебаний определяются по данным соответствующих изысканий.

Исходной информацией о величине сейсмической нагрузки, согласно действующим нормативным требованиям (СП 36.13330.2012 «Магистральные трубопроводы»), является сейсмическое ускорение, преобладающий период сейсмических колебаний грунтового массива и скорость распространения волн в грунте, определяемых по данным изысканий и сейсмического микрорайонирования, в западных нормах (Seismic analysis ... , 1986) – максимальная (пиковая) скорость колебаний грунта при землетрясении и скорость распространения волн. Несмотря на указанные различия, количественные оценки амплитуды сейсмического воздействия являются в отечественных и зарубежных нормах идентичными.

Для подтверждения вышесказанного, проанализируем (В.4) и (В.5). Отбросив дополнительные коэффициенты, выражения для амплитуд деформаций грунтового массива можно представить в виде:

$$\varepsilon_1 = \frac{a_c T_0}{2\pi c_p}, \quad \varepsilon_2 = \frac{V_g}{C}, \quad (1.3.5)$$

где первое выражение соответствует российским нормам (СП 36.13330.2012), второе – американским (Seismic analysis ... , 1986), a_c – сейсмическое ускорение, T_0 – преобладающий период сейсмических колебаний грунтового массива, c_p – скорость распространения сейсмической волны, V_g – максимальная скорость грунта при землетрясении, C – скорость распространения сейсмической волны. Так как (Бирбраер, 1998):

$$V_g = \frac{a_c T_0}{2\pi}, \quad (1.3.6)$$

то $\varepsilon_1 = \varepsilon_2$.

Обратим внимание на ряд допущений, положенных в основу описанной выше методики, определяющими из которых являются условности взаимодействия в системе «труба-грунт» и моделирование сейсмического воздействия.

Математическое описание взаимодействия сооружения с грунтовым основанием при сейсмических воздействиях нельзя признать полностью определенным в силу большой степени нелинейности поведения (Тяпин, 2013). В описанной выше методике, поведение грунта принято упругим, а контактное взаимодействие в системе «труба-грунт» моделируется коэффициентом заземления трубопровода в грунте, определяемом по данным соответствующих изысканий. Данные допущения справедливы для плотных однородных грунтов при несильных землетрясениях (Султанов, 1992).

Моделирование сейсмической нагрузки в виде гармонической волны с одной характерной преобладающей частотой ω и амплитудой воздействия u_0 в определенной мере соответствует заданию «глобальной» нагрузки, обуславливающей большую часть смещений и усилий в конструкции (Бирбраер, 1998; Сеницын, 1967). Отметим, что результаты обследования магистральных трубопроводов перенесших землетрясения указывают на хорошую сохранность линейной части (Гехман, Зайнетдинов, 1988; Рашидов, Ан, 2014; Сейсмостойк. магистрал. трубопров. ... ,1980), что в известной степени указывает на правомерность принятого подхода.

Таким образом, в соответствии с общепринятым подходом, колебания заглубленных магистральных трубопроводов при сейсмическом воздействии, представляют в виде бегущих волн, соответствующих заданному сейсмическому воздействию:

$$u(x,t) = u_0 f\left(\omega\left(t - \frac{x}{a}\right)\right), \quad (1.3.7)$$

где f – гармоническая функция, u_0 – заданная амплитуда сейсмических колебаний грунта, ω – заданная преобладающая частота колебаний грунтового массива. Выражение (1.3.7) идентично выражению (В.1) и отвечает условиям (1.3.2). Как было отмечено выше, вследствие наличия упругого основания, существование бегущих волн возможно только при частотах колебаний, превышающих частоту отсечки, что подробнее рассмотрено ниже. В этой связи, колебания заглубленных магистральных трубопроводов, в том числе и высокочастотные, в ряде случаев будем представлять в виде:

$$u(x,t) = u_1(x) \cos(\omega t), \quad (1.3.8)$$

что справедливо для установившегося режима колебаний без учета начальных условий его формирования и не противоречит общепринятым подходам к расчету магистральных трубопроводов.

Тогда, уравнение продольных колебаний стержня на упругом основании, после отделения временного множителя примет вид:

$$EAu'' + m\omega^2 u - ku = 0, \quad (1.3.9)$$

где E – модуль упругости материала стержня, A – площадь поперечного сечения стержня, m – погонная масса стержня, k – коэффициент продольной жесткости упругого основания, ω – частота колебаний.

Уравнение поперечных колебаний балки на упругом основании, после отделения временного множителя, примет вид:

$$EIu^{IV} - m\omega^2u + Ku = 0, \quad (1.3.10)$$

где E – модуль упругости материала стержня, I – момент инерции поперечного сечения балки, m – погонная масса, K – коэффициент жесткости упругого основания, ω – частота колебаний.

1.4 Выводы

1. Показано существование у элементов строительных конструкций смешанного спектра собственных частот, образованного дискретной частью и сплошной. При этом можно выделить некую условную граничную частоту, разделяющую указанные части спектра. Амплитуда вынужденных колебаний конструкции при воздействиях с частотами, превышающими граничную, определяется, в основном, статическими характеристиками конструкции и амплитудой внешнего воздействия.

2. В силу конструктивных особенностей в зданиях и сооружениях могут возникать локальные колебания отдельных частей или их элементов, при относительно покоящихся прочих элементах или конструкции в целом.

3. По причине отсутствия аналитических решений, для выявления возможности возникновения локальных колебаний, в ряде случаев представляющих опасность для конструкции в целом и не регламентируемых действующими нормативными документами, на стадии проектирования требуется выполнение тщательного и трудоемкого модального анализа как сооружения в целом, так и отдельных его элементов.

4. В этой связи практическую ценность представляет собой разработка аналитических методов учета локальных колебаний, позволяющих избежать выполнения трудоемкого модального анализа.

2 Динамика трубопровода без массовых включений на однородном упругом и вязко-упругом основании

В настоящей главе рассматриваются вопросы динамики линейной части заглубленного трубопровода без массовых включений как стержня на однородном упругом и вязко-упругом основании. Рассматриваются продольные и поперечные колебания. Показано существование смешанного спектра реализующегося в виде низкочастотных локальных колебаний отдельных участков и в виде высокочастотных бегущих волн. Указанное разделение спектра определяется, так называемой, частотой отсечки.

Проведен количественный анализ частоты отсечки для наиболее часто применяемых на практике трубопроводов, расположенных на нескальных основаниях. Показано, что с учетом спектра реальных сейсмозодействий, наиболее динамичными являются трубопроводы с погонной массой более 1000 кг/м, то есть трубопроводы больших диаметров. Выполнено сравнение результатов с данными других исследователей, полученными в ходе экспериментов (Сейсмостойк. магистрал. трубопров. ... , 1980; Султанов, 1992).

Получено явное аналитическое выражение для определения длины участка сооружения, реагирующего на динамическое воздействие от точечного источника. Показано, что длина участка сооружения, подверженного продольным воздействиям может достигать нескольких километров, поперечным – нескольких сот метров. В этих пределах, конструкция сама является источником динамического воздействия.

Материалы главы опубликованы в следующих работах:

1. Лалин В.В., Денисов Г.В. Динамическое поведение бесконечных стержневых элементов на упруго-вязком основании под действием точечного источника возмущения // Научный вестник Воронежского ГАСУ. Строительство и архитектура. 2013. № 2 (30). С.105-113.
2. Денисов Г.В., Лалин В.В. Собственные колебания заглубленных магистральных трубопроводов при сейсмическом воздействии // Трубопроводный транспорт: теория и практика. 2013. № 4 (38). С. 14-17.

2.1 Динамика трубопровода на упругом основании

Рассмотрим продольные колебания трубопровода, как стержня на упругом основании (Рисунок 2.1.1).

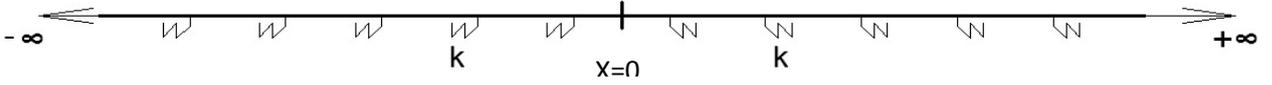


Рисунок 2.1.1. Продольные колебания. Постановка задачи

Соответствующее уравнение колебаний после отделения временного множителя имеет вид:

$$EAu'' + m\omega^2 u - ku = 0, \quad -\infty < x < +\infty, \quad (2.1.1)$$

где E – модуль упругости материала стержня, A – площадь поперечного сечения стержня, m – погонная масса стержня, k – коэффициент продольной жесткости упругого основания, ω – частота колебаний.

Теоретическими исследованиями было установлено, что динамическое поведение струн, стержней и балок на упругом основании характеризуется, так называемой, частотой отсечки, определяемой жесткостью основания и погонной массой элемента (Тимошенко, 1967; Оксогоев, Слепов, 2003). При этом установлено, что колебания с частотой ниже частоты отсечки имеют локальный затухающий характер, и не могут распространяться по струне (балке) (в работе (Ерофеев и др., 2009) данная область спектра именуется «областью непропускания»). В тоже время, колебания с превышающими частотами представляют собой бегущие волны.

Уравнение (2.1.1) имеет известные решения (Локализация лин. волн, 2007):

$$u(x) = C_1 e^{ax} + C_2 e^{-ax}, \quad \omega < \omega_b = \sqrt{k/m}, \quad (2.1.2)$$

$$u(x) = C_3 e^{ibx} + C_4 e^{-ibx}, \quad \omega > \omega_b = \sqrt{k/m}, \quad (2.1.3)$$

где $a = \sqrt{(k - m\omega^2)/EA}$, $b = \sqrt{(m\omega^2 - k)/EA}$, ω_b – частота отсечки, i – мнимая единица. Коэффициенты C определяются из условия $u(0) = u_0$, а так же условий ограниченности решения на бесконечности. Таким образом, для установившегося режима можно записать:

$$u(x) = u_0 \exp\left(-\sqrt{\frac{k - m\omega^2}{EA}}|x|\right), \quad \omega < \omega_b, \quad (2.1.4)$$

$$u(x) = u_0 \exp\left(-i\sqrt{\frac{m\omega^2 - k}{EA}}|x|\right), \quad \omega > \omega_b. \quad (2.1.5)$$

Проанализируем полученные решения. Как видно из (2.1.4), колебания стержня на упругом основании при частоте воздействия ω меньшей частоты отсечки ω_b имеют экспоненциально затухающую амплитуду и симметричны относительно $x = 0$ (точка приложения нагрузки (смещения)). Другими словами, при указанных параметрах, волны не могут распространяться в стержне, а экспоненциально затухают. В этих условиях, поддержание колебаний возможно только за счет колебаний окружающего грунта, что соответствует гипотезе работы заглубленного трубопровода как единого целого с окружающим грунтом.

Далее, из (2.1.5) видно, что колебания при частоте вынуждающей силы ω большей частоты отсечки ω_b представляют собой распространяющиеся в обе стороны волны относительно $x = 0$. В этих условиях возникают колебания стержня, затухающие за счет сил неупругого сопротивления. Характер динамики стержня, в зависимости от частоты колебаний, условно показан на Рисунке 2.1.2.

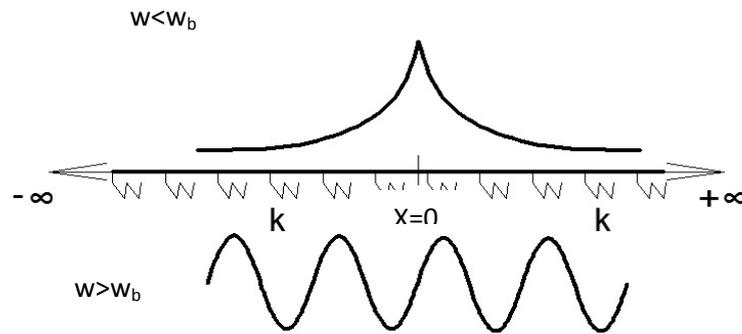


Рисунок 2.1.2. Характер колебаний

Выполним количественный анализ частоты отсечки $\omega_b = \sqrt{k/m}$. Коэффициент продольной жесткости основания k будем рассматривать в диапазоне $10 \div 200$ МПа (в соответствии динамическому модулю сдвига, более чем в 2 раза меньшего модуля упругости (Цытович, 1963)). (Следует отметить, что для определения коэффициента k рядом авторов предложены аналитические зависимости, полученные с учетом величин эффективного защемления трубы в грунт (Рашидов, Хожметов, 1985). Вместе с тем, для определения наивысших частот, указанным эффектом пренебрежем). Погонную массу трубопровода с учетом продукта и слоя обратной засыпки m рассмотрим в диапазоне $100 \div 3000$ кг/м. Поверхность, соответствующая принятым значениям приведена на Рисунке 2.1.3.

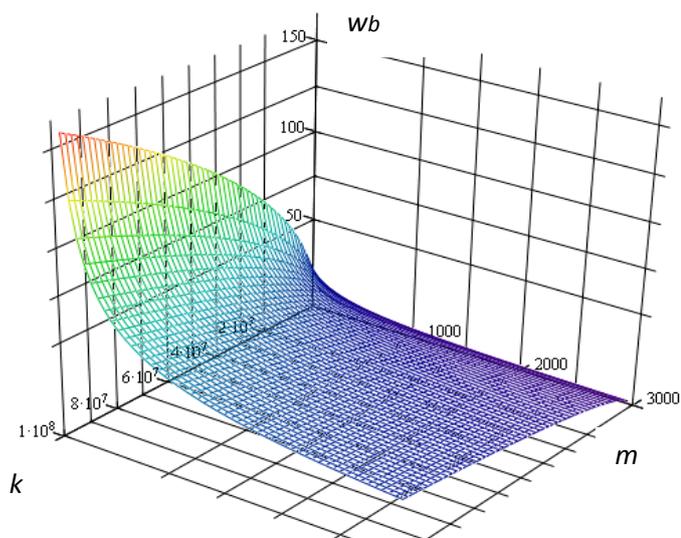


Рисунок 2.1.3. Зависимость $w_b = w_b(k, m)$, Гц

Анализируя полученные результаты, в первую очередь, следует отметить достаточно высокое значение частоты отсечки для средних грунтовых условий ($15 \div 20$ Гц). Далее, трубопроводы с погонной массой меньше 1000 кг/м, при равных грунтовых условиях, характеризуются более высокой частотой отсечки, чем сооружения с большей массой. С учетом максимальной величины преобладающей частоты колебаний грунта, фиксируемой при землетрясениях, 35 Гц (Бирбраер, 1998), можно сказать, что тяжелые трубопроводы являются более динамичными, чем относительно легкие (с массой < 1000 кг/м).

В этой связи показательными являются результаты исследований (Сейсмостойк. магистрал. трубопров. .., 1980), проводимых на трубах диаметром 122 мм, заглубленными на 50 см. Было установлено, что при преобладающем периоде колебаний грунта $0,66 \div 0,73$ с ($8,6 \div 9,5$ Гц), амплитуды колебаний сооружения и массива совпадают, при этом, частота колебаний трубы была близка к частоте входящего импульса. Согласно Рисунку 2.1.3, ориентировочно, минимальная частота отсечки должна составлять 50 Гц, таким образом, данная нагрузка не могла вызвать собственных колебаний трубы, а ее перемещения должны полностью определяться перемещением окружающего грунтового массива, что и было зафиксировано в ходе эксперимента.

Другой эксперимент (Сейсмостойк. магистрал. трубопров. .., 1980) проводился на стальных трубах $1200 \times 11,7$ заглубленных на 1,1 м. Было установлено, что при периодах колебаний грунтового массива $0,7 \div 2,7$ с ($0,37 \div 1,43$ Гц), трубопровод и грунт перемещаются совместно. Полученные результаты соответствуют поведению трубопровода при частотах, ниже частоты отсечки, которая в данном случае, согласно Рисунку 2.1.3, оценивается в 30 Гц.

Таким образом, можно заключить, что при низкочастотных воздействиях, не превышающих частоту отсечки, и несильных сейсмических толчках, поведение трубопровода соответствует принятой схематизации.

Касаемо высокочастотных колебаний, приводящих к подвижкам трубы относительно грунтового основания, следует отметить зафиксированные факты срывов при землетрясениях (Султанов, 1992), а так же более низкую степень защемления трубопроводов больших диаметров в грунт (Гехман, Зайнетдинов, 1988), что согласуется с Рисунком 2.1.3 в части более низкой частоты отсечки для тяжелых труб.

Несмотря на отсутствие опытных данных, по-видимому, вследствие высокого значения частоты отсечки трубопроводов, ряд авторов (Самарин, 1979; Гехман, Зайнетдинов, 1988) допускает возможность генерации колебаний самим трубопроводом при относительно покоем грунтового массиве.

Теперь рассмотрим изгибные колебания трубопровода, как балки на упругом основании (Рисунок 2.1.4).

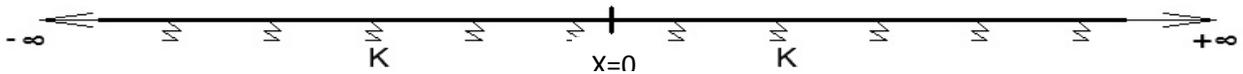


Рисунок 2.1.4. Поперечные колебания. Постановка задачи

Для описания поведения балки примем наиболее часто используемую для большинства инженерных задач модель Бернулли-Эйлера. Данная схематизация в отличие от более сложных моделей не учитывает влияние инерции вращения (модель Рэлея) и деформации поперечного сдвига (модель Тимошенко) (Ерофеев и др., 2009), что допустимо для низкочастотных колебаний (Зверьяев, Докина, 2007) рассматриваемых в настоящей работе.

Уравнение колебаний балки Бернулли-Эйлера на упругом основании после отделения временного множителя имеет вид:

$$EIu^{IV} - m\omega^2 u + Ku = 0, \quad -\infty < x < +\infty, \quad (2.1.6)$$

где E – модуль упругости материала стержня, I – момент инерции поперечного сечения балки, m – погонная масса, K – коэффициент жесткости упругого основания, ω – частота колебаний.

Уравнение (2.1.6) имеет известные решения (Локал-ция лин. волн, 2007):

$$u(x) = (C_1 \cos ax + C_2 \sin ax)e^{-ax} + (C_3 \cos ax + C_4 \sin ax)e^{ax}, \quad \omega < \omega_{bb} = \sqrt{K/m}, \quad (2.1.7)$$

$$u(x) = C_5 e^{ibx} + C_6 e^{-ibx} + C_7 e^{bx} + C_8 e^{-bx}, \quad \omega > \omega_{bb} = \sqrt{K/m}, \quad (2.1.8)$$

где $a = \sqrt[4]{(k - m\omega^2)/EI}$, $b = \sqrt[4]{(m\omega^2 - k)/EI}$, ω_{bb} – частота отсечки, i – мнимая единица.

Для определения коэффициентов C принимаем в качестве условий заданное смещение $u(0) = u_0$ при отсутствии поворота $u'(0) = 0$ и ограниченность решения на бесконечности. Таким образом, можно записать:

$$u(x) = u_0 \left(\cos \left(\sqrt[4]{\frac{k - m\omega^2}{EI}} x \right) + \sin \left(\sqrt[4]{\frac{k - m\omega^2}{EI}} x \right) \right) \exp \left(-\sqrt[4]{\frac{k - m\omega^2}{EI}} |x| \right), \quad \omega < \omega_{bb}, \quad (2.1.9)$$

$$u(x) = \frac{u_0}{2} \left(\exp \left(-i \sqrt[4]{\frac{m\omega^2 - k}{EI}} |x| \right) + \exp \left(-\sqrt[4]{\frac{m\omega^2 - k}{EI}} |x| \right) \right), \quad \omega > \omega_{bb}. \quad (2.1.10)$$

Отметим, что, строго говоря, выражение (2.1.9) содержит два экспоненциальных слагаемых, выражение (2.1.10) – четыре, отличных знаком аргумента в соответствии с условием ограниченности решения на бесконечности, что удовлетворяет граничным условиям. Данная форма записи (2.1.9) и (2.1.10) принята для краткости написания.

Сравнительный анализ (2.1.4, 2.1.5) и (2.1.9, 2.1.10) позволяет распространить сделанный ранее вывод для продольных колебаний о характере поведения стержня в зависимости от частоты возмущения и на поперечные колебания балок (см. Рисунок 2.1.5).

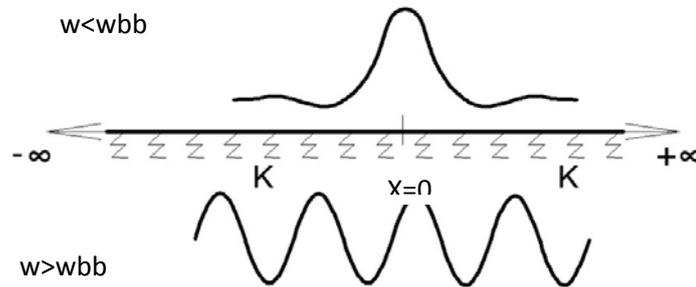


Рисунок 2.1.5. Характер колебаний

Выполним количественный анализ частоты отсечки $\omega_{bb} = \sqrt{K/m}$. Коэффициент жесткости основания k будем рассматривать в диапазоне $5 \div 100$ МПа (Бирбраер, 1998). Погонную массу трубопровода с учетом продукта и слоя обратной засыпки m рассмотрим в том же диапазоне $100 \div 3000$ кг/м.

Поверхность, соответствующая принятым значениям приведена на Рисунке 2.1.6.

