

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ БЮДЖЕТНОЕ
ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ
«ПЕТЕРБУРГСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ ПУТЕЙ
СООБЩЕНИЯ ИМПЕРАТОРА АЛЕКСАНДРА I»

На правах рукописи

ПОЛИНКЕВИЧ КОНСТАНТИН ЮРЬЕВИЧ

**ОПРЕДЕЛЕНИЕ НАПРЯЖЕННО-ДЕФОРМИРОВАННОГО
СОСТОЯНИЯ ТОНКОСТЕННЫХ АНИЗОТРОПНЫХ СТЕРЖНЕЙ
ОТКРЫТОГО ПРОФИЛЯ ПРИ КРУЧЕНИИ**

Специальность 05.23.17 – Строительная механика

Диссертация

на соискание ученой степени кандидата технических наук

Научный руководитель:
кандидат технических наук,
доцент Б.М. Аллахвердов

Санкт-Петербург – 2019

ОГЛАВЛЕНИЕ

ВВЕДЕНИЕ.....	4
Глава 1. ОПИСАНИЕ МЕТОДА ИТЕРАЦИЙ НА ПРИМЕРЕ БАЛКИ НА ДВУХ ОПОРАХ.	21
1.1 Основные уравнения теории упругости	21
1.2. Основные гипотезы.....	23
1.3 Алгоритм итерационного метода расчета.	23
1.4 Численный пример. Балка.	26
Глава 2. ИТЕРАЦИОННЫЙ СПОСОБ ОПРЕДЕЛЕНИЯ НДС СЛОИСТЫХ БАЛОК.....	35
2.1 Алгоритм решения задачи изгиба слоистой балки.....	36
2.2 Пример определения напряженно-деформированного состояния трехслойной балки.	39
Глава 3. ИТЕРАЦИОННЫЙ СПОСОБ ОПРЕДЕЛЕНИЯ НАПРЯЖЕННО- ДЕФОРМИРОВАННОГО СОСТОЯНИЯ ТОНКОСТЕННЫХ СТЕРЖНЕЙ ОТКРЫТОГО ПРОФИЛЯ.	43
3.1 Определение центра кручения и функции угла закручивания.....	44
3.2 Применение метода итераций к расчету тонкостенных стержней открытого профиля.	50
Глава 4. АНИЗОТРОПНЫЕ МАТЕРИАЛЫ.....	67
4.1. Общие сведения о композитных материалах.....	67
4.2. Удельная прочность и удельный модуль упругости	69
4.3. Анизотропия	70
4.5 Поворот осей. Примеры анизотропных материалов.	75
4.6. Прочность анизотропных материалов	84
4.7. Выбор актуального материала для численных расчетов	85

Глава 5. ИТЕРАЦИОННЫЙ СПОСОБ ОПРЕДЕЛЕНИЯ НДС	
АНИЗОТРОПНОЙ БАЛКИ РАБОТАЮЩЕЙ НА ИЗГИБ.	87
5.1 Выбор актуального материала для численных расчетов.	87
5.2. Итерационный способ расчета анизотропной балки на прочность.	87
5.3. Аналитическое решение	92
5.4. Расчет методом конечных элементов	94
5.5. Сравнение результатов	96
Глава 6. ИТЕРАЦИОННЫЙ СПОСОБ ОПРЕДЕЛЕНИЯ НДС	
ТОНКОСТЕННЫХ АНИЗОТРОПНЫХ СТЕРЖНЕЙ ОТКРЫТОГО ПРОФИЛЯ	
ПРИ КРУЧЕНИЕ.	98
6.1 Предварительный этап.....	98
6.2 Начальная итерация.....	101
6.3 Итерация 2.	104
ЗАКЛЮЧЕНИЕ	108
ПРИЛОЖЕНИЕ.....	110
ЛИТЕРАТУРА	144

Введение

Актуальность работы.

Использование современных строительных технологий для создания новых конструкций требуют применения столь же современных материалов. Большинство из них являются композитами - соединением двух и более ингредиентов. Практически все известные строительные материалы, например, дерево или бетон, также являются композитами. Но сегодняшние методы создания новых композитов позволяют менять их упругие свойства в разных направлениях путем изменения ориентации волокон в определенном объеме, то есть получать искусственные анизотропные материалы, обладающие наперед заданными упругими характеристиками.

В строительной отрасли композиционные материалы нашли свое применение: при строительстве мостов (несущие и ограждающие конструкции), хорошо зарекомендовали себя как конструкции усиления, конструкции для химической промышленности, отдельные конструктивные элементы.

При строительстве мостов из композиционных материалов получается легкое, быстровозводимое сооружение, не подверженное коррозии. А ограждающие конструкции могут быть смонтированы без применения тяжелой строительной техники.

Легкие композитные тонкостенные стержни могут быть особо эффективны при усилении конструкций в сейсмически опасных районах. Благодаря высокой прочности такие элементы значительно повысят несущую способность сооружения, при этом обладая незначительной массой динамическая нагрузка практически не изменится.

Композиционные материалы хорошо переносят воздействие агрессивной среды, поэтому широко используются в различных конструкциях, связанных с химическим производством.

Несмотря на свою изначально высокую стоимость, применение композитов приводит к экономическому эффекту в процессе монтажа и

эксплуатации конструкции, а в отдельных случаях композит является единственным материалом, обеспечивающим необходимые свойства.

В строительных конструкциях в большинстве случаев используется тип поперечного сечения открытого профиля. Такое сечение легче изготовить на производстве, проще организовать монтажные узлы.

Использование анизотропных материалов в составе тонкостенных стержней открытого профиля, работающих на кручение, позволяет, например, варьировать в зависимости от поставленной задачи величину угла закручивания при одной и той же внешней нагрузке, что позволяет более оптимально использовать материал.

Тонкостенные стержни.

Все части конструкций и сооружений можно замоделировать используя четыре типа элементов по характеру их протяженности в пространстве: объемные (сплошные тела), плоские (пластинки и оболочки), линейные (стержни сплошного сечения) и к отдельному классу В.З.Власов [23] отнес тонкостенные стержни.

Под тонкостенным стержнем подразумевается оболочка в виде цилиндра (не обязательно круга), либо призматического поперечного сечения, размеры которой по трем основным осям отличаются друг от друга на порядок. Размер первого направления – это толщина листа t , размер второго направления – это полная длина поперечного сечения (ширина всех листов составного сечения) h , полная длина стержня L – третий характерный размер. Из выше указанного справедливо следующее неравенство, которым можно описать размеры тонкостенного стержня [22]:

$$\frac{t}{h} \ll 1, \frac{h}{L} \ll 1. \quad (1.1)$$

Тонкостенные элементы обладают свойствами как оболочки (видно из первого неравенства), так и свойствами стержня (видно из второго неравенства).

Тонкостенные стержни могут быть замкнутого и открытого профиля. Если поперечное сечение не содержит замкнутых контуров, то речь идет о тонкостенном стержне открытого профиля. Теоретические основы по расчету изотропных стержней по прочности, устойчивости, а также определение их частотных характеристик даны В.З.Власовым [22]. Основоположником теории стержней замкнутого профиля считается А.А.Уманский [90].

Существует масса примеров тонкостенных стержней в строительных конструкциях. Такими являются металлические сварные, прокатные балки, колонны, практически каждый элемент рам и ферм. Многие типы мостовых сооружений можно рассматривать как тонкостенный стержень: главные балки, затяжки арочных мостов, балки жесткости подвесных и вантовых сооружений. Железобетонные и бетонные конструкции тоже могут относиться к тонкостенным. Примером железобетонных тонкостенных конструкций служат ребристые плиты перекрытий, трубопроводы. Яркий пример бетонного тонкостенного стержня – Останкинская телебашня. Большое применение тонкостенные конструкции получили в авиации и кораблестроение.

Такое широкое распространение тонкостенные элементы конструкций получили благодаря тому, что они обладают высокой несущей способностью, достаточной жесткостью при малой массе и незначительными расходами сырья. Методы расчетов балок сплошного сечения, как и методы расчетов плитных элементов не всегда могут дать полную картину поведения тонкостенных стержней под нагрузкой, для этого требуется отдельный расчетный аппарат. Ключевым отличием тонкостенных конструкций является необходимость учета деформации и сопутствующих особенностей. Деформация – это перемещения при которых поперечное сечение стержня выходит из единой плоскости. Данный эффект пренебрежимо мал, для стержней, не являющихся тонкостенными.

При проектировании стараются избегать ситуаций закручивания тонкостенных конструктивных элементов, но в большинстве случаев

полностью исключить данный эффект невозможно. Значительный крутящий момент получают подкрановые балки при поперечном торможении кранов и внецентренном приложении нагрузки. Любое эксцентричное крепление к тонкостенному стержню приводит к его закручиванию, например: применение мембран покрытия, которые устанавливаются на прогоны в виде двутавра. Возникает большое количество ситуаций в пространственных конструкциях, когда изгибающий момент переходит в крутящий. Неточность изготовления, производство работ по реконструкции меняют расчетную схему и приводят к дополнительным внутренним усилиям в конструкции.

При жестком закреплении всех точек поперечного сечения при кручении возникает эффект стеснения деформации, что в свою очередь приводит к дополнительным напряжениям нормального направления и в некоторых случаях эта добавка является существенной и требует ее учета и оценки. Жесткость стержня открытого профиля при стесненном кручении намного выше жесткости при чистом кручении. До недавнего времени расчетные комплексы конструкций по методу конечных элементов не позволяли учитывать данный эффект, что приводило к неточности задания жесткостных характеристик и снижало надежность системы. На данную тему автором был проведен вебинар, который находится в открытом доступе на сайте дистрибьютера программы MIDAS/Civil.

Учет седьмой степени свободы в настоящее время внедрен в малое количество расчетных комплексов. По этой причине используют некоторые способы аппроксимации тонкостенных стержней открытого профиля, далее будет рассмотрен расчет данным методом под названием «бистержневая модель». Способ аппроксимации усложняет расчетную модель, появляется дополнительное количество конечных элементов, дополнительные жесткие вставки, поэтому на практике используется редко.

В связи с развитием мощностей электронной вычислительной техники, часто предлагается рассматривать тонкостенные конструкции в виде

пластинчатой модели. При этом число узлов и конечных элементов резко возрастает. Возрастает сложность моделирования. Результат может зависеть от сетки конечных элементов. Возникают сложности при анализе результатов, когда нужно получить интегральное значение внутренних усилий по поперечному сечению.

Для расчета тонкостенных стержней открытого профиля необходимо иметь алгоритм, позволяющий учитывать чистое и стесненное кручение. Необходимо аналитическое решение, которое позволит учитывать различные виды граничных условий и оперативно рассчитывать стержни с различными геометрическими и физическими характеристиками.

Анизотропия

В последнее время широкое применение нашли полимерные материалы. Полимеры обладают рядом положительных свойств: высокая прочность, малый удельный вес, химическая стойкость, антимагнитность и т.д. Наибольшей прочностью и жесткостью обладают композитные материалы, которые состоят из прочной арматуры и заполнителя. К композитам относятся стеклопластики, текстолиты, древеснослоистые пластики и другие. Естественным композитом является древесина. Чаще всего они имеют различные упругие и прочностные свойства по разным направлениям, такие материалы являются анизотропными. Анизотропными свойствами могут обладать изделия из-за своей геометрии, например: ребристые, волнистые, гофрированные и другие системы, они называются конструктивно анизотропными, а чаще встречаются конструктивно ортотропные. Примерами конструктивной анизотропии являются несущие и ограждающие профильные панели, ортотропные плиты мостов, рифленые кузова железнодорожных вагонов и автомобилей, оребренные элементы набора судов и летательных аппаратов и т. д.

Наиболее экономичными конструкциями из анизотропных материалов являются системы с малой толщиной стенок, в том числе тонкостенные стержни. Сочетание полезных свойств анизотропных материалов с

рациональной геометрией тонкостенных конструкций делает применение анизотропных тонкостенных стержней еще более эффективным.

Тонкостенные анизотропные стержни применяются как шпангоуты и стрингеры в судо- и авиа-строении, как ребра пластин и оболочек, как несущие элементы строительных конструкций. Производится широкий сортамент тонкостенных балок. К самым распространенным поперечным сечениям открытого профиля относятся стержни швеллерного, зетового и таврового типа. Появилось огромное количество довольно сложных сечений, необходимых в специальных нуждах строительства. В некоторых случаях вся панель, вся цилиндрическая оболочка или складка может при расчетах рассматриваться как тонкостенный стержень.

Применение анизотропных материалов дает возможность более рационально проектировать конструкции, совмещая направление наибольшей прочности или жесткости материала с направлениями наибольших усилий или деформаций в конструкции.

Развитие теории тонкостенных стержней.

Впервые тонкостенные стержни открытого профиля применились в мостостроении. В 1840 г. были изготовлены сварные двутавровые балки [83]. А вот работы посвященные механике тонкостенных стержней появились значительно позже.

В 1855 г. Сен-Венан получил дополнительные нормальные напряжения от кручения, рассматривая некруглый призматический стержень на который были наложены связи мешающие выходу точек поперечного сечения из плоскости. Далее Прандтль [129] развил теорию до мембранной аналогии кручения.

Значительный вклад в развитие вопроса стесненного кручения стержней открытого профиля внес русский ученый С.П.Тимошенко [84, 85, 86]. Он теоретически и экспериментально установил, что распределение напряжений, при решении задачи устойчивости плоской формы изгиба двутавровой балки,

не соответствует закону плоских сечений. В 1920 г. им предложена методика определения центра изгиба тонкостенных открытых поперечных сечений.

Ранее в 1909 г. Бах-Бауман получил экспериментально подтверждение отклонения от закона плоских сечений. Загрузив швеллер вертикальной нагрузкой, он заметил кроме изгиба поворот вокруг продольной оси. Маилларт [122] получил аналогичный результат и для симметричного сечения, наблюдая изгиб отдельных элементов балок, предложил способ определения центра изгиба [123]. Вопросами нахождения центра изгиба и нейтральной оси сечения в том числе и при растяжении/сжатии с изгибом в зоне пластики занимались С.Н. Кан [50], Л.Н. Воробьев [29] и А.А. Чирков [101]. Л.Н. Иванов [48].

Методика определения дополнительных нормальных напряжений при кручении двутавра, швеллера и Z-профиля и определение центра изгиба дана Вебером [146]. Вопрос устойчивости поднимался Вагнером и Претшером, они предложили формулу определения критической силы по изгибно-крутильной форме потери устойчивости для тонкостенных стержней открытого профиля.

Полная теория расчета стесненного кручения тонкостенных стержней открытого профиля показана В.З. Власовым [22, 23, 24, 25, 26, 27, 28]. Автор ввел понятие бимоента. Бимомент – обобщенная сила которая получается из взаимно уравновешенной системы нормальных напряжений, возникающих при стесненном кручении. Внешний крутящий момент воспринимается частично за счет чистого кручения, что приводит к касательным напряжениям, и за счет изгибного кручения, что приводит к нормальным напряжениям. Автор так же вводит понятие секториальных характеристик, и через них получает распределение нормальных напряжений по сечению. Перемещения точек сечения в продольном направлении равно:

$$u = \zeta - \xi'x - \eta'y - \theta'\omega,$$

где ζ – перемещения по оси, ξ и η – перемещения в поперечном направлении, x и y координаты точек сечения, θ – угол закручивания, ω – секториальная площадь. Три первых слагаемых соответствуют закону плоских сечений,

последнее слагаемое выражается через секториальную площадь и отвечает за часть перемещений, возникающих при кручении стержня. Эпюра секториальных площадей будет всегда линейна на прямых участках поперечного сечения.

Для тонкостенных стержней открытого профиля свойственны не только поступательные и угловые перемещения. При закручивании таких стержней наблюдается эффект депланации, когда плоскость поперечного сечения получает искривление, данная величина зависит от первой производной угла закручивания. Гипотеза плоских сечений является частным случаем закона секториальных площадей. В.З.Власов получил дифференциальные уравнения деформаций под действием нагрузки, привел методику определения центра изгиба, показал способ определения секториальных характеристик. Закручивание может возникать при действии только продольных сил и выражается через секториальную площадь. Принцип о быстром затухании напряжений Сен-Венана практически не применим для тонкостенных стержней.

Показывая аналогию теории кручения с теорией изгиба балок, В.З.Власов делает заключение о возможности применения данной методики для расчета конструкций из тонкостенных элементов открытого профиля. Так же теория подтверждается огромным количеством экспериментальных данных.

Глубокий анализ теория В.З.Власова получила в работах Г.Ю. Джанелидзе и Я.Г. Пановко [43, 44, 45]. Затронуты вопросы о возможности недеформируемости контура и отсутствия сдвигов по срединной поверхности тонкостенного стержня открытого профиля. Получен важный вывод, который используется в данной работе, о возможности разделения деформаций. Кручение, изгиб и деформации растяжения/сжатия можно рассматривать независимо друг от друга. Требуется тщательный анализ нагрузок эквивалентных нулю при рассмотрении тонкостенных стержней открытого профиля. При кручении стержня относительно оси не проходящей через центр

кручения, возникает изгибающий момент, в настоящей работе рассмотрена ситуация чистого кручения, и в первую очередь определяются координаты центра кручения. Даны упрощенные теории для инженерных расчетов.

В.Г. Александров [2, 3] исследовал работу подкрановых балок на предмет стесненного кручения. Установил, что напряжения могут возрасти до 1,5 раз. В некоторых случаях напряжения могут менять знак, что важно при конструировании узлов металлоконструкций.

Г.П. Соболевский [82] предлагает использовать пространственные конструкции из тонкостенных стержней открытого профиля вместо плоских. Несущая способность таких конструкций сильно зависит от крутильной жесткости отдельных элементов. Автор предлагает использовать так называемые бимоментные связи. В практике часто встречается ситуация, когда невозможен монтаж отдельной фермы или мостовой балки, их заранее перевязывают связями, перемычками и монтируют попарно.

Оптимальное проектирование конструкций из тонкостенных стержней и их расчет

Важной задачей является удешевление конструкции. В первую очередь это достигается небольшой материалоемкостью. При этом низкий вес конструкции – это еще и экономия при транспортировке и монтаже. Большое количество работ в настоящее время касается вопроса оптимального проектирования. И в первую очередь это вопросы расчета конструкций.

Подбор балки коробчатого сечения работающей на кривой изгиб приведен в работе Г.Н. Карасева. Определены соотношения сторон при определенной толщине листа стенки [51].

Оптимальное отношение площади к стенке к общей площади двутавра для конструкций рам и балок приведено у А.П. Филина. Приведена система из пятнадцати уравнений для определения соотношений элементов сечения [94].

Подбор балки двутаврового сечения по критерию прочности и жесткости при динамическом воздействии рассматриваются в работе В.Н. Демокритова [42].

Оптимальная конструкция двутавровой балки по критерию прочности и местной устойчивости приведена в работе [38]. Это достаточно важный параметр, когда есть цель экономии на производстве, возможен отказ от дополнительного оребрения.

Оптимизация сечений состоящих из n отдельных пластин по критерию местной и общей устойчивости при центральном сжатии производится в работе А.И. Маневича [63].

Несимметричный двутавр рассматривает Г.Е. Бельский [12]. Подбор балок прямоугольного сечения по прочности и жесткости дан в работе [30]

Проблемы оптимального проектирования пространственных стержневых конструкций рассмотрены в работах: И.С. Храповицкого [99], Ю.М. Почтмана [82], А.В. Ижендеева [49]. Подбор оптимального сечения балок рассмотрен в работах [115, 119, 116, 136, 109, 128].

Методика расчета стержней открытого профиля в виде однопролетных и многопролетных тонкостенных балок рассмотрена Д.В. Бычковым и А.К. Мрощинским [16].

Д.В. Бычковым [17, 18, 19] были рассмотрены вопросы расчета конструкций из тонкостенных стержней открытого профиля, работающие на кручение. Приведены графики и формулы, которые упрощали численные методики расчета конструкции.

При изгибе многопролетной балки обычно учитывают порядка пяти смежных пролетов. Бимомент затухает значительно быстрее, чем изгибающий момент. Поэтому при оценке бимомента можно учитывать не более трех смежных пролетов. В работах проанализированы только плоские задачи, для расчета пространственных конструкций теория должна быть доработана. Автор делает необоснованное замечание на предмет того, что бимоментом можно

пренебречь при расчете конструкций ввиду его быстрого затухания. По итогам работы, Д.В. Бычковым построены зависимости и таблицы на основании которых можно проектировать несложные плоские рамы. Для пространственной работы данная теория не разработана.