Сравнительный анализ Рисунков 2.1.3 и 2.1.6 позволяет заключить о более высоких значениях частоты отсечки при изгибных колебаниях по сравнению с продольными, при прочих равных параметрах. Так, для средних грунтовых условий частота отсечки находится в пределах $(20 \div 25$ Гц). Поступая по аналогии, можно так же условно разделить трубопроводы на высоко, с погонной массой более 1000 кг/м, и низко динамичные, с массой менее 1000 кг/м.

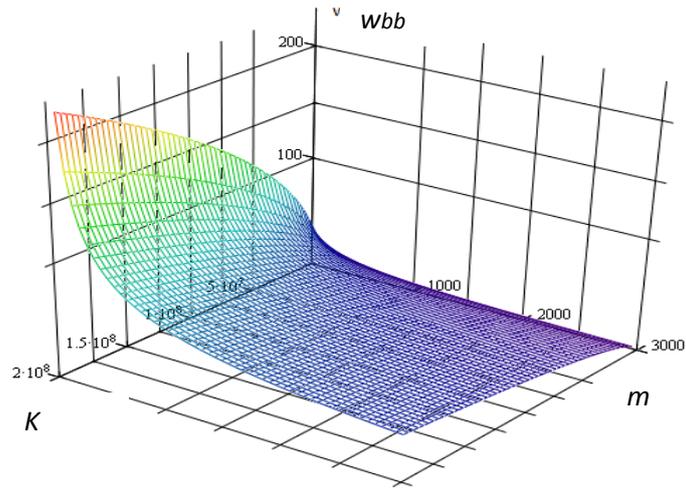


Рисунок 2.1.6. Зависимость $w_{bb}=w_{bb}(K,m)$, Гц

Отметим, что результаты, полученные в настоящем разделе, справедливы для идеальной, консервативной (Бирбраер, 1998; Чернов, 2006) системы. В действительности, любое колебательное движение совершается с потерей энергии. Учет данного фактора будет проведен в следующем разделе.

2.2 Динамика трубопровода на вязко-упругом основании

Ранее было показано, что колебания с частотой ниже частоты отсечки не могут распространяться и экспоненциально спадают, а колебания с превышающей частотой представляют собой бегущие волны. В действительности, даже высокочастотные колебания будут иметь затухающий характер в виду наличия сил трения по контакту с грунтовым основанием.

Рассмотрим вынужденные продольные колебания трубопровода, как стержня на вязко-упругом основании (Рисунок 2.2.1).

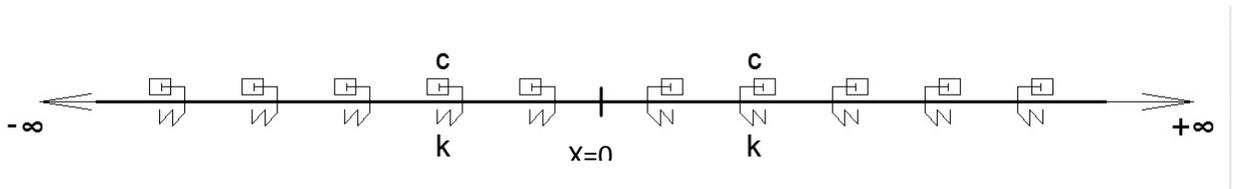


Рисунок 2.2.1. Продольные колебания. Постановка задачи

Уравнение колебаний стержня $u = u(x, t)$ запишем в виде:

$$EA \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - m \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - c \frac{\partial u}{\partial t} - ku = 0, \quad -\infty < x < +\infty, \quad (2.2.1)$$

где E – модуль упругости материала стержня, A – площадь поперечного сечения стержня, m – погонная масса стержня, c – коэффициент продольной вязкости упругого основания, k – коэффициент продольной жесткости упругого основания (Рисунок 2.2.1).

Будем искать решение в виде $u(x, t) = u_1(x)u_2(t)$. После математических преобразований, можно записать:

$$EA \frac{d^2 u_1}{dx^2} \frac{1}{u_1(x)} = \left(m \frac{d^2 u_2}{dt^2} + ku_2(t) + c \frac{du_2}{dt} \right) \frac{1}{u_2(t)} \quad (2.2.2)$$

Так как в (2.2.2) левая часть зависит только от координаты, а правая – только от времени, приравняем обе части к некоторому числу « λ^2 ». В результате получим систему уравнений:

$$\begin{cases} u_1'' - \frac{\lambda^2}{EA} u_1(x) = 0 \\ \ddot{u}_2 + \frac{c}{m} \dot{u}_2 + \frac{k - \lambda^2}{m} u_2(t) = 0, \end{cases} \quad (2.2.3)$$

здесь и далее штрихи обозначают производную по координате, точки – по времени. Принимая в качестве условий ограниченность решения на бесконечности, а так же смещение $u_1(0) = u_0$, решение первого уравнения будет иметь вид:

$$u_1(x) = u_0 \exp\left(-\sqrt{\frac{\lambda^2}{EA}}|x|\right), \quad -\infty < x < +\infty. \quad (2.2.4)$$

Решение второго уравнения представим в виде:

$$u_2(t) = \exp\left(-\frac{c}{2m}t\right) \cos\sqrt{\frac{k-\lambda^2}{m} - \frac{c^2}{4m^2}}t. \quad (2.2.5)$$

Для определения λ^2 зададимся частотой колебаний ω . Преобразовав аргумент \cos в (2.2.5), с учетом (2.2.4), получим:

$$u(x,t) = u_0 \exp\left(-\sqrt{\frac{k-m\omega^2-c^2/(4m)}{EA}}|x|\right) \exp\left(-\frac{c}{2m}t\right) \cos\omega t. \quad (2.2.6)$$

Отметим, что выражение (2.2.6) будет являться решением уравнения (2.2.1) при условии, что частота колебаний ω будет меньше некой величины ω^* :

$$\omega^* = \sqrt{\frac{k}{m} - \frac{c^2}{4m^2}}, \quad (2.2.7)$$

именуемой частотой отсечки (Локализация лин. волн, 2007; Ерофеев и др., 2009). Это условие вытекает из подкоренного выражения в (2.2.6). Обратим внимание на то, что вязкость основания уменьшает значение частоты отсечки.

Далее, рассмотрим иной случай. Приравняем обе части (2.2.2) к « $-\lambda^2$ ». В результате, система (2.2.3) примет вид:

$$\begin{cases} u_1'' + \frac{\lambda^2}{EA} u_1(x) = 0 \\ \ddot{u}_2 + \frac{c}{m} \dot{u}_2 + \frac{k+\lambda^2}{m} u_2(t) = 0. \end{cases} \quad (2.2.8)$$

Поступая по аналогии, представим решение (2.2.8) в виде:

$$u(x,t) = u_0 \exp\left(-i\sqrt{\frac{-k+m\omega^2+c^2/(4m)}{EA}}|x|\right) \exp\left(-\frac{c}{2m}t\right) \cos\omega t, \quad (2.2.9)$$

здесь i – мнимая единица. Отбросив мнимую часть (2.2.9), получим:

$$u(x,t) = u_0 \cos\left(\sqrt{\frac{m\omega^2-k+c^2/(4m)}{EA}}x\right) \exp\left(-\frac{c}{2m}t\right) \cos\omega t. \quad (2.2.10)$$

Отметим, что (2.2.10) будет являться решением уравнения (2.2.1) при условии, что частота колебаний ω будет больше ω^* (2.2.7).

Далее, выразим коэффициент вязкости основания через широко используемые в практике динамических расчетов коэффициент рассеивания (поглощения) ψ энергии колебаний и коэффициент неупругого сопротивления γ (Коренев, Рабинович, 1972), для чего, ввиду идентичности временных множителей уравнений, воспользуемся известным соотношением декремента затухания системы с одной степенью свободы (Пановко, 1960).

В рассматриваемом случае, с некоторой долей условности, можно записать:

$$\psi \approx 2 \frac{c}{2m} T \approx 2\pi\gamma, \quad (2.2.11)$$

здесь T – период колебаний. Преобразований (2.2.6) и (2.2.10) с учетом (2.2.11) получим:

$$u(x,t) = u_0 \exp\left(-\sqrt{\frac{k - m\omega^2 - 0.25\gamma^2 m\omega^2}{EA}}|x|\right) \exp\left(-\frac{\gamma\omega}{2}t\right) \cos\omega t, \quad \omega < \omega^*, \quad (2.2.12)$$

$$u(x,t) = u_0 \cos\left(\sqrt{\frac{m\omega^2 - k + 0.25\gamma^2 m\omega^2}{EA}}x\right) \exp\left(-\frac{\gamma\omega}{2}t\right) \cos\omega t, \quad \omega > \omega^*. \quad (2.2.13)$$

Для наглядности, представим (2.2.12) и (2.2.13) в виде бегущих волн. Используя взаимосвязь координаты x , времени t и волнового числа a , отметим, что волна дойдет до точки с координатой x в момент времени $t = ax / \omega$. В результате можно записать:

$$u(x,t) = u_0 \exp\left(-\left(a^*|x| + \frac{\gamma a^*}{2}|x|\right)\right) \cos\omega t, \quad \omega < \omega^*, \quad (2.2.14)$$

здесь $a^* = \sqrt{\frac{k - m\omega^2 - 0.25\gamma^2 m\omega^2}{EA}},$

$$u(x,t) = \frac{u_0}{2} \exp\left(-\frac{\gamma a}{2}|x|\right) (\cos(ax - \omega t) + \cos(ax + \omega t)), \quad \omega > \omega^* \quad (2.2.15)$$

где $a = \sqrt{\frac{m\omega^2 - k + 0.25\gamma^2 m\omega^2}{EA}}.$

Из сравнения (2.2.14) и (2.2.15) следует: низкочастотные воздействия приводят к возникновению бегущих быстро затухающих колебаний, а высокочастотные – к возникновению бегущих затухающих волн. Это не противоречит результатам, представленным в п.2.1. Представим данные зависимости для положительного x в виде поверхностей при $u_0 = 1$ на Рисунках 2.2.2, 2.2.3 где горизонтальные оси соответствуют времени t и координате x , вертикальная ось – смещению u , а горизонтальный участок поверхности соответствует участку стержня до которого волна еще не дошла.

Проанализируем представленные результаты. Отметим затухание колебаний стержня, как по координате, так и с течением времени. Другими словами можно сказать, что энергия начального точечного смещения распространяется по всему стержню, соответственно уменьшая свою интенсивность. Далее, при низкочастотных воздействиях затухание бегущей волны происходит быстрее (Рисунок 2.2.2). Это, в определенной мере, соответствует тезису о невозможности распространения волн в стержне при частотах меньших частоты отсечки. Показательным является рисунок 2.2.3, который иллюстрирует экспоненциальный характер затухания колебаний стержня при высокочастотных воздействиях.

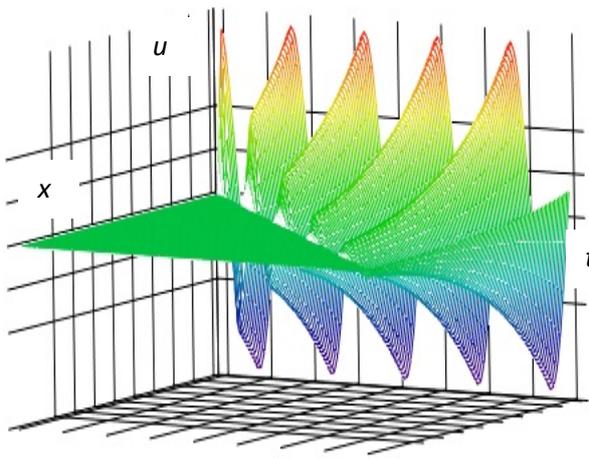


Рисунок 2.2.2. Распространение колебаний $u=u(x,t)$ при $\omega < \omega^*$

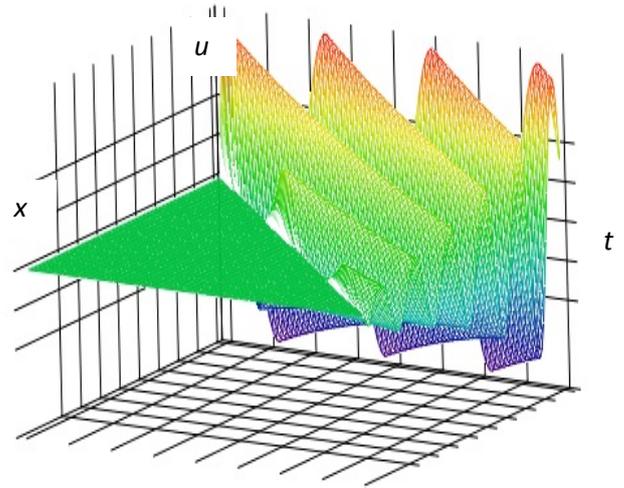


Рисунок 2.2.3. Распространение колебаний $u=u(x,t)$ при $\omega > \omega^*$

Теперь рассмотрим поперечные колебания трубопровода, в рамках модели балки Бернулли-Эйлера, расположенной на упруго-вязком основании (Рисунок 2.2.4).

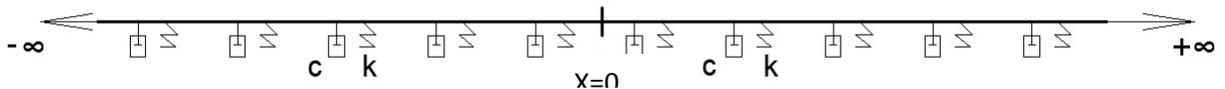


Рисунок 2.2.4. Поперечные колебания. Постановка задачи

Уравнение малых свободных колебаний балки $u = u(x,t)$ запишем в виде:

$$EI \frac{\partial^4 u}{\partial x^4} + m \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} + c \frac{\partial u}{\partial t} + ku = 0, \quad -\infty < x < +\infty, \quad (2.2.16)$$

где E – модуль упругости материала стержня, I – момент инерции поперечного сечения балки, m – погонная масса, c – коэффициент вязкости упругого основания, k – коэффициент жесткости упругого основания (Рисунок 2.2.4).

После разделения переменных приравняем обе части выражения к « λ^2 ». В результате получим систему уравнений:

$$\begin{cases} u_1'''' - \frac{\lambda^2}{EI} u_1(x) = 0 \\ \ddot{u}_2 + \frac{c}{m} \dot{u}_2 + \frac{k - \lambda^2}{m} u_2(t) = 0. \end{cases} \quad (2.2.17)$$

Отметим, что второе уравнение системы (2.2.17) идентично уравнению в системе (2.2.3). Принимая условия $u_1(0) = u_0$, $u_1'(0) = 0$, а так же условие ограниченности на бесконечности, решение первого уравнения представим в виде:

$$u_1(x) = u_0 \left(\exp \left(-4 \sqrt{\frac{\lambda^2}{EI}} |x| \right) \left(\cos^4 \sqrt{\frac{\lambda^2}{EI}} x + \sin^4 \sqrt{\frac{\lambda^2}{EI}} x \right) \right), \quad -\infty < x < +\infty. \quad (2.2.18)$$

Отметим, что, строго говоря, данное выражение содержит два экспоненциальных слагаемых, отличных знаком аргумента в соответствии с условием ограниченности решения на бесконечности, что удовлетворяет граничным условиям. Данная форма записи (2.2.18) принята для краткости написания.

Используя ранее полученные решения (2.2.4) и (2.2.5), после преобразований запишем:

$$u(x, t) = u_0 (\cos(\varepsilon^* x) + \sin(\varepsilon^* x)) \exp(-\varepsilon^* |x|) \exp\left(-\frac{\gamma \varepsilon^*}{2} |x|\right) \cos \omega t, \quad (2.2.19)$$

здесь $\varepsilon^* = \sqrt[4]{\frac{k - m\omega^2 - 0.25\gamma^2 m\omega^2}{EI}}$, γ – коэффициент неупругого сопротивления, ω – частота колебаний. Отметим, данное выражение будет являться решением (2.2.16) при частотах колебаний ниже частоты отсечки, определяемой (2.2.7).

Далее, рассмотрим второй случай, приравняв обе части выражения к « $-\lambda^2$ ». В результате получим систему уравнений:

$$\begin{cases} u_1'''' - \frac{\lambda^2}{EI} u_1(x) = 0 \\ \ddot{u}_2 + \frac{c}{m} \dot{u}_2 + \frac{k + \lambda^2}{m} u_2(t) = 0. \end{cases} \quad (2.2.20)$$

Используя те же условия, решение первого уравнения представим в виде:

$$u_1(x) = \frac{u_0}{2} \left(\exp \left(-4 \sqrt{\frac{\lambda^2}{EI}} |x| \right) + \exp \left(-i^4 \sqrt{\frac{\lambda^2}{EI}} |x| \right) \right), \quad -\infty < x < +\infty. \quad (2.2.21)$$

Отметим, что, строго говоря, данное выражение содержит четыре экспоненциальных слагаемых, отличных знаком аргумента в соответствии с условием ограниченности решения на бесконечности, что удовлетворяет граничным условиям. Данная форма записи (2.2.21) принята для краткости написания.

Решение второго уравнения (2.2.20) получено ранее. После преобразований, запишем:

$$u(x,t) = \frac{u_0}{2} \left(\exp \left(-\sqrt[4]{\frac{m\omega^2 - k + c^2/(4m)}{EI}} |x| \right) + \exp \left(-i\sqrt[4]{\frac{m\omega^2 - k + c^2/(4m)}{EI}} |x| \right) \right) \cdot \exp \left(-\frac{c}{2m} t \right) \cos \omega t. \quad (2.2.22)$$

Отбросив мнимую часть и преобразовав (2.2.22), получим:

$$u(x,t) = \frac{u_0}{2} \left(\exp(-\varepsilon|x|) + \cos(\varepsilon x) \right) \exp \left(-\frac{\gamma \varepsilon}{2} |x| \right) \cos \omega t, \quad (2.2.23)$$

здесь $\varepsilon = \sqrt[4]{\frac{m\omega^2 - k + 0.25\gamma^2 m\omega^2}{EI}}$, γ – коэффициент неупругого сопротивления, ω – частота колебаний. Отметим, данное выражение будет являться решением (2.2.16) при частотах колебаний выше частоты отсечки, определяемой (2.2.7).

Сравнительный анализ (2.2.19) и (2.2.23) позволяет распространить сделанный ранее вывод для продольных колебаний о характере поведения стержня в зависимости от частоты возмущения и на поперечные колебания балок.

В связи с ограниченностью влияния динамического воздействия, наибольший интерес в практическом отношении будет представлять определение длины участка сооружения, подверженного динамическому воздействию от точечного источника. В реальных условиях, в качестве такого источника колебаний будет выступать любое сосредоточенное включение или неоднородность (поворот трассы, тектонический разлом и т.п.). Данный вопрос исследован в следующем разделе.

2.3 Длина участка распространения колебаний для случая вязко-упругого основания

В практическом отношении наибольший интерес представляет собой оценка максимальной длины участка сооружения, подверженного динамическим воздействиям. Область влияния ограничим стократным уменьшением амплитуды колебаний.

Начнем с продольных колебаний. В этой связи, остановимся подробнее на (2.2.15). Используя взаимосвязь координаты x , времени t и волнового числа a в (2.2.15), отметим, что волна дойдет до точки с координатой $x = L$ в момент времени $t_1 = aL / \omega$. При этом, задавая амплитуду колебаний в данной точке в 100 раз меньше начальной, математически задачу представим в виде:

$$\begin{cases} u(0,0) = u_0, \\ u(L,t_1) = \frac{u_0}{2} \exp\left(-\frac{\gamma La}{2}\right) (\cos(aL - \omega t_1) + \cos(aL + \omega t_1)), \\ u(0,0) = 100u(L,t_1). \end{cases} \quad (2.3.1)$$

Принимая сумму косинусов во втором выражении равную 2, для L получим:

$$L = \frac{2 \ln 100}{\gamma} \sqrt{\frac{EA/m}{\omega^2 (1 - k/(m\omega^2) + 0.25\gamma^2)}}. \quad (2.3.2)$$

Из (2.3.2) следует, что при рассмотрении различных стержней из одного материала длина участка, при условии постоянства γ , представляет собой функцию трех аргументов: A/m , характеризующий физические параметры, $k/(m\omega^2)$, характеризующий близость частоты отсечки и вынуждающего воздействия, и ω^2 . Данные зависимости иллюстрируются Рисунками 2.3.1, 2.3.2.

Таким образом, можно заключить, что наибольшая длина колеблющегося участка будет при низкочастотных воздействиях (менее 10 Гц) и частотах, близких к частоте отсечки.

Выполним количественную оценку. Рассмотрим участок подземного трубопровода с погонной массой (с учетом продукта) $m = 1300$ кг/м и продольной жесткостью $EA = 8 \cdot 10^9$ Н (труба 1220x12). Жесткость упругого основания примем $k = 5 \cdot 10^7$ Па (песчаные грунты), а частоту колебаний $\omega = 200,0$ Рад/с (для преобладающего периода колебаний грунта 0,03 с), коэффициент неупругого сопротивления в системе «трубопровод – грунт» примем равным 0,1. Тогда длина L , на которой амплитуда колебаний уменьшится в 100 раз, согласно (2.3.2), составит 5644,6 м или 5,6 км при времени распространения возмущения 0,46 с.

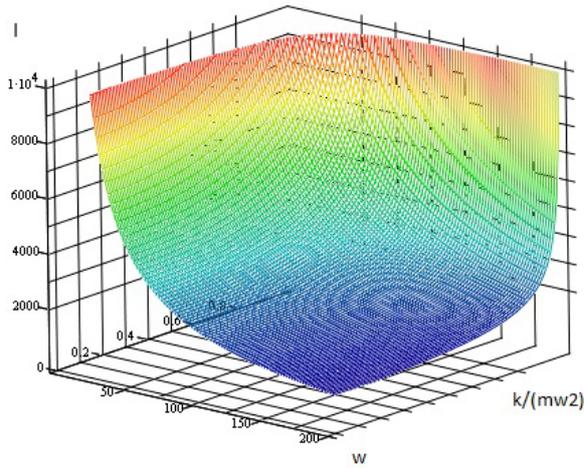


Рисунок 2.3.1. Зависимость $L=L(\omega, k/(m\omega^2))$
при $\gamma = 0,1$, $E = 2*10^{11}$ Па,
 $A/m = 3*10^{-5}$ м³/кг

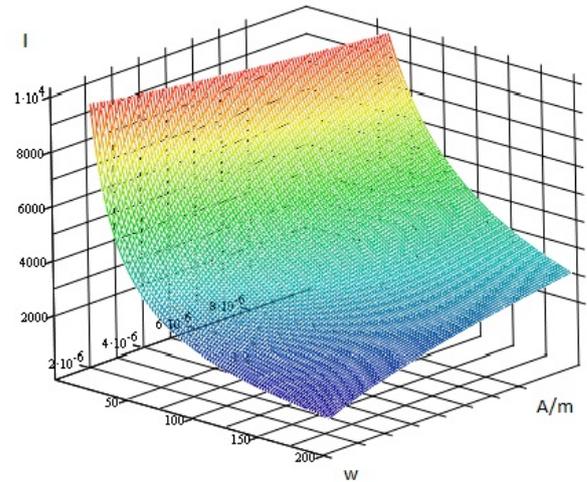


Рисунок 2.3.2. Зависимость $l=l(\omega, A/m)$ при
 $\gamma = 0,1$, $E = 2*10^{11}$ Па,
 $k/(m\omega^2) = 0,96$

Далее, рассмотрим поперечные колебания.

Длина участка балки, подвергающегося динамическому воздействию от точечного источника, при аналогичной постановке задачи (2.3.1), составит:

$$L = \frac{2 \ln 100}{\gamma} \sqrt[4]{\frac{EI/m}{\omega^2(1 - k/(m\omega^2) + 0.25\gamma^2)}} \quad (2.3.3)$$

Как и ранее, представим зависимости $L=L(k/(m\omega^2), \omega)$ и $L=L(I/m, \omega)$ на Рисунках 2.3.3, 2.3.4.

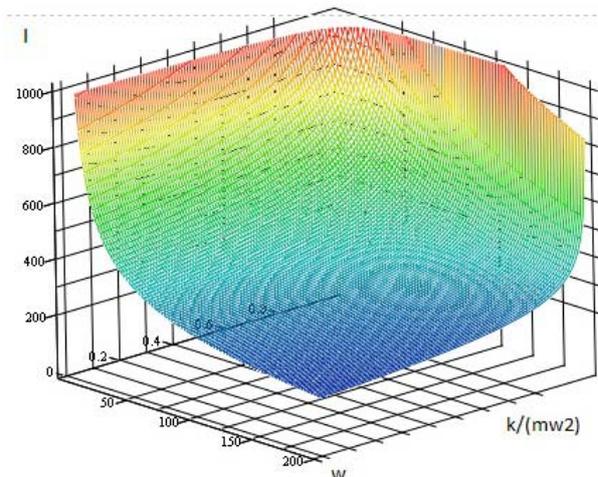


Рисунок 2.3.3. Зависимость $L=L(k/(m\omega^2), \omega)$
при $\gamma = 0,1$, $E = 2*10^{11}$ Па,
 $I/m = 5,6*10^{-6}$ кг*м³

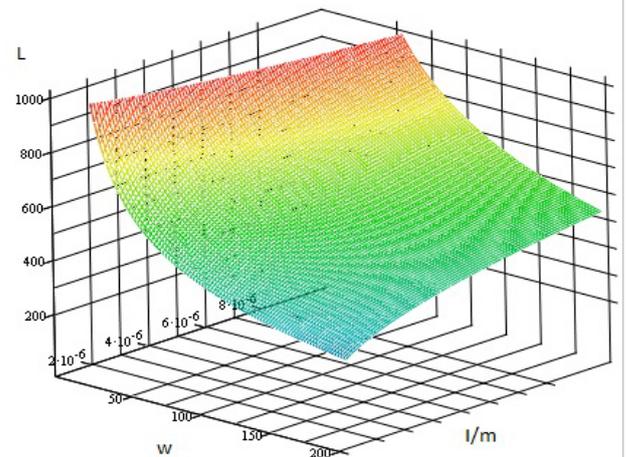


Рисунок 2.3.4. Зависимость $L=L(\omega, I/m)$ при
 $\gamma = 0,1$, $E = 2*10^{11}$ Па,
 $k/(m\omega^2) = 0,96$

Можно заключить, что наибольшая длина колеблющегося участка будет при низкочастотных воздействиях (менее 10 Гц) и частотах, близких к частоте отсечки.

Выполним количественную оценку. Рассмотрим тот же участок подземного трубопровода с изгибной жесткостью $EI = 1,46 \cdot 10^9 \text{ Па} \cdot \text{м}^4$ (труба 1220x12), а коэффициент неупругого сопротивления в системе «трубопровод – грунт» примем равным 0,1. Тогда искомая длина L , согласно (2.3.3), составит 471,3 м или 0,4 км при том же времени распространения возмущения 0,46 с.

2.4 Выводы

1. В реальных условиях, с учетом сил неупругого сопротивления, низкочастотные воздействия, с частотами ниже частоты отсечки, являющейся функцией жесткости основания и погонной массы трубопровода, приводят к возникновению локальных колебаний, экспоненциально затухающих по мере их распространения по сооружению. Данная особенность порождает неоднородность волновых процессов, которая проявляется в преимущественных колебаниях начального участка при относительно покоящемся сооружении в целом. С учетом сил неупругого сопротивления, высокочастотные воздействия порождают бегущие волны, экспоненциально затухающие по мере распространения, что приводит к более равномерному распределению колебаний по трубопроводу.

2. Получено аналитическое выражение для определения частоты отсечки для случая вязко-упругого основания. Показано, что вязкость основания уменьшает значение указанной частоты.

3. Получено явное аналитическое выражение для определения длины участка сооружения, реагирующего на динамическое воздействие от точечного источника.

4. При определенных параметрах трубопровода локальное динамическое, в том числе сейсмическое, воздействие может привести к возникновению бегущих волн в указанной конструкции, затухающих вследствие сил неупругого сопротивления по контакту с грунтом. При этом длина участка сооружения, подверженного продольным воздействиям может достигать нескольких километров, поперечным – нескольких сот метров. В этих пределах, конструкция сама является источником динамического воздействия.

3 Динамика трубопровода с точечным массовым включением на однородном основании

Реальные трубопроводы содержат конструктивные неоднородности, такие как запорная арматура, компенсаторы, поворотные участки и т.п. (Айнбиндер, 1991; Глушков, 1977; Клейн, 1969), которые, ввиду большой протяженности сооружений, можно рассматривать как точечные массовые включения.

В настоящей главе рассматриваются вопросы динамики участка трубопровода содержащего одно точечное массовое включение. Для низкочастотных воздействий проводятся исследования ловушечных мод, для высокочастотных воздействий – трансформации (отражение и прохождение) волн.

Для высокочастотных воздействий получены явные аналитические выражения для коэффициентов отражения и прохождения продольных и поперечных волн (формулы типа Френеля), распространяющихся по трубопроводу в случае наличия массового включения.

Материалы главы опубликованы в следующих работах:

1. Денисов Г.В., Лалин В.В. Влияние конструктивных включений на прочность подземных трубопроводов при динамических воздействиях // Транспорт и хранение нефтепродуктов и углеводородного сырья. 2012. № 2. С.11-13.
2. Денисов Г.В., Лалин В.В. Особенности поведения подземных трубопроводов с конструктивными включениями при динамических воздействиях // Строительная механика инженерных конструкций и сооружений. 2012. № 4. С. 54-58.
3. Денисов Г.В., Лалин В.В. Трансформация волн, распространяющихся по заглубленному трубопроводу, вследствие конструктивных включений // Строительная механика инженерных конструкций и сооружений. 2013. № 2. С.56-62.

3.1 Низкочастотные колебания. Ловушечные моды

Начнем с анализа низкочастотных колебаний.

Рассмотрим продольные колебания трубопровода, как стержня на упругом основании, содержащего одно массовое включение (Индейцев, Сергеев, Литвин, 2000) (Рисунок 3.1.1).

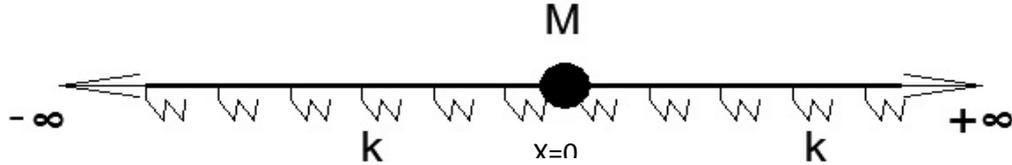


Рисунок 3.1.1. Продольные колебания. Постановка задачи

Соответствующее уравнение колебаний имеет вид (2.1.1).

Теоретическими исследованиями (Локал-ция лин. волн, 2007) в рамках струнной схематизации было установлено, что для рассматриваемой системы характерна так называемая ловушечная мода колебаний. (Термин был введен F. Ursell при изучении распространения волн на поверхности жидкости (Ursell, 1951). В настоящее время понятие широко используется в акустике, теории колебаний и т.п. (Абрамян, Индейцев, 1998; Глушков, Глушкова, Вауэр, 2011; Глушков, Глушкова, Голуб, 2006)). Частота указанной моды для струны, определяется зависимостью (Локал-ция лин. волн, 2007):

$$\omega^* = \frac{\rho_0 c_0}{\sqrt{2M}} \sqrt{-1 + \sqrt{1 + \left(\frac{2M\omega_b}{\rho_0 c_0} \right)^2}}, \quad (3.1.1)$$

где ρ_0 – погонная плотность материала струны, M – масса локального включения, c_0 – скорость распространения колебаний, ω_b – частота отсечки, в терминах (3.1.1)

$$\omega_b = \sqrt{\frac{k}{\rho_0}}, \quad (3.1.2)$$

где k – коэффициент жесткости упругого основания. Соответствующее выражение ловушечной моды (Локал-ция лин. волн, 2007):

$$\tilde{u}(x, \omega^*) = u_1 \exp\left(-\frac{1}{c_0} \sqrt{\omega_b^2 - \omega^{*2}} |x|\right), \quad (3.1.3)$$

где u_1 – заданное смещение струны в точке расположения сосредоточенной массы ($x=0$). Форма колебаний показана на Рисунке 3.1.2.

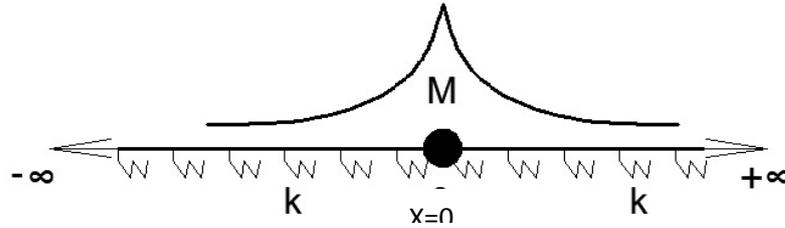


Рисунок 3.1.2. Продольные колебания.
Ловушечная мода

Следует отметить, что ловушечные моды могут существовать только при частотах ниже частоты отсечки, что было показано в (Локализация лин. волн, 2007).

Обратим внимание, что выражения (3.1.1) ÷ (3.1.3) получены для струнной схематизации, для трубопроводов же более правомерным и практичным является стержневая схематизация (Виноградов, 1980).

Принимая во внимание идентичность уравнений продольных колебаний стержня и поперечных колебания струны (Тихонов, Самарский, 1966; Пфейффер, 2006), преобразуем приведенные выше выражения.

После преобразований, (3.1.1) можно представить в виде:

$$\omega^* = \frac{\sqrt{EA}m}{\sqrt{2M}} \sqrt{-1 + \sqrt{1 + \left(\frac{2M\omega_b}{\sqrt{EA}m}\right)^2}}, \quad (3.1.4)$$

а (3.1.2) и (3.1.3) –

$$u_p(x) = u_0 \exp\left(-\sqrt{\frac{m}{EA}} \sqrt{\omega_b^2 - \omega^{*2}} |x|\right), \quad \omega^* < \omega_b = \sqrt{k/m}, \quad (3.1.5)$$

где E – модуль упругости материала стержня, A – площадь поперечного сечения стержня, m – погонная масса стержня, k – коэффициент продольной жесткости упругого основания, M – масса включения, u_0 – заданное смещение в точке расположения сосредоточенной массы ($x=0$).

Выполним количественный анализ частоты ловушечной моды. Для этого, введем новую переменную

$$B = \frac{\sqrt{EA}m}{M}, \quad (3.1.6)$$

характеризующую параметры трубопровода и включения. Рассматривая трубопроводы и основания, аналогичные рассмотренным в Главе 2, построим следующую зависимость (Рисунок 3.1.3):

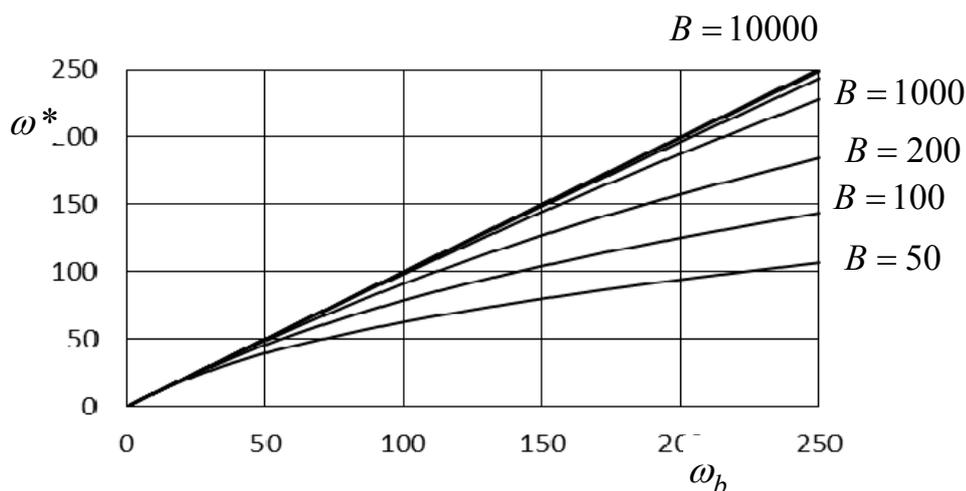


Рисунок 3.1.3. Продольные колебания. Частота ловушечной моды, рад/с

Анализируя полученные результаты, следует отметить, что для наиболее применяемых труб ($\text{Ø}1020\div 1420$) расположенных на нескальном основании при массе сосредоточенного включения до 10 т, частота ловушечной моды ≥ 20 Гц. Таким образом, в свете спектра реальных землетрясений (Бирбраер, 1998) ограниченного частотой 35 Гц, ловушечные моды продольных колебаний «нерезонансные».

Далее, рассмотрим поперечные колебания. Как и ранее, примем модель балки Бернулли-Эйлера (Рисунок 3.1.4).



Рисунок 3.1.4. Поперечные колебания. Постановка задачи

Выражение для ловушечной моды колебаний, полученное в (Локализация лин. волн, 2007) при заданном смещении u_1 в точке расположения сосредоточенной массы ($x=0$) и отсутствии поворота, имеет вид

$$\tilde{u}(x, \omega^{**}) = u_1 M \omega^{**2} \frac{1}{2Da^3} e^{-\frac{\sqrt{2}}{2}a|x|} \sin\left(\frac{\pi}{4} + \frac{\sqrt{2}}{2}a|x|\right), \quad (3.1.7)$$

где D – изгибная жесткость балки ($D=EI$, где E – модуль упругости, I – момент инерции сечения),

$$a = \sqrt[4]{\frac{K - m\omega^{**2}}{D}}, \quad (3.1.8)$$

где m – погонная масса, K – коэффициент жесткости упругого основания.

Ловушечная мода для поперечных колебаний представлена на Рисунке 3.1.5.

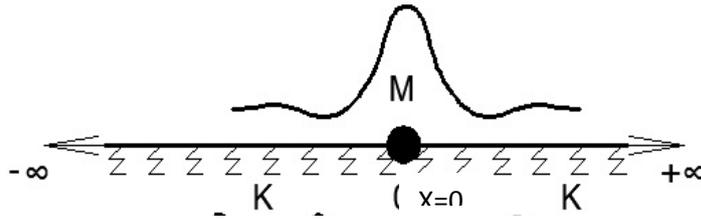


Рисунок 3.1.5. Поперечные колебания.
Ловушечная мода

Для определения частоты ловушечной моды воспользуемся условием $u(0) = u_1$. В результате, из (3.1.7) получим

$$\frac{2}{M \sin \pi/4} = \left(\frac{\omega^{**2}}{D} \right) \cdot \left(\frac{K}{D} - m \left(\frac{\omega^{**2}}{D} \right) \right)^{-3/4}, \quad (3.1.9)$$

Используя математические преобразования, выражение (3.1.9) можно свести к нелинейному уравнению относительно (ω^{**2} / D) , имеющему в общем случае 4 корня. Покажем, что при любых положительных значениях постоянных, указанное уравнение может иметь только один положительный корень. Для этого, используя замены

$$X = \frac{\omega^{**2}}{D}, \quad A = \left(\frac{2}{M \sin \pi/4} \right)^{-4}, \quad B = \frac{k}{D}, \quad C = m \quad (3.1.10)$$

преобразуем (3.1.9) к виду:

$$A \cdot X = \left(B \frac{1}{X} - C \right)^3. \quad (3.1.11)$$

Проанализируем полученное уравнение. При условии, что все постоянные положительны, выражение в левой части представляет собой линейную возрастающую функцию, описываемую коэффициентом пропорциональности A . Выражение в правой части представляет собой гиперболическую функцию с асимптотами $x = 0$ и $y = -C$ не имеющую экстремума. Таким образом, выражение (3.1.11) имеет только один положительный корень.

Для большей наглядности, построим графики функций левой и правой частей выражения (3.1.11): $y(x) = Ax$ и $y(x) = (B/x - C)^3$. Для $A, B, C, X > 0$, графики приведены на Рисунке 3.1.6.

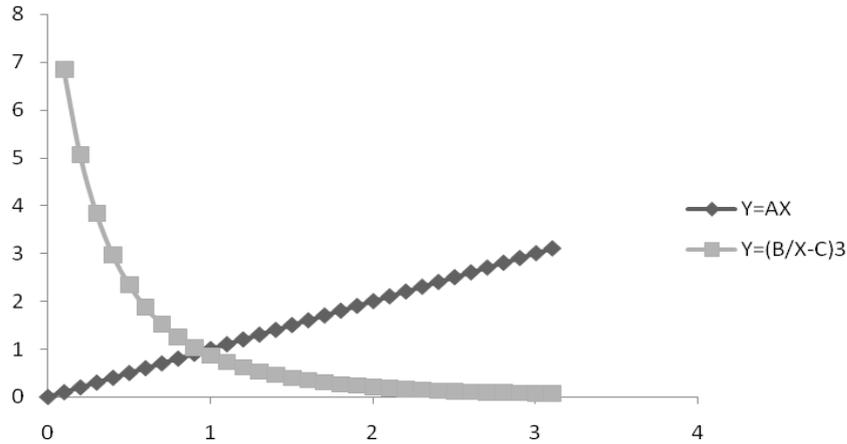


Рисунок 3.1.6. График функций (3.1.11)

Для определения величины ω^{**} выражение (3.1.9) представим в следующем виде

$$A - X = CX^{4/3}, \quad (3.1.12)$$

где

$$A = \frac{\omega_{bb}^2}{D}, \quad C = \frac{M^{4/3}}{4m}, \quad X = \frac{\omega^{**2}}{D}. \quad (3.1.13)$$

Аналитическое определение параметра ω^{**} представляет собой отдельную математическую задачу с весьма громоздкими преобразованиями и конечным выражением. В связи с чем, решение (3.1.12) представим графически. Выполним количественную оценку коэффициентов (3.1.13). Для стальных трубопроводов из наиболее применяемых труб ($530 \times 10 \div 1420 \times 14$) значение D находится в интервале $[1 \cdot 10^8 \div 4 \cdot 10^9 \text{ Н} \cdot \text{м}^2]$, погонная масса m – в диапазоне $100 \div 3000 \text{ кг/м}$. Массу включения M , как и ранее, будем рассматривать в долях от погонной массы трубы в интервале $[1; 10]$. Тогда величина коэффициента A находится в диапазоне $2,5 \cdot 10^{-10} \div 6,25 \cdot 10^{-4} \text{ 1/(кг} \cdot \text{м}^3)$; $C - 1,16 \div 77,7 \text{ м} \cdot \text{кг}^{1/3}$. Для полученных значений представим зависимость (3.1.12) в виде номограммы на Рисунке 3.1.7.

Анализируя полученные результаты, следует отметить, что для наиболее применяемых труб ($\text{Ø}1020 \div 1420$) расположенных на нескальном основании при массе сосредоточенного включения до 10 т, частота ловушечной моды $\geq 20 \text{ Гц}$. Таким образом, в свете спектра реальных землетрясений (Бирбраер, 1998) ограниченного частотой 35 Гц, ловушечные моды поперечных колебаний «нерезонансные».