Б.Н. Горбунов и А.И. Стрельбицкая занимались вопросом расчета рам из тонкостенных профилей открытого и замкнутого типа, загруженные во всех направлениях. Теория В.З. Власова стала основой при расчете рам из стержней открытого профиля. Теория А.А. Уманского послужила базой при расчете рам из замкнутых стержней [35].

Так же методами численных расчетов В.А. Постнов и И.Я. Хархурим. Ими был предложен конечный элемент тонкостенного стержня [81].

Опубликована программа расчета прямолинейных тонкостенных стержней открытого профиля с учетом деформации сечения [57].

Различные варианты моделей тонкостенных конечных элементов предложены: Rajasekaran [131, 132, 133], А.С. Городецким, В.С. Здоренко и В.С. Карпиловским [37], Ю.И. Немчиновым [76], М.А. Grisfield [118], G. Gluck и J. Kavel [117], М. Resaiee-Pajand и М. Maayedian [103], R.S. Barsoum и R.U. Gallagher [107], Z.P. Bazant и М.Е. Nimeiri [108], S.L. Chan и S. Kitipornchai [110], Y.B. Yang [147], М.С. Kim, G.C. Lee и К.С. Chang [120], К.С. Trahair [144], Н.Г. Гореловым [36], М.А. Гурковой [40].

До недавнего времени в нормативных документах не учитывались секториальные напряжения при расчете конструкций. Л.А. Гильденгорн [31] проанализировал ряд норм на эту тему: нормы СССР [80], стандарт СЭВ [81], нормы Канады [124], нормы ЧССР [125], нормы Европейской конвенции по металлическим конструкциям ЕКМК (Еврокод №3) [113], нормы Франции [134], нормы ГДР [141, 142], нормы ФРГ [114], нормы США [140], нормы Японии [54]

Определению геометрических характеристик посвящена работа Б.Б. Лампси [58].

Расчет тонкостенных стержней с учетом пластических деформаций рассматривается в [64, 11].

Большое внимание уделяется вопросу расчетов узлов конструкций из тонкостенных элементов: Ф. Харт, В. Хенн и Х. Зонтаг [98].

Практические методы расчета тонкостенных стержней конструкции, в том числе с использованием матриц, рассматриваются в работах М.М. Гохберга [39], Б.И. Любарова [61], J.H. Argyris, S. Kelsey и H. Kamel [103].

В настоящее время с появлением мощных ЭВМ и активным использованием программных комплексов, выполняющих расчеты методом конечных элементов, актуальным стал вопрос по созданию конечного элемента типа тонкостенный стержень.

Такую работу провели Дьяков С.Ф. и Лалин В.В. в работе «Построение и анализ конечных элементов тонкостенного стержня открытого профиля с учетом деформаций сдвига при кручении». За основу принята полусдвиговая теория тонкостенных стержней, предложенная в [47].

Анизотропия

Построению теорий анизотропных и слоистых оболочек уделялось большое внимание. Основные результаты здесь получены С.А. Амбарцумяном, В.В. Болотиным, Э.И. Григулюком, В.И. Королевым, С.Г. Лехницким, Х.М. Муштари и другими исследователями.

Из зарубежных ученых нужно отметить Т. Fujii, М. Zako [97], С. Chamis [100], G. Kreider.

Отдельными разделами теории, применительно к конкретным материалам занимались В.Л. Бажанов, В.Л. Бидерман[14], А.Л. Рабинович[83], А.В. Розе, Г.А. Тетерс и другие. Анализ результатов рассмотренных работ показывает, что в некоторых областях, в частности при решении задач связанных с изгибом и устойчивостью анизотропных пластин, недостаточно полно описывается напряженно-деформированное состояние. Деформации сдвига и поперечного обжатия либо не учитываются совсем (классическое решение), либо

учитываются недостаточно точно. Между тем эти деформации вносят весомый вклад в НДС. Кроме того следует отметить, что большинство работ посвящено ортотропным материалам, что значительно сужает возможность расчетов по сравнению с более общим случаем анизотропии, рассмотренным в данной работе.

Цель и задачи исследования.

Целью диссертационной работы является:

- разработка аналитического итерационного способа расчета тонкостенных анизотропных стержней открытого профиля на кручение, с учетом сдвигов и коэффициентов влияния линейной деформации на сдвиговую деформацию.
- получение численных и графических результатов НДС (напряженно-деформированного состояния) рассматриваемых стержней в зависимости от угла армирования заполнителя.
- оценка влияния заданных свойств материала на величину перемещений (углов закручивания) элементов

Для достижения поставленной цели решались следующие **задачи**:

1. Описание метода последовательных приближений на примере расчета балки на двух опорах.
2. Разработка итерационного способа расчета слоистых балок на прочность. Решение задачи изгиба слоистой балки.
3. Разработка итерационного способа применительно к решению задачи кручения тонкостенных изотропных стержней с учетом деформаций сдвигов. Сравнение результатов расчетов с решением Власова В.З., и результатами по методу конечных элементов.
4. Разработка итерационного способа расчета анизотропной балки на прочность. Решение задачи изгиба анизотропной балки с учетом сдвигов и коэффициентов влияния линейной деформации на сдвиговую деформацию. Сравнение с аналитическим решением,

записанным Лехницким С.Г. и результатами, полученными в пространственном конечно-элементном расчете.

Научная новизна работы состоит в следующем:

1. Разработан итерационный аналитический способ, позволяющий решить задачу кручения тонкостенного анизотропного стержня открытого профиля с учетом влияния сдвиговых, поперечных деформаций и коэффициентов влияния линейной деформации на сдвиговую деформацию.
2. Получены численные и графические результаты НДС рассматриваемых конструкций.
3. Доказано существенное влияние на НДС второго и последующего циклов.
4. Проанализировано влияние угла армирования анизотропного материала на перемещения;
5. Доказана сходимость итерационного способа.

Практическое значение работы.

- разработана методика расчета тонкостенных анизотропных стержней открытого профиля методом итераций, что позволяет увеличить безопасность конструкций, снизить их стоимость и подобрать наиболее подходящую жесткость.
- приведены результаты расчетов анизотропных стержней с разным углом армирования;
- оценена точность расчетов, основанных на иных подходах к решаемой проблеме
- данные результаты закладывают основы для дальнейшего усовершенствования алгоритма итерационного метода расчетов, что позволит анализировать стержни любой сложности.

Ценность работы

В работе широко описана методология итерационного способа определения НДС стержней с различными поперечными сечениями по геометрии, составными сечениями с использованием материалов с различными физическими характеристиками. Описан механизм работы с анизотропными материалами.

При необходимости рассмотренный инструмент можно усложнять и расширять с целью решения задач определения НДС стержней любой сложности.

Личный вклад автора

Для каждого из рассмотренных типов задач автором лично проведены исследования и записаны алгоритмы решения в комплексе MathCAD. Построены модели по методу конечных элементов, проанализированы результаты. Выполнен ряд расчетов по известным аналитическим решениям. По результатам опубликованы научные статьи.

Обоснованность и достоверность. В основе методики лежат корректные математические модели и методы решения задач. Решение ряда тестовых задач и сравнение численных результатов с данными, полученными с помощью вычислительного комплекса Midas/Civil, показывает хорошую согласованность параметров напряженно-деформированного состояния. Достоверность результатов подтверждается также анализом сходимости численных решений. Результаты первого цикла итераций согласуются с известными методами расчетов.

На защиту выносятся

1. Итерационный способ аналитического расчета тонкостенных анизотропных стержней открытого профиля на кручение, с учетом сдвигов, поперечных деформаций и коэффициентов влияния линейной деформации на сдвиговую деформацию.

2. Определение НДС рассматриваемых стержней в зависимости от угла армирования заполнителя.
3. Результаты расчетов анизотропного стержня на кручение итерационным способом. Влияние заданных свойств материала на величину перемещений (углов закручивания) элементов.

Апробация работы Основные положения диссертационных исследований представлены и одобрены:

1. На VII Международной конференции "Проблемы прочности материалов и сооружений на транспорте", 23-24 апреля 2008 г. СПб.
2. На IX Международной конференции "Проблемы прочности материалов и сооружений на транспорте", 27-28 мая 2014 г. СПб.
3. На расширенном заседании кафедры ПМиК 22 марта 2017 года
4. Докладчик вебинара на тему «Учет 7ой степени свободы при расчетах МКЭ в Midas/Civil» 21 февраля 2017 г. <http://ru.midasuser.com/web/e-learning/reviewing-courses-detail.php?sec=127>
5. На X Международной конференции "Проблемы прочности материалов и сооружений на транспорте", 23-25 мая 2017 г. СПб.
6. На семинаре научного совета РАН по строительной механике, Дом ученых им. М. Горького, 13 февраля 2019г. СПб.

Публикации Основные положения диссертации опубликованы в следующих работах:

Научные статьи, опубликованные в ведущих рецензируемых научных изданиях, перечень которых размещен на официальном сайте Высшей аттестационной комиссии и приравненные к ним:

1. К. Ю. Полинкевич Итерационный способ расчета слоистых балок на прочность. Известия Петербургского университета путей сообщения. /Вып 2 (35)/ Петерб. Гос. Универ. Путей сообщ. –СПб,2013.-С.148 –153.
2. Б. М. Аллахвердов К. Ю. Полинкевич Итерационный способ расчета анизотропной балки на прочность. Известия Петербургского

университета путей сообщения. /Вып 2 (39)/ Петерб. Гос. Универ. Путей сообщ. –СПб,2014.-С.157 –165.

3. К. Ю. Полинкевич Итерационный способ расчета тонкостенных стержней открытого профиля на прочность. Известия Петербургского университета путей сообщения. /Вып 1 (50)/ Петерб. Гос. Универ. Путей сообщ. – СПб,2017.-С.84 –91.

Статьи в других изданиях

4. Б.М. Аллахвердов К.Ю. Полинкевич Итерационный способ расчета тонкостенных анизотропных стержней открытого профиля на кручение. Сб. тр. IX Международной конференции по проблемам прочности материалов и сооружений на транспорте, 27-28 мая 2014г., Санкт-Петербург, 2015. – С. 6 – 15.
5. Б. М. Аллахвердов К. Ю. Полинкевич Итерационный способ расчета тонкостенных анизотропных стержней открытого профиля на кручение. Международный Научно-исследовательский журнал/Вып 1 (55)/ Екатеринбург, 2017.- С.12 – 18.
6. К.Ю. Полинкевич Графические результаты расчетов анизотропного швеллера на кручение итерационным способом. Сб. тр. X Международной конференции по проблемам прочности материалов и сооружений на транспорте, 23-25 мая 2017г., Санкт-Петербург, 2018. – С. 195 – 204.

Структура и объем работы. Диссертация состоит из введения, 6-ти глав, основных выводов, списка литературы (147 наименований) и приложений. Общий объем работы 165 страницы, в том числе 24 рисунка, 10 таблиц, 37 диаграмм.

Глава 1. ОПИСАНИЕ МЕТОДА ИТЕРАЦИЙ НА ПРИМЕРЕ БАЛКИ НА ДВУХ ОПОРАХ.

Теория стержней зародилась еще в XVIIв и в настоящее время является наиболее полезной в теоретических и практических вопросах механики сплошных сред. Простейшей моделью изгиба балки является модель Бернулли – Эйлера [96]. Данная теория является базовой для аналитических расчетов балок и рам.

Балка Бернулли – Эйлера хорошо моделирует процессы в длинных стержнях при малых перемещениях. Более подробную модель стержня, учитывающую деформацию поперечного сдвига принято называть балкой Тимошенко[96].

Применяя современные прикладные программы можно получить численные результаты не применяя ряд упрощений рассмотренных в теории Бернулли – Эйлера. Аналитические и численные решения полученные в данной работе реализованы в программе MathCAD.

В первой главе описан метод расчета на прочность. Метод основан на итерационном способе последовательного удовлетворения условиям равновесия, совместности деформаций и закону Гука. Для наглядности данный способ реализован при расчете обычной изотропной однослойной однопролетной балки.

На численном примере определены внутренние усилия, напряжения, перемещения и деформации. Получены функции нормальных напряжений продольного и поперечного направлений, касательные напряжения, осевые и сдвиговые деформации.

1.1 Основные уравнения теории упругости

Итерационный метод расчета рассматривает основные уравнения теории упругости. Причем, как в задаче с балкой, так и в последующих задачах со

слоистой балкой, с анизотропным тонкостенным стержнем рассматривается плоское напряженное состояние.

Уравнения теории упругости можно поделить на три группы:

- статические,
- геометрические,
- физические.

1. Статические уравнения плоской задачи теории упругости.

Характеризуют равенство внутренних и внешних сил

$$\int_A \sigma dA = N \quad (1.1)$$

$$\int_A (\sigma \cdot y) dA = M \quad (1.2)$$

2. Геометрические уравнения, плоской задачи теории упругости.

Показывают зависимость между деформациями и перемещениями.

$$\varepsilon_y = \frac{\partial V}{\partial y}; \quad (1.3)$$

$$\varepsilon_z = \frac{\partial W}{\partial z}; \quad (1.4)$$

$$\gamma_{yz} = \frac{\partial W}{\partial y} + \frac{\partial V}{\partial z}. \quad (1.5)$$

3. Физические уравнения (закон Гука), плоской задачи теории упругости. Показывают связь между напряжениями и деформациями

$$\varepsilon_z = \frac{1}{E}(\sigma_z - \mu\sigma_y); \quad (1.6)$$

$$\varepsilon_y = \frac{1}{E}(\sigma_y - \mu\sigma_z); \quad (1.7)$$

$$\gamma_{yz} = \frac{\tau_{yz}}{G}; \quad (1.8)$$

$$G = \frac{E}{2(1+\mu)}. \quad (1.9)$$

1.2. Основные гипотезы.

Несмотря на то, что итерационный способ позволяет учитывать сдвиговые и поперечные деформации, и дает более полную картину НДС, по сравнению с классическим решением сопротивления материалов, на первом цикле вычислений используется ряд гипотез, которые позволяют описать поведение элемента

1. На первом этапе расчетов функция деформаций поперечного сечения принимается линейной, это возможно при отсутствии деформаций сдвига $\gamma = 0$ ($G \rightarrow \infty$). Такая постановка задачи соответствует гипотезе плоских сечений.

2. Так же на первом этапе итерационного процесса принимаем, что нормальные напряжения в поперечном направлении отсутствуют, $\sigma_y = 0$. При чистом изгибе это возможно, когда $\mu = 0$. Данные рассуждения описывают гипотезу не надавливания.

Основываясь на выше указанных гипотезах, закон Гука примет следующий вид:

$$\begin{pmatrix} \varepsilon_{zi} \\ \varepsilon_{yi} \\ \gamma_{yzi} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1/E_{zi} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \sigma_{zi} \\ \sigma_{yi} \\ \tau_{yzi} \end{pmatrix}$$

1.3 Алгоритм итерационного метода расчета.

Линейную функцию осевой деформации $\varepsilon_z^{(1)}$ можно записать в следующем виде:

$$\varepsilon_z^{(1)}(y, z) = \varepsilon_0(z) + \chi(z) \cdot y. \quad (1.10)$$

(верхний индекс в скобках соответствует порядку цикла расчетов).

$\varepsilon_0(z)$ и $\chi(z)$ - произвольные функции, зависящие только от координаты z , являются неизвестными и имеют следующий физический смысл: $\varepsilon_{0i}(z)$ - осевая деформация элемента, $\chi_{0i}(z)$ - кривизна оси.

В соответствии с вышеуказанным законом Гука, функция нормальных напряжений легко выражается через деформации:

$$\sigma_z^{(1)}(y, z) = E \cdot \varepsilon_z^{(1)}(y, z) = E (\varepsilon_0(z) + \chi(z) \cdot y). \quad (1.11)$$

Заранее определяем продольную силу и изгибающий момент в балке. Далее из уравнения статического равновесия находятся значения функций $\varepsilon_0(z)$ и $\chi(z)$. В результате интегрирования получается два отдельных линейных уравнения, в которых легко находятся неизвестные.

$$\int_A \sigma_z^{(1)}(y, z) dA = N(z); \quad (1.12)$$

$$\int_A \sigma_z^{(1)}(y, z) \cdot y dA = M(z). \quad (1.13)$$

Касательные напряжения можно выразить из принципа парности, через нормальные напряжения:

$$\frac{\partial \sigma_z^{(1)}(y, z)}{\partial z} + \frac{\partial \tau_{yz}^{(1)}(y, z)}{\partial y} = 0; \quad (1.14)$$

$$\tau_{yz}^{(1)}(y, z) = -\int \frac{\partial \sigma_z^{(1)}(y, z)}{\partial z} \cdot dy + \tau_0(z). \quad (1.15)$$

Постоянная интегрирования по y функция $\tau_0(z)$ определяется в зависимости от граничных условий. Внешняя нагрузка вдоль грани стержня является граничным условием для касательных напряжений. Ввиду того, что внешняя нагрузка отсутствует по такому направлению, то по внешней грани отсутствуют касательные напряжения. Из этих условий и находится постоянная интегрирования.

По похожему алгоритму находится функция нормальных напряжений поперек оси стержня $\sigma_y^{(1)}$:

$$\frac{\partial \sigma_y^{(1)}(y, z)}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{yz}^{(1)}(y, z)}{\partial z} = 0; \quad (1.16)$$

$$\sigma_y^{(1)}(y, z) = -\int \frac{\partial \tau_{yz}^{(1)}(y, z)}{\partial z} \cdot dy + \sigma_{y0}(z). \quad (1.17)$$

Аналогично, постоянная интегрирования по y функция $\sigma_{y0}(z)$ находится из граничных условий приложения внешних сил. Для постоянной интегрирования для нормальных напряжений $\sigma_y^{(1)}$ граничными условиями

являются вертикальные внешние силы. Как правило, балки загружаются по верхней фибре, нижняя фибра не загружена. Для определения постоянной интегрирования можно ориентироваться на граничные условия с любой стороны. Значение граничных условий с противоположной стороны является контролем правильности результатов. Подобный алгоритм для первого цикла итераций приведен в [4].

На первом этапе отсутствовали поперечные напряжения и деформации. На данном этапе найдем поперечные деформации, применив обобщенный закон Гука. Дальнейшие рассуждения освобождены от гипотезы не надавливания. Начинается второй цикл итераций, что обозначается верхним индексом (2). Деформации вдоль оси Y, $\varepsilon_y^{(2)}$:

$$\varepsilon_y^{(2)}(y, z) = \frac{1}{E} \cdot (\sigma_y^{(1)}(y, z) - \mu \cdot \sigma_z^{(1)}(y, z)). \quad (1.18)$$

Из геометрических уравнений, зная поперечные деформации $\varepsilon_y^{(2)}(y, z)$, можно найти вертикальные перемещения $V^{(2)}(y, z)$:

$$V^{(2)}(y, z) = \int_h \varepsilon_y^{(2)}(y, z) \cdot dy + V_0(z). \quad (1.19)$$

Используя обобщенный закон Гука, находим функцию сдвиговых деформаций:

$$\gamma_{yz}^{(2)} = \frac{\tau_{yz}^{(1)}}{G}; \quad (1.20)$$

$$\text{где } G = \frac{E}{2(1 + \mu)}. \quad (1.21)$$

Не хитрым способом, из геометрических уравнений, получив перемещения и деформации сдвига, можно выразить деформации вдоль оси Z $\varepsilon_z^{(2)}(y, z)$. В итоге получим нелинейную функцию, в которой учитывается влияние деформации сдвига и поперечных напряжений:

$$\gamma_{yz}^{(2)} = \frac{\partial W}{\partial y} + \frac{\partial V}{\partial z}; \quad (1.22)$$

$$\frac{\partial \gamma_{zy}}{\partial z} = \frac{\partial W}{\partial y \partial z} + \frac{\partial^2 V}{\partial z^2}; \quad (1.23)$$

$$\varepsilon_z^{(2)}(y, z) = \frac{\partial W}{\partial z} = \int \frac{\partial \gamma_{yz}^{(2)}}{\partial z} dy + \int \frac{\partial^2 V^{(2)}}{\partial z^2} dy + \varepsilon_0^{(2)}(z). \quad (1.24)$$

Через обобщенный закон Гука выражаются нормальные напряжения $\sigma_z^{(2)}(y, z)$:

$$\sigma_z^{(2)}(y, z) = E \cdot \frac{\varepsilon_z^{(2)}(y, z) + \mu \varepsilon_y^{(2)}(y, z)}{(1 - \mu^2)}. \quad (1.25)$$

Постоянные интегрирования $\varepsilon_0^{(2)}(z)$ и $V_0^{(2)}(z)$ находятся из уравнений статического равновесия, которые записаны с учетом нормальных напряжений второго цикла:

$$\int_A \sigma_z^{(2)}(y, z) dA = N(z); \quad (1.26)$$

$$\int_A \sigma_z^{(2)}(y, z) \cdot y dA = M(z). \quad (1.27)$$

Последующие циклы продолжаются по такому же принципу.