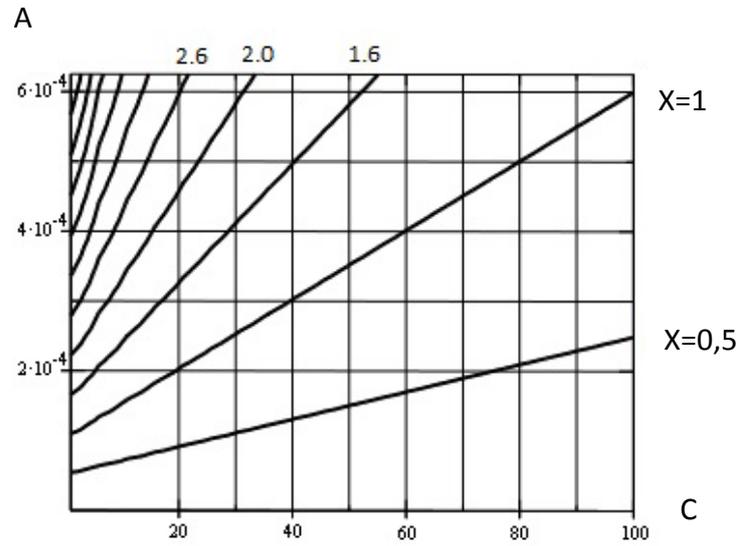


Рисунок 3.1.7. Зависимость $X=X(A, C)$,
 $10^{-4} 1/(\text{кг} \cdot \text{м}^3)$.

Далее исследуем высокочастотную динамику трубопровода, содержащего массовое включение.

3.2 Высокочастотные колебания. Коэффициенты отражения и прохождения волн

Начнем с рассмотрения продольных колебаний трубопровода, при этом конструкцию будем схематизировать бесконечным стержнем на однородном упругом основании с продольной жесткостью k имеющим одиночное массовое включение M в точке $x = 0$. Пусть по данному стержню распространяется сейсмическая волна (волновые цуги) из отрицательной области с амплитудой u_0 и частотой ω (Рисунок 3.2.1).

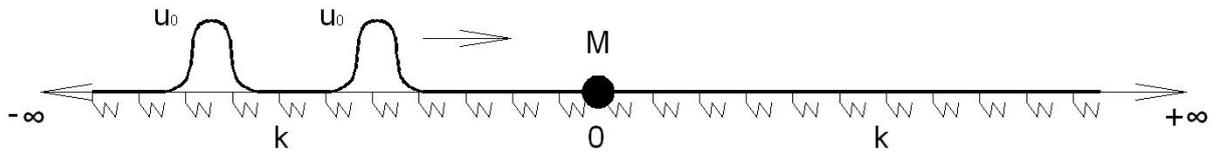


Рисунок 3.2.1. Продольные колебания. Постановка задачи

Уравнение малых продольных колебаний рассматриваемого стержня $u = u(x, t)$ примем в следующем виде:

$$EA \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - m \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - ku = 0, \quad -\infty < x < +\infty, \quad (3.2.1)$$

где E – модуль упругости материала стержня, A – площадь поперечного сечения стержня, m – погонная масса стержня, k – коэффициент продольной жесткости упругого основания. А уравнение бегущей волны, удовлетворяющее (3.2.1), в виде:

$$u(x, t) = u_0 e^{i(bx - \omega t)}, \quad \omega > \omega^*, \quad (3.2.2)$$

где $b = \sqrt{(m\omega^2 - k)/EA}$, ω_b – частота отсечки ($\omega_b = \sqrt{k/m}$), i – мнимая единица.

Для большей наглядности изложения, разобьем стержень на два участка, относительно массового включения. При этом будем использовать индекс j в обозначении $u_j(x, t)$, соответствующий области: $j = 1$ при $x < 0$, $j = 2$ при $x > 0$.

Решение уравнения (3.2.1) для каждого из участков стержня будем искать в виде суперпозиции волн, распространяющихся в противоположные стороны (Zhanga Guo-Dong, Guo Bao-Zhu, 2011; Хакимов, 2012):

$$u_j(x, t) = C_{1j} e^{i(bx - \omega t)} + C_{2j} e^{-i(bx + \omega t)}, \quad (3.2.3)$$

где $C_{1j, 2j}$ – коэффициенты, определяемые из начальных и граничных условий.

В (Бреховских, Гончаров, 1982) приводится вывод волнового уравнения для продольных волн в ступенчатом стержне. При этом показано, что при прохождении участка сопряжения исходная падающая волна трансформируется в проходящую и отраженную волны. Применим аналогичный подход (Бреховских, Гончаров, 1982) к рассматриваемой задаче. По аналогии, представим волновое уравнение для левого участка стержня в виде:

$$u_1(x, t) = u_0 e^{i(bx - \omega t)} - V u_0 e^{-i(bx + \omega t)}, \quad x < 0, \quad (3.2.4)$$

где первое слагаемое характеризует падающую волну ($C_{11} = u_0$), соответствующую (3.2.2), второе – отраженную ($C_{21} = -V u_0$), с неким коэффициентом отражения V . Следует отметить, в (3.2.4) знак минус перед вторым слагаемым принят из направления волны, что сделано из общефизических представлений (Алешкевич, Деденко, Караваев, 2001) вопреки знаку, принятому в (Бреховских, Гончаров, 1982).

Аналогично запишем волновое уравнение для другого участка стержня:

$$u_2(x, t) = W u_0 e^{i(bx - \omega t)}, \quad x > 0, \quad (3.2.5)$$

здесь W – коэффициент прохождения волны ($C_{12} = W u_0$), а второе слагаемое общего решения уравнения (3.2.1) не имеет физического смысла ($C_{22} = 0$), так как характеризует волну, распространяющуюся в отрицательную область от начала отчета.

Указанные выше коэффициенты отражения и прохождения определим из граничного условия, которое получим на основе вариационного принципа Гамильтона (Карпов, Сальников, 2009):

$$\delta \mathcal{S}(u(x, t)) = \delta \left(\int_{t_1}^{t_2} (K - U + A) dt \right) = 0, \quad (3.2.6)$$

здесь K – кинетическая энергия системы ($K = \frac{1}{2} \int_{-\infty}^0 m(\dot{u}_1)^2 dx + \frac{1}{2} \int_0^{+\infty} m(\dot{u}_2)^2 dx + \frac{1}{2} M(\dot{u}(0))^2$), U –

потенциальная энергия системы ($U = \frac{1}{2} \int_{-\infty}^0 (EA(u'_1)^2 + k u_1^2) dx + \frac{1}{2} \int_0^{+\infty} (EA(u'_2)^2 + k u_2^2) dx$), A – работа

внешних сил ($A = \int_{-\infty}^0 q(x, t) u_1 dx + \int_0^{+\infty} q(x, t) u_2 dx$, здесь $q(x, t)$ – распределенная нагрузка), t_1, t_2 –

произвольные моменты времени. Принимая в качестве главных граничных условий ограниченность решения на бесконечности и неразрывность перемещений двух участков стержня в точке $x = 0$ ($u_1 = u_2$) получим:

$$\begin{aligned}
\delta S(u(x,t)) = & \int_{t_1}^{t_2} \left(\int_{-\infty}^0 (-m\ddot{u}_1 + EAu_1'' - ku_1 + q) \delta u_1 dx \right) dt + \\
& + \int_{t_1}^{t_2} \left(\int_0^{+\infty} (-m\ddot{u}_2 + EAu_2'' - ku_2 + q) \delta u_2 dx \right) dt + \\
& + \int_{t_1}^{t_2} (-M\ddot{u}(0) - (u_1'(0) - u_2'(0))EA) \delta u(0) dt,
\end{aligned} \tag{3.2.7}$$

здесь первое слагаемое содержит уравнение колебаний левого участка стержня под действием силы $q(x,t)$, второе – правого. Таким образом, естественное граничное условие будет иметь вид:

$$M \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} \Big|_{x=0} = EA \left(\frac{\partial u_2}{\partial x} - \frac{\partial u_1}{\partial x} \right) \Big|_{x=0}. \tag{3.2.8}$$

Решая систему уравнений из главных и естественных граничных условий, получим следующие выражения (формулы типа Френеля):

$$V = B - Di; \quad W = (1 - B) + Di, \tag{3.2.9}$$

где $B = \frac{(M\omega^2)^2}{(M\omega^2)^2 + 4E^2 A^2 b^2}$, $D = \frac{2EA b M \omega^2}{(M\omega^2)^2 + 4E^2 A^2 b^2}$.

Отметим, что в (Скучик, 1971) произведение $M\omega$ именуется инерционным сопротивлением массы.

Проанализируем вещественную часть (3.2.9). Увеличение массы включения M устремит коэффициент отражения V к единице, а коэффициент прохождения W к нулю, что соответствует отражению волн от заземленного конца стержня. В противном случае – коэффициент прохождения стремится к единице, а коэффициент отражения – к нулю. Так же, обратим внимание на то, что указанные коэффициенты всегда положительны, то есть отраженная волна всегда меняет полярность на противоположную, а проходящая – сохраняет полярность падающей волны (Рисунок 3.2.2).

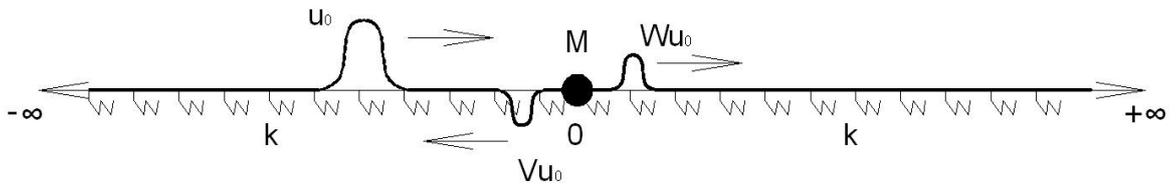


Рисунок 3.2.2. Трансформация волн

После подстановки (3.2.9) в (3.2.4) и (3.2.5) и математических преобразований, можно записать:

$$u_1(x, t) = u_0 [\cos(bx - \omega t) - B \cos(bx + \omega t) + D \sin(bx + \omega t)] + \\ + iu_0 [\sin(bx - \omega t) + B \sin(bx + \omega t) + D \cos(bx + \omega t)], \quad x < 0, \quad (3.2.10)$$

$$u_2(x, t) = u_0 [(1 - B) \cos(bx - \omega t) - D \sin(bx - \omega t)] + \\ + iu_0 [(1 - B) \sin(bx - \omega t) + D \cos(bx - \omega t)], \quad x > 0. \quad (3.2.11)$$

Отбрасывая мнимую часть, из представленных результатов видно, что волновое поле на участке стержня до включения формируется суперпозицией 3-х волн, 2-е из которых распространяются в противоположную сторону от третьей; за включением – суперпозицией 2-х волн распространяющихся в одном направлении. Это приводит к сдвигу фаз суммарного воздействия ввиду колебания конструктивного включения.

Определим амплитуду колебаний (3.2.10) и (3.2.11). Для чего, используя известные свойства тригонометрических функций, преобразуем действительную часть (3.2.11) к виду:

$$u_2(x, t) = u_0 \sqrt{(1 - B)^2 + D^2} \sin(\varphi - (bx - \omega t)), \quad x > 0, \quad (3.2.12)$$

где $\varphi = \arcsin \frac{1 - B}{\sqrt{(1 - B)^2 + D^2}}$.

Ввиду условия равенства перемещений в точке $x = 0$, для амплитуд проходящей и отраженной волн можно записать:

$$U_1 = U_2 = u_0 \sqrt{(1 - B)^2 + D^2}, \quad (3.2.13)$$

здесь второй множитель представляет собой коэффициент прохождения.

Окончательно, выражение для амплитуды колебаний представим в виде:

$$U_1 = U_2 = u_0 \frac{2EAb}{\sqrt{(M\omega^2)^2 + 4E^2 A^2 b^2}}, \quad (3.2.14)$$

для коэффициента прохождения продольных волн –

$$W^* = \frac{2EAb}{\sqrt{(M\omega^2)^2 + 4E^2 A^2 b^2}}, \quad (3.2.15)$$

для коэффициента отражения –

$$V^* = 1 - \frac{2EAb}{\sqrt{(M\omega^2)^2 + 4E^2 A^2 b^2}}. \quad (3.2.16)$$

Отметим, что выражение (3.2.15) меньше 1, что указывает на уменьшение амплитуды колебаний вследствие вовлечения в колебательный процесс массового включения. Так, при

отсутствии массы ($M=0$) коэффициент прохождения равен 1, то есть отсутствуют потери амплитуды, при значительной массе включения ($M \rightarrow \infty$), коэффициент прохождения стремится к нулю (полное отражение). Вместе с тем, в условиях реального сейсмического воздействия, при большом количестве толчков за малый промежуток времени, с большой долей вероятности можно предположить существование нескольких независимых волновых цугов распространяющихся по трубопроводу. В этой связи, возможно наложение отраженной волны на вновь падающую с закономерным увеличением амплитуды. В наиболее неблагоприятном случае – случае полного отражения – амплитуда колебаний увеличится в 2 раза по сравнению с исходной.

Для наглядности выражения (3.2.2), (3.2.10), (3.2.11), с учетом (3.2.14), для отраженной и проходящей волны представим на Рисунке 3.2.3.

Выполним количественную оценку. Будем рассматривать участок трубопровода с погонной массой $m = 1,3$ т/м и продольной жесткостью $EA = 8 \cdot 10^9$ Н (труба 1220x12), имеющий конструктивное включение с $M = 5$ т. Жесткость упругого основания примем $k = 5 \cdot 10^7$ Па (песчаные грунты), а частоту колебаний $\omega = 200,0$ 1/с. Тогда $b = 0,02$ 1/м, $B = 0,39$ и $D = 0,48$. Коэффициент прохождения $W^* = 0,77$, таким образом, амплитуда колебаний, вследствие наличия включения уменьшилась на 23 %.

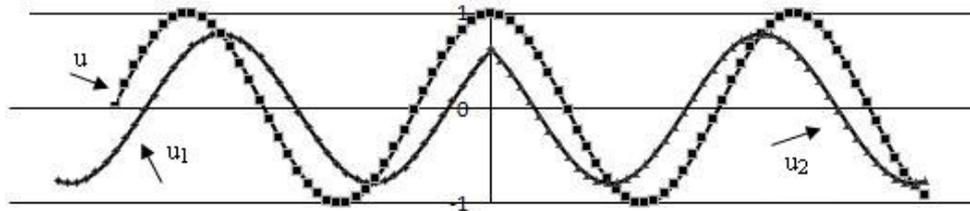


Рисунок 3.2.3. Падающая и трансформированные продольные волны

Далее рассмотрим поперечные колебания (Рисунок 3.2.4).

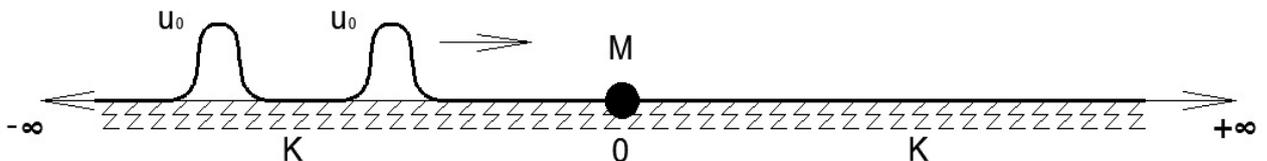


Рисунок 3.2.4. Поперечные колебания. Постановка задачи

Уравнение малых поперечные колебаний балки Бернулли-Эйлера $u = u(x,t)$ на упругом основании имеет вид:

$$EI \frac{\partial^4 u}{\partial x^4} + m \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} + ku = 0, \quad -\infty < x < +\infty, \quad (3.2.17)$$

где E – модуль упругости материала балки, I – момент инерции балки, m – погонная масса балки, k – коэффициент жесткости упругого основания (коэффициент постели).

Падающую волну будем задавать выражением (3.2.2).

Проводя аналогию с продольными колебаниями, запишем решения (3.2.17) для положительной и отрицательной областей балки в виде:

$$u_1(x,t) = u_0 e^{i(bx - \omega t)} - V u_0 e^{-i(bx + \omega t)} - V^* u_0 e^{(bx - i\omega t)}, \quad (3.2.18)$$

$$u_2(x,t) = W u_0 e^{i(bx - \omega t)} + W^* u_0 e^{-(bx + i\omega t)}, \quad (3.2.19)$$

здесь $b = \sqrt[4]{(m\omega^2 - k)/EI}$, V^* , W^* – коэффициенты отражения и прохождения для экспоненциально затухающих волн, V и W – соответствуют ранее принятым обозначениям. Данные коэффициенты, как и ранее, определим из граничных условий, которые получим на основе вариационного принципа Гамильтона (Карпов, Сальников, 2009). Принимая в качестве главных граничных условий ограниченность решений на бесконечности, неразрывность контакта и равенство прогиба двух участков стержня в точке $x = 0$ ($u_1 = u_2$ и $u_1' = u_2'$), получим:

$$\begin{aligned} \delta S(u(x,t)) = & \int_{t_1}^{t_2} \left(\int_{-\infty}^0 (-m\ddot{u}_1 - EIu_1^{IV} - k_1 u_1 + q) \delta u_1 dx \right) dt + \\ & + \int_{t_1}^{t_2} \left(\int_0^{+\infty} (-m\ddot{u}_2 - EIu_2^{IV} - k_2 u_2 + q) \delta u_2 dx \right) dt + \\ & + \int_{t_1}^{t_2} (-M\ddot{u}(0) - (u_2''(0) - (u_1'''(0))EI) \delta u(0)) dt - \\ & - \int_{t_1}^{t_2} ((u_1''(0) - (u_2''(0))) \delta u'(0)) EI dt, \end{aligned} \quad (3.2.20)$$

здесь первое слагаемое содержит уравнение колебаний левого участка стержня под действием силы $q(x,t)$, второе – правого. Таким образом, естественные граничные условия будут иметь вид:

$$M \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} \Big|_{x=0} = EI \left(\frac{\partial^3 u_1}{\partial x^3} - \frac{\partial^3 u_2}{\partial x^3} \right) \Big|_{x=0}, \quad \frac{\partial^2 u_1}{\partial x^2} \Big|_{x=0} = \frac{\partial^2 u_2}{\partial x^2} \Big|_{x=0}. \quad (3.2.21)$$

Решая систему уравнений из главных и естественных граничных условий (3.2.21) получим:

$$V = H - Ri; \quad V^* = R + Hi \quad (3.2.22)$$

$$W = (1 - H) + Ri, \quad W^* = -R - Hi,$$

$$\text{где } H = \frac{(M\omega^2)^2}{(4EIb^3)^2 + 8EIb^3M\omega^2 + 2(M\omega^2)^2}, \quad R = \frac{M\omega^2(4EIb^3 + M\omega^2)}{(4EIb^3)^2 + 8EIb^3M\omega^2 + 2(M\omega^2)^2}.$$

Подставим (3.2.22) в (3.2.18) и (3.2.19). После математических преобразований выражение действительной части (3.2.18) и (3.2.19) можно представить в виде:

$$u_1(x, t) = u_0 \cos(bx - \omega t) - Hu_0 \cos(bx + \omega t) + Ru_0 \sin(bx + \omega t) - \\ - Ru_0 e^{bx} \cos \omega t - Hu_0 e^{bx} \sin \omega t, \quad x < 0, \quad (3.2.23)$$

$$u_2(x, t) = (1 - H)u_0 \cos(bx - \omega t) - Ru_0 \sin(bx - \omega t) - \\ - Ru_0 e^{-bx} \cos \omega t - Hu_0 e^{-bx} \sin \omega t, \quad x > 0. \quad (3.2.24)$$

Здесь, так же как и в (3.2.10) и (3.2.11), содержится дополнительное слагаемое, обусловленное колебанием конструктивного включения, вместе с тем, выражения (3.2.23) и (3.2.24) содержат экспоненциально затухающие слагаемые в окрестности точки включения.

Определим амплитуду колебаний (3.2.23) и (3.2.24). Для чего, используя известные свойства тригонометрических функций, преобразуем действительную часть (3.2.24) к виду:

$$u_2(x, t) = u_0 \sqrt{(1 - H)^2 + R^2} \sin(\varphi - (bx - \omega t)) - u_0 \sqrt{R^2 + H^2} e^{-bx} \sin(\psi + \omega t), \quad x > 0, \quad (3.2.25)$$

$$\text{где } \varphi = \arcsin \frac{1 - H}{\sqrt{(1 - H)^2 + R^2}}, \quad \psi = \arcsin \frac{R}{\sqrt{R^2 + H^2}}.$$

Отбрасывая экспоненциальное слагаемое, затухающее по мере удаления от точки расположения массового включения, максимальное значение амплитуды проходящей и отраженной можно представить в виде:

$$U_1 = U_2 = u_0 \sqrt{(1 - H)^2 + R^2}, \quad (3.2.26)$$

здесь второй множитель представляет собой коэффициент прохождения.

Окончательно, выражение для амплитуды колебаний представим в виде:

$$U_1 = U_2 = u_0 \frac{4EIb^3 + M\omega^2}{\sqrt{(4EIb^3)^2 + 8EIb^3M\omega^2 + 2(M\omega^2)^2}}, \quad (3.2.27)$$

для коэффициента прохождения поперечных волн –

$$W^{**} = \frac{4EIb^3 + M\omega^2}{\sqrt{(4EIb^3)^2 + 8EIb^3M\omega^2 + 2(M\omega^2)^2}}, \quad (3.2.28)$$

для коэффициента отражения –

$$V^{**} = 1 - \frac{4EIb^3 + M\omega^2}{\sqrt{(4EIb^3)^2 + 8EIb^3M\omega^2 + 2(M\omega^2)^2}}, \quad (3.2.29)$$

Отметим, что выражение (3.2.28), как и (3.2.15) меньше 1, что так же указывает на уменьшение амплитуды колебаний вследствие вовлечения в колебательный процесс массового включения. Так, при отсутствии массы ($M=0$) коэффициент прохождения равен 1, то есть отсутствуют потери амплитуды, при значительной массе включения ($M \rightarrow \infty$), коэффициент прохождения стремится к нулю (полное отражение). В случае наложения отраженной волны на вновь падающую, в наиболее неблагоприятном случае – случае полного отражения – амплитуда колебаний увеличится в 2 раза по сравнению с исходной.

Для наглядности выражения (3.2.2), (3.2.23), (3.2.24), с учетом (3.2.27), для отраженной и проходящей волны представим на Рисунке 3.2.5.

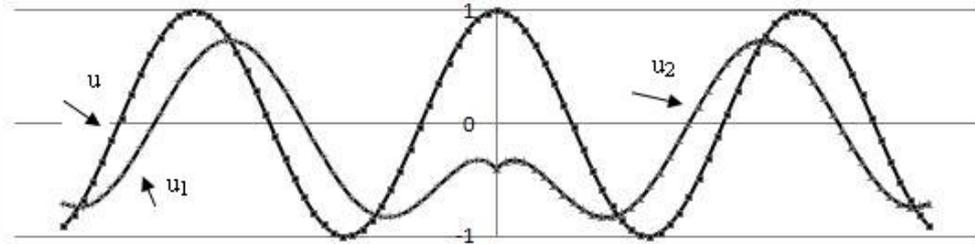


Рисунок 3.2.5. Падающая и трансформированная поперечная волна

Выполним количественную оценку. Будем рассматривать участок трубопровода с погонной массой $m = 1,3$ т/м и изгибной жесткостью $EI = 1,5 \cdot 10^9$ Н*м² (труба 1220 x 12), имеющий конструктивное включение с $M = 5$ т. Жесткость упругого основания примем $k = 1 \cdot 10^8$ Па (песчаные грунты), а частоту колебаний $\omega = 280,0$ 1/с. Тогда $b = 0,20$ 1/м, $H = 0,45$, $R = 0,50$. Коэффициент прохождения $W^{**} = 0,74$, таким образом, амплитуда колебаний, вследствие наличия включения уменьшилась на 26 %.

В реальных условиях, кроме сосредоточенных включений, существуют и протяженные неоднородности в виде участка на более слабых грунтах (переходы через болота, открытые участки и т.п.), что будет предметом исследования в следующей главе.

3.3 Выводы

1. При определенных параметрах трубопровода с конструктивным массовым включением и грунтовых условий, низкочастотная сейсмическая нагрузка может привести к возникновению локальных колебаний конструктивного включения, при относительно покоящемся трубопроводе в целом. Данная особенность динамики сооружения, не отраженная в действующих нормативных документах, может играть определяющую роль в части обеспечения прочности трубопровода, примыкающего к включениям, что будет показано в Главе 5.

2. Получены явные аналитические выражения для коэффициентов отражения и прохождения продольных и поперечных волн (формулы типа Френеля) распространяющихся по трубопроводу в случае наличия массового включения.

3. Высокочастотные сейсмические воздействия, порождающие бегущие волны, распространяющиеся по трубопроводу, вследствие наличия включения трансформируются на проходящие и отраженные, что может привести к увеличению уровня исходного воздействия. В наиболее неблагоприятном случае – случае полного отражения – происходит увеличение исходного воздействия в 2 раза.

4 Динамика трубопровода с протяженной неоднородностью в виде участка на кусочно-однородном основании

Трассы реальных трубопроводов, в виду большой их протяженности, неизбежно проходят по грунтам, характеризующимся различными физико-механическими характеристиками (Айнбиндер, 1991; Клейн, 1969). Указанные участки трассы можно рассматривать как протяженные неоднородности.

В настоящей главе рассматриваются вопросы динамики трубопровода содержащего одно протяженное включение в виде участка на отличном основании. Для низкочастотных воздействий проводятся исследования ловушечных мод, для высокочастотных воздействий – трансформации волн.

Получены явные аналитические выражения для коэффициентов отражения и прохождения продольных и поперечных волн (формулы типа Френеля), распространяющихся по трубопроводу в случае неоднородности основания.

Результаты, полученные в настоящей главе, так же могут быть применены и при анализе динамики железнодорожного пути, пересекающего участки со слабым грунтом, к примеру, заболоченные местности, обуславливающие повышенные вибрации состава (Суворова, 2003; Усошин, 2011; Krylov, etc., 2000).

Материалы главы опубликованы в следующих работах:

1. Лалин В.В., Денисов Г.В. Трансформация волн, распространяющихся по струне и балке, как следствие неоднородности упругого основания // Вестник гражданских инженеров. 2013. № 1(36). С.49-54.
2. Денисов Г.В., Лалин В.В. Динамическое поведение заглубленного трубопровода с участком на слабых грунтах // Труды РГУ нефти и газа имени И.М. Губкина. 2013. № 3(272). С.52-58.

4.1 Низкочастотные колебания. Ловушечные моды

Начнем с анализа низкочастотных колебаний.

Рассмотрим продольные колебания трубопровода. Сооружение будем моделировать как бесконечный стержень с погонной массой m и осевой жесткостью EA , расположенный на основании с продольной жесткостью k_0 и имеющий участок длиной $2L$ на основании с жесткостью k_1 ($k_1 < k_0$) (Рисунок 4.1.1). Взаимодействие сооружения с окружающим грунтом примем упругим, без проскальзывания.

Уравнение колебаний, после отделения временного множителя, имеет вид (2.1.1).

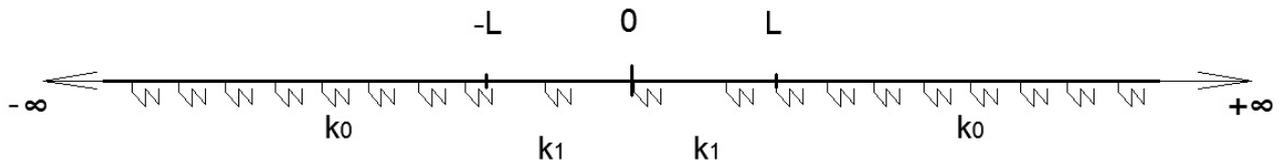


Рисунок 4.1.1. Продольные колебания. Постановка задачи

В качестве условий примем заданное смещение в точке $x=0$: $u(0)=u_0$ и ограниченность решения на бесконечности. Тогда, выражения для ловушечных форм колебаний, обусловленные протяженным включением, с учетом результатов, полученных для струнной схематизации (Локализация лин. волн, 2007), можно представить в виде:

$$u_n^s(x) = u_0 \begin{cases} \cos(ax), & |x| \leq L, \\ \cos(aL) \exp(-b||x| - L|), & |x| \geq L, \end{cases} \quad (4.1.1)$$

$$\text{где } a = \sqrt{\frac{m(\omega_n^s)^2 - k_1}{EA}}, \quad b = \sqrt{\frac{k_0 - m(\omega_n^s)^2}{EA}},$$

$$u_n^{as}(x) = u_0 \begin{cases} \sin(a^* x), & |x| \leq L, \\ \sin(a^* L) \exp(-b^* ||x| - L|), & |x| \geq L, \end{cases} \quad (4.1.2)$$

$$\text{где } a^* = \sqrt{\frac{m(\omega_n^{as})^2 - k_1}{EA}}, \quad b^* = \sqrt{\frac{k_0 - m(\omega_n^{as})^2}{EA}}, \text{ а индексы } s \text{ и } as \text{ соответствуют «симметричным»}$$

и «антисимметричным» собственным формам колебаний с частотами ω_n , которые являются решениями уравнений, полученных из условия неразрывности стержня в точке сопряжения участков:

$$\operatorname{tg}(aL) = \sqrt{\frac{k_0 - m(\omega_n^s)^2}{m(\omega_n^s)^2 - k_1}}; \quad \operatorname{ctg}(a * L) = -\sqrt{\frac{k_0 - m(\omega_n^{as})^2}{m(\omega_n^{as})^2 - k_1}}. \quad (4.1.3)$$

Из представленных выражений (4.1.1) и (4.1.2) следует, что колебания в пределах участка сооружения на слабом грунте, реализуются в виде стоячих волн (ловушечные моды), вне участка – экспоненциально затухают (Рисунок 4.1.2).

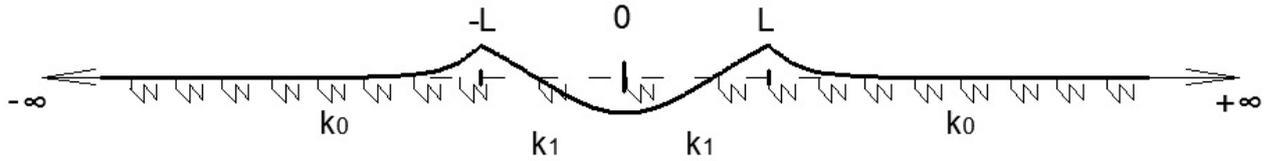


Рисунок 4.1.2. Ловушечная мода колебания

Отметим, что, как показано в (Локализация лин. волн, 2007), необходимым условием существования ловушечных мод является частотное ограничение:

$$\omega_b < \omega_n^* < \Omega_b, \quad \omega_b = \sqrt{k_1 / m}, \quad \Omega_b = \sqrt{k_0 / m}. \quad (4.1.4)$$

То есть частота ловушечной моды должна быть выше частоты отсечки включения и ниже частоты отсечки основного участка. Данное условие будет выполняться при более слабом основании включения, при сохранении жесткости трубы. Так же, отметим, что количество ловушечных мод, в отличие от случая точечного включения, строго говоря, бесконечно, поскольку участок включения представляет собой упругое тело, имеющее бесконечное число степеней свободы (Тимошенко, 1967). Вместе с тем, ввиду условия (4.1.4) их количество будет ограничено частотой отсечки основного участка.

Оценим возможность реализации подобного сценария, для чего подробно остановимся на (4.1.3). Используя свойства тригонометрических функций можно показать, что аргумент tg должен быть больше $n\pi$ и меньше $(n+0,5)\pi$, а аргумент ctg – больше $(n+0,5)\pi$ и меньше $(n+1)\pi$, где $n = 0, 1, 2, \dots$. Из этого следует, что собственные частоты симметричных локальных колебаний будут ниже соответствующих частот антисимметричных колебаний. Так же можно показать, что с увеличением длины участка $2L$, подверженного локальным колебаниям, низшие собственные частоты $\omega_0^s, \omega_0^{as}$ будут стремиться к частоте отсечки включения.

Выполним количественную оценку. Рассмотрим трубопровод с погонной массой (с учетом продукта) $m = 1300$ кг/м и продольной жесткостью $EA = 9,6 \cdot 10^9$ Н (труба 1220x12), расположенный на основании с жесткостью $k_0 = 500$ МПа (скальный грунт) (Цытович, 1963) и имеющий участок длиной $2L$, на основании с жесткостью $k_1 = 50$ МПа (песчаный грунт)

(Цытович, 1963). Тогда частота отсечки включения составит 196,1 рад/с, а пределы низшей собственной частоты, для разной длины включения, приведены в Таблице 4.1.1.

Таблица 4.1.1. Диапазоны низшей собственной частоты локальной формы колебаний

Длина участка (2L), м	Нижний предел, Рад/с (Гц)	Верхний предел, Рад/с (Гц)
10	196,1 (31,2)	875,5 (139,4)
100		213,9 (34,1)
1000		196,3 (31,3)

Анализ записей реальных землетрясений показывает, что обычно сейсмические частоты не превышают 35 Гц (Бирбраер, 1998; Тяпин, 2013). Таким образом, возникновение продольных локальных колебаний наиболее опасно на участках сооружений длиной около 100 м и более, расположенных на нескальном основании. С учетом результатов исследования длины участка подверженного динамическому воздействию (Глава 2), можно заключить, что наиболее опасными будут включения, протяженностью до 1000 м. Таким образом, наибольший интерес представляют участки длиной 100-1000 м.

Далее, рассмотрим поперечные колебания трубопровода. По аналогии, сооружение будем моделировать упругой балкой Бернулли-Эйлера с погонной массой m и изгибной жесткостью EI , расположенной на основании с жесткостью k_0 и имеющей участок длиной $2L$ на основании с жесткостью k_1 ($k_1 < k_0$) (Рисунок 4.1.3).

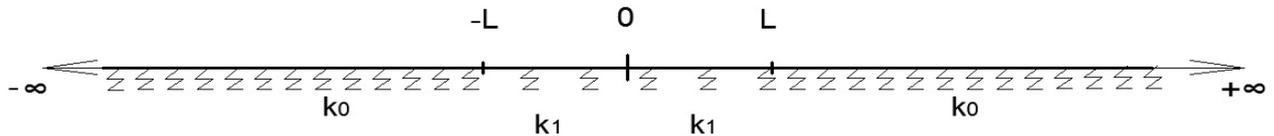


Рисунок 4.1.3. Поперечные колебания. Постановка задачи

Уравнение колебаний имеет вид (2.1.6).

Принимая в качестве условий заданное смещение $u(0) = u_0$ при отсутствии поворота $u'(0) = 0$ и ограниченность решения на бесконечности, рассматривая только симметричные колебания, собственные формы включения можно представить в виде:

$$u_n^s(x) = u_0 \begin{cases} \cos(cx), & |x| \leq L, \\ \sqrt{2} \cos(cL) \exp(-d(|x| - L)) \cos\left(d(|x| - L) - \frac{\pi}{4}\right), & |x| \geq L. \end{cases} \quad (4.1.5)$$

где $c = \sqrt[4]{\frac{m(\omega_n^s)^2 - k_1}{EI}}$, $d = \sqrt[4]{\frac{k_0 - m(\omega_n^s)^2}{EI}}$. Отметим, что здесь, по сравнению с (Локализация лин. волн, 2007), для большей наглядности в первом выражение (4.1.5) пренебрегли

экспоненциально затухающим и мнимым слагаемым, во втором преобразовали сумму тригонометрических функций. Ловушечная мода колебания условно показана на Рисунке 4.1.4.

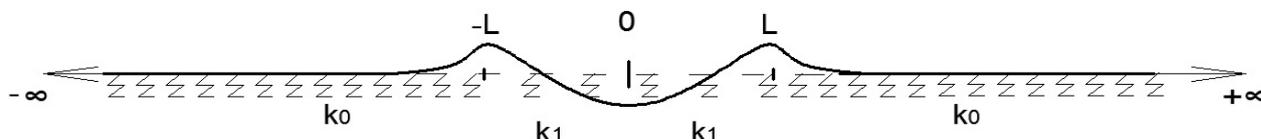


Рисунок 4.1.4. Ловушечная мода колебаний

Используя условия неразрывности балки в точке сопряжения участков ($x = L$) и свойства тригонометрических функций, можно показать, что собственные частоты симметричных ловушечных колебаний должны удовлетворять неравенству:

$$\sqrt{\frac{EI\left(\frac{n\pi}{L}\right)^4 + k_1}{m}} < \omega_n^{**} < \sqrt{\frac{EI\left(\frac{(n+0.5)\pi}{L}\right)^4 + k_1}{m}}, \quad (4.1.6)$$

где $n = 0, 1, 2, \dots$. Результаты расчетов для рассматриваемого ранее трубопровода ($EI = 1,8 \cdot 10^9 \text{ Н} \cdot \text{м}^2$) приведены в Таблице 4.1.2.

Таблица 4.1.2. Диапазоны низшей собственной частоты локальной формы колебаний

Длина участка (2L), м	Нижний предел, Рад/с (Гц)	Верхний предел, Рад/с (Гц)
10	196,1 (31,2)	227,9 (36,3)
100		196,2 (31,2)

Сравнение полученных величин с максимальной частотой колебаний 35 Гц, обычно фиксируемой при землетрясениях (Бирбраер, 1998; Тяпин, 2013), показывает, что возникновение изгибных локальных колебаний возможно на участках сооружений длиной около 10 м и более, расположенных на нескальном основании. Это на порядок меньше величины, определенной для продольных форм. С учетом результатов исследования длины участка подверженного динамическому воздействию (Глава 2), можно заключить, что наиболее опасными будут включения, протяженностью до 100 м. Таким образом, наибольший интерес представляют участки длиной 10-100 м.

Далее исследуем высокочастотную динамику трубопровода.

4.2 Высокочастотные колебания. Коэффициенты отражения и прохождения волн

Начнем с рассмотрения продольных колебаний.

Пусть волна (для большей наглядности будем рассматривать волновые цуги) распространяется из отрицательной в положительную области x , а скачкообразное изменение свойств основания с k_1 на k_2 ($k_2 > k_1$) происходит в точке $x = 0$ (Рисунок 4.2.1).

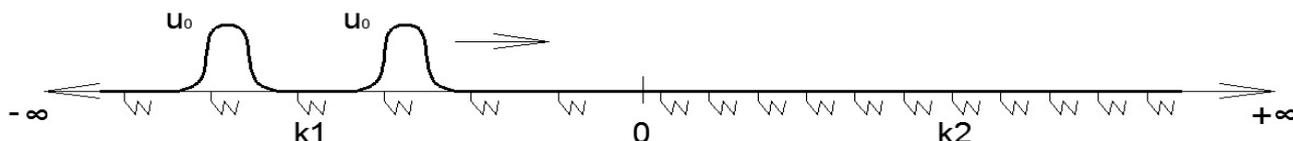


Рисунок 4.2.1. Продольные колебания. Постановка задачи

Уравнение продольных колебаний имеет вид (3.2.1), бегущую волну будем задавать выражением (3.2.2). А решение волновых уравнений для отрицательной и положительной областей будем искать в следующем виде:

$$u_j(x, t) = w_j(x)e^{-i\omega t}, \quad (4.2.1)$$

где j – индекс, соответствующий области, $j = 1$ при $x < 0$, $j = 2$ при $x > 0$. Подставив (4.2.1) в уравнение (3.2.1), получим выражения:

$$w_1(x) = A_1 e^{ib_1 x} + A_2 e^{-ib_1 x}, \quad x < 0, \quad (4.2.2)$$

$$w_2(x) = A_3 e^{ib_2 x} + A_4 e^{-ib_2 x}, \quad x > 0, \quad (4.2.3)$$

здесь $b_1 = \sqrt{(m\omega^2 - k_1)/EA}$, $b_2 = \sqrt{(m\omega^2 - k_2)/EA}$. Следует отметить, что при данной постановке задачи (бесконечный стержень и скачкообразное изменение жесткости упругого основания) сдвиг фаз падающей и отраженной волн отсутствует. Так же принимается условие равенства частот падающей и отраженной волн (Бреховских, Гончаров, 1982).

С учетом временного множителя $\exp(-i\omega t)$ получим:

$$u_1(x, t) = A_1 e^{i(b_1 x - \omega t)} + A_2 e^{-i(b_1 x + \omega t)}, \quad (4.2.4)$$

здесь первое слагаемое соответствует падающей волне (3.2.2), что позволяет заключить, что второе характеризует отраженную волну. Таким образом, $A_1 = u_0$, $A_2 = -Vu_0$ (V – некий коэффициент отражения, что будет пояснено ниже). Здесь знак минус перед V принят из направления волн, что сделано из общефизических представлений вопреки знаку, принятому в (Бреховских, Гончаров, 1982).

Далее, проводя аналогию (4.2.3) с (4.2.4) заключаем, что первое слагаемое будет характеризовать проходящую волну, распространяющуюся, как и падающая, слева направо, при этом $A_3 = Wu_0$ (W – коэффициент прохождения, что так же будет пояснено ниже (ряд исследователей, к примеру (Юнин, 2013), именуют W – коэффициент поглощения). Второе слагаемое в (4.2.3) не имеет физического смысла, так как характеризует волну, движущуюся в отрицательную область от начала отсчета. Таким образом, следует положить $A_4 = 0$. Окончательно получаем:

$$u_1(x,t) = u_0 e^{i(b_1 x - \omega t)} - V u_0 e^{-i(b_1 x + \omega t)}, \quad (4.2.5)$$

$$u_2(x,t) = W u_0 e^{i(b_2 x - \omega t)}. \quad (4.2.6)$$

Указанные выше коэффициенты отражения и прохождения определим из граничного условия, выражение которого, получим на основе вариационного принципа Гамильтона (Зегжда, Солтаханов, Юшков, 2002):

$$\delta S(u(x,t)) = \delta \left(\int_{t_1}^{t_2} (K - W + A) dt \right) = 0, \quad (4.2.7)$$

здесь K – кинетическая энергия системы, W – потенциальная энергия системы, A – работа внешних сил, t_1, t_2 – произвольные моменты времени. В качестве главных граничных условий примем условия ограниченности решения на бесконечности и равенства перемещений двух участков стержня в точке $x = 0$: $u_1 = u_2$. Используя известные выражения для работы внешних сил, кинетической и потенциальной энергий (Тимошенко, 1967), после интегрирования по частям получим:

$$\begin{aligned} \delta S(u(x,t)) = & \int_{t_1}^{t_2} \left(\int_{-\infty}^0 (-m\ddot{u}_1 + EAu_1'' - k_1 u_1 + q(x)) \delta u_1 dx \right) dt + \\ & + \int_{t_1}^{t_2} \left(\int_0^{+\infty} (-m\ddot{u}_2 + EAu_2'' - k_2 u_2 + q(x)) \delta u_2 dx \right) dt - \int_{t_1}^{t_2} ((u_1'(0) - (u_2'(0))) \delta u(0)) T dt, \end{aligned} \quad (4.2.8)$$

здесь первое слагаемое содержит уравнение колебаний левого участка стержня под действием силы $q(x)$, второе – правого. Таким образом, в точке $x = 0$ должно выполняться следующее условие (естественное граничное условие): $u_1' = u_2'$.