1.4 Численный пример. Балка.

В программном комплексе Mathcad, версия 14.0 был реализован алгоритм расчета балки итерационным методом.

Рассмотрим балку на двух опорах (рис. 1.1).

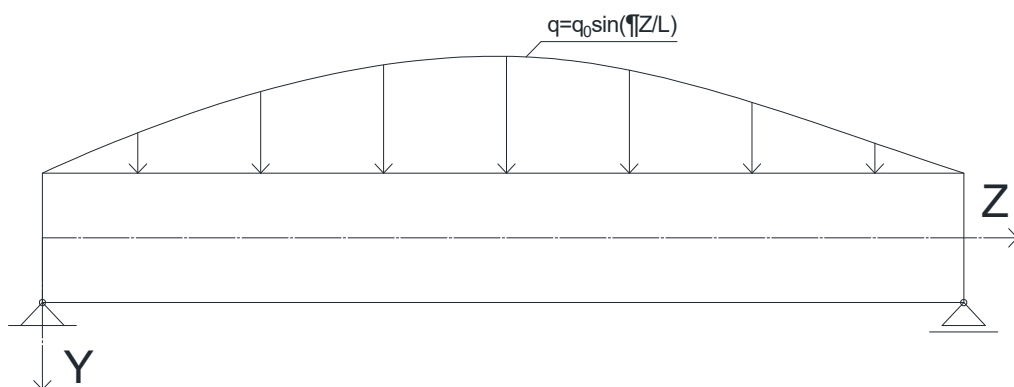


Рис. 1.1. Схема принятых осей координат. Расчетная схема.

Балка имеет длину $l = 5\text{ м}$; высоту $h = 1\text{ м}$; ширину $b = 1\text{ м}$; модуль упругости $E = 10^5\text{ МН/м}^2$; коэффициент Пуассона $\mu = 0.3$. Равномерно распределенная нагрузка записана через функцию синуса :

$$q(Z) = q_0 \cdot \sin\left(\frac{\pi \cdot Z}{l}\right),$$

где

Z – координата по длине балки, изменяется от 0 до l ;

q_0 – параметр нагрузки, принятый равным 1 МН/м.

График функции нагрузки представлен на рисунке 1.2.

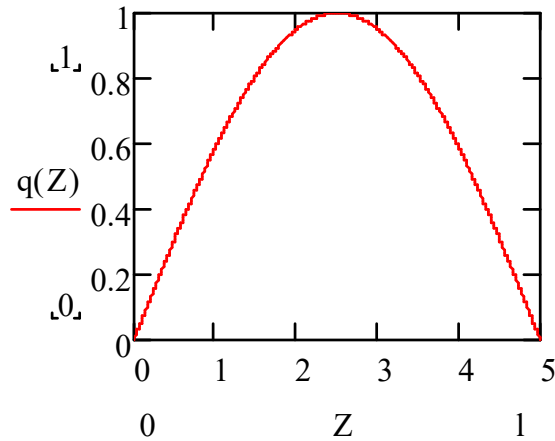


Рис. 1.2. График функции нагрузки.

Зная функцию внешней нагрузки, находим внутренние усилия в балке.

Поперечная сила:

$$Q(Z) = -\int q(Z) \cdot dZ ; \quad (1.28)$$

$$Q(Z) = \frac{5 \cdot \cos\left(\frac{\pi \cdot Z}{5}\right)}{\pi}.$$

График функции поперечной силы представлен на рисунке 1.3.

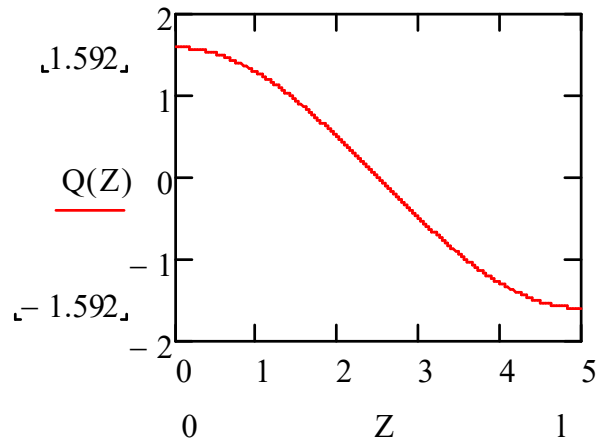


Рис. 1.3. График функции поперечной силы.

Изгибающий момент:

$$M(Z) = \int Q(Z) \cdot dZ; \quad (1.29)$$

$$M(Z) = \frac{25 \cdot \sin\left(\frac{\pi \cdot Z}{5}\right)}{\pi^2}.$$

График функции изгибающего момента представлен на рисунке 1.4

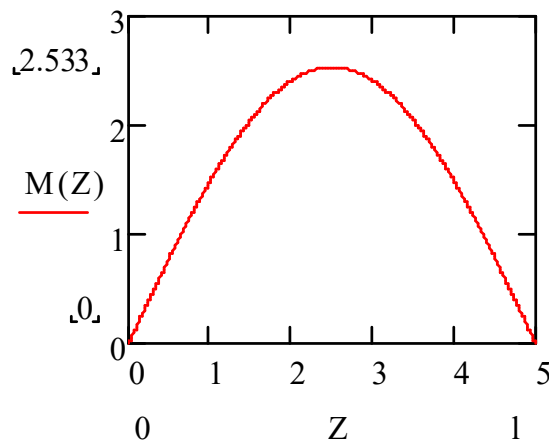


Рис. 1.4 График функции изгибающего момента.

Момент инерции сечения балки равен:

$$I := \frac{b \cdot h^3}{12} \rightarrow \frac{1}{12} \text{ м}^4. \quad (1.30)$$

Зная изгибающий момент и момент инерции, найдем функцию нормальных напряжений σ_z :

$$\sigma_z(Z, Y) := \frac{Y \cdot M(Z)}{I} \rightarrow \frac{300 \cdot Y \cdot \sin\left(\frac{\pi \cdot Z}{5}\right)}{\pi^2}, \quad (1.31)$$

где

Y – координата по высоте балки, которая изменяется от $-\frac{h}{2}$ до $\frac{h}{2}$.

График функции нормальных напряжений σ_z по высоте сечения расположенного на расстоянии 1.25м от начала балки представлен на рисунке 1.5.

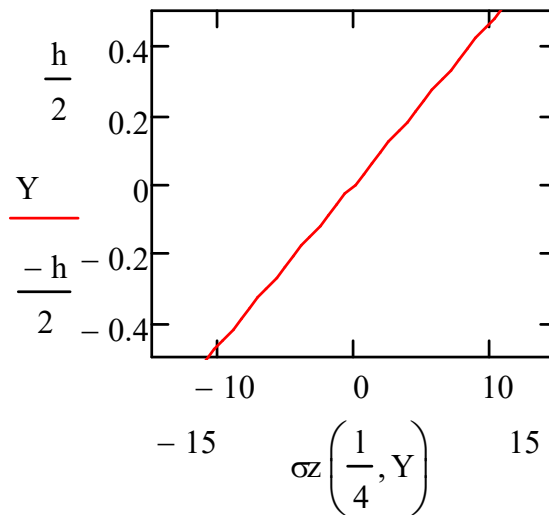


Рис. 1.5 График функции нормальных напряжений σ_z .

Далее следуем строго по алгоритму, описанному в пункте 1.3 и находим касательные напряжения:

$$\tau(Z, Y) := - \int \left(\frac{d}{dZ} \sigma_z(Z, Y) \right) dY \rightarrow - \frac{30 \cdot Y^2 \cdot \cos\left(\frac{\pi \cdot Z}{5}\right)}{\pi};$$

$$\tau_0(Z) := A - \tau\left(Z, \frac{-h}{2}\right) \rightarrow \frac{15 \cdot \cos\left(\frac{\pi \cdot Z}{5}\right)}{2 \cdot \pi};$$

$$\tau_1(Z, Y) := \tau(Z, Y) + \tau_0(Z) \rightarrow \frac{15 \cdot \cos\left(\frac{\pi \cdot Z}{5}\right)}{2 \cdot \pi} - \frac{30 \cdot Y^2 \cdot \cos\left(\frac{\pi \cdot Z}{5}\right)}{\pi},$$

где

A – параметр граничных условий, в данной задаче принятый 0, что обозначает отсутствие горизонтальной составляющей внешней нагрузки на нижней грани балки.

График функции касательных напряжений по высоте сечения расположенного на расстоянии 1.25м от начала балки представлен на рисунке 1.6.

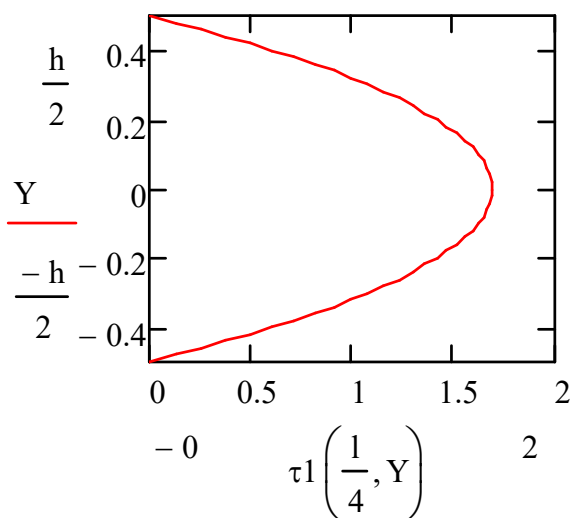


Рис. 1.6 График функции касательных напряжений.

Далее находим нормальные напряжения σ_y

$$\sigma_y(Z, Y) := - \int \left(\frac{d}{dZ} \tau_1(Z, Y) \right) dY \rightarrow - \frac{Y \cdot \sin\left(\frac{\pi \cdot Z}{5}\right) \cdot (4 \cdot Y^2 - 3)}{2};$$

$$\sigma_0(Z) := B - \sigma_y\left(Z, \frac{-h}{2}\right) \rightarrow \frac{\sin\left(\frac{\pi \cdot Z}{5}\right)}{2};$$

$$\sigma_{y1}(Z, Y) := \sigma_y(Z, Y) + \sigma_0(Z) \rightarrow \frac{\sin\left(\frac{\pi \cdot Z}{5}\right)}{2} - \frac{Y \cdot \sin\left(\frac{\pi \cdot Z}{5}\right) \cdot (4 \cdot Y^2 - 3)}{2},$$

где

ν – параметр граничных условий, в данной задаче принятый 0, что обозначает отсутствие вертикальной составляющей внешней нагрузки на нижней грани балки.

График функции нормальных напряжений σ_y по высоте сечения расположенного на расстоянии 1.25м от начала балки представлен на рисунке 1.7.

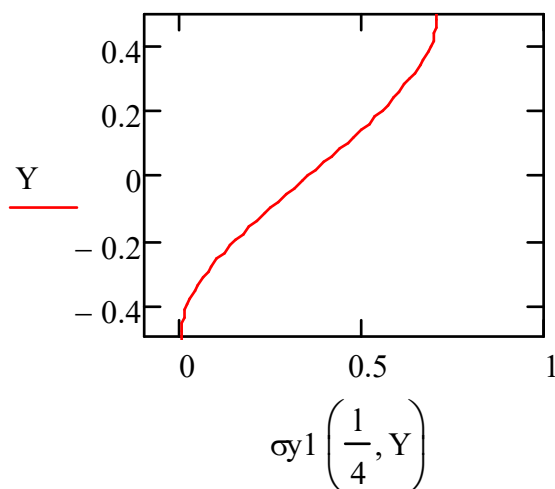


Рис. 1.7 График функции нормальных напряжений σ_y .

В соответствии с алгоритмом определяем поперечные деформации ε_y , вертикальные перемещения ν и деформации сдвига сдвиги γ_{yz} .

$$\varepsilon_y(Z, Y) := \frac{(\sigma_z(Z, Y) - \mu \cdot \sigma_{y1}(Z, Y))}{E} \left| \begin{array}{l} \text{simplify} \\ \text{float, 3} \end{array} \right. \rightarrow \sin(0.628 \cdot Z) \cdot (0.000299 \cdot Y + 0.000006 \cdot Y^3 - 0.0000015);$$

$$\nu(Z, Y) := \int \varepsilon_y(Z, Y) dY \left| \begin{array}{l} \text{simplify} \\ \text{float, 3} \end{array} \right. \rightarrow Y \cdot \sin(0.629Z) \cdot (0.00015Y + 0.0000015Y^3 - 0.000001);$$

$$\gamma_{yz}(Z, Y) := \frac{\tau_1(Z, Y) \cdot 2(1 + \mu)}{E} \left| \begin{array}{l} \text{simplify} \\ \text{float, 3} \end{array} \right. \rightarrow -1.0 \cdot \cos(0.628 \cdot Z) \cdot (0.000248 \cdot Y^2 - 0.0000621).$$

Далее находим функцию деформаций ε_z и соответствующую функцию напряжений σ_z при этом получаем две постоянные интегрирования:

$$\varepsilon_z(Z, Y) := \left[\int \left(\frac{d}{dZ} \gamma_{yz}(Z, Y) \right) dY + \varepsilon_0 \right] - \int \frac{d^2}{dZ^2} v(Z, Y) dY + Y \cdot v_0 ;$$

$$\sigma_z(Z, Y) := E \cdot \left[\frac{\varepsilon_z(Z, Y) + \mu \cdot \varepsilon_y(Z, Y)}{(1 - \mu^2)} \right].$$

Постоянные интегрирования находим через внутренние усилия:

$$N = b \cdot \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} \sigma_z(Z, Y) dY ;$$

$$M(Z) = b \cdot \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} \sigma_z(Z, Y) \cdot Y dY .$$

В итоге получаем функцию нормальных напряжений σ_z с учетом постоянных интегрирования, на рисунке 1.8 приведен график функции нормальных напряжений σ_z по высоте сечения расположенного на расстоянии 1.25м от начала балки.

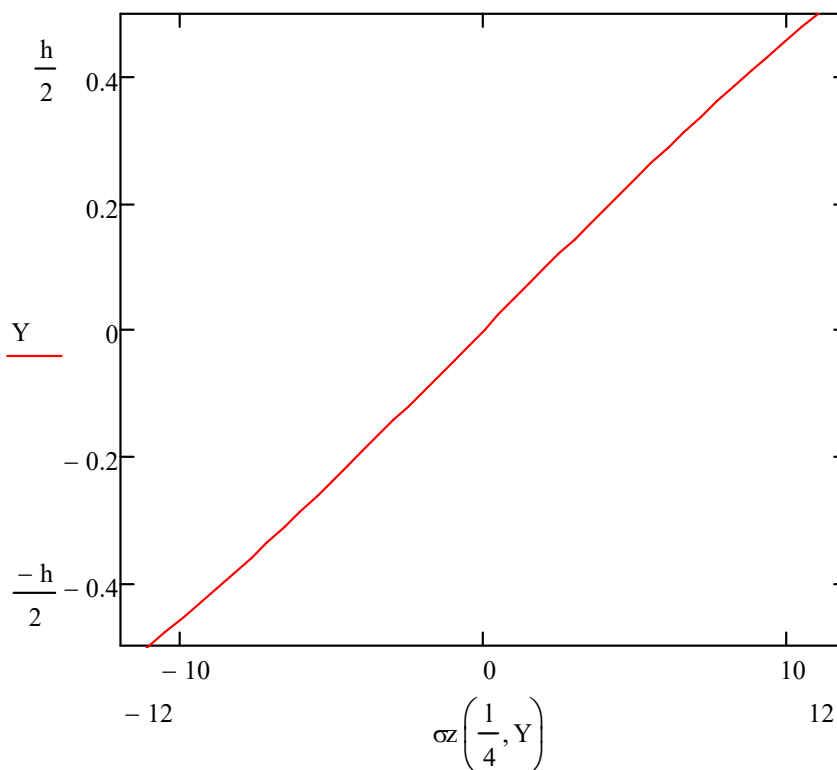


Рис. 1.8 График функции нормальных напряжений σ_z по результатам второго цикла.

Методом итераций получено напряженно деформированное состояние балки на первом и на втором циклах. Нормальные напряжения продольного направления по результатам второго цикла записываются в виде функции пятого порядка. На рис. 1.8 виден нелинейный характер функции. Так же получены касательные напряжения и нормальные напряжения в поперечном направлении. Определены осевые и сдвиговые деформации. По результатам видно, что метод итераций позволяет подробно описывать граничные условия (закрепления и положение внешней нагрузки по высоте сечения).

В таблице 1.1 приведены значения нормальных и касательных напряжений на каждом из циклов итерационного процесса. Рассматривается поперечное сечение в четверти балки. Нормальные напряжения продольного направления приведены как по крайней фибре, так и по центру тяжести балки. Нормальные напряжения поперечного направления приведены по крайней

фибре, в месте приложения нагрузки. Значения касательных напряжений даны по центру тяжести балки, где они достигают своего максимума.

Далее была рассмотрена задача, в которой и на 2 – 3 циклах отсутствуют деформации поперечного направления. Соответствующие результаты сведены в таблицу 1.2.

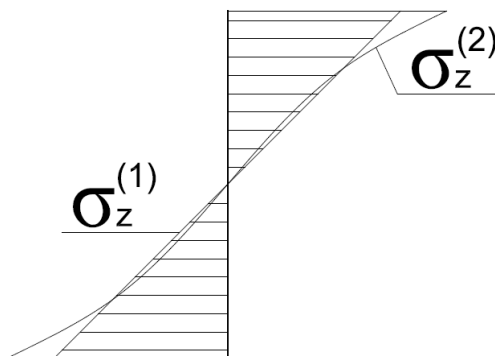


Рис. 1.9 График функции нормальных напряжений σ_z . Принципиальное отличие формы функции на первом и последующем циклах.

Таблица 1.1

Цикл	$\sigma_z(l/4;h/2)$	$\sigma_z(l/4;0)$	$\sigma_y(l/4;h/2)$	$\tau(l/4;0)$
1	10,747	0	0	0
2	10,918	0,0065	0,707	1,688
3	10,901	0,0059	0,706	1,677

Таблица 1.2

Цикл	$\sigma_z(l/4;h/2)$	$\sigma_z(l/4;0)$	$\sigma_y(l/4;h/2)$	$\tau(l/4;0)$
1	10,747	0	0	0
2	10,950	0	0,707	1,688
3	10,946	0	0,706	1,677

Глава 2. ИТЕРАЦИОННЫЙ СПОСОБ ОПРЕДЕЛЕНИЯ НДС СЛОИСТЫХ БАЛОК.

Введение.

В данном случае имеем составное сечение по высоте балки, что приводит к большому числу неизвестных, соответственно необходимо дополнительное количество уравнений для решения поставленной задачи. Каждый слой описывается своей системой уравнений. В зоне сращивания слоев учитывается равенство деформаций (рис.2.1).

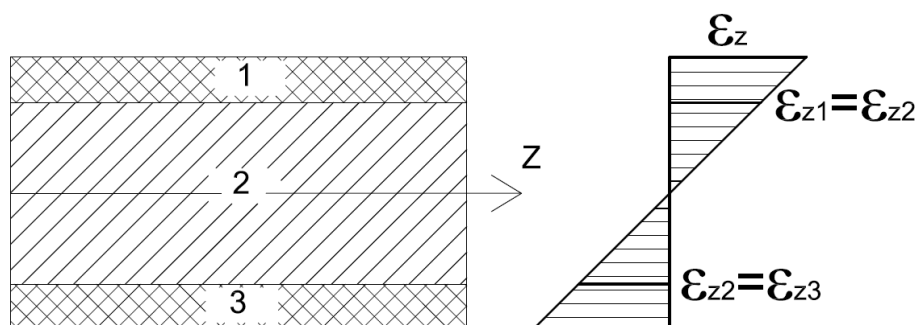


Рис. 2.1. Принцип сращивания деформаций в зоне контакта слоев.

Решение задачи слоистой балки имеет тот же принцип, что и решение задачи изотропной однопролетной балки. Отличие лишь в том, что количество неизвестных и уравнений возрастает, в зависимости от того из какого количества слоев состоит элемент. Величины, которые имеют отношение к отдельному слою, будут сопровождаться нижним индексом i .

При решении используются основные уравнения теории упругости применительно к плоской задаче. Применяя итерационный способ [4], значения напряжений уточняются с учетом сдвиговых и поперечных деформаций.

Результаты полученные с использованием предложенного алгоритма, сопоставлены с решением по методу конечных элементов.

В общем виде рассмотрим следующую задачу: балка на двух опорах длиной L состоит из n слоев. Каждый слой i обладает индивидуальными характеристиками. Имеет толщину h_i , модуль Юнга E_i , коэффициент Пуассона μ_i . Под воздействием равномерно распределенной нагрузки $q(z)$, возникают внутренние усилия $N(z)$ и $M(z)$.

2.1 Алгоритм решения задачи изгиба слоистой балки.

Решение основано на основных уравнениях теории упругости [96] и аналогично алгоритму, приведенному в главе 1:

- Статические:

$$\int_A \sigma dA = N; \quad (2.1)$$

$$\int_A (\sigma \cdot y) dA = M. \quad (2.2)$$

- Геометрические:

$$\varepsilon_y = \frac{\partial v}{\partial y}; \quad (2.3)$$

$$\varepsilon_z = \frac{\partial W}{\partial z}; \quad (2.4)$$

$$\gamma_{yz} = \frac{\partial W}{\partial y} + \frac{\partial V}{\partial z}. \quad (2.5)$$

- Физические:

$$\varepsilon_z = \frac{1}{E}(\sigma_z - \mu\sigma_y); \quad (2.6)$$

$$\varepsilon_y = \frac{1}{E}(\sigma_y - \mu\sigma_z); \quad (2.7)$$

$$\gamma_{yz} = \frac{\tau_{yz}}{G}; \quad (2.8)$$

$$G = \frac{E}{2(1+\mu)}. \quad (2.9)$$

На первом этапе применяются гипотезы:

1. Гипотеза плоских сечений
2. Гипотеза отсутствие сдвигов
3. Гипотеза ненадавливания

Далее следует обратить на особенность расчета слоистой конструкции. В данном случае функция осевых деформаций $\varepsilon_z^{(i)}$ запишется в следующем виде:

$$\varepsilon_{z,i}^{(i)}(y, z) = \varepsilon_{0,i}(z) + \chi_i(z) \cdot y. \quad (2.10)$$

В формуле 2.10 записана деформация одного слоя. Нижний индекс i обозначает номер слоя, верхний индекс в скобках $^{(i)}$ обозначает номер цикла.

$$\sigma_{z,i}^{(1)}(y, z) = E_i \cdot \varepsilon_{z,i}^{(1)}(y, z) = E_i(\varepsilon_0 \cdot i(z) + \chi \cdot i(z) \cdot y). \quad (2.11)$$

Значения коэффициентов $\varepsilon_0(z)$ и $\chi(z)$ определяется из условий статического равновесия. Необходимо обратить внимание, что заранее найденные изгибающий момент и продольная сила воспринимаются пакетом слоев, из которых состоит балка. Поэтому в уравнение входит сумма интегралов по напряжениям:

$$\sum_0^i \int_A \sigma_{z,i}^{(1)}(y, z) dA = N(z); \quad (2.12)$$

$$\sum_0^i \int_A (\sigma_{z,i}^{(1)}(y, z) \cdot y) dA = M(z). \quad (2.13)$$

Касательные напряжения для каждого отдельного слоя:

$$\frac{\partial \sigma_{z,i}^{(1)}(y, z)}{\partial z} + \frac{\partial \tau_{yz,i}^{(1)}(y, z)}{\partial y} = 0; \quad (2.14)$$

$$\tau_{yz,i}^{(1)}(y, z) = - \int \frac{\partial \sigma_{z,i}^{(1)}(y, z)}{\partial z} \cdot dy + \tau_{0,i}(z). \quad (2.15)$$

Постоянная интегрирования по y функция $\tau_{0,i}(z)$ определяется в зависимости от граничных условий. Внешняя нагрузка вдоль внешней грани балки является граничным условием для касательных напряжений. При отсутствии внешней нагрузки по такому направлению касательные напряжения в крайней фибре будут нулевыми. Из этих условий и находится постоянная интегрирования. Для промежуточных слоев, в зоне из контакта, должно соблюдаться правило равенства потоков касательных напряжений. Теорема Бредта говорит о равенстве потоков напряжений на границах слоев.

Подобным образом для каждого слоя отдельно находят поперечные нормальные напряжения $\sigma_{y,i}^{(1)}$:

$$\frac{\partial \sigma_{y,i}^{(1)}(y, z)}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{yz,i}^{(1)}(y, z)}{\partial z} = 0; \quad (2.16)$$

$$\sigma_{y,i}^{(1)}(y, z) = - \int \frac{\partial \tau_{yz,i}^{(1)}(y, z)}{\partial z} \cdot dy + \sigma_{y0,i}(z). \quad (2.17)$$

Аналогично постоянная интегрирования по y функция $\sigma_{y0,i}(z)$ находится из граничных условий приложения внешних сил. Для постоянной интегрирования для нормальных напряжений $\sigma_y^{(1)}$ граничными условиями

являются вертикальные внешние силы. Как правило, балки загружаются по верхней фибре, нижняя фибра не загружена. Для определения постоянной интегрирования можно ориентироваться на граничные условия с любой стороны. Значение граничных условий с противоположной стороны является контролем правильности результатов. На стыках слоев должно соблюдаться условие равенства потоков поперечных нормальных напряжений. Подобный алгоритм для первого цикла итераций приведен в [4].

На данном моменте заканчивается первый цикл итераций. Второй цикл начинается с определения деформаций вдоль оси Y , $\varepsilon_{y,i}^{(2)}$:

$$\varepsilon_{y,i}^{(2)}(y, z) = \frac{1}{E_i} \cdot (\sigma_{y,i}^{(1)}(y, z) + \mu_i \cdot \sigma_{z,i}^{(1)}(y, z)). \quad (2.18)$$

Функция перемещений $V_i^{(2)}(y, z)$, так же находится для каждого слоя отдельно:

$$V_i^{(2)}(y, z) = \int_h \varepsilon_{y,i}^{(2)}(y, z) \cdot dy + V_{0,i}(z). \quad (2.19)$$

Деформация сдвига для каждого слоя:

$$\gamma_{yz,i}^{(2)} = \frac{\tau_{yz,i}^{(1)}}{G_i}; \quad (2.20)$$

$$\text{где } G_i = \frac{E_i}{2(1 + \mu_i)}. \quad (2.21)$$

Функцию продольных деформаций второго (и последующих) цикла для каждого слоя $\varepsilon_{z,i}^{(2)}(y, z)$ следует определить так:

$$\gamma_{yz,i}^{(2)} = \frac{\partial W}{\partial y} + \frac{\partial V}{\partial z}; \quad (2.22)$$

$$\frac{\partial \gamma_{zy}}{\partial z} = \frac{\partial W}{\partial y \partial z} + \frac{\partial^2 V}{\partial z^2}; \quad (2.23)$$

$$\varepsilon_{z,i}^{(2)}(y, z) = \frac{\partial W}{\partial z} = \int \frac{\partial \gamma_{yz,i}^{(2)}}{\partial z} dy + \int \frac{\partial^2 V_i^{(2)}}{\partial z^2} dy + \varepsilon_{0,i}^{(2)}(z). \quad (2.24)$$

Нормальные напряжения второго (и последующих) цикла для каждого слоя $\sigma_{z,i}^{(2)}(y, z)$ определяются выражением:

$$\sigma_{z,i}^{(2)}(y, z) = E_i \cdot \frac{\varepsilon_{z,i}^{(2)}(y, z) + \mu \varepsilon_{y,i}^{(2)}(y, z)}{(1 - \mu_i^2)}. \quad (2.25)$$

Функция $\sigma_{z,i}^{(2)}$ имеет вид параболы пятой степени, отличается от линейного распределения напряжений. Так же наблюдается особенность, что эпюра нормальных напряжений при изгибе может проходить через нулевое значение не в центре тяжести сечения. Это происходит за счет учета поперечных деформаций, когда нагрузка приложена не к оси стержня, а, например, к верхней части балки. Количество циклов можно увеличивать и получить распределение напряжений и деформаций в виде функций более высокого порядка.

Предложенный итерационный метод обладает высокой степенью сходимости, достаточно 2-3 цикла для получения результата высокой точности. Для удобства расчетов и исключения случайных ошибок при вычислении предложенный алгоритм записан с использованием программного продукта MathCAD.

2.2 Пример определения напряженно-деформированного состояния трехслойной балки.

Рассмотрим численный пример слоистой балки. Для верификации результатов полученных методом итераций на первом и втором циклах, выполним расчет с теми же исходными данными по методу конечных элементов. Проследим за перераспределением напряжений в слоистой конструкции.

Сравним значения напряжений на первом и втором цикле расчета, а так же влияние распределения свойств материалов по слоям на примере двух задач.

Выполним расчет на примере трехслойной балки. Длиной $L=30\text{м}$ (рис.2.2, рис.2.3). Высота послойно составляет: $h_1=1\text{м}$, $h_2=4\text{м}$, $h_3=1\text{м}$, что дает полную высоту $h=6\text{м}$. ширина принята единичной $b=1\text{м}$. Коэффициенты Пуассона так же можно принимать индивидуально для каждого слоя: $\mu_1=0.3$, $\mu_2=0.2$, $\mu_3=0.3$.

Задана распределенная нагрузка по закону синуса: $q(z) = q_0 \sin\left(\frac{\pi \cdot Z}{L}\right)$,
 $q_0 = 1\text{кН/м}$.

В задаче № 1 модули упругости заданы послойно: $E_1 = 10^5\text{мПа}$,
 $E_2 = 10^4\text{мПа}$, $E_3 = 10^5\text{мПа}$.

В задаче № 2 модули упругости послойно заданы так: $E_1 = 10^4$ мПа ,
 $E_2 = 10^5$ мПа , $E_3 = 10^4$ мПа .

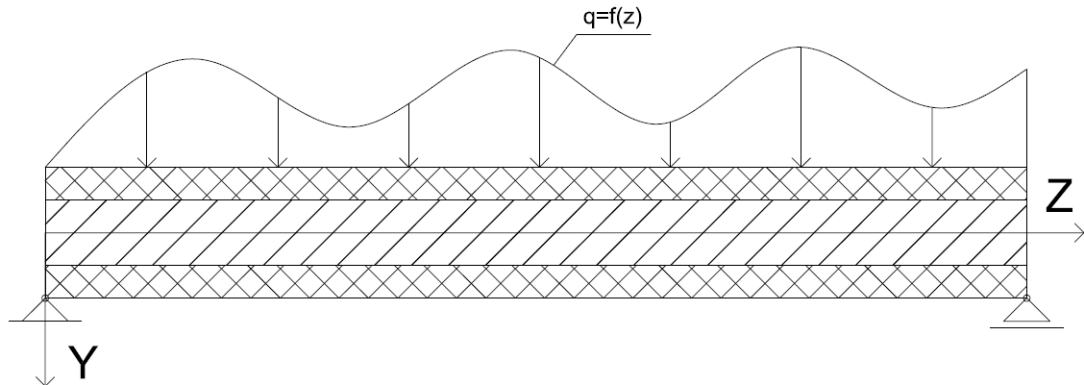


Рис. 2.2. Расчетная схема трехслойной однопролетной балки.
 Направление координатных осей.

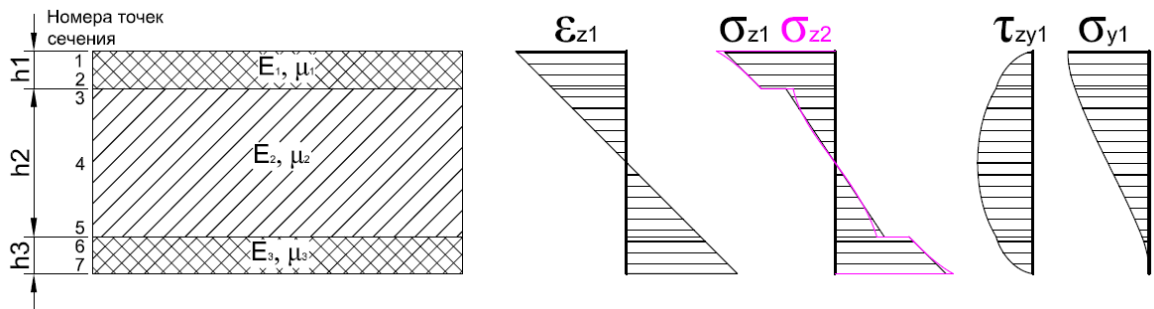


Рис. 2.3. Схема расположения слоев. Нумерация сечений по которым будут выводиться результаты. Характер эпюр деформаций и напряжений.

Для решения задачи методом конечных элементов выбран программный комплекс Midas Civil. Модель построена с использованием четырех узловых конечных элементов пластин. Размер каждого 0.25×0.25 м. По результатам расчетов построены эпюры нормальных напряжений на расстоянии $L/4$ от опоры (рис. 2.4).

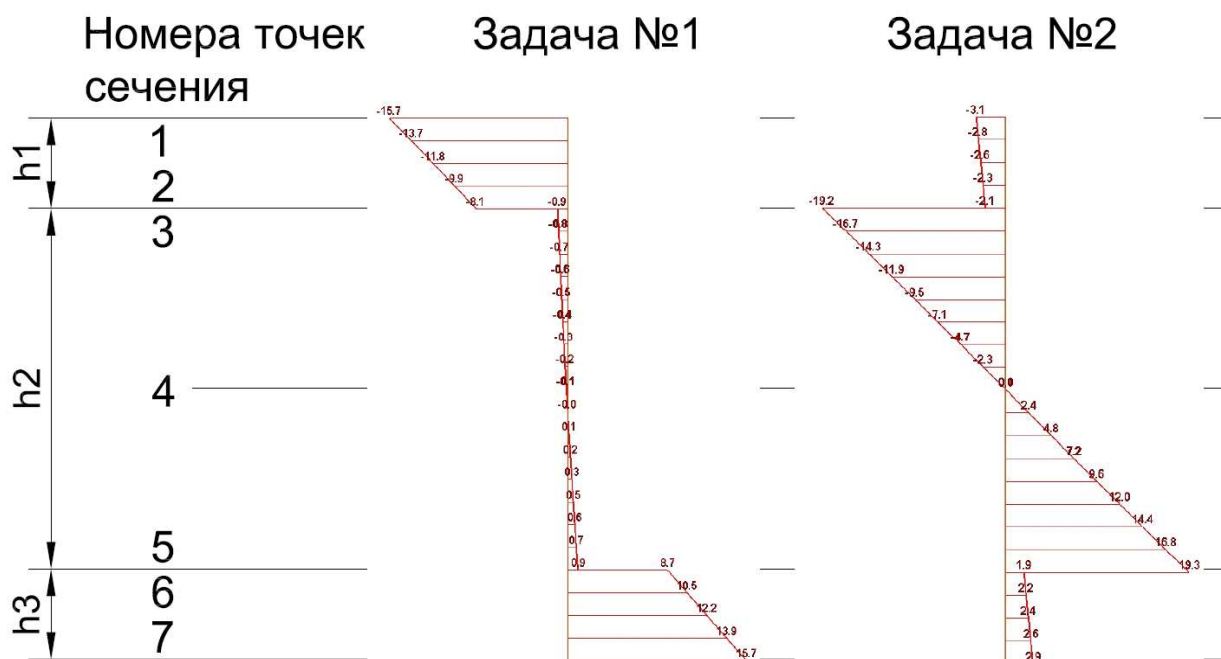


Рис. 2.4. Эпюры нормальных напряжений на расстоянии $L/4$ от опоры для задач № 1 и № 2 полученные по методу конечных элементов ($\sigma_z, \text{кН/м}^2$).

Полученные результаты по методу итераций и по методу конечных элементов сведены в таблицу 2.1.

Таблица 2.1. Значения нормальных напряжений.

Задача	Номер точки сечения*	Цикл 1	Цикл 2	Midas Civil
		$\sigma_z, \text{кН/м}^2$	$\sigma_z, \text{кН/м}^2$	$\sigma_z, \text{кН/м}^2$
1	1	-14.655	-15.398	-15.678
	2	-9.7698	-9.9177	-8.066
	3	-0.97698	-0.22193	-0.897
	4	0	0.009191	0
	5	0.97698	0.24355	0.871
	6	9.7698	9.8758	8.744
	7	14.655	15.363	15.655
2	1	-2.9309	-3.1968	-3.071
	2	-1.954	-2.0423	-2.344
	3	-19.54	-19.363	-19.2
	4	0	-0.018286	-0.044

	5	19.54	19.329	19.268
	6	1.954	2.1104	2.161
	7	2.9309	3.2713	2.89

* номера точек сечения обозначены на рис. 2.3.

На первом цикле итераций прослеживается симметрия результатов по высоте балки. А также видно нулевое значение напряжений в точке 4, которая является центром тяжести, и расположена на оси симметрии при одинаковых верхнем и нижнем слое. Конструкцию делает несимметричной загрузка по верхней фибре, а не по центру тяжести сечения. Вследствие такого нагружения, на втором цикле уже появляется несимметрия в результатах, в центре тяжести значение напряжений отлично от нуля. Проанализировав результат более подробно, можно заметить, что функция распределения нормальных напряжений носит нелинейный характер, даже в пределах одного слоя.

Максимальные значения, полученные на втором цикле итераций и результаты по методу конечных элементов, отличаются не более чем на 2%. При этом результаты первого и второго цикла итераций отличаются на 12%, такой результат достигается благодаря тому, что учитываются деформации сдвига и поперечные деформации.

Полученный алгоритм расчета слоистых балок записан с использованием программы MathCAD, с целью исключения случайных ошибок при вычислениях.

На примере слоистых балок рассмотрен алгоритм работы составных конструкций. Доказана возможность сращивать деформации в зоне стыковки слоев, а так же показан принцип равенства потоков напряжений по теореме Бредта.

Глава 3. ИТЕРАЦИОННЫЙ СПОСОБ ОПРЕДЕЛЕНИЯ НАПРЯЖЕННО-ДЕФОРМИРОВАННОГО СОСТОЯНИЯ ТОНКОСТЕННЫХ СТЕРЖНЕЙ ОТКРЫТОГО ПРОФИЛЯ.

Рассмотрена задача стесненного кручения изотропного тонкостенного стержня открытого профиля. Определено напряженно-деформированное состояние балки методом итераций. В отличие от задач изгиба, в задаче кручения необходимо в первую очередь определить координаты центра кручения, через которые в дальнейшем будет определена функция угла закручивания балки и получены соответствующие поступательные перемещения. Алгоритм метода итераций применительно к задаче определения напряженно-деформированного состояния при стесненном кручении тонкостенного анизотропного стержня открытого профиля приведен в главе 6. Приведенный алгоритм будет справедлив и для изотропного варианта, как частного случая анизотропии.

Произведем вычисления на примере консольного стержня с поперечным сечением в виде швеллера. Начальный этап для расчета на кручение – определение центра кручения. Для определения центра кручения типовых поперечников выведены аналитические формулы, по которым можно проверить полученный результат для швеллера. В работе стоит задача определения центра кручения для произвольного стержня, поэтому зададимся геометрическими размерами в общем виде. Длина балки – L . Высота балки – H . Ширина полок – B . Толщина листа – t . Модуль упругости – E . Коэффициент Пуассона – μ . Свободный конец балки загружен сосредоточенным крутящим моментом – $M_{кр}$.

В предложенном алгоритме возможно записать для каждой пластинки свои упругие постоянные и толщину. А также, возможно учесть любое количество пластин из которых состоит сечение.

3.1 Определение центра кручения и функции угла закручивания.

Значения перемещений любой точки поперечного сечения, при кручении можно выразить через угол закручивания $\varphi(z)$ относительно полюса кручения $X_p(x, y); Y_p(x, y)$. Полюс кручения зависит от геометрических размеров поперечного сечения и определяется один раз на начальном этапе.

Аналогично теории Власова В.З., первый цикл расчетов опирается на гипотезы:

1. Неизменяемость контура.
2. Отсутствие сдвигов.
3. Плоских сечений.

Гипотезы 2 и 3 применяются только на первом цикле и справедливы для каждой пластинки в частности.

Поперечное сечение представляет собой набор пластинок жестко объединенных по общим граням (рис.3.1).