Решая систему уравнений из главных и естественных граничных условий, получим формулы типа Френеля:

$$V = \frac{b_2 - b_1}{b_1 + b_2}; \quad W = \frac{2b_1}{b_1 + b_2}. \quad (4.2.9)$$

Остановимся подробнее на полученных формулах (4.2.9). Коэффициент отражения имеет знак, что с физической точки зрения, должно характеризовать полярность отраженной волны, обусловленную соотношением жесткостей участков стержня. Это наглядно подтверждается известным физическим экспериментом с бегущей волной по шнуру, проводимым при заземленном и свободном конце шнура (Алешкевич, Деденко, Караваев, 2001). В рассматриваемом же случае, при распространении волны из области с жесткостью k_1 в область k_2 ($k_2 > k_1$) отраженная волна сохранит полярность (Рисунок 4.2.2). В противном же случае, полярность волны изменится (Рисунок 4.2.3). Отметим, что в условиях реального сейсмического воздействия, при большом количестве толчков за малый промежуток времени, с большой долей вероятности можно предположить существование нескольких независимых волновых цугов распространяющихся по трубопроводу. В этой связи, возможно наложение отраженной волны на вновь падающую с закономерным увеличением амплитуды. В наиболее неблагоприятном случае – случае полного отражения – амплитуда колебаний увеличится в 2 раза по сравнению с исходной.

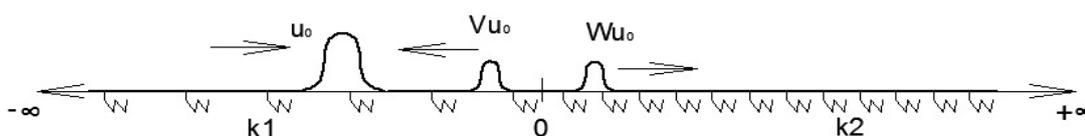


Рисунок 4.2.2. Волны в стержне при $k_2 > k_1$

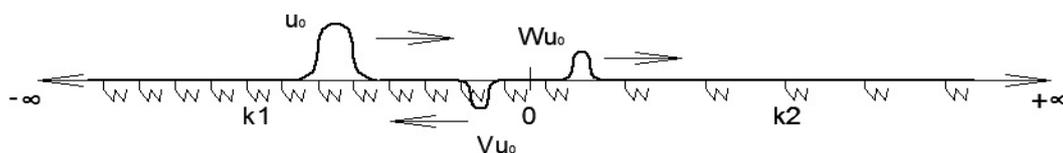


Рисунок 4.2.3. Волны в стержне при $k_1 > k_2$

Поясним полученные результаты в ходе количественной оценки. В начале, рассмотрим пример на Рисунке 4.2.3. Примем погонную массу $m = 1 \text{ т/м}$, частоту бегущей волны $\omega = 110 \text{ 1/с}$, коэффициент жесткости основания $k_1 = 10 \text{ МПа}$, $k_2 = 5 \text{ МПа}$. Тогда $b_1 = 458,3 \text{ 1/м}$ и $b_2 = 842,6 \text{ 1/м}$, а коэффициент отражения $V = 0,30$, прохождения $W = 0,70$. Таким образом, при заданных параметрах амплитуда проходящей волны уменьшается на 30%. Другими словами можно сказать, что, в целом, уровень динамического воздействия вследствие трансформации волн уменьшится.

Далее, рассмотрим пример, соответствующий Рисунку 4.2.2. Для этого поменяем местами значения коэффициентов k_1 и k_2 . В результате получим, $V = -0,30$, $W = 1,30$. Таким образом,

амплитуда проходящей волны увеличивается на 30%. Другими словами можно сказать, что, в целом, уровень динамического воздействия увеличится.

Теперь рассмотрим колебания балки.

Уравнение малых поперечные колебаний балки Бернулли-Эйлера $u = u(x,t)$ на упругом основании имеет вид (3.2.17). Пренебрегая затухающим слагаемым, уравнение бегущей по балке на упругом основании волны представим в следующем виде:

$$u(x,t) = u_0 e^{i(bx - \omega t)}, \quad \omega > \omega^*, \quad x < 0. \quad (4.2.10)$$

здесь $b = \sqrt[4]{(m\omega^2 - k)/EI}$.

Будем рассматривать аналогичную задачу (Рисунок 4.2.4).

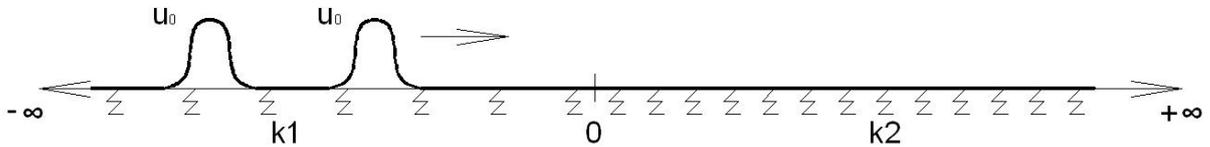


Рисунок 4.2.4. Поперечные колебания. Постановка задачи

Решение волновых уравнений для отрицательной и положительной областей будем искать, как и для стержневой схематизации. Эти решения должны удовлетворять (3.2.17). В результате получим:

$$w_1(x) = A_1 e^{ib_1 x} + A_2 e^{-ib_1 x} + A_3 e^{b_1 x} + A_4 e^{-b_1 x}, \quad x < 0, \quad (4.2.11)$$

$$w_2(x) = A_5 e^{ib_2 x} + A_6 e^{-ib_2 x} + A_7 e^{b_2 x} + A_8 e^{-b_2 x}, \quad x > 0. \quad (4.2.12)$$

Проанализируем полученные выражения. Как было отмечено выше, решения представляют собой суперпозицию бегущих и экспоненциально затухающих волн. Поступая по аналогии, принимаем, что $A_1 = u_0$ (падающая волна), $A_2 = -Vu_0$ (отраженная волна), $A_3 = -V^*u_0$ (экспоненциальная отраженная волна), $A_4 = 0$ (из условия ограниченности решения на бесконечности при $x < 0$), $A_5 = Wu_0$ (проходящая волна), $A_6 = 0$ (волна, движущаяся в отрицательную область от начала отчета), $A_7 = 0$ (из условия ограниченности при $x > 0$), $A_8 = W^*u_0$ (экспоненциальная проходящая волна). Таким образом, окончательно получаем:

$$u_1(x,t) = u_0 e^{i(b_1 x - \omega t)} - Vu_0 e^{-i(b_1 x + \omega t)} - V^* u_0 e^{(b_1 x - i\omega t)}, \quad (4.2.13)$$

$$u_2(x,t) = Wu_0 e^{i(b_2 x - \omega t)} + W^* u_0 e^{-(b_2 x + i\omega t)}. \quad (4.2.14)$$

Для нахождения неизвестных коэффициентов в (4.2.13) и (4.2.14), по аналогии, будем использовать граничные условия, вид которых определим с помощью вариационного принципа

Гамильтона. В качестве главных граничных условий, наряду с ограниченностью решения на бесконечности, в точке $x = 0$ примем $u_1 = u_2$ и $u_1' = u_2'$.

Тогда первая вариация функционала (4.2.7) будет иметь вид:

$$\begin{aligned} \delta S(u(x,t)) = & \int_{t_1}^{t_2} \left(\int_{-\infty}^0 (-m\ddot{u}_1 - E I u_1^{IV} - k_1 u_1 + q(x)) \delta u_1 dx \right) dt + \\ & + \int_{t_1}^{t_2} \left(\int_0^{+\infty} (-m\ddot{u}_2 - E I u_2^{IV} - k_2 u_2 + q(x)) \delta u_2 dx \right) dt - \int_{t_1}^{t_2} ((u_2'''(0) - (u_1'''(0)) \delta u(0) E I dt - \\ & - \int_{t_1}^{t_2} ((u_1''(0) - (u_2''(0)) \delta u'(0) E I dt, \end{aligned} \quad (4.2.15)$$

здесь первое слагаемое содержит уравнение колебаний левого участка балки под действием силы $q(x)$, второе – правого. Таким образом, в точке $x = 0$ должны выполняться следующие естественные граничные условия:

$$\frac{\partial^2 u_1}{\partial x^2} = \frac{\partial^2 u_2}{\partial x^2}, \quad \frac{\partial^3 u_1}{\partial x^3} = \frac{\partial^3 u_2}{\partial x^3}. \quad (4.2.16)$$

Как видно, различие в жесткости основания никак не влияет на (4.2.16).

Решая систему из главных и естественных граничных условий, получим:

$$\begin{aligned} V = \frac{2b_1 b_2 (b_2 - b_1)}{(b_1 + b_2)(b_1^2 + b_2^2)} - \left(\frac{(b_2 - b_1)^2}{b_1^2 + b_2^2} \right) i; \quad V^* = \frac{b_2 - b_1}{b_1 + b_2} + \left(\frac{b_2 - b_1}{b_1 + b_2} \right) i; \\ W = \frac{2b_1^2}{b_2(b_1 + b_2)}; \quad W^* = \frac{2b_1^3 (b_2 - b_1)}{b_2(b_1 + b_2)(b_1^2 + b_2^2)} - \left(\frac{2b_1^2 (b_2 - b_1)}{(b_1 + b_2)(b_1^2 + b_2^2)} \right) i. \end{aligned} \quad (4.2.17)$$

Проанализируем вещественную часть полученных выражений. Коэффициент прохождения всегда положительный, в то время как все прочие коэффициенты, в том числе и для экспоненциальных волн, могут иметь различный знак, характеризующий полярность волн.

Волновое поле при распространении волны из области с жесткостью k_1 в область k_2 ($k_2 > k_1$) условно показано на Рисунке 4.2.5.

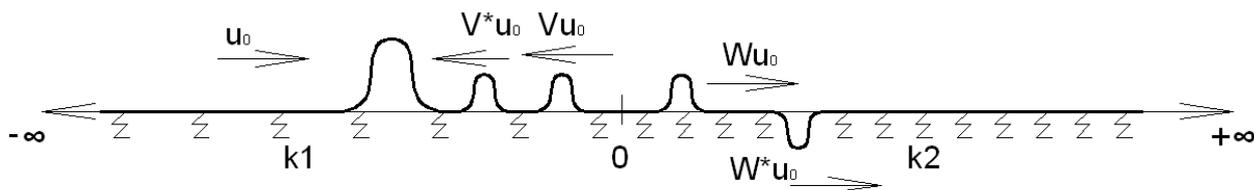


Рисунок 4.2.5. Волны в балке при $k_2 > k_1$

Отметим, что полученные результаты качественно соответствуют (Весницкий, Метрикин, 1996), где было указано на появлении искажений волнового поля в области резкого изменения свойств основания.

Подставим (4.2.17) в (4.2.14). Отбрасывая экспоненциально затухающие слагаемые, для действительной части (4.2.14) можно записать

$$u_2(x, t) = Wu_0 \cos(b_2x - \omega t) \quad (4.2.18)$$

Окончательно, выражение для амплитуды колебаний представим в виде:

$$U_1 = U_2 = u_0 \frac{2b_1^2}{b_2(b_1 + b_2)}, \quad (4.2.19)$$

для коэффициента прохождения поперечных волн –

$$W^{**} = \frac{2b_1^2}{b_2(b_1 + b_2)}, \quad (4.2.20)$$

для коэффициента отражения –

$$V^{**} = 1 - \frac{2b_1^2}{b_2(b_1 + b_2)}. \quad (4.2.21)$$

Выполним количественную оценку для вещественной части. Рассмотрим пример на Рисунке 4.2.5. Примем погонную массу балки $m = 1 \text{ м/м}$, частоту бегущей волны $\omega = 110 \text{ 1/с}$, изгибную жесткость балки $EI = 1450 \text{ МПа*м}^4$, коэффициент жесткости основания $k_1 = 5 \text{ МПа}$, $k_2 = 10 \text{ МПа}$. Тогда $b_1 = 0,26 \text{ 1/м}$ и $b_2 = 0,19 \text{ 1/м}$, а коэффициент прохождения $W = 1,56$. Таким образом, при заданных параметрах амплитуда проходящей волны увеличивается на 56%.

4.3 Выводы

1. При определенных параметрах трубопровода с протяженным включением в виде участка на более слабых грунтах, низкочастотная сейсмическая нагрузка может привести к возникновению локальных колебаний указанного включения, при относительно покоящемся трубопроводе в целом. Данная особенность динамики сооружения, не отраженная в действующих нормативных документах, может играть определяющую роль в части обеспечения прочности трубопровода, находящегося в области резкого изменения свойств грунтового основания, что будет показано в Главе 5.

2. Получены явные аналитические выражения для коэффициентов отражения и прохождения продольных и поперечных волн (формулы типа Френеля) распространяющихся по трубопроводу в случае неоднородности основания вдоль трассы сооружения.

3. Высокочастотные сейсмические воздействия, порождающие бегущие волны, распространяющиеся по трубопроводу, вследствие различий в свойствах грунтов основания вдоль трассы сооружения трансформируются на проходящие и отраженные волны, что может привести к увеличению уровня исходного воздействия.

5 Оценка напряженного состояния участков трубопровода с массовыми и жесткостными неоднородностями

Результаты обследования трубопроводов перенесших землетрясения показывают, что наиболее аварийными участками сооружений являются области примыкания к массовым и жесткостным неоднородностям (Гехман, Зайнетдинов, 1988; Сейсмостойк. магистрал. трубопров. .., 1980).

В настоящей главе рассматриваются вопросы оценки напряженного состояния указанных выше участков трубопроводов при сейсмических воздействиях. Для низкочастотных нагрузок исследуется влияние локальных и ловушечных колебаний, для высокочастотных воздействий – трансформации волн.

По результатам исследований разработана методика оценки напряженного состояния участков трубопроводов характеризующихся жесткостной и массовой неоднородностями.

Результаты, полученные в настоящей главе, могут быть применены для анализа сейсмостойкости участков трубопроводов, примыкающих к конструктивным включениям и расположенных в областях с резким изменением свойств грунтового основания.

Материалы главы опубликованы в следующих работах:

1. Денисов Г.В., Лалин В.В. Собственные колебания заглубленных магистральных трубопроводов при сейсмическом воздействии // Трубопроводный транспорт: теория и практика. 2013. № 4 (38). С. 14-17.
2. Денисов Г.В., Лалин В.В. Предложения по расчету участков заглубленных магистральных трубопроводов с конструктивным включением на сейсмическое воздействие // Транспорт и хранение нефтепродуктов и углеводородного сырья. 2013. № 3. С.20-23.
3. Денисов Г.В. К расчету участков заглубленных магистральных трубопроводов с конструктивными включениями на сейсмическое воздействие // Современные проблемы науки и образования. 2014. № 4; URL: <http://www.science-education.ru/118-14133>.

5.1 Напряжения при низкочастотных локальных колебаниях

Начнем с анализа напряженного состояния, обусловленного продольными локальными колебаниями, вследствие подвижки грунта при сейсмическом воздействии. Отметим, что локализацию колебаний провоцируют любые неоднородности, как в конструкции трубопровода (включения, повороты трассы, примыкания к другим сооружениям и т.п.), так и в окружающем грунтовом массиве (резкое изменение свойств основания, тектонические разломы и т.п.) (Гехман, Зайнетдинов, 1988; Сейсмостойк. магистрал. трубопров. .. , 1980). При этом частота колебаний, строго говоря, может находиться в широком интервале, ограниченном нулевой частотой и частотой отсечки, которая для нормальных грунтовых условий (песчаное, супесчаное, суглинистое основание) имеет достаточно высокое значение. В этой связи, частоту локальных колебаний, вследствие относительно большой степени защемления трубы в грунт (Гехман, Зайнетдинов, 1988), можно принять равной преобладающей частоте колебаний вмещающего массива, определяемой при изысканиях.

Выражение амплитуды продольных деформаций получим дифференцированием (2.1.4):

$$\varepsilon_{1p} = \frac{\partial u}{\partial x} = -u_0 \sqrt{\frac{k - m\omega^2}{EA}}, \quad (5.1.1)$$

где E – модуль упругости материала трубы, A – площадь поперечного сечения трубы, m – погонная масса трубы, k – коэффициент продольной жесткости упругого основания, ω – частота колебаний вмещающего массива грунта, u_0 – максимальное (пиковое) смещение грунта при сейсмическом воздействии.

Используя известное соотношение (Бирбраер, 1998):

$$u_0 = \frac{\ddot{u}}{\omega^2}, \quad (5.1.2)$$

где \ddot{u} – ускорение частиц грунта при колебаниях. После преобразований, выражение амплитуды продольных напряжений в терминах существующего нормативного подхода (СП 14.13330.2011, СП 36.13330.2012, СТО Газпром 2-2.1-249-2008) можно представить в виде:

$$\sigma_{1p} = \pm a_c \left(\frac{T_0}{2\pi} \right)^2 \sqrt{\frac{Em}{A}} \sqrt{\omega_b^2 - \omega^2}, \quad (5.1.3)$$

здесь a_c – сейсмическое ускорение, T_0 – преобладающий период сейсмических колебаний грунтового массива. Указанные параметры определяются в соответствии с действующим нормативным подходом (СП 14.13330.2011, СП 36.13330.2012, СТО Газпром 2-2.1-249-2008).

Выражение для деформаций, вследствие поперечных колебаний получим дифференцированием (2.1.9). После преобразований, для амплитуды поперечных деформаций можно записать

$$\varepsilon_{1s} = \frac{D}{2} \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \frac{D}{2} u_0 \sqrt{\frac{k - m\omega^2}{EI}}, \quad (5.1.4)$$

где D – наружный диаметр трубопровода, I – момент инерции поперечного сечения.

После преобразований, выражение амплитуды напряжений можно представить в виде:

$$\sigma_{1s} = \pm a_c \left(\frac{T_0}{2\pi} \right)^2 \frac{D}{2} \sqrt{\frac{Em}{I}} \sqrt{\omega_{bb}^2 - \omega^2}. \quad (5.1.5)$$

Отметим, что амплитуды колебания, а соответственно и пиковые ускорения грунта a_c в продольном и поперечном направлениях, строго говоря, отличны. То же можно сказать и про преобладающий период колебаний T_0 грунтового основания. Вместе с тем, ввиду высокой степени неопределенности реального сейсмического воздействия, указанные величины можно принять равными, в запас.

Полученные зависимости (5.1.3) и (5.1.5) характеризуют дополнительные напряжения, обусловленные локализацией колебаний. Анализируя (5.1.3) и (5.1.5) отметим, что наибольшие напряжения будут соответствовать колебаниям с наименьшей частотой.

5.2 Напряжения при низкочастотных ловушечных колебаниях

Начнем с рассмотрения продольных ловушечных колебаний, обусловленных наличием сосредоточенного включения, и характеризующиеся собственными частотами колебаний (Глава 3, 4).

После дифференцирования (3.1.5) и последующих преобразований, максимальное значение соответствующих деформаций можно представить в виде:

$$\varepsilon_x = U \frac{1}{c} \sqrt{\omega_b^2 - \omega^{*2}}, \quad (5.2.1)$$

где U – максимальное (пиковое) продольное смещение грунта при землетрясении; c – скорость звука в материале трубопровода, для стальных трубопроводов $c \sim 5172$ м/с; ω_b – частота отсечки; ω^* – частота ловушечной формы колебаний, определяемая по зависимости (3.1.4).

По аналогии, выражение для напряжений, представим в виде:

$$\tilde{\sigma}_x = \pm E a_c \left(\frac{T_0}{2\pi} \right)^2 \frac{1}{c} \sqrt{\omega_b^2 - \omega^{*2}}. \quad (5.2.2)$$

Для большей наглядности, представим (5.2.2) в виде

$$\tilde{\sigma}_x = \pm E a_c \left(\frac{T_0}{2\pi} \right)^2 \frac{1}{c} W, \quad (5.2.3)$$

где W – определяется по номограмме, представленной на Рисунке 5.2.1, где коэффициент B равен отношению массы включения к погонной массе трубопровода.

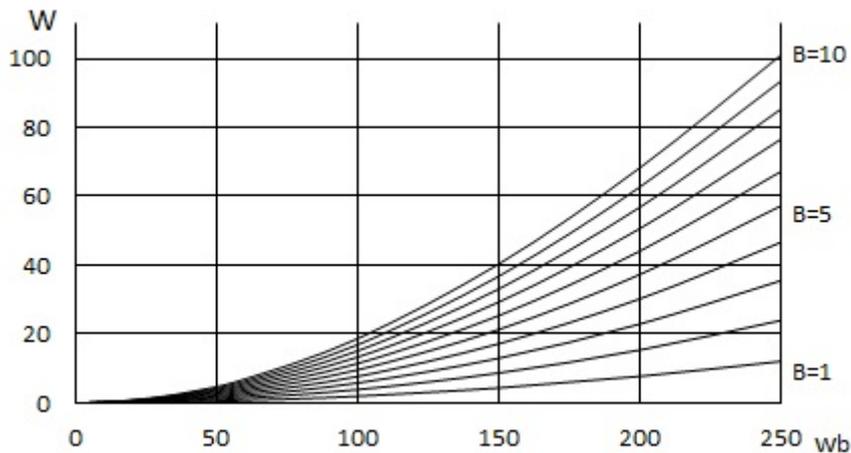


Рисунок 5.2.1. Зависимость $W = W(B, \omega_b)$, рад/с.

Полученная зависимость (5.2.3) характеризует дополнительные продольные динамические напряжения, возникающие в области сосредоточенного включения вследствие ловушечных колебаний на указанном участке трубопровода.

Обратим внимание на схожесть выражений для продольных напряжений, обусловленных локальными (5.1.3) и ловушечными (5.2.2) колебаниями.