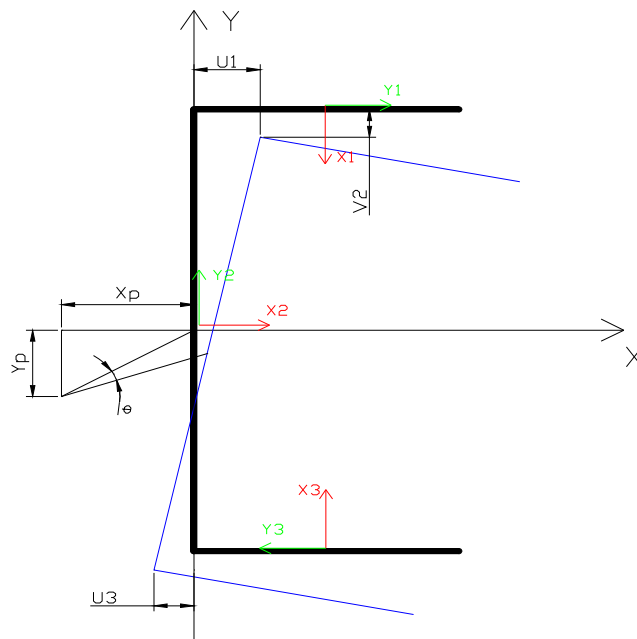


Рис. 3.1. Поперечное сечение рассматриваемой балки, глобальные и локальные оси, положение центра кручения..

Поперечное сечение расположено в плоскости глобальных осей X, Y . Ось Z направлена вдоль оси стержня. Компоненты перемещений определяются относительно глобальных осей координат. Внешние нагрузки также заданы относительно глобальных систем координат.

Каждая из пластинок имеет свою локальную систему координат. На рисунке изображены локальные оси: $x_1, y_1, x_2, y_2, x_3, y_3$, нижний индекс обозначает порядковый номер пластинки. Локальная ось y направлена по ширине пластинки, локальная ось z ориентирована по длине пластинки. Компоненты деформаций и напряжений определяются для каждой пластины отдельно в локальной системе координат и по принципу плоской задачи теории упругости зависят от двух координат z, y . Это значит, что для каждой точки рассматриваемого элемента, задав соответствующие координаты, возможно определить напряжения и деформации и проанализировать полученные результаты по условию прочности.

На начальном этапе координаты центра кручения X_p, Y_p задаются произвольно. Угол поворота $\varphi(Z)$ изображается относительно принятого центра.

Поступательные перемещения каждой пластинки U_1, V_2, U_3 определяются в начальной плоскости пластинки и характеризуют изгибающий момент каждого элемента отдельно.

Выполнив несложные геометрические построения, поступательные перемещения U_1, V_2, U_3 , можно вычислить через угол поворота $\varphi(Z)$, относительно центра кручения X_p, Y_p до множенного на соответствующее плечо:

$$\begin{aligned} U_1 &= \left(\frac{H}{2} - Y_p \right) \cdot \varphi(Z); \\ V_2 &= X_p \cdot \varphi(Z); \\ U_3 &= \left(\frac{H}{2} + Y_p \right) \cdot \varphi(Z). \end{aligned} \tag{3.1}$$

На данном этапе рассуждения в глобальных осях заканчивается. Далее рассматривается каждая пластинка отдельно и используются ее локальные оси.

Основываясь на гипотезах, запишем линейные функции осевых деформаций:

$$\begin{aligned} \varepsilon_{z1} &= a_1 + b_1 \cdot Y_1; \\ \varepsilon_{z2} &= a_2 + b_2 \cdot Y_2; \end{aligned} \tag{3.2}$$

$$\varepsilon_{z3} = a_3 + b_3 \cdot Y_3.$$

где a_i, b_i – коэффициенты, которые имеют следующий математический смысл: a_i – значение функции в начале координат, b_i – тангенс угла наклона функции к местной оси Y_i .

Система уравнений 3.1 содержит 3 неизвестных ($X_p, Y_p, \varphi(Z)$), через которые выражаются перемещения. Система 3.2 содержит по 2 неизвестных в каждом уравнении, через которые выражаются деформации каждой пластины, значит при рассмотрении n пластинок $2n$ неизвестных. Итого $2n+3$ неизвестных. Необходимо задаться таким же количеством уравнений

По принципу сращивания деформаций по общим граням пластин (рис. 3.2), получаем $n-1$ уравнение:

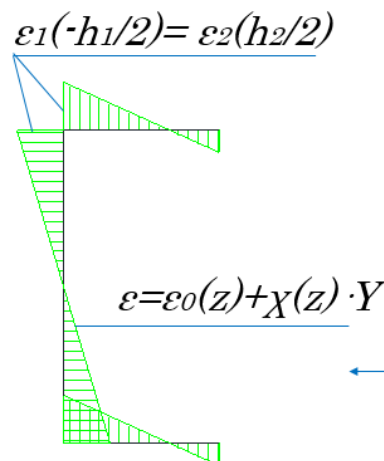


Рис. 3.2. Принцип сращивания деформаций по общим граням пластин.

На первом цикле итераций нормальные напряжения запишутся в следующем виде:

$$\begin{aligned} \sigma_{z1} &= E(a_1 + b_1 \cdot Y_1); \\ \sigma_{z2} &= E(a_2 + b_2 \cdot Y_2); \\ \sigma_{z3} &= E(a_3 + b_3 \cdot Y_3). \end{aligned} \quad (3.3)$$

Определив функцию напряжений (3.3), перейдем к изгибающим моментам каждой отдельной пластинки:

$$M_1 = t \int_{-\frac{B}{2}}^{\frac{B}{2}} \sigma_{z1} \cdot Y dY = \frac{t \cdot B^3 \cdot E \cdot b_1}{12} = EI_1 b_1;$$

$$M_2 = t \int_{-\frac{H}{2}}^{\frac{H}{2}} \sigma_{z2} \cdot Y dY = \frac{t \cdot H^3 \cdot E \cdot b_2}{12} = EI_2 b_2; \quad (3.4)$$

$$M_3 = t \int_{-\frac{B}{2}}^{\frac{B}{2}} \sigma_{z3} \cdot Y dY = \frac{t \cdot B^3 \cdot E \cdot b_3}{12} = EI_3 b_3.$$

Изгибающий момент каждой пластинки в отдельности, можно выразить через кривизну. А кривизна в свою очередь зависит от перемещений. Из соотношения $\frac{M}{EI} = -V''(x, z)$ получаем еще n уравнений:

$$\begin{aligned} b_1 &= \frac{\frac{d^2 \varphi(Z)}{dZ^2} \cdot (H - 2Y_p)}{2}; \\ b_2 &= \frac{d^2 \varphi(Z)}{dZ^2} \cdot X_p; \\ b_3 &= \frac{\frac{d^2 \varphi(Z)}{dZ^2} \cdot (H + 2Y_p)}{2}. \end{aligned} \quad (3.5)$$

Принцип сращивания деформаций выглядит следующим образом:

$$\begin{aligned} \varepsilon_{z1}^k &= a_1 + b_1 \cdot \left(\frac{-B}{2} \right) = a_2 + b_2 \cdot \frac{H}{2} = \varepsilon_{z2}^k \\ &\text{и} \\ \varepsilon_{z2}^k &= a_2 + b_2 \cdot \left(\frac{-H}{2} \right) = a_3 + b_3 \cdot \frac{B}{2} = \varepsilon_{z3}^k. \end{aligned} \quad (3.6)$$

Верхний индекс k обозначает конец стержня в локальной системе координат по ширине стержня, индекс n обозначает начало стержня в локальной системе координат по ширине. Иначе говоря, продольная деформация в конце одной пластины равна ответствующей деформации в начале следующей.

Вместе с общим уравнением равновесия:

$$N = t \int_{-\frac{B}{2}}^{\frac{B}{2}} \sigma_{z1} dY + t \int_{-\frac{H}{2}}^{\frac{H}{2}} \sigma_{z2} dY + t \int_{-\frac{B}{2}}^{\frac{B}{2}} \sigma_{z3} dY = 0,$$

получится система, из решения которой получим:

$$a_1 = \frac{H \frac{d^2 \varphi(Z)}{dZ^2} \cdot (2 \cdot B^2 + B \cdot H + 4 \cdot B \cdot X_p - 2 \cdot B \cdot Y_p + 2 \cdot H \cdot X_p)}{4 \cdot (2 \cdot B + H)};$$

$$a_2 = \frac{B^2 \cdot Y_p \frac{d^2 \varphi(Z)}{dZ^2}}{2 \cdot B + H}; \quad (3.7)$$

$$a_3 = \frac{H \frac{d^2 \varphi(Z)}{dZ^2} \cdot (2 \cdot B^2 + B \cdot H + 4 \cdot B \cdot X_p - 2 \cdot B \cdot Y_p + 2 \cdot H \cdot X_p)}{4 \cdot (2 \cdot B + H)}.$$

Уравнения равновесия $M_X = 0$, $M_Y = 0$ дадут координаты центра кручения:

$$X_p = -\frac{3B^2}{6B + H}; \quad Y_p = 0. \quad (3.8)$$

Подставив полученные координаты центра кручения, определим коэффициенты уравнений деформации:

$$\begin{aligned} b_1 &= \frac{H \frac{d^2 \varphi(Z)}{dZ^2}}{2}; & b_2 &= \frac{3B^2 \frac{d^2 \varphi(Z)}{dZ^2}}{6B + H}; \\ b_3 &= \frac{H \frac{d^2 \varphi(Z)}{dZ^2}}{2}; & a_1 &= \frac{B \cdot H^2 \frac{d^2 \varphi(Z)}{dZ^2}}{24B + 4H}; \\ a_2 &= 0; & a_3 &= \frac{B \cdot H^2 \frac{d^2 \varphi(Z)}{dZ^2}}{24B + 4H}. \end{aligned} \quad (3.9)$$

Далее функции нормальных напряжений записываются с учетом полученных коэффициентов к уравнениям деформаций и по закону парности определяются касательные напряжения:

$$\frac{\partial \sigma_{zi}}{\partial Z} + \frac{\partial \tau_{zyi}}{\partial Y} = 0; \quad \tau_{zyi} = -\int \frac{\partial \sigma_{zi}}{\partial Z} \cdot dY + \tau_{oi}. \quad (3.10)$$

Постоянная интегрирования по y функции $\tau_{oi}(z)$ определяется в зависимости от граничных условий. Внешняя нагрузка вдоль внешней грани крайней пластины является граничным условием для касательных напряжений. При отсутствии внешней нагрузки по такому направлению касательные напряжения в крайней фибре будут нулевыми. Из этих условий и находится постоянная интегрирования. Для промежуточных пластинок, в зоне из сопряжения, должно соблюдаться правило равенства потоков касательных напряжений. Теорема Бредта говорит о равенстве потоков напряжений по граням.

$$\tau_{zy1} \left(\frac{B}{2}, Z \right) = 0;$$

$$\begin{aligned}\tau_{ZY1}\left(\frac{-B}{2}, Z\right) &= \tau_{ZY2}\left(\frac{H}{2}, Z\right); \\ \tau_{ZY3}\left(\frac{-B}{2}, Z\right) &= 0.\end{aligned}\quad (3.11)$$

Для каждого элемента можно получить поперечную силу как интеграл касательных напряжений:

$$\begin{aligned}Q_1 &= t \int_{-\frac{B}{2}}^{\frac{B}{2}} \tau_{ZY1} dY, \\ Q_2 &= t \int_{-\frac{H}{2}}^{\frac{H}{2}} \tau_{ZY2} dY \\ Q_3 &= t \int_{-\frac{B}{2}}^{\frac{B}{2}} \tau_{ZY3} dY\end{aligned}$$

Каждая из поперечных сил дает момент вокруг оси Z , с плечом, определенным от центра кручения:

$$M_Z = Q_1 \cdot \left(\frac{H}{2} - Y_p\right) + Q_2 \cdot X_p + Q_3 \cdot \left(\frac{H}{2} + Y_p\right). \quad (3.12)$$

Каждая пластинка кроме изгиба получает поворот вокруг своей оси, данная величина характеризует момент свободного кручения:

$$M_{св} = \cdot GI_d \left(\frac{d}{dZ} \phi(Z) \right). \quad (3.13)$$

Суммарно получается внешний крутящий момент

$$M_Z + M_{св} = M_{кр}$$

или

$$(3.14)$$

$$\frac{B^3 \cdot E \cdot t \cdot H^2 \cdot (2H + 3B)}{72B + 12H} \frac{d^3 \phi(z)}{dZ^3} + GI_d \cdot \left(\frac{d\phi(z)}{dZ} \right) = M_{кр}.$$

В итоге получается дифференциальное уравнения третьего порядка, которое имеет общее и частное решения. Решив уравнение, определим функцию угла закручивания по координате Z . Уравнение третьего порядка даст три постоянных интегрирования. Они находятся из граничных условий. Для жестко зашпеленного стержня со свободным противоположным концом примем следующие граничные условия

- функция угла поворота в заделке равна нулю $\varphi(0) = 0$,
- касательная к функции угла поворота в заделке равна нулю, значит первая производная в заделке так же нулевая $\varphi'(0) = 0$,
- нормальные напряжения зависят от второй производной угла закручивания. При этом на свободном конце нормальные напряжения отсутствуют, значит $\varphi''(L) = 0$,

Решение, полученное на первом цикле, полностью повторяет решение Власова В.З. На последующих циклах значения напряжений и деформаций уточняются с учетом поперечных деформаций и деформаций сдвига. Метод итераций не использует секториальные характеристики сечения, по этой причине возможно рассматривать поперечное сечение стержня составленное из пластинок с разными упругими постоянными.

3.2 Применение метода итераций к расчету тонкостенных стержней открытого профиля.

Подставляем полученное выражения угла закручивания в выражения для нормальных и касательных напряжений:

$$\tau_{yz,i}^{(1)}(y, z) = -\int \frac{\partial \sigma_{z,i}^{(1)}(y, z)}{\partial z} \cdot dy + \tau_{0,i}(z). \quad (3.15)$$

Теперь можем найти нормальные напряжения поперечного направления, выразив их через касательные напряжения $\sigma_{y,i}^{(1)}$:

$$\frac{\partial \sigma_{y,i}^{(1)}(y, z)}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{yz,i}^{(1)}(y, z)}{\partial z} = 0; \quad (3.16)$$

$$\sigma_{y,i}^{(1)}(y, z) = -\int \frac{\partial \tau_{yz,i}^{(1)}(y, z)}{\partial z} \cdot dy + \sigma_{y0,i}(z).$$

Аналогично постоянная по y функция интегрирования $\sigma_{y0,i}(z)$ находится из граничных условий приложения внешних сил. Для постоянной интегрирования для нормальных напряжений $\sigma_y^{(1)}$ граничными условиями являются вертикальные внешние силы. Для определения постоянной интегрирования можно ориентироваться на граничные условия как со стороны первой, так и со стороны последней пластины. Значение граничных условий с противоположной стороны является контролем правильности результатов. По

общим граням пластин должно соблюдаться условие равенства потоков поперечных нормальных напряжений.

На данном этапе завершаются вычисления первого цикла. На втором цикле уже по обобщенному закону Гука находятся деформации для каждой пластинки отдельно вдоль локальной оси y , $\varepsilon_{y,i}^{(2)}$:

$$\varepsilon_{y,i}^{(2)}(y, z) = \frac{1}{E_i} \cdot (\sigma_{y,i}^{(1)}(y, z) + \mu_i \cdot \sigma_{z,i}^{(1)}(y, z)). \quad (3.17)$$

Обратив внимание на индексы, можно увидеть, что именно этот этап является переходом от первого цикла ко второму. Поперечные деформации второго цикла зависят от нормальных напряжений продольного и поперечного направлений первого цикла.

Соответствующие перемещения $V_i^{(2)}(y, z)$ определяются как интеграл по деформациям $\varepsilon_{y,i}^{(2)}(y, z)$:

$$V_i^{(2)}(y, z) = \int_h \varepsilon_{y,i}^{(2)}(y, z) \cdot dy + V_{0,i}(z). \quad (3.18)$$

По обобщенному закону Гука находим деформацию сдвига:

$$\gamma_{yz,i}^{(2)} = \frac{\tau_{yz,i}^{(1)}}{G_i}; \quad \text{где } G_i = \frac{E_i}{2(1 + \mu_i)}. \quad (3.19)$$

Опираясь на геометрические уравнения, определяем функцию деформаций вдоль локальной оси z для каждой пластинки $\varepsilon_{z,i}^{(2)}(y, z)$. На втором цикле функция деформаций носит не линейный характер:

$$\begin{aligned} \gamma_{yz,i}^{(2)} &= \frac{\partial W}{\partial y} + \frac{\partial V}{\partial z}; \\ \frac{\partial \gamma_{zy}}{\partial z} &= \frac{\partial W}{\partial y \partial z} + \frac{\partial^2 V}{\partial z^2}; \end{aligned} \quad (3.20)$$

$$\varepsilon_{z,i}^{(2)}(y, z) = \frac{\partial W}{\partial z} = \int \frac{\partial \gamma_{yz,i}^{(2)}}{\partial z} dy + \int \frac{\partial^2 V_i^{(2)}}{\partial z^2} dy + \varepsilon_{0,i}^{(2)}(z).$$

Для результатов второго цикла гипотеза плоских сечений уже не справедлива. Функция распределения нормальных напряжений в продольном направлении учитывает деформации сдвига, полученные на первом цикле.

По обобщенному закону Гука переходим к нормальным напряжениям продольного направления для каждой пластинки $\sigma_{z,i}^{(2)}(y, z)$:

$$\sigma_{z,i}^{(2)}(y, z) = E_i \cdot \frac{\varepsilon_{z,i}^{(2)}(y, z) + \mu \varepsilon_{y,i}^{(2)}(y, z)}{(1 - \mu_i^2)}. \quad (3.21)$$

Постоянные интегрирования $\varepsilon_{0,i}^{(2)}(z)$ и $V_{0,i}^{(2)}(z)$ определим по принципу статического равновесия.

Распределение напряжений $\sigma_{z,i}^{(2)}$ имеет вид параболы пятой степени. Это обусловлено влиянием поперечных деформаций и деформаций сдвига. Итерационный процесс имеет высокую степень сходимости. Достаточно 2 – 3 циклов для получения результатов высокой точности. Для получения результатов третьего цикла подставляем функции $\sigma_{z,i}^{(2)}(y, z)$ в (3.15), и повторяем цикл (3.15 – 3.21). В итоге определим напряжения и деформации третьего цикла, в том числе нормальные напряжения продольного направления $\sigma_{z,i}^{(3)}(y, z)$.

Для рассмотренного примера получен график угла закручивания по длине стержня (рис 3.3), а так же распределение продольных нормальных напряжений (рис. 3.4), касательных напряжений (рис. 3.5), поперечных нормальных напряжений (рис. 3.6.). Эпюры напряжений приведены по результатам второго цикла итераций, на расстоянии 1м от заделки.

Далее выполнен ряд расчетов по методу конечных элементов. Приведено сопоставление результатов в таблице 3.2.

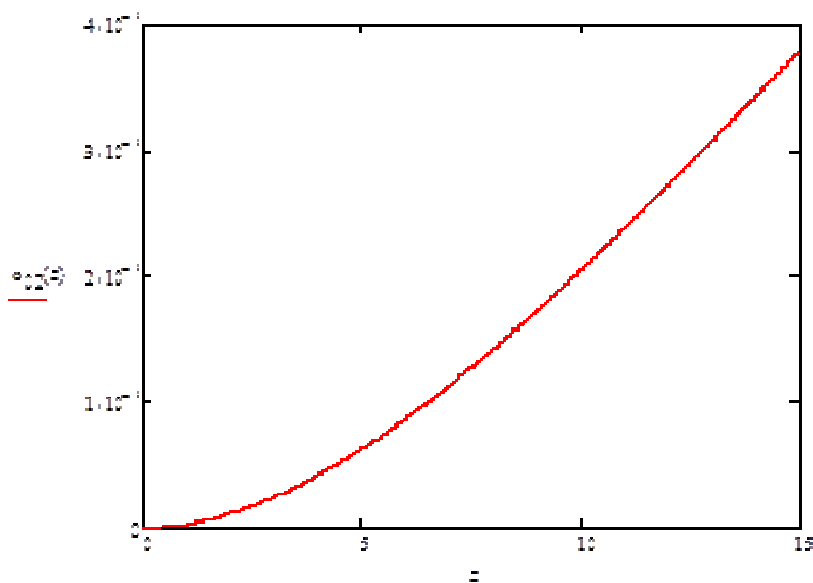


Рис. 3.3. График угла закручивания

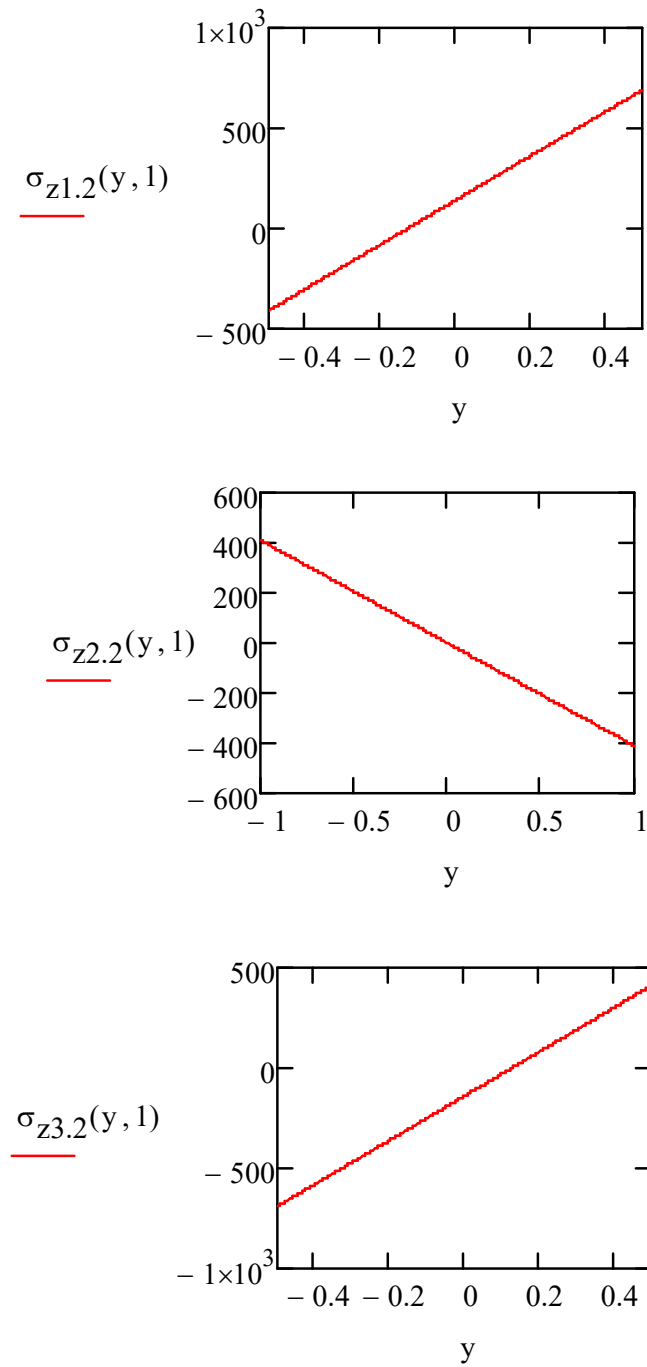


Рис. 3.4. Эпюры продольных нормальных напряжений (полка-стенка-полка)

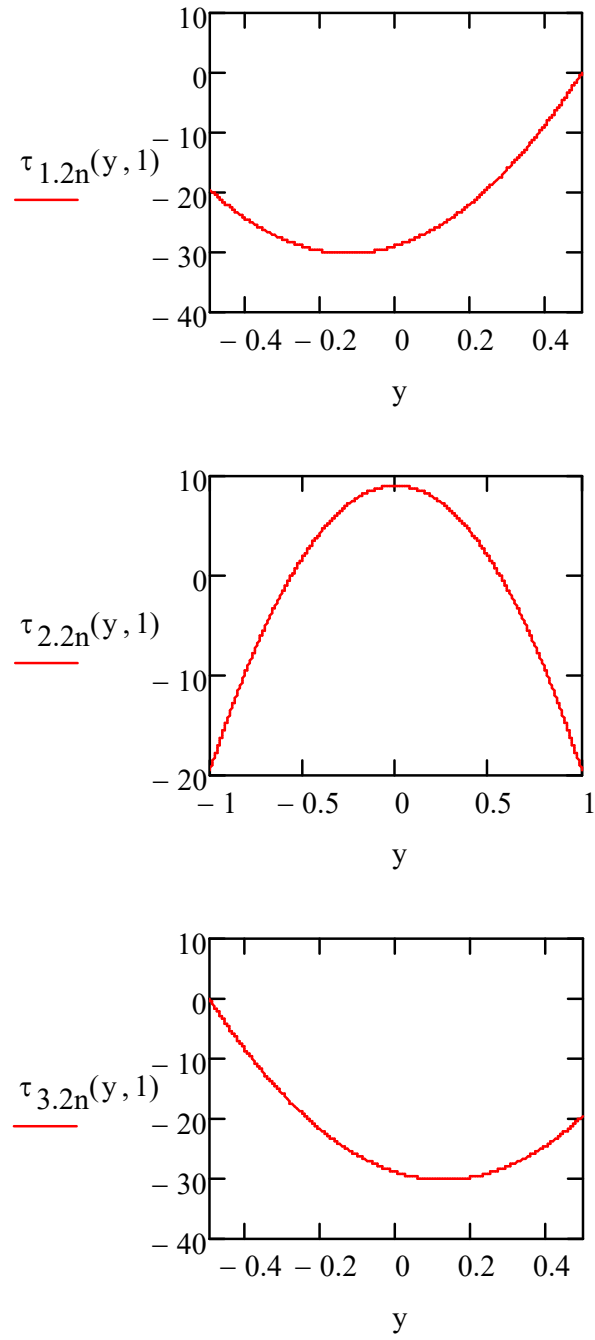


Рис. 3.5. Эпюры касательных напряжений (полка-стенка-полка)

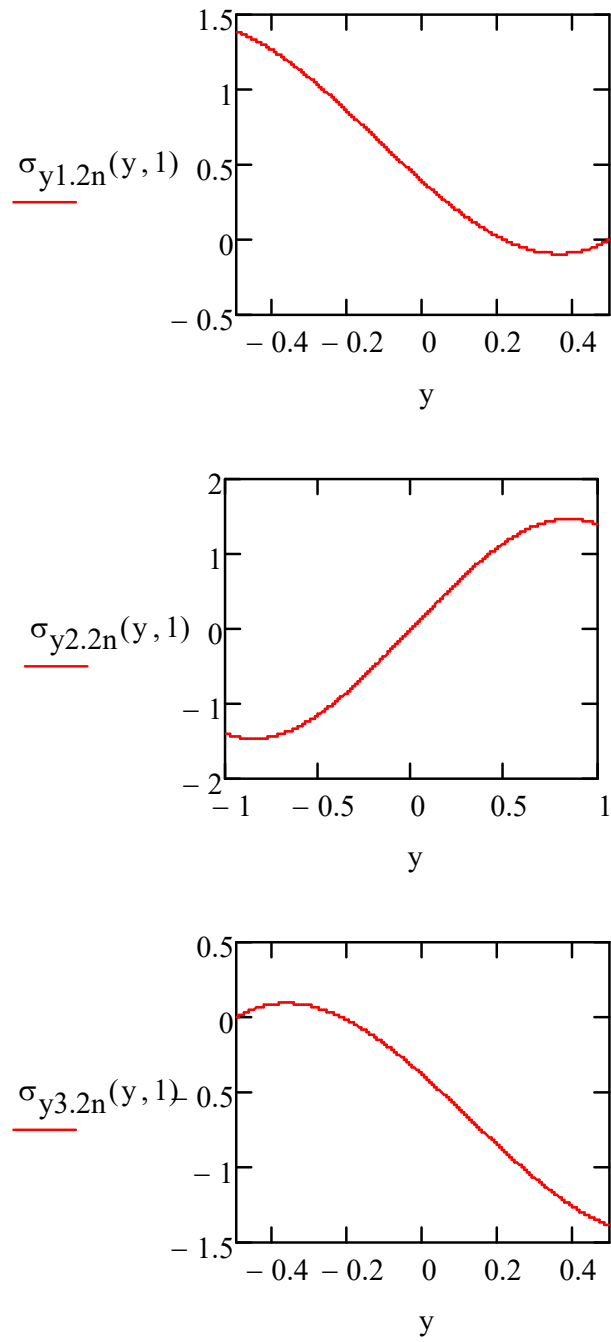


Рис. 3.6. Эпюры поперечных нормальных напряжений

3.3 Верификация алгоритма по расчету тонкостенных стержней открытого профиля итерационным способом путем сопоставления с результатами, полученными методом конечных элементов.

В среде MathCAD записан алгоритм расчета тонкостенных анизотропных стержней открытого профиля на кручение. С целью выявления ошибок и проверки программы рассмотрен случай с использованием изотропного материала, при этом за основу берется алгоритм широкого применения (для анизотропных материалов), в котором применяются одинаковые свойства материала по различным направлениям.

Выполнен расчет консольного швеллера на кручение сосредоточенным моментом 5т·м. Физические и геометрические характеристики швеллера приведены в таблице 3.1.

Таблица 3.1

Характеристики исследуемой балки			
Материал		Сечение	
E (кН/м ²)	2·10 ⁸	h (м)	2
μ	0.3	b (м)	1
		t (м)	0.1

По результатам расчетов с использованием алгоритма получены: угол закручивания балки по длине, распределение нормальных и касательных напряжений, деформации. Данные приведены ниже в таблице сравнения.

Аналогичный расчет выполнен с использованием программного комплекса конечноэлементного моделирования Midas/Civil. Построено две отдельные модели. В первой модели швеллер замоделирован элементами пластин, т.е. рассмотрена пространственная задача. Вторая модель плоская, швеллер замоделирован балочным элементом, при этом использованы функции, которые позволяют учитывать бимомент.

Первая пространственная модель включает в себя 6191 узлов и 6000 плитных конечных элементов (тип PLATE). На рис. 3.7 представлена пространственная расчетная схема балки. Левый край балки заземлен. С правой стороны узлы стенки объединяются жестким телом. Жесткое тело позволяет избежать локальных эффектов от сосредоточенного момента. Узлы

полок не включены в состав жесткого тела, это позволяет свободному концу балки депланировать.

В результате расчетов пространственной модели получены угол закручивания и нормальные напряжения. На рис. 3.8 представлена эпюра угла закручивания по длине. На рис. 3.9-3.10 представлена эпюра нормальных напряжений в полке по верхней и нижней фибре соответственно.

Вторая плоская балочная модель включает в себя 16 узлов и 15 балочных конечных элементов (тип BEAM). Левый конец балки заземлен по семи степеням свободы, к правому концу балки приложен сосредоточенный момент. На рис. 3.11 представлена расчетная схема балочной модели.

В результате расчетов по плоской схеме получены угол закручивания и нормальные напряжения. На рис. 3.12 показана эпюра угла закручивания стержня по длине. На рис. 3.13 показана эпюра максимальных нормальных напряжений в балке.

Результаты расчетов сведены в таблицу 3.2. Приведен максимальный угол закручивания φ на свободном конце балки, и нормальные напряжения в полке, по срединной поверхности, на расстоянии 1м от заделки.

Таблица 3.2

Сопоставление результатов расчетов									
Критерий	Алгоритм (2ой цикл)	По Власову (1ый цикл)	%	Midas (plate)	%	Midas (beam)	%	Бистержень	%
φ (рад)	0,0038	0,00377	0,8	0,00374	1,6	0,00375	1,3	0,00321	15
σ (т/м ²)	689,9	677,8	1,8	674,2	2,3	604,6	12,4	667,0	3,3

По результатам расчетов видно, что грубых расхождений по трем задачам нет, следовательно, алгоритм итерационного метода расчета записан без ошибок и опечаток. Результаты расчетов, полученные на втором цикле итерационного метода уже достаточно точны.

Пространственная пластинчатая модель дает близкий результат к аналитическому решению, расхождение по углу поворота и напряжениям не превышают 1.5%.

Возможность учитывать стесненное кручение в балочных моделях в рамках программы Midas/Civil, появилась только в версиях начиная с 2016

года. Не смотря на новизну функции, реализована она достаточно хорошо. На тестовой задаче погрешность по углу поворота составила менее 1 процента, точность по расчету напряжений не превышает 12%.

Интенсивное введение функции учета стесненного кручения в современные расчетные комплексы говорит об актуальности вопроса. Алгоритм, разработанный в рамках работы, выполнен без ошибок, и готов к анализу анизотропных балок.

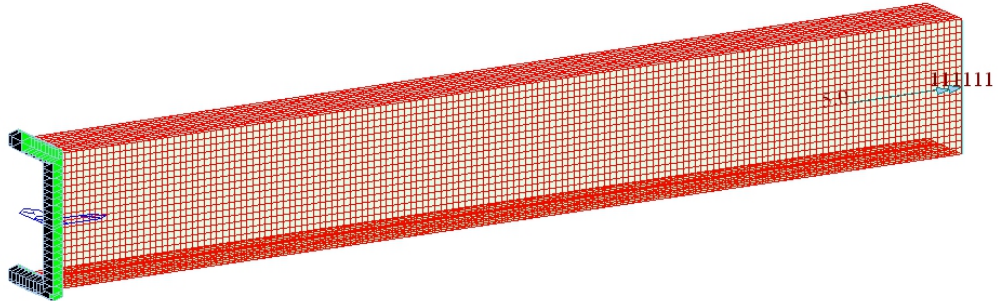


Рис.3.7 Пространственная расчетная схема

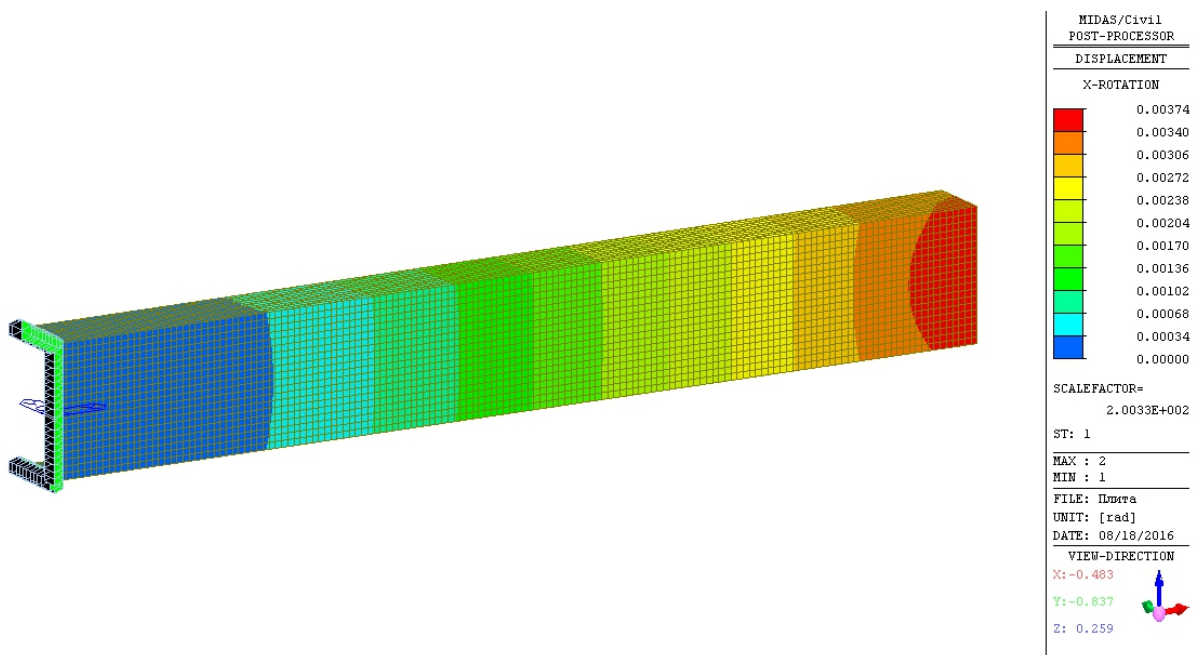
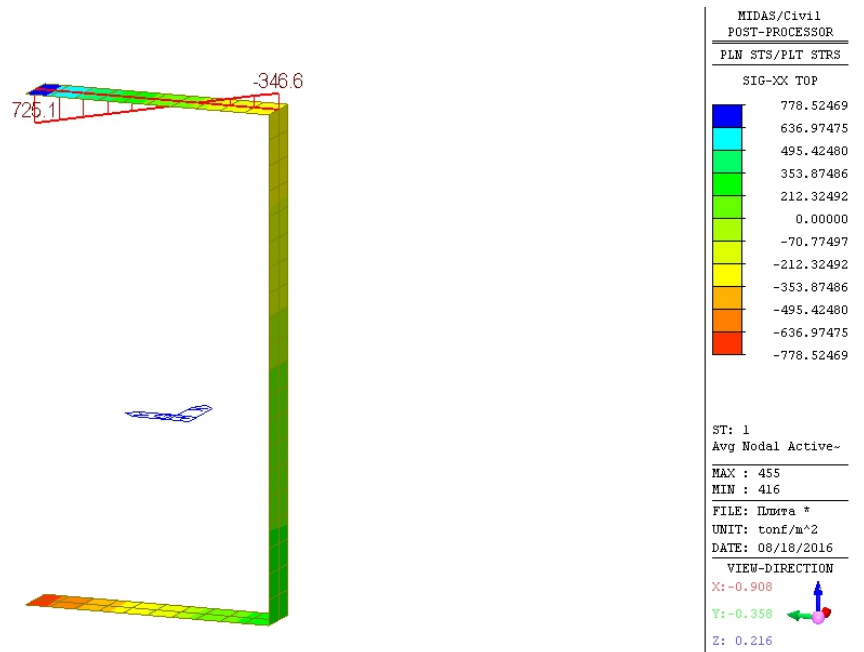
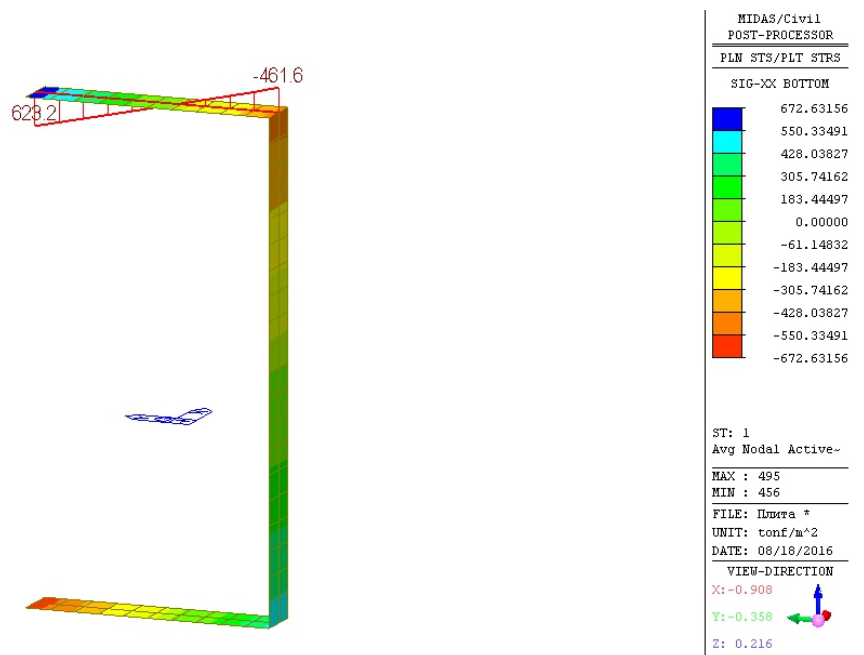


Рис. 3.8 Угол закручивания в плитной модели. (рад)

Рис. 3.9 Эпюра нормальных напряжений по верхней фибре (т/м^2)Рис. 3.10 Эпюра нормальных напряжений по нижней фибре (т/м^2)