Следует отметить, что напряжения, обусловленные ловушечными модами, строго говоря, должны увеличиваться на, так называемый, коэффициент динамичности (Пановко, 1960), характеризующий возможные резонансные явления при сейсмическом воздействии (Бирбраер, 1998). Принимая во внимание высокое, в свете спектра реальных сейсмозодействий (Тяпин, 2013), значение ловушечной частоты для наиболее распространенных грунтовых условий и включений, указанный коэффициент динамичности принимаем равным 1. В этом случае, наибольшие продольные напряжения будут возникать при более низкочастотных, локальных колебаниях.

Выражение для максимального значения деформаций, обусловленных изгибными колебаниями, после дифференцирования (3.1.7) и соответствующих преобразований, можно представить в виде

$$\varepsilon_y = D \frac{\sqrt{2}}{8} V \frac{M}{EIa} \omega^{**2}, \quad (5.2.4)$$

где V – максимальное (пиковое) поперечное смещение грунта при землетрясении, M – масса включения, D – наружный диаметр трубопровода, ω^{**} – частота ловушечной моды, обусловленной наличием включения, a – коэффициент, определяемый выражением:

$$a = \sqrt[4]{\frac{m}{EI} (\omega_{bb}^2 - \omega^{**2})}, \quad (5.2.5)$$

где m – погонная масса трубопровода.

После преобразований, выражение для соответствующих напряжений, можно представить в виде:

$$\tilde{\sigma}_y = \pm DE \frac{\sqrt{2}}{8} a_c \left(\frac{T_0}{2\pi} \right)^2 \frac{M}{\sqrt[4]{m(A-X)}} X, \quad (5.2.6)$$

где множители A и X , определяются по номограмме на Рисунке 3.1.7.

В явном виде, выражение для напряжений, можно представить в виде:

$$\tilde{\sigma}_y = \pm \frac{\sqrt{2}}{8} a_c \left(\frac{T_0}{2\pi} \right)^2 \sqrt[4]{\frac{E}{mI^3}} \frac{DM\omega^{**2}}{\sqrt[4]{(\omega_{bb}^2 - \omega^{**2})}}. \quad (5.2.7)$$

С учетом спектра реального сейсмического воздействия, заключаем, что наиболее опасными будут локальные поперечные колебания.

Далее рассмотрим ловушечные моды, обусловленных наличием протяженных неоднородностей.

По аналогии, после дифференцирования (4.1.1) и (4.1.5) с последующими преобразованиями, амплитуду продольных напряжений представим в виде:

$$\sigma_{1p} = \pm a_c \left(\frac{T_0}{2\pi} \right)^2 \sqrt{\frac{Em}{A}} \sqrt{\omega^{*2} - \omega_b^2}, \quad (5.2.8)$$

поперечных –

$$\sigma_{1s} = \pm a_c \left(\frac{T_0}{2\pi} \right)^2 \frac{D}{2} \sqrt{\frac{Em}{I}} \sqrt{\omega^{*2} - \omega_{bb}^2}. \quad (5.2.9)$$

Обратим внимание на схожесть выражений для продольных и поперечных напряжений, обусловленных локальными и ловушечными колебаниями.

Анализируя (5.2.8) и (5.2.9) отметим, что наибольшие напряжения будут возникать на участках, характеризуемой наименьшей частотой отсечки, т.е. наиболее слабых.

5.3 Напряжения при высокочастотных колебаниях

Начнем с рассмотрения продольных колебаний.

После дифференцирования (2.1.5) и преобразований, выражение для амплитуды продольных напряжений, обусловленных бегущими волнами, в терминах действующих нормативных документов, можно представить в виде:

$$\sigma_{2p} = \pm a_c \left(\frac{T_0}{2\pi} \right)^2 \sqrt{\frac{Em}{A}} \sqrt{\omega^2 - \omega_b^2}. \quad (5.3.1)$$

Выражение для поперечных напряжений, после дифференцирования (2.1.10) и преобразований, представим в виде:

$$\sigma_{2s} = \pm a_c \left(\frac{T_0}{2\pi} \right)^2 \frac{D}{2} \sqrt{\frac{Em}{I}} \sqrt{\omega^2 - \omega_{bb}^2}. \quad (5.3.2)$$

Анализируя полученные выражения, отметим, что наибольшие напряжения будут возникать на участках, характеризуемой наименьшей частотой отсечки, т.е. более слабых.

Отметим, что частота колебаний, строго говоря, может находиться в широком интервале, ограниченном только слева частотой отсечки. В этих условиях, частоту бегущих волн (высокочастотных колебаний), можно принять наибольшей обычно фиксируемой при реальных землетрясениях – 35 Гц (Бирбраер, 1998). Таким образом, для продольных колебаний, можно записать

$$\sigma_{2p} = \pm a_c \left(\frac{T_0}{2\pi} \right)^2 \sqrt{\frac{Em}{A}} \sqrt{(2\pi \cdot 35)^2 - \omega_b^2}, \quad (5.3.3)$$

для поперечных –

$$\sigma_{2s} = \pm a_c \left(\frac{T_0}{2\pi} \right)^2 \frac{D}{2} \sqrt{\frac{Em}{I}} \sqrt{(2\pi \cdot 35)^2 - \omega_{bb}^2}. \quad (5.3.4)$$

5.4 Методика оценки напряженного состояния

На основании выполненных исследований можно заключить, что напряженное состояние участка трубопровода с точечным включением или протяженной неоднородностью в общем случае формируется:

- напряжениями, обусловленными колебаниями грунта,
- напряжениями, обусловленными локальными колебаниями,
- напряжениями, обусловленными бегущими волнами.

Напряжениями, обусловленными ловушечными модами, в свете спектра реальных сейсмических воздействий, пренебрегаем по причине их малости, по сравнению с прочими.

Напряжения, обусловленные колебаниями грунта, регламентируется действующими нормами (СП 36.13330.2012) и определяется по (В.4); обусловленные локальными колебаниями - (5.1.3) и (5.1.5); бегущими волнами – (5.3.3) и (5.3.4).

Таким образом, максимальные продольные напряжения, обусловленные низкочастотными локальными колебаниями в области точечного включения или резкого изменения свойств основания, будут определяться выражением:

$$\sigma_{1p} = \pm a_c \left(\frac{T_0}{2\pi} \right)^2 \sqrt{\frac{Em}{A}} \sqrt{W_b^2 - w_p^2}, \quad (5.4.1)$$

$$W_b = \max\{\omega_b, \Omega_b\}, \quad w_p = \min\left\{ \frac{2\pi}{T_0}, \omega_b \right\},$$

поперечные –

$$\sigma_{1s} = \pm a_c \left(\frac{T_0}{2\pi} \right)^2 \frac{D}{2} \sqrt{\frac{Em}{I}} \sqrt{W_{bb}^2 - w_s^2}, \quad (5.4.2)$$

$$W_{bb} = \max\{\omega_{bb}, \Omega_{bb}\}, \quad w_s = \min\left\{ \frac{2\pi}{T_0}, \omega_{bb} \right\},$$

где в качестве частот отсечки принята максимальная из возможных на рассматриваемом участке, в качестве частоты колебаний – минимальная из преобладающей частоты колебаний частиц грунта и частоты отсечки.

Выражение для максимальных продольных напряжений, обусловленных бегущими волнами, можно представить в виде:

$$\sigma_{2p} = \pm a_c \left(\frac{T_0}{2\pi} \right)^2 \sqrt{\frac{Em}{A}} \sqrt{(2\pi \cdot 35)^2 - W_b^2}, \quad (5.4.3)$$

$$W_b = \min\{\omega_b, \Omega_b\},$$

поперечные –

$$\sigma_{2s} = \pm a_c \left(\frac{T_0}{2\pi} \right)^2 \frac{D}{2} \sqrt{\frac{Em}{I} \sqrt{(2\pi \cdot 35)^2 - W_{bb}^2}},$$

$$W_{bb} = \min\{\omega_{bb}, \Omega_{bb}\},$$
(5.4.4)

где в качестве частот колебаний принята наибольшая фиксируемая при реальных землетрясениях, в качестве частоты отсечки – минимальная из возможных на рассматриваемом участке.

Отметим, что с учетом спектра сейсмических воздействий (Бирбраер, 1998; Тяпин, 2013), амплитуду напряжений обусловленных бегущими волнами, как характеризующихся высокими частотами колебаний, следует принять не менее чем в 2 раза меньше амплитуды напряжений, обусловленных локальными низкочастотными колебаниями (Синицын, 1967). Вместе с тем, с учетом эффектов отражения волн, амплитуда так же может возрасти в 2 раза. Таким образом, суммирование напряжений следует проводить без понижающих коэффициентов, обусловленных частотной составляющей.

Выполним количественную оценку. Стальной нефтепровод диаметром $D = 1,22$ м ($m = 1300$ кг/м; $A = 4,55 \cdot 10^{-2}$ м²; $I = 8,31 \cdot 10^{-3}$ м⁴; $E = 2,0 \cdot 10^{11}$ Па) расположен на песчаном основании ($k = 2 \cdot 10^7$ Па; $K = 5 \cdot 10^7$ Па). Принимая преобладающий период колебаний $T_0 = 0,2$ с (31,4 рад/с) (грунты II категории), пиковое ускорение $a_c = 2,0$ м/с² (8 баллов) и скорость распространения сейсмических волн $c_p = 250$ м/с, напряжения, вычисленные в рамках нормативного подхода (СП 36.13330.2012), без учета дополнительных коэффициентов, составляют 51 МПа. Частоты отсечки составляют 124 и 196 рад /с для продольных и поперечных колебаний, соответственно.

Пусть участок трубопровода содержит конструктивное включение. Напряжения вследствие локальных колебаний, обусловленных наличием неоднородности, составят 18,4 и 42,3 МПа. Таким образом, вследствие локальных колебаний, действующие напряжения более чем в 2 раза превышают напряжения на линейном участке. При этом отметим, что частоты ловушечных колебаний составляют 122 и 180 рад/с для продольных и поперечных колебаний, соответственно. Это значительно превышает преобладающий период колебаний.

В качестве второго примера рассмотрим газопровод тех же параметров и в тех же грунтовых условиях, при этом погонную массу сооружения примем $m = 500$ кг/м, а параметры сейсмоздействия $T_0 = 0,5$ с (12,6 рад/с), пиковое ускорение $a_c = 2,0$ м/с². Напряжения, обусловленные сейсмическими волнами в грунте, вычисленные согласно требованиями СП 36.13330.2012, составляют 128 МПа. Частоты отсечки равны 200 и 316 рад/с для продольных и поперечных колебаний, соответственно. Для участка газопровода с локализатором колебаний

дополнительные напряжения составят 119,0 и 268,0 МПа. Таким образом, вследствие локальных колебаний, действующие напряжения более чем в 4 раза превышают напряжения на линейном участке.

Рассмотрим протяженную неоднородность в виде участка на слабом грунте. Частоты отсечки включения – 30 и 66 рад/с. Напряжения от локальных колебаний 18 и 42,3 МПа. Напряжения от бегущих волн – 27,8 и 21,8 МПа. Таким образом, напряжения на участке резкого изменения свойств грунтового основания, более чем в 3 раза превышают напряжения на линейном участке.

Результаты количественных оценок для наиболее часто применяемых труб для магистральных нефте- и газопроводов, расположенных на нескальном грунтовом основании, приведены в Таблице 5.4.1.

Таблица 5.4.1. Количественная оценка напряжений

$\frac{k}{K}$, МПа	Период / частота, с / Гц	Ускор., м/с ²	Труба		Напряжения, МПа		
			D, мм	m, кг/м	СНиП	Локальные колебания	Бегущие волны
$\frac{10}{20}$	0,3 / 3,3	4,0	1220x12	1300	127,0	$\frac{58,8}{120,0}$	$\frac{139,0}{179,0}$
$\frac{10}{20}$	0,4 / 2,5	4,0	1220x12	500	170,0	$\frac{107,0}{217,0}$	$\frac{128,0}{99,0}$
$\frac{10}{20}$	0,3 / 3,3	4,0	1020x12	1000	127,0	$\frac{64,8}{130,0}$	$\frac{130,0}{156,0}$
$\frac{10}{20}$	0,4 / 2,5	4,0	1020x12	400	170,0	$\frac{117,0}{233,0}$	$\frac{114,0}{-}$
$\frac{20}{50}$	0,2 / 5,0	2,0	1220x12	1300	51,0	$\frac{18,4}{42,3}$	$\frac{27,8}{21,7}$
$\frac{20}{50}$	0,5 / 2,0	2,0	1220x12	500	128,0	$\frac{119,0}{268,0}$	$\frac{54,2}{-}$
$\frac{20}{50}$	0,2 / 5,0	2,0	1020x12	1000	51,0	$\frac{20,3}{46,6}$	$\frac{24,8}{-}$
$\frac{20}{50}$	0,5 / 2,0	2,0	1020x12	400	128,0	$\frac{130,0}{294,0}$	$\frac{-}{-}$

Примечания:

1. Над чертой приведены значения соответствующие продольным колебаниям, под чертой – поперечным.
2. Прочерки в ячейках указывают на невозможность возникновения бегущих волн, вследствие невыполнения частотного условия.

В качественном отношении, результаты хорошо согласуются с данными, полученными в рамках конечно-элементного моделирования заглубленного трубопровода с п-образным участком (Мурзаханов, Рябцев, 2009) при сейсмическом воздействии в рамках линейно-спектральной теории сейсмостойкости. Так, в указанной работе получено, что напряжения,

действующие в коленах, с учетом рабочего давления, более чем в 2 раза превышают напряжения на линейном участке (Рисунок 5.4.1).

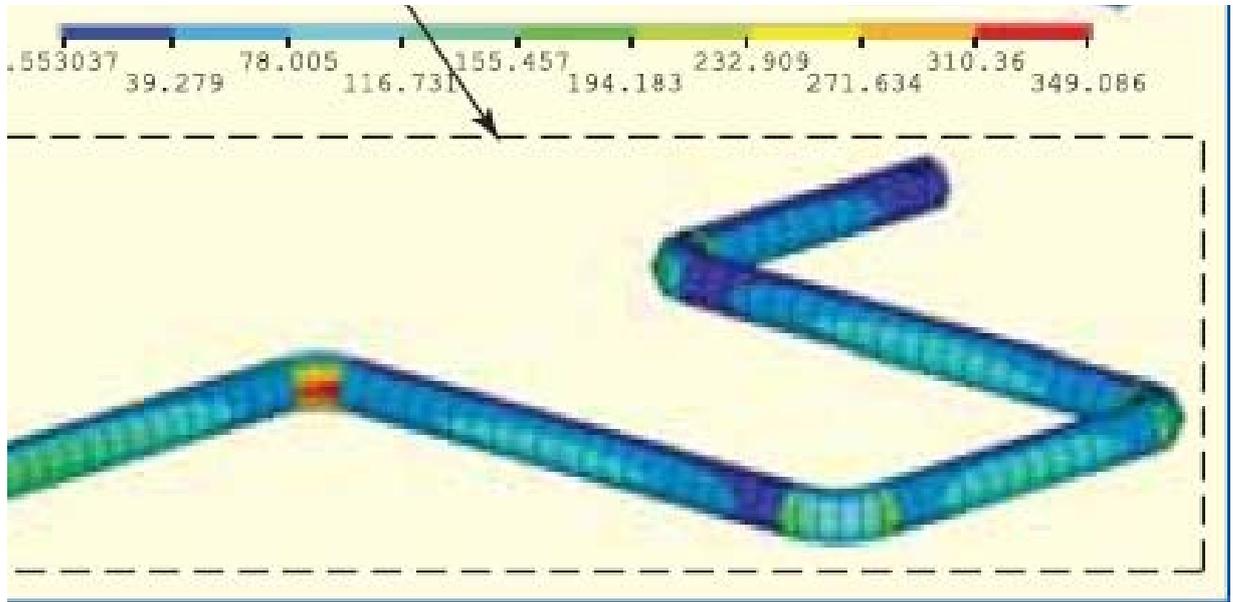


Рисунок 5.4.1. Напряженное состояние участка трубопровода (Мурзаханов, Рябцев, 2009)

Схожие результаты получены и при расчетах в рамках сейсродинамической теории. Так, напряжения в местах примыкания и стыковки трубопроводов, превышают напряжения, действующие на отдалении от указанной области, не менее чем в 2 раза (Рашидов, Хожметов, 1985).

В исследованиях сейсмостойкости участков трубопроводов с учетом рабочего давления, расположенных в областях с резким изменением свойств грунтового основания (Novak, Hindy, 1980), было установлено что напряжения, действующие в зоне скачкообразного изменения жесткости примерно в два раза выше, чем напряжения, действующие на линейном участке (Рисунок 5.4.2).

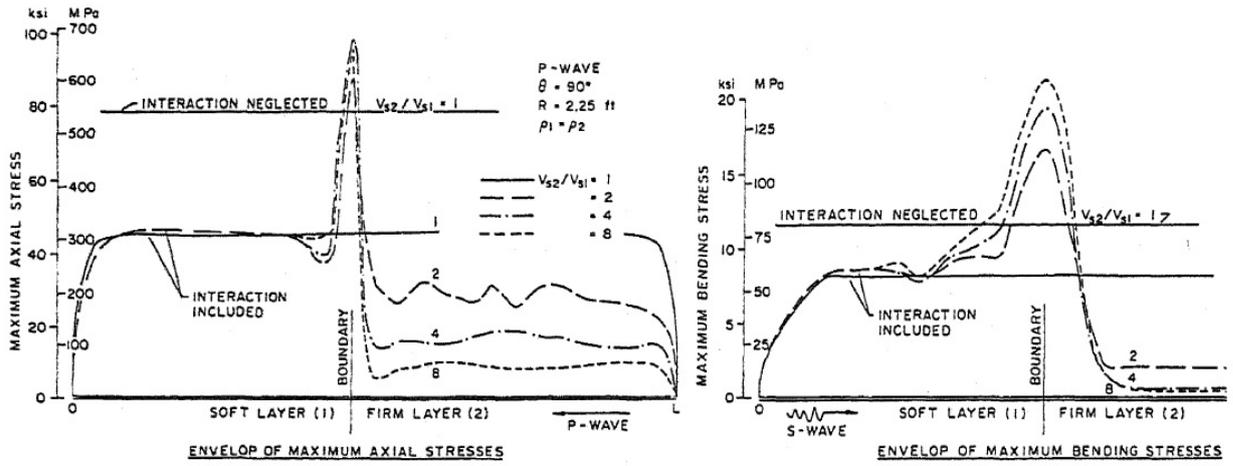


Рисунок 5.4.2. Напряженное состояние участка трубопровода (Novak, Hindy, 1980).

Приведенные результаты исследований других авторов, в качественном отношении, согласуются с результатами расчетов по предлагаемой методике.

5.5 Выводы

1. Получены явные аналитические выражения и предложена методика для оценки напряженного состояния участков трубопроводов с массовыми и жесткостными неоднородностями.

2. При определенных параметрах участка трубопровода с массовыми и жесткостными неоднородностями, действующие напряжения, обусловленные локализацией колебаний на указанных участках, в несколько раз превышают напряжения, действующие на однородных участках, что является определяющим в задачах обеспечения прочности сооружения. Указанные, дополнительные напряжения, не регламентируются действующими нормативными документами.

Заключение

1. Показано существование у элементов строительных конструкций смешанного спектра собственных частот, образованного дискретной частью и сплошной. При этом существует некая граничная частота, разделяющая указанные части спектра. Амплитуда вынужденных колебаний конструкции при воздействиях с частотами, превышающими граничную, определяется, в основном, статическими характеристиками конструкции и амплитудой внешнего воздействия.

2. В силу конструктивных особенностей в зданиях и сооружениях могут возникать локальные колебания отдельных частей или их элементов, при относительно покоящихся прочих элементах или конструкции в целом.

3. В силу отсутствия аналитических решений, для выявления возможности возникновения локальных колебаний, в ряде случаев представляющих опасность для конструкции в целом и не регламентируемых действующими нормативными документами, на стадии проектирования требуется выполнение тщательного и трудоемкого модального анализа как сооружения в целом, так и отдельных его элементов.

4. В реальных условиях, с учетом сил неупругого сопротивления, низкочастотные воздействия, с частотами ниже частоты отсечки, являющейся функцией жесткости основания и погонной массы трубопровода, приводят к возникновению локальных колебаний, экспоненциально затухающих по мере их распространения по сооружению. Данная особенность порождает неоднородность волновых процессов, которая проявляется в преимущественных колебаниях начального участка при относительно покоящемся сооружении в целом. С учетом сил неупругого сопротивления, высокочастотные воздействия порождают бегущие волны, экспоненциально затухающие по мере распространения, что приводит к равномерному распространению колебаний по трубопроводу.

5. Получено явное аналитическое выражение для определения длины участка сооружения, реагирующего на динамическое воздействие от точечного источника. Получено аналитическое выражение для определения частоты отсечки для случая вязко-упругого основания. Показано, что вязкость основания уменьшает значение указанной частоты.

6. При определенных параметрах трубопровода локальное динамическое, в том числе сейсмическое, воздействие может привести к возникновению бегущих волн в указанной конструкции, затухающих вследствие сил неупругого сопротивления по контакту с грунтом. При этом длина участка сооружения, подверженного продольным воздействиям может

достигать нескольких километров, поперечным – нескольких сот метров. В этих пределах, конструкция сама является источником динамического воздействия.

7. При определенных параметрах трубопровода с конструктивным массовым включением и грунтовых условий, низкочастотная сейсмическая нагрузка может привести к возникновению локальных колебаний конструктивного включения, при относительно покоящемся трубопроводе в целом.

8. Получены явные аналитические выражения для коэффициентов отражения и прохождения продольных и поперечных волн (формулы типа Френеля) распространяющихся по трубопроводу в случае наличия массового включения.