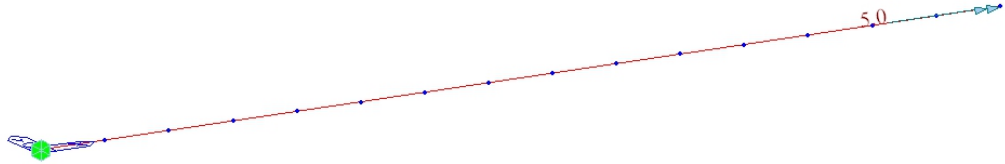


Рис. 3.11. Плоская расчетная схема

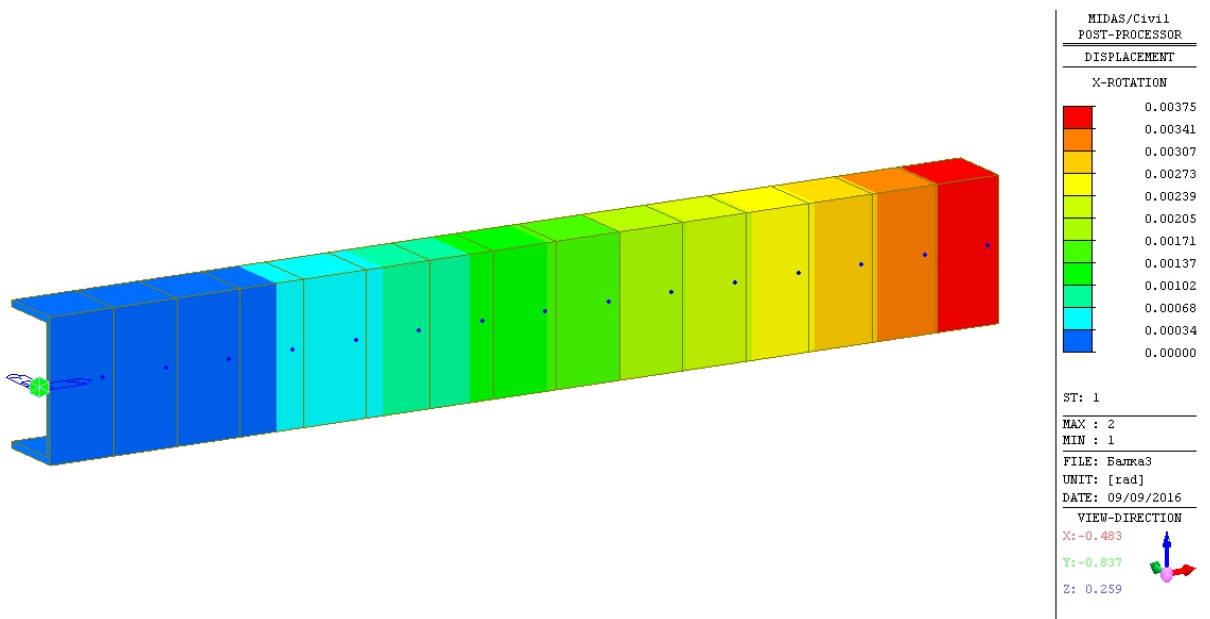


Рис. 3.12. Угол закручивания в балочной модели (рад)

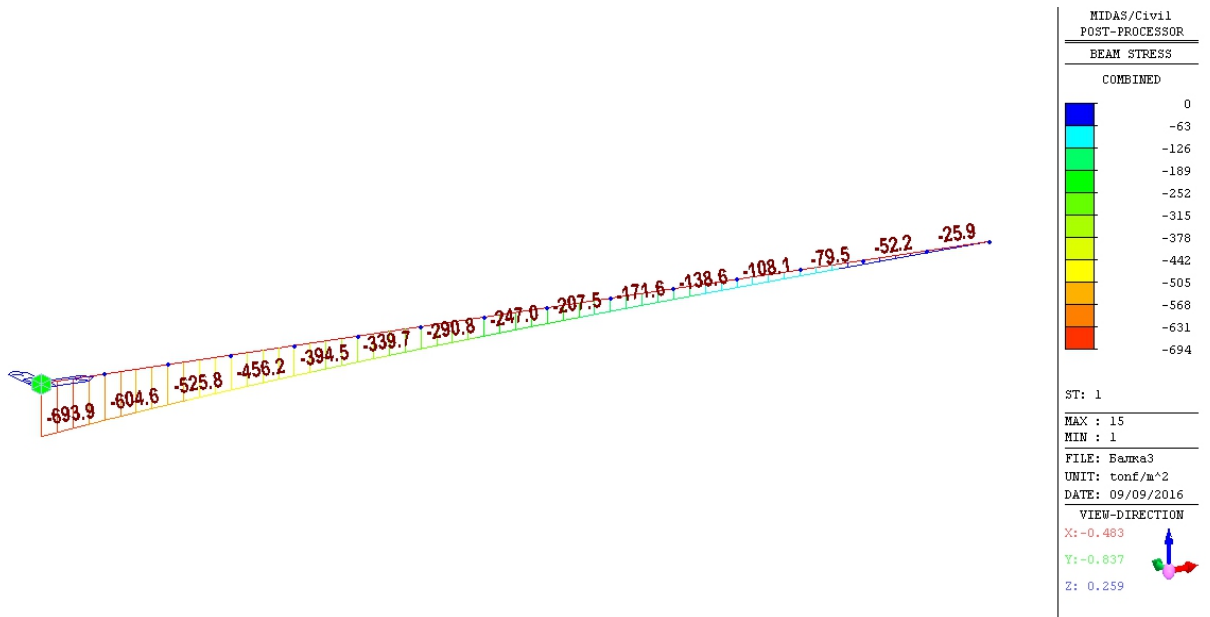


Рис. 3.13 Эпюра нормальных напряжений в балочной модели.

Бистержневая модель тонкостенного стержня открытого профиля, работающего на кручение.

Инженеры, работающие над расчетом конструкций, в состав которых входят тонкостенные стержни открытого профиля часто сталкиваются с определенными трудностями. Большинство расчетных комплексов, работающих по принципу МКЭ, учитывают лишь 6 степеней свободы, отвечающих линейным перемещениям узлов и поворотам этих узлов.

Теория тонкостенных стержней открытого профиля требует седьмой степени свободы, отвечающей за депланационные перемещения в узле. Перельмутер А.В. Сливкер В.И. [80] привели специальный прием, который позволяет учесть эффект стесненного кручения, используя расчетный комплекс с шестью степенями свободы. На основе данного примера выполнен расчет исследуемого нами швеллера.

При кручении тонкостенного стержня полный крутящий момент складывается из момента чистого кручения и момента стесненного кручения:

$$M_Z + M_{св} = M_{кр}$$

Эти две составляющие полного крутящего момента связаны с углом закручивания следующим образом:

$$M_Z = -EI_{\omega} \varphi''; \quad M_{св} = G I_{кр} \varphi'$$

Тогда потенциальная энергия деформации будет иметь вид:

$$E = \frac{1}{2} \int_0^l [EI_{\omega} (\varphi'')^2 + GI_{кр} (\varphi')^2] dx$$

Предлагаемая бистержневая модель состоит из двух стержней одинаковой длины. Назовем один стержень основным, а другой фиктивным. Величины, связанные с фиктивным стержнем будут иметь индекс *F*. Стержни рассматриваются в классической постановке и не требуют седьмой степени свободы.

На рис. 3.14. представлена расчетная модель применительно к расчетному комплексу Midas Civil. Модель включает в себя 32 узла и 30 конечных элементов балочного типа. Основной стержень с одной стороны зашпелен (по 6-ти степеням свободы), с другой стороны к стержню приложен

сосредоточенный момент $M_{кр}$. Фиктивный стержень, с такой же разбивкой на конечные элементы, идет параллельно основному стержню на расстоянии 1м. На перемещения фиктивного стержня накладываются внешние связи, которые позволяют стержню перемещаться только в поперечном направлении. К фиктивному стержню применена функция Offset, значение которого принято 1м. Узлы основного и фиктивного стержней связаны между собой по крутильной степени свободы вокруг продольной оси. Объединение осуществляется жесткой вставкой типа Rigid Link, при этом выбирается степень объединения только по R_x , то есть:

$$\varphi = \varphi_F .$$

Линейное перемещение фиктивного стержня U_F зависит от угла закручивания следующим образом:

$$U_F = r\varphi_F$$

Тогда энергия деформации бистержневой модели запишется в следующем виде:

$$E = \frac{1}{2} \int_0^l [EI_{ZF}(U_F'')^2 + GI_{кр}(\varphi')^2] dx$$

при этом:

$$EI_{ZF} = EI_{\omega} / r^2$$

Таким образом, бистержневая модель эквивалентна исходному тонкостенному стержню.

В результате расчета получен угол закручивания стержня, и нормальные напряжения. На рис. 3.15 показана эпюра изменения угла закручивания по длине. Максимальный угол закручивания составил 0.00321рад.

На рис. 3.16. показана эпюра распределения нормальных напряжений. На расстоянии 1м от заделки значение напряжений составило 667т/м².

Сопоставление результатов расчетов							
Критерий	Алгоритм	Midas (plate)	%	Midas (beam)	%	Бистержень	%
φ (рад)	0,00378	0,00374	1,0%	0,00375	0,8%	0,00321	15%
σ (т/м ²)	683,8	674,2	1,4%	604,6	11,6%	667,0	2,5%

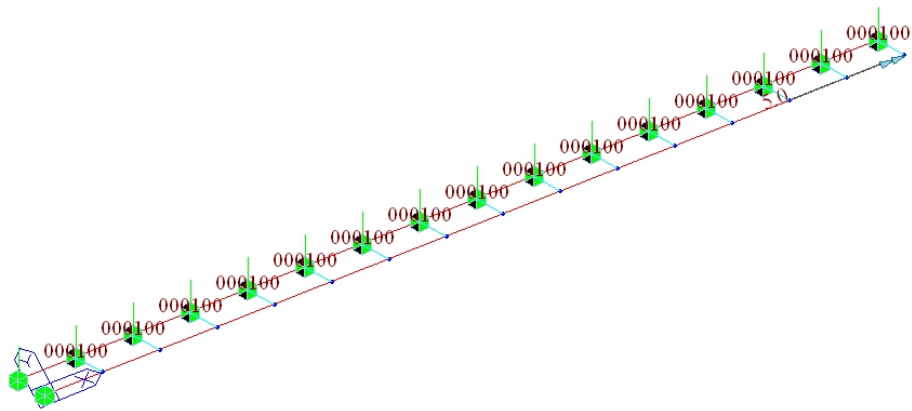


Рис. 3.14. Бистержневая модель.

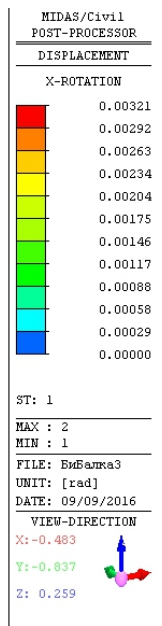
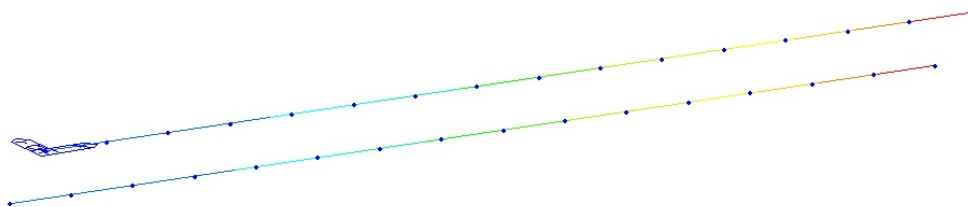


Рис. 3.15 Угол закручивания стержня

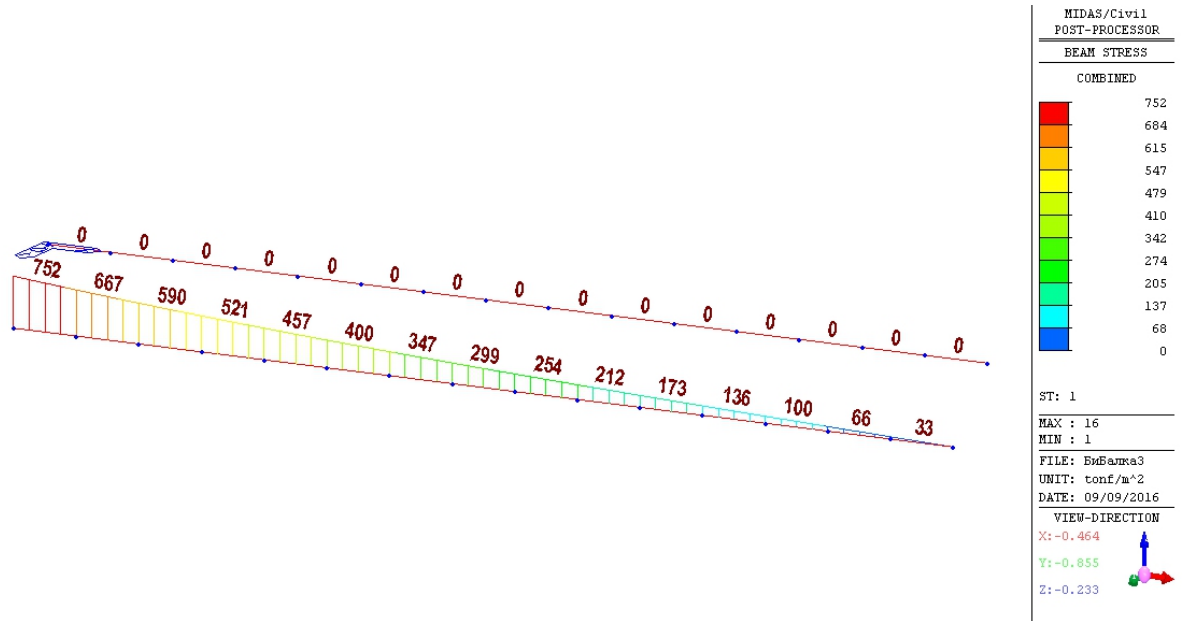


Рис. 3.16 Распределение нормальных напряжений

Глава 4. АНИЗОТРОПНЫЕ МАТЕРИАЛЫ

Дальнейшая часть работы посвящена конструкциям из анизотропных материалов, поэтому в четвертой главе даны общие сведения о композитных материалах. Даны понятия удельной прочности и удельного модуля упругости. Записан закон Гука для общего случая анизотропии и рассмотрены частные случаи. Рассмотрена теория прочности для анизотропных материалов. Приведены характеристики ряда анизотропных материалов в зависимости от угла ориентации волокон. В результате выбран материал, который будет рассматриваться далее, как численный пример.

4.1. Общие сведения о композитных материалах

Обычные конструкционные материалы, такие как камень, дерево, медь, железо еще в древности удовлетворяли потребностям человека. В настоящее время от материала требуется все более разнообразные свойства: высокая прочность, жесткость, коррозионная стойкость, износостойкость, малый вес и др. Очевидно, что простые материалы не способны в полной мере иметь такие свойства. Тем более, что изменить свойства простого материала крайне не просто. Поэтому появились составные материалы, причем широко распространенные – бетон и железобетон, стекловолокно, наконец, фанера. Еще в глубокой древности для увеличения прочности кирпича в глину добавляли солому – своего рода арматуру. Так появился класс новых материалов - композитов, однако свое название этот класс получил только в 60-е годы прошлого века.

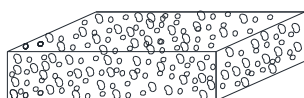
Композиционные материалы составлены из двух или более исходных материалов с целью получения материала, обладающего свойствами не присущими каждому из материалов в отдельности. Эти свойства могут быть заранее заданы и получены в процессе изготовления композита. Композитами в настоящее время признаются материалы, состоящие из двух или более материалов, в которых можно установить границы, отличающие одно вещество от другого.

В строении композитов обычно выделяется две фазы - наполнитель (арматуру) и матрицу, связующее вещество. В качестве наполнителя можно использовать различные частицы, чешуйки, порошки и газы, волокна. В

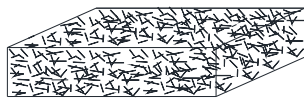
конструкционных материалах наполнитель чаще всего отличается более высокой прочностью и жесткостью, чем матрица. Последняя служит для связи между элементами наполнителя. Отсюда второе ее название – связующее. Матрицей может служить пластмасса, металл, керамика и др.

В зависимости от наполнителя выделяется несколько видов композитов (рис. 4.1):

- композиты с дисперсными частицами
- композит армированный короткими волокнами
- композит, армированный непрерывными однонаправленными волокнами
- композит, армированный волокнами во многих направлениях



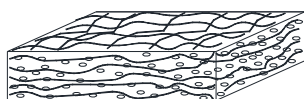
1. Композит с дисперсными частицами



2. Композит, армированный короткими волокнами



3. Композит, армированный непрерывными однонаправленными волокнами



4. Композит, армированный волокнами во многих направлениях

Рис.4.1 Виды композитов

Общее название композитов обычно происходит от названия связующего вещества - металлические, полимерные, неорганические. По виду армирующих элементов присоединяется второе название. Так полимерные композиты, армированные стекловолокном, называют стеклопластиковыми. Те же композиты, армированные металлом – металлопластики, волокнами бора – боропластики, нитями или частицами углерода – углепластики. Композитом с металлической матрицей является боралюминий.

Армирующим элементом в современных композитах являются непрерывные или короткие волокна. Диаметр этих волокон порядка (5 – 200) 10^{-6} м. Так же могут применяться нити, жгуты, ткани различного типа плетения. Волокна должны иметь определенные свойства по прочности, упругости, плотности. Эти свойства должны носить постоянный характер с течением времени. Армирующий материал должен иметь высокую совместимость с наполнителем, должен обеспечивать прочную связь, близкую к прочности наполнителя.

4.2. Удельная прочность и удельный модуль упругости

Удельная прочность равна отношению пределу прочности материала к его плотности $k_{\sigma} = \sigma / \gamma$. Предельная прочность измеряется в единицах длины. Физический смысл этой величины говорит, при какой длине образец разрушится под собственным весом. Данный показатель для стальных проволок в 3 раза хуже чем, для стекловолокна. По этой причине армирование стальными проволоками редко встречается в композитах.

Аналогичное соотношение применяется и к модулю упругости материала. Предельный модуль упругости определяется как $k_E = E / \gamma$ [59].

Именно высокие значения удельной прочности и удельного модуля упругости позволяют применять композиционные материалы в самых различных областях техники (автомобиле-, самолето-, ракетостроении), в строительстве и даже в сельском хозяйстве.

Ниже в табл.4.1. приведены показатели некоторых композитов, применяемых в авиации, где это показатели крайне востребованы.

Таблица.4.1

Материал	Объемный вес γ кН/м ³	Предел прочности (временное сопротивление) σ_v , МПа	$k_{\sigma} = \sigma_v / \gamma$ км	Модуль упругости E , МПа	$k_E = E / \gamma$ км
Стеклопластик*	20.8	168	8.08	3500	168.27
Боропластик*	20.2	140	6.93	21000	1039.6

Углепластик*	15.8	140	8.86	14000	886.08
Боралюминий*	27.6	122	4.42	19600	710.14
Алюминиевый сплав	27.6	55	1.99	7000	253.62
Титановый сплав	44.3	119	2.69	11200	252.82

*материалы, армированные в одном направлении

По этим данным многие композиционные материалы превосходят алюминий и титан по удельной прочности и по удельному модулю упругости в несколько раз. В табл.4.2 приводится сравнение материалов, основанных на разных по природе связующих материалах.

Таблица.4.2.

Характеристики	Материалы на полимерной основе (стеклопластики)	Материалы на металлической основе (боралюминий)
Реальная прочность	Низкая	Высокая
Удельная прочность	Высокая	Низкая
Работа в составе конструкции	Эффективна при одноосном направлении силовых потоков	Эффективна при комбинированных нагрузках (растяжение – сжатие - изгиб)
Стойкость к образованию трещин	Высокая	Высокая
Стоимость	Низкая	Высокая

Из рассмотрения этих данных видно, что композиты, имеющие металлические и полимерные матрицы существенно отличаются по свойствам. Первые должны применяться в тех областях, где требуется уменьшить вес и стоимость конструкции, вторые – там, где необходимо повысить прочность конструкции, когда обычные материалы не могут ее обеспечить.

4.3. Анизотропия

Многие композиционные материалы по своим свойствам следует считать анизотропными – их свойства, в том числе и упругие характеристики, меняются по разным направлениям, и подчиняются закону (4.11).