9. Высокочастотные сейсмические воздействия, порождающие бегущие волны, распространяющиеся по трубопроводу, вследствие наличия включения трансформируются на проходящие и отраженные, что может привести к увеличению уровня исходного воздействия. В наиболее неблагоприятном случае – случае полного отражения – происходит увеличение исходного воздействия в 2 раза.

10. При определенных параметрах трубопровода с протяженным включением в виде участка на более слабых грунтах, низкочастотная сейсмическая нагрузка может привести к возникновению локальных колебаний указанного включения, при относительно покоящемся трубопроводе в целом.

11. Получены явные аналитические выражения для коэффициентов отражения и прохождения продольных и поперечных волн (формулы типа Френеля) распространяющихся по трубопроводу в случае неоднородности основания.

12. Высокочастотные сейсмические воздействия, порождающие бегущие волны, распространяющиеся по трубопроводу, вследствие различий в свойствах грунтов основания вдоль трассы сооружения трансформируются на проходящие и отраженные, что может привести к увеличению уровня исходного воздействия.

13. Получены явные аналитические выражения и предложена методика для оценки напряженного состояния участков трубопроводов с массовыми и жесткостными неоднородностями.

14. При определенных параметрах участка трубопровода с массовыми и жесткостными неоднородностями, действующие напряжения, обусловленные локализацией колебаний на указанных участках, в несколько раз превышают напряжения, действующие на однородных участках, что является определяющим в задачах обеспечения прочности сооружения. Указанные, дополнительные напряжения, не регламентируются действующими нормативными документами.

Список литературы

- Абрамян А. К., Индейцев Д. А. Ловушечные моды колебаний в мембране с неоднородностью // Акустический журнал. 1998. Т. 44, № 4. С. 437 – 442.
- Айнбиндер А. Б. Расчет магистральных и промышленных трубопроводов на прочность и устойчивость: Справочное пособие. М.: Недра, 1991. 287 с.
- Андреева Е. В. Разработка методики оценки несущей способности подземных магистральных трубопроводов в сейсмически опасных зонах: дис. ... канд. техн. наук: 25.00.19 / Андреева Елена Владимировна. М., 2009. 138 с.
- Алешкевич В. А., Деденко Л. Г., Караваев В. А. Колебания и волны. Лекции. М.: Физический факультет МГУ, 2001. 144 с.
- Алявдин П. В., Музычкин Ю. А. Исследования вибрации каркасного здания, расположенного вблизи метрополитена // Механика машин, механизмов и материалов. 2009. № 2 (7). С. 56 – 60.
- Бабаков И. М. Теория колебаний. М.: Гос. изд-во технико-теоретической лит-ры, 1958. 628 с.
- Белостоцкий А.М., Дубинский С.И., Потапенко А.Л. Методы динамического синтеза подконструкций в задачах моделирования сложных инженерных систем // Строительная механика и расчет сооружений. 2006. № 6. С. 45-52.
- Беляев А. К. Высокочастотная динамика сложных инженерных конструкций: дис. ... д-ра физ.-мат. наук: 01.02.04 / Беляев Александр Дмитриевич. СПб., 2001. 232 с.
- Бидерман В. Л. Теория механических колебаний: учебник для вузов. М.: Высшая школа, 1980. 408 с.
- Бирбраер А. Н. Расчет конструкций на сейсмостойкость. СПб. : Наука, 1998. 255 с.
- Бирбраер А. Н., Сазонова Ю.В. Вклад высших мод в динамический отклик конструкций на высокочастотные воздействия // Строительная механика и расчет сооружений. 2009. № 6. С. 22-27.
- Бородавкин П. П. Подземные магистральные трубопроводы (проектирование и строительство). М. : Недра, 1982. 384 с.
- Бреховских Л. М., Гончаров В. В. Введение в механику сплошных сред (в приложении к теории волн). М. : Наука, 1982. 335 с.
- Брызгалов В. И., Клюкач А. А. Опыт эксплуатации пространственно-стержневой конструкции МАРХИ машинного зала Саяно-Шушенской ГЭС // Гидротехническое строительство. 1998. № 9. С.63 – 66.

Валеев А. Р., Зотов А. Н. Новые конструктивные методы повышения сейсмостойкости трубопроводов [Электронный ресурс] // Электронный научный журнал «Нефтегазовое дело». Режим доступа: http://www.ogbus.ru/authors/Valeev/Valeev_2.pdf.

Васильев Г. Г., Андреева Е. В. Оценка устойчивости трубопровода при поперечных перемещениях, вызванных сейсмическими воздействиями // Проблемы сбора, подготовки и транспорта нефти и нефтепродуктов. 2009. № 1. С. 43-48.

Васильев Г. Г., Горяинов Ю. А., Кинцлер Ю. Э, Лежнев М. А. Выбор конструктивных решений при проектировании трубопроводов в сейсмических районах // Труды РГУ нефти и газа имени И.М. Губкина. 2012. №2(267). С.84-92.

Весницкий А. И., Метрикин А. В. Переходное излучение в механике // Успехи физических наук. 1996. Том 166, № 10. С. 1043 – 1068.

Виноградов С. В. Расчет подземных трубопроводов на внешние нагрузки. М.: Стройиздат, 1980. 135 с.

Вознесенский В.А. Динамическая неустойчивость грунтов. М.: Эдиториал УРСС, 1999. 264 с.

Гехман А. С. Научные основы сейсмостойкости магистральных и промысловых трубопроводов: дис. ... д-ра техн. наук: 05.15.13 / Гехман Анатолий Савельевич. М., 1993. 316 с.

Гехман А.С., Зайнетдинов Х.Х. Расчет, конструирование трубопроводов в сейсмических районах. М.: Стройиздат, 1988. 184 с.

Глушков Г. И. Расчет сооружений, заглубленных в грунт. М.: Стройиздат, 1977. 295 с.

Глушков Е. В., Глушкова Н. В., Вауэр Й. Формирование частотных полос пропускания и запираания в упругом волноводе с системой препятствий // Акустический журнал. 2011. Т. 57, № 3. С. 291-302.

Глушков Е. В., Глушкова Н. В., Голуб М. В. Блокирование бегущих волн и локализация энергии упругих колебаний при дифракции на трещине // Акустический журнал. 2006. Т. 52, № 3. С. 314-325.

Голоскоков Д.П. Уравнения математической физики. Решение задач в системе Maple. СПб.: Питер, 2004. 539 с.

Гольдин А. Л., Рассказов Л. Н. Проектирование грунтовых плотин. М.: Изд-во «Ассоциация строительных вузов», 2001. 375 с.

Дмитровская Л.Н. Методы оценки сейсмостойкости многоопорных сооружений: дис. ... канд. техн. наук: 05.23.17 / Дмитровская Любовь Николаевна. СПб., 2005. 212 с.

Дорман И.Я. Сейсмостойкость транспортных тоннелей. 2-е доп. и перераб. изд. М.: ТИМР, 2000. 307 с.

Ерофеев В. И., Кажаяев В. В., Лисенкова Е. Е., Семерикова Н. П. Сравнительный анализ динамического поведения балок моделей Бернулли-Эйлера, Рэлея и Тимошенко, лежащих на упругом основании // Вестник научно-технического развития. 2009. № 8 (24). С. 18-26.

Зверяев Е. М., Докина Д. М. Сравнительный анализ моделей низкочастотных и высокочастотных колебаний балочных элементов авиационных конструкций // Научный вестник МГТУ ГА. Сер.: Эксплуатация воздушного транспорта и ремонт авиационной техники. 2007. № 123. С. 41 – 47.

Зегжда С. А., Солтаханов Ш. Х., Юшков М. П. Уравнения движения неголономных систем и вариационные принципы механики. СПб.: Издательство Санкт-Петербургского университета, 2002. 276 с.

Зенкевич О. Метод конечных элементов в технике. М.: Мир, 1975. 271 с.

Иванов П. Л. Грунты и основания гидротехнических сооружений: учеб. для гидротехн. спец. вузов. М.: Высшая школа, 1985. 352 с.

Индейцев Д.А., Сергеев А.Д., Литвин С.С. Особенности резонансных колебаний упругих волноводов с инерционными включениями // Журнал технической физики. 2000. Т. 70, вып. 8. С. 8 – 15.

Карлов Н.В., Кириченко Н.А. Колебания, волны, структуры. М.: ФИЗМАТЛИТ, 2008. 496 с.

Карпов В.В., Сальников А.Ю. Вариационные методы и вариационные принципы механики при расчете строительных конструкций: учеб. пособие. СПб.: СПбГАСУ. 2009. 75 с.

Клейн Г.К. Расчет подземных трубопроводов. М.: Стройиздат, 1969. 240 с.

Ковалева Н.В., Рутман Ю.Л., Давыдова Г.В. Определение оптимальных параметров демпфирования в системах сейсмоизоляции // Инженерно-строительный журнал. 2013. №5(40). С. 107–115.

Коренев Б. Г., Рабинович И. М. Справочник по динамике сооружений. М.: Стройиздат, 1972. 511 с.

Кочнева Л.Ф. Внутреннее трение в твердых телах при колебаниях. М. : Наука, 1979. 96 с.

Лалин В.В., Яваров А.В. Современные технологии расчета магистральных трубопроводов // Инженерно-строительный журнал. 2010. № 3. С. 43-47.

Локализация линейных волн / Д.А. Индейцев [и др.]. СПб.: Изд-во Санкт-Петербургского университета, 2007. 342 с.

Масленников А.М., Нгуен Куок Донг. О достоверности спектрального метода при расчете на сейсмическое воздействие // Вестник гражданских инженеров. 2010. № 2. С. 51-54.

Мондрус В.Л., Хуэн Л.Т.Т., Сизов Д.К. Распределение амплитуд виброускорений в многоэтажном административном здании от источников техногенного происхождения // Вестник МГСУ. 2010. № 1. С. 113 – 116.

Муравьева Л.В. Расчет подземных трубопроводов, проложенных в сейсмических районах // Вестник ВолгГАСУ. Сер.: Стр-во и архит. 2008. Вып. 10(29). С. 184-187.

Мурзаханов Г. Х., Олейникова А. О. Анализ трубопровода на сейсмическое воздействие // Бурение и нефть. 2008. № 11. С. 20-23.

Мурзаханов Г. Х., Олейников С.С. Оценка остаточного ресурса трубопровода при сейсмическом воздействии // Бурение и нефть. 2008. № 4. С.19-22.

Мурзаханов Г. Х., Рябцев С.Л. Расчет трубопровода на сейсмическое воздействие методом конечных элементов // Безопасность труда в промышленности. 2009. №1. С. 44-48.

Мухидинов С. С. Воздействие сейсмической волны на подземные трубопроводы с сосредоточенными параметрами: автореф. дис. ... канд. техн. наук: 01.02.04 / Мухидинов Султан Сабинович. Ташкент, 1995. 13 с.

Окамото Ш. Сейсмостойкость инженерных сооружений: Пер. с англ. М.: Стройиздат, 1980. 342 с.

Оксогоев А.А., Слепов Б.И. Прикладная физика. Колебания элементов конструкций. Ч.1. Теория линейных колебаний: учеб. пособие. Томск: Изд-во НТЛ, 2003. 300 с.

Павленко О.В. Сейсмические волны в грунтовых слоях: нелинейное поведение грунта при сильных землетрясениях последних лет. М.: Научный мир, 2009. 260 с.

Пановко Я. Г. Внутреннее трение при колебаниях упругих систем. М.: Изд-во Физматгиз, 1960. 193 с.

Пановко Я. Г. Механика деформируемого твердого тела. М.: Наука, 1985. 288 с.

Петров В.А. Развитие методики решения задачи о контактном взаимодействии подземного трубопровода с упругопластичным грунтом при сейсмической нагрузке // Известия ВНИИГ им. Б.Е. Веденеева. 2004. Т.244. С. 184-194.

Перельмутер А.В., Карпиловский В.С., Фиалко С.Ю., Егупов К.В. Опыт реализации проекта МСН СНГ «Строительство в сейсмических районах» в программной системе SCAD // Вестник Одесской государственной академии строительства и архитектуры. 2003. № 9. С. 147 – 159.

Перельмутер А.В., Криксунов Э.З., Мосина Н.В. Реализация расчета монолитных жилых зданий на прогрессирующее (лавинообразное) обрушение в среде вычислительного комплекса «SCAD Office» // Инженерно-строительный журнал. 2009. № 2. С. 13 – 18.

Потапов А.Д., Ревелис И.Л. Землетрясения. Причины и последствия. М.: Высшая школа, 2009. 248 с.

Пфейффер П. Колебания упругих тел. 2-е изд. М.: КомКнига, 2006. 152 с.

Рашидов Т. Р., Ан Е.В. Изученность подземных трубопроводов при сейсмических и динамических нагружениях // Современные геотехнологии в строительстве и их научно-техническое сопровождение: материалы междунар. науч. – технич. конф. Ч. 1. СПб.: СПбГАСУ, 2014. С. 266-273.

Рашидов Т. Динамическая теория сейсмостойкости сложных систем подземных сооружений. Ташкент: Фан, 1973. 179 с.

Рашидов Т.Р., Хожметов Г.Х. Сейсмостойкость подземных трубопроводов. Ташкент: Фан, 1985. 152 с.

Рашидов Т.Р., Хожметов Г.Х., Мардонов Б. Колебания сооружений, взаимодействующих с грунтом. Ташкент: Фан, 1975. 715 с.

Розенблат Г.М. Сухое трение и односторонние связи в механике твердого тела. М.: URSS, 2011. 205 с.

Рутман Ю.Л., Симборг Э. Анализ коэффициента пластичности с целью рационального выбора коэффициента редукации нагрузок K_1 // Сейсмостойкое строительство. Безопасность сооружений. 2011. № 4. С. 21-25.

Самарин А.А. Вибрации трубопроводов энергетических установок и методы их устранения. М.: Энергия, 1979. 288 с.

Сейсмостойкость магистральных трубопроводов и специальных сооружений нефтяной и газовой промышленности: сб. / АН СССР; под ред. Савинова О.А. М.: Наука, 1980. 170 с.

Синицын А. П. Практические методы расчета сооружений на сейсмические нагрузки. М.: Стройиздат, 1967. 144 с.

Скучик Е. Простые и сложные колебательные системы. М.: Мир, 1971. 558 с.

Соколов В. Г. Колебания, статическая и динамическая устойчивость трубопроводов большого диаметра: автореф. дис. ... д-ра техн. наук: 05.23.17 / Соколов Владимир Григорьевич. СПб., 2011. 36 с.

Соколов В.Г., Разов И.О. Свободные колебания наземных газопроводов, обжатых продольной силой, с учетом упругого основания грунта // Вестник гражданских инженеров. 2013. № 1(36). С.29-31.

Сорокин Е. С. Динамический расчет несущих конструкций зданий. М.: Госстройиздат, 1956. 340 с.

СП 14.13330.2011 Строительство в сейсмических районах. Актуализированная редакция СНиП II-7-81*. М.: ФАУ «ФЦС», 2011. 83 с.

СП 36.13330.2012 Магистральные трубопроводы. Актуализированная редакция СНиП 2.05.06-85*. М.: ФАУ «ФЦС», 2012. 92 с.

СТО Газпром 2-2.1-249-2008 Магистральные трубопроводы. М.: ФГУП «Стандартинформ», 2008. 161 с.

Суворова Т. В. Исследования явления нагонной волны перед движущимся составом // Известия высших учебных заведений. Северо-Кавказский регион. Серия: Технические науки. 2003. № 3. С. 80-83.

Султанов К. Взаимодействия подземных сооружений с грунтом при воздействии нестационарных упругих и неупругих волн: автореф. дис. ... д-ра физ.-мат. наук: 01.02.04 / Султанов Карим. М., 1992. 30 с.

Суцев Т. С. Повышение безопасности магистральных нефтепроводов на участках пересечений с активными тектоническими разломами: дис. ... канд. техн. наук: 25.00.19, 05.26.03 / Суцев Тимофей Сергеевич. Уфа, 2010. 114 с.

Тимошенко С. П. Колебания в инженерном деле. 2-е изд. М.: Наука, 1967. 444 с.

Тихонов А. Н., Самарский А.А. Уравнения математической физики. 3-е изд. М.: Наука, 1966. 724 с.

Тяпин А. Г. Обобщение модели демпфирования Рэлея для динамических расчетов: вопросы практического применения // Сейсмостойкое строительство. Безопасность сооружений. 2009. № 6. С. 15 – 17.

Тяпин А. Г. Расчет сооружений на сейсмические воздействия с учетом взаимодействия с грунтовым основанием. М.: Изд-во «АСВ», 2013. 392 с.

Уздин А. М., Белаш Т. А. Некоторые проблемы использования актуализированной версии СНиП «Строительство в сейсмических районах» // Природные и техногенные риски. Безопасность сооружений. 2013. № 6. С. 28-30.

Улитин В.В. Современный подход к анализу устойчивости строительных конструкций // Вестник гражданских инженеров. 2006. № 4. С. 38-43.

Усошин С. А. Воздействие движущихся нагрузок на слоистые гетерогенные основания: автореф. ... канд. физ.-мат. наук: 01.02.04 / Усошин Сергей Александрович. Краснодар, 2011. 22 с.

Фотиева Н.Н. Расчет крепи подземных сооружений в сейсмически активных районах. М.: Недра, 1980. 222 с.

Хакимов А. Г. Отражение крутильной бегущей волны в стержне с искусственным дефектом // Вычислительная механика сплошных сред. 2012. Т. 5, № 1. С. 114 – 119.

Харкевич А.А. Спектры и анализ. 5-е изд. М.: Книжный дом «ЛИБРОКОМ», 2009. 240 с.

Цытович Н. А. Механика грунтов. 4-е изд. М.: Госстройиздат, 1963. 636 с.

Чернов Ю. Т. Вибрации строительных конструкций. М.: Издательство Ассоциации строительных вузов, 2006. 288 с.

Чирков В.А., Шутов В.Е. Колебания систем трубопроводного транспорта нефти и газа. М.: Недра, 2009. 247 с.

Юнин Е. К. Загадки и парадоксы сухого трения. М.: Книжный дом «ЛИБРОКОМ», 2009. 128 с.

Юнин Е. К. Введение в динамику глубокого бурения. 2-е изд. М.: Книжный дом «ЛИБРОКОМ», 2013. 168 с.

Antaki G.A. Piping and pipelines engineering: design, construction, maintenance, integrity and repair. New York: Marcel Dekker, 2003. 555 p.

Atamturktur S., Bornn L., Hemez F. Vibration characteristics of vaulted masonry monuments undergoing differential support settlement // Engineering Structures. 2011. № 33. Pp. 2472 – 2484.

Belyaev A. K. Combining continuous and discrete energy approaches to high frequency dynamics of structures // Selected topics in structronics and mechatronic systems, A.K. Belyaev, A. Guran. World Scientific Publishers, 2003. Pp. 221-267.

Belyaev A. K. High frequency dynamics of engineering structures // Advanced Dynamics and Control of Structures and Machines, H. Irschik, K. Schlacher. Springer Wien New York, 2004. Pp. 77-96.

Chopra A.K. Dynamics of structures: theory and application to earthquake engineering. New Jersey : Prentice-Hall, 1995. 794 p.

Desmet W. Mid-frequency vibro-acoustic modelling: challenges and potential solutions // Proc. of ISMA 2002, 2002. Vol. 2. Pp. 835-862.

Flores-Berrones R, Liu X.L. Seismic vulnerability of buried pipelines // Geofisica Internacional. 2003. Vol. 42. № 2. Pp. 237-246.

Kouretzis G. P., Bouckovalas G. D., Gantes C. J. 3-D shell analysis of cylindrical underground structures under seismic shear (S) wave action // Soil Dynamics and Earthquake Engineering. 2006. Vol. 26, Is. 10. Pp. 909–921.

Krylov V.V., Dawson A.R., Heelis M.E., Collop A.C. Rail movement and ground waves caused by high-speed trains approaching track-soil critical velocities // Proceedings of the Institution of Mechanical Engineers. Part F: Journal of Rail and Rapid Transit. 2000. Vol. 214. Pp. 107-116.

Ladeveze P, Chevreuril M. A new computational method for transient dynamics including the low- and the medium-frequency ranges // *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, 2005. Vol. 64, Is. 4. Pp. 503–527.

Markus R. Pfaffinger. Higher vibration modes in railway tracks at their cutoff frequencies: A thesis ... doctor of technical sciences. Zurich, 2000. 112 p.

Matsumoto Y., Yamaguchi H., Yoshioka T. A field investigation of vibration-based structural health monitoring in a steel truss bridge // *Proceeding of the Joint Conference on Advances in Bridge Engineering-II*, 2010, Bangladesh. Pp. 461 – 467.

Miyajima M. Damage to water supply system induced by The 2011 Great East Japan Earthquake // *Proc. of the International Symposium on Engineering Lessons Learned from the 2011 Great East Japan Earthquake*, 2012, Tokyo, Japan. Pp. 1467-1474.

Novak M., Hindy A. Seismic analysis of underground tubular structures // *Proc. of the 7-th world conference on earthquake engineering*, Istanbul, Turkey, 1980. Vol. 8. Pp. 287-294.

Seismic analysis of safety-related nuclear structures and commentary on standard for analysis of safety-related nuclear structures // *ASCE Standard*, 1986.

Ursell F. Trapping modes in the theory of surface waves // *Mathematical Proceedings of the Cambridge Philosophical Society*. 1951. Vol. 47, Is. 2. Pp. 347-358.

Zhanga Guo-Dong, Guo Bao-Zhu. On the spectrum of Euler–Bernoulli beam equation with Kelvin–Voigt damping // *Journal of Mathematical Analysis and Applications*. 2011. Vol. 374. Pp. 210–229.