При малых деформациях зависимость между напряжениями и деформациями носит линейный характер. При таких условиях обобщенный закон Гука принимает следующий вид:

$$\begin{aligned}
\varepsilon_x &= \alpha_{11}\sigma_x + \alpha_{12}\sigma_y + \alpha_{13}\sigma_z + \alpha_{14}\tau_{yz} + \alpha_{15}\tau_{xz} + \alpha_{16}\tau_{xy}; \\
\varepsilon_y &= \alpha_{21}\sigma_x + \alpha_{22}\sigma_y + \alpha_{23}\sigma_z + \alpha_{24}\tau_{yz} + \alpha_{25}\tau_{xz} + \alpha_{26}\tau_{xy}; \\
\varepsilon_z &= \alpha_{31}\sigma_x + \alpha_{32}\sigma_y + \alpha_{33}\sigma_z + \alpha_{34}\tau_{yz} + \alpha_{35}\tau_{xz} + \alpha_{36}\tau_{xy}; \\
\gamma_{yz} &= \alpha_{41}\sigma_x + \alpha_{42}\sigma_y + \alpha_{43}\sigma_z + \alpha_{44}\tau_{yz} + \alpha_{45}\tau_{xz} + \alpha_{46}\tau_{xy}; \\
\gamma_{xz} &= \alpha_{51}\sigma_x + \alpha_{52}\sigma_y + \alpha_{53}\sigma_z + \alpha_{54}\tau_{yz} + \alpha_{55}\tau_{xz} + \alpha_{56}\tau_{xy}; \\
\gamma_{xy} &= \alpha_{61}\sigma_x + \alpha_{62}\sigma_y + \alpha_{63}\sigma_z + \alpha_{64}\tau_{yz} + \alpha_{65}\tau_{xz} + \alpha_{66}\tau_{xy}.
\end{aligned} \tag{4.3}$$

Коэффициенты $\alpha_{11}, \alpha_{12}, \dots, \alpha_{66}$ - являются упругими постоянными в случае анизотропного материала. Для общего случая число упругих постоянных равно 21.

Рассмотрим несколько важных случаев, определяемых строением материала:

Материал обладает плоскостью упругой симметрии, т.е. через каждую точку можно провести плоскость, обладающую тем свойством, что любые два направления, симметричные относительно этой плоскости, являются эквивалентными относительно упругих свойств. Если направить ось z перпендикулярно к плоскости упругой симметрии, то обобщенный закон Гука запишется в более упрощенном виде:

$$\begin{aligned}
\varepsilon_x &= \alpha_{11}\sigma_x + \alpha_{12}\sigma_y + \alpha_{13}\sigma_z + \alpha_{16}\tau_{xy}; \\
\varepsilon_y &= \alpha_{21}\sigma_x + \alpha_{22}\sigma_y + \alpha_{23}\sigma_z + \alpha_{26}\tau_{xy}; \\
\varepsilon_z &= \alpha_{31}\sigma_x + \alpha_{32}\sigma_y + \alpha_{33}\sigma_z + \alpha_{36}\tau_{xy}; \\
\gamma_{yz} &= \alpha_{44}\tau_{yz} + \alpha_{45}\tau_{xz}; \\
\gamma_{xz} &= \alpha_{54}\tau_{yz} + \alpha_{55}\tau_{xz}; \\
\gamma_{xy} &= a_{61}\sigma_x + a_{62}\sigma_y + a_{63}\sigma_z + a_{66}\tau_{xy};
\end{aligned} \tag{4.4}$$

$$a_{14} = a_{15} = a_{24} = a_{25} = a_{34} = a_{35} = a_{46} = a_{56} = 0.$$

Число независимых постоянных сокращается до 13.

В случае плоского напряженного состояния, когда отсутствуют все напряжения на площадке с нормалью по оси z , уравнения (2) упрощаются еще больше и выглядят так:

$$\begin{aligned}\varepsilon_x &= \alpha_{11}\sigma_x + \alpha_{12}\sigma_y + \alpha_{16}\tau_{xy}; \\ \varepsilon_y &= \alpha_{21}\sigma_x + \alpha_{22}\sigma_y + \alpha_{26}\tau_{xy}; \\ \gamma_{xy} &= \alpha_{61}\sigma_x + \alpha_{62}\sigma_y + \alpha_{66}\tau_{xy}.\end{aligned}\quad (4.5)$$

Материал обладает тремя плоскостями упругой симметрии, т.е. через каждую точку можно провести три взаимно перпендикулярные плоскости упругой симметрии, обозначив нормали к ним цифрами 1, 2, 3. В этом случае обобщенный закон Гука выглядит так:

$$\begin{aligned}\varepsilon_1 &= \alpha_{11}\sigma_x + \alpha_{12}\sigma_y + \alpha_{13}\sigma_z; \\ \varepsilon_2 &= \alpha_{21}\sigma_x + \alpha_{22}\sigma_y + \alpha_{23}\sigma_z; \\ \varepsilon_3 &= \alpha_{31}\sigma_x + \alpha_{32}\sigma_y + \alpha_{33}\sigma_z; \\ \gamma_{23} &= \alpha_{44}\tau_{23}. \\ \gamma_{13} &= \alpha_{55}\tau_{13}. \\ \gamma_{12} &= \alpha_{66}\tau_{xy}.\end{aligned}\quad (4.6)$$

Число независимых постоянных становится равным 9. Такое тело называется ортогонально анизотропным, или, короче, ортотропным.

Уравнения (4) можно переписать, используя известные упругие постоянные материала. Обозначим цифрами 1, 2, 3 – главные оси ортотропии:

$$\begin{aligned}\varepsilon_1 &= \frac{1}{E_1}\sigma_1 - \frac{\nu_{21}}{E_2}\sigma_2 - \frac{\nu_{31}}{E_3}\sigma_3; \\ \varepsilon_2 &= -\frac{\nu_{12}}{E_1}\sigma_1 + \frac{1}{E_2}\sigma_2 - \frac{\nu_{32}}{E_3}\sigma_3; \\ \varepsilon_3 &= -\frac{\nu_{13}}{E_1}\sigma_1 - \frac{\nu_{23}}{E_2}\sigma_2 + \frac{1}{E_3}\sigma_3; \\ \gamma_{23} &= \frac{1}{G_{23}}\tau_{23};\end{aligned}\quad (4.7)$$

$$\gamma_{13} = \frac{1}{G_{13}} \tau_{13};$$

$$\gamma_{12} = \frac{1}{G_{12}} \tau_{12}.$$

Здесь E_1, E_2, E_3 – модули упругости материала в трех взаимно перпендикулярных направлениях по осям упругой симметрии (главным осям ортотропии),

ν_{ij} – коэффициенты влияния деформаций по направлению i на деформации по направлению j , при этом соблюдается отношение:

$$\frac{\nu_{21}}{E_2} = \frac{\nu_{12}}{E_1}$$

G_{12}, G_{13}, G_{23} – модули сдвига в плоскостях упругой симметрии.

Ниже приводятся зависимости для случая плоского напряженного состояния, когда отсутствуют все напряжения на площадке с нормалью по оси z :

$$\begin{aligned} \varepsilon_x &= \frac{1}{E_x} \sigma_x - \frac{\nu_{yx}}{E_y} \sigma_y; \\ \varepsilon_y &= -\frac{\nu_{xy}}{E_x} \sigma_x + \frac{1}{E_y} \sigma_y; \\ \gamma_{xy} &= \frac{1}{G_{xy}} \tau_{xy}. \end{aligned} \quad (4.8)$$

В случае, если ортогональные оси x_1, y_1 повернуты относительно главных осей x, y на некоторый угол α зависимость между линейными деформациями и нормальными напряжениями становится более сложной:

$$\begin{aligned} \varepsilon_{x_1} &= \frac{1}{E_{x_1}} \sigma_{x_1} - \frac{\nu_{y_1x_1}}{E_{y_1}} \sigma_{y_1} + \frac{\eta_{1\tau}}{G_{x_1y_1}} \tau_{x_1y_1}; \\ \varepsilon_{y_1} &= -\frac{\nu_{x_1y_1}}{E_{x_1}} \sigma_{x_1} + \frac{1}{E_{y_1}} \sigma_{y_1} + \frac{\eta_{2\tau}}{G_{x_1y_1}} \tau_{x_1y_1}; \\ \gamma_{x_1y_1} &= \frac{\eta_{1\sigma}}{E_{x_1}} \sigma_{x_1} + \frac{\eta_{2\sigma}}{E_{y_1}} \sigma_{y_1} + \frac{1}{G_{x_1y_1}} \tau_{x_1y_1}. \end{aligned} \quad (4.9)$$

Здесь ε_{x1} , ε_{y1} – относительные удлинения (линейные деформации) в направлении действия нормальных напряжений σ

γ_{x1y1} – относительный сдвиг (сдвиговая деформация) или величина изменения прямого угла между площадками, на которых действуют соответствующие касательные напряжения;

E_{x1} , E_{y1} , G_{x1y1} – соответственно модули упругости и сдвига;

ν_{ij} , – коэффициенты влияния линейной деформаций по направлению i на линейную деформацию по направлению j , при этом соблюдается отношение:

$$\frac{\nu_{y1x1}}{E_{y1}} = \frac{\nu_{x1y1}}{E_{x1}}$$

$\eta_{i\sigma}$, – коэффициенты влияния линейной деформации на сдвиговую деформацию по направлению i ;

$\eta_{i\tau}$, – коэффициенты влияния сдвиговой деформаций на линейную деформацию по направлению i , при этом соблюдается отношения:

$$\frac{\eta_{1\sigma}}{E_{x1}} = \frac{\eta_{1\tau}}{G_{x1y1}} \quad \text{и} \quad \frac{\eta_{2\sigma}}{E_{y1}} = \frac{\eta_{2\tau}}{G_{x1y1}}.$$

Приведенные зависимости показывают, что в анизотропных материалах нормальные напряжения вызывают не только продольные, но и сдвиговые деформации, а касательные напряжения могут быть причиной не только появления сдвигов, но и продольных деформаций. Это положение легко пояснить, рассмотрев случай простого одноосного растяжения анизотропного материала в направлении произвольной оси x_1 :

$$\varepsilon_x = \frac{\sigma_x}{E_x}; \quad \varepsilon_y = -\frac{\nu_{xy}}{E_x} \sigma_x; \quad \gamma_{xy} = \frac{\eta_{xy}}{E_x} \sigma_x \quad (4.10)$$

Эти формулы иллюстрируются рисунком 2а, где нормальные напряжения, действующие в произвольном направлении, вызывают не только продольные, но и сдвиговые деформации и рисунком 2б, на котором изображено влияние касательных напряжений на появление продольных деформаций.

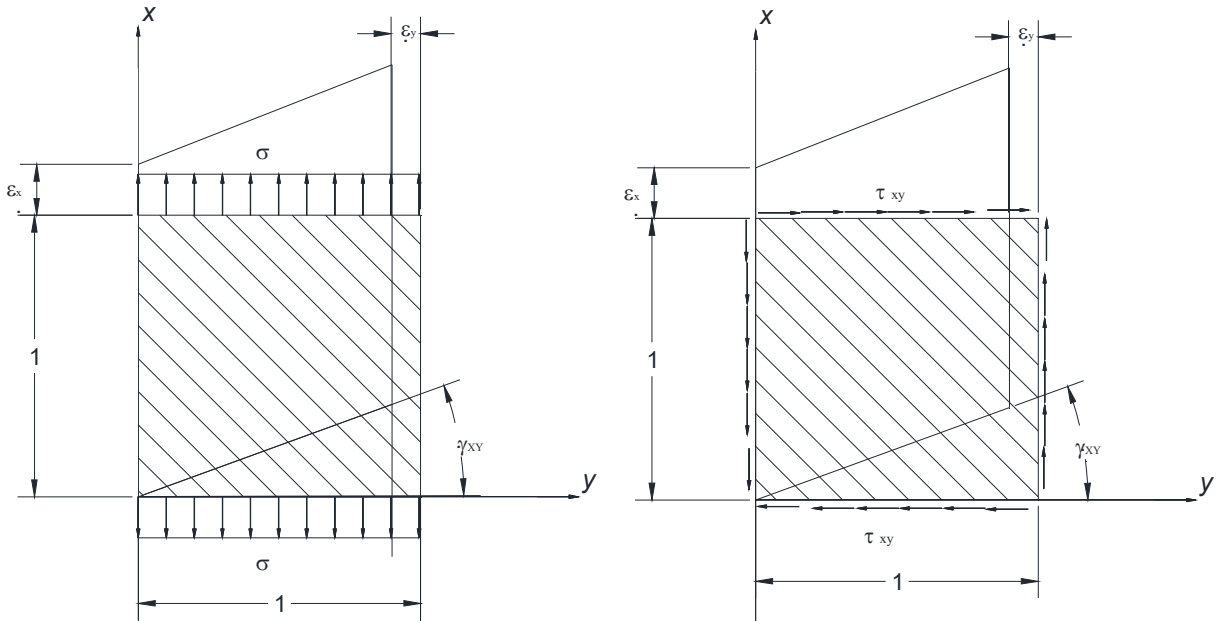


Рис.4.2. Схема деформирования плоского анизотропного элемента (каждая сторона равна единице) при повороте осей на угол α к оси симметрии.

а) при одноосном растяжении, б) при чистом сдвиге.

4.5 Поворот осей. Примеры анизотропных материалов.

Возвращаясь к уравнениям (9) следует указать, что приведенные в них упругие постоянные изменяются при повороте осей на угол α от главных на произвольные. Так модуль упругости вдоль оси x_1 изменяется по следующей зависимости:

$$\frac{1}{E_{x_1}} = \frac{\cos^4 \alpha}{E_1} + \left(\frac{1}{G} - \frac{2\nu_1}{E_1} \right) \sin^2 \alpha \cdot \cos^2 \alpha + \frac{\sin^4 \alpha}{E_2}$$

$$\frac{1}{E_{y_1}} = \frac{\sin^4 \alpha}{E_1} + \left(\frac{1}{G} - \frac{2\nu_1}{E_1} \right) \sin^2 \alpha \cdot \cos^2 \alpha + \frac{\cos^4 \alpha}{E_2} \quad (4.11)$$

$$\frac{1}{G_{x_1 y_1}} = \frac{1}{G} + \left(\frac{1+\nu_1}{E_1} + \frac{1+\nu_2}{E_2} - \frac{1}{G} \right) \sin^2 2\alpha$$

$$\nu_{y_1} = E_{x_1} \left[\frac{\nu_1}{E_1} - \frac{1}{4} \left(\frac{1+\nu_1}{E_1} + \frac{1+\nu_2}{E_2} - \frac{1}{G} \right) \sin^2 2\alpha \right] \quad \nu_{x_1} = \nu_{y_1} \frac{E_{x_1}}{E_{y_1}}$$

$$\eta_{1\sigma} = E_{x_1} \left[\frac{\sin^2 \alpha}{E_2} - \frac{\cos^2 \alpha}{E_1} + \frac{1}{2} \left(\frac{1}{G} - \frac{2\nu_1}{E_1} \right) \cos 2\alpha \right] \sin 2\alpha$$

$$\eta_{2\sigma} = E_{y1} \left[\frac{\cos^2 \alpha}{E_2} - \frac{\sin^2 \alpha}{E_1} - \frac{1}{2} \left(\frac{1}{G} - \frac{2\nu_1}{E_1} \right) \cos 2\alpha \right] \sin 2\alpha$$

Профессором Глухих В.Н. [32] было замечено, что при повороте координатных осей постоянные упругости могут иметь 2 или 3 экстремума. Для этих случаев были определены следующие зависимости:

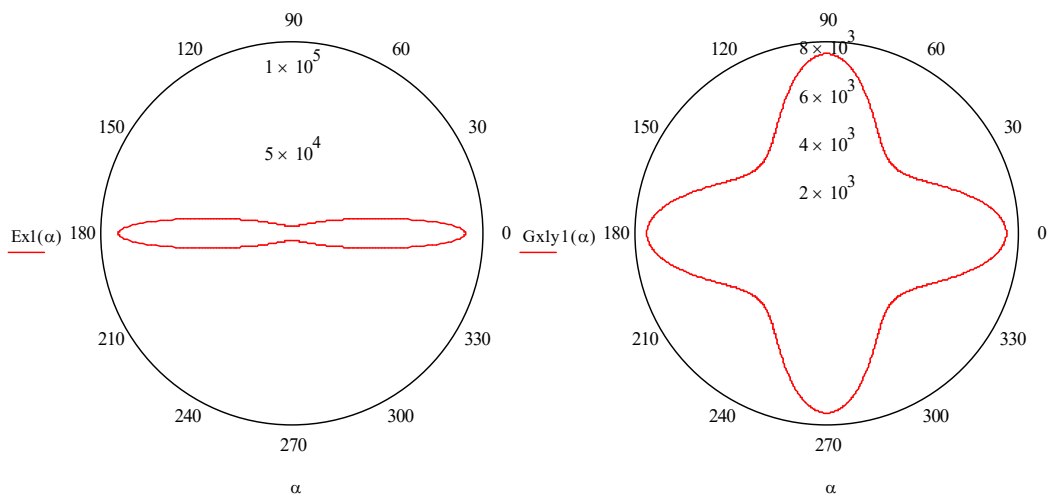
$$B_{(1)} = 3 - a^2$$

$$B_{(2)} = \frac{1 + 5a^2}{3}$$

Далее показаны примеры, как изменяются модули упругости и сдвига при повороте осей для различных композитных материалов:

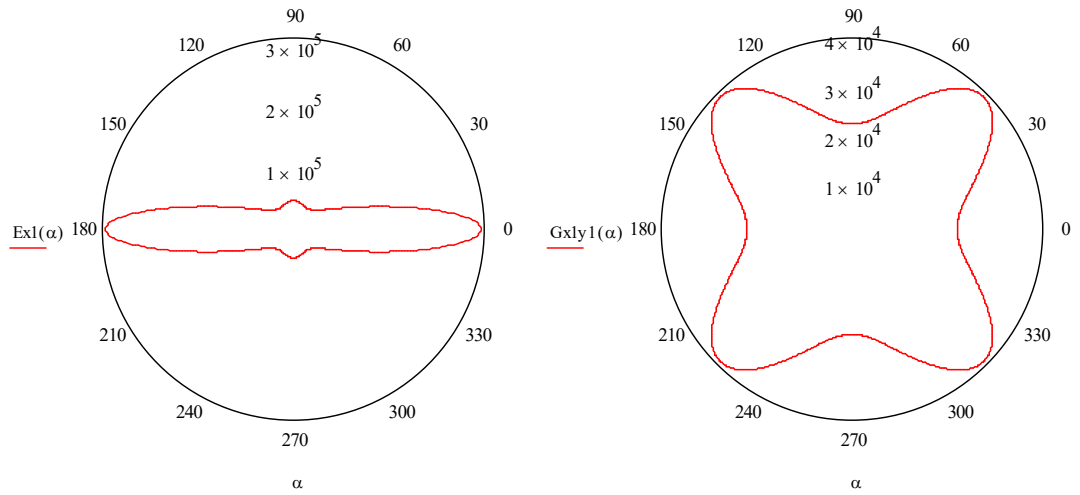
1. Натуральная древесина

$$E_1 = 1 \cdot 10^5 \text{ кг/см}^2, \quad E_2 = 0,042 \cdot 10^5 \text{ кг/см}^2, \quad \nu_2 = 0,01, \quad G_{12} = 0,075 \cdot 10^5 \text{ кг/см}^2$$



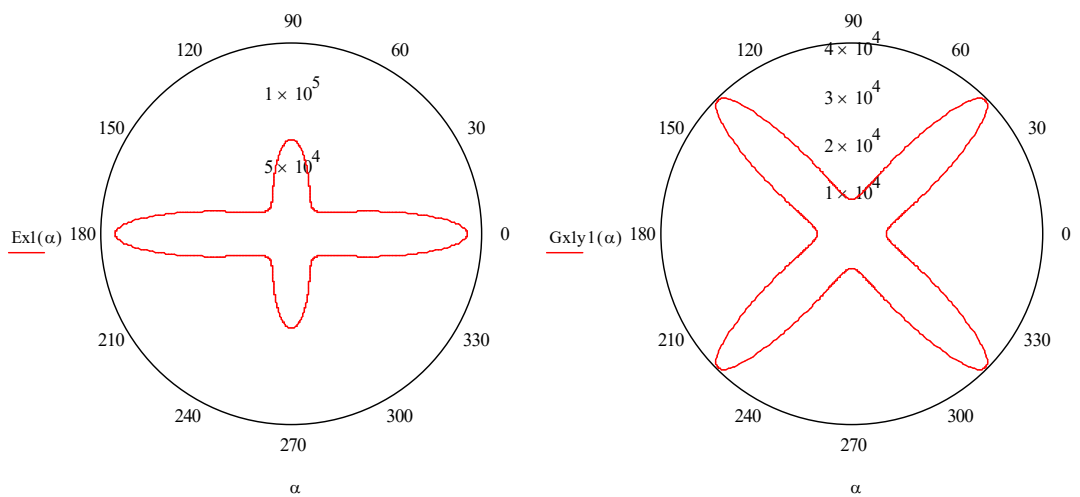
2. Дельта-древесина

$$E_1 = 3,05 \cdot 10^5 \text{ кг/см}^2, \quad E_2 = 0,467 \cdot 10^5 \text{ кг/см}^2, \quad \nu_2 = 0,02, \quad G_{12} = 0,22 \cdot 10^5 \text{ кг/см}^2$$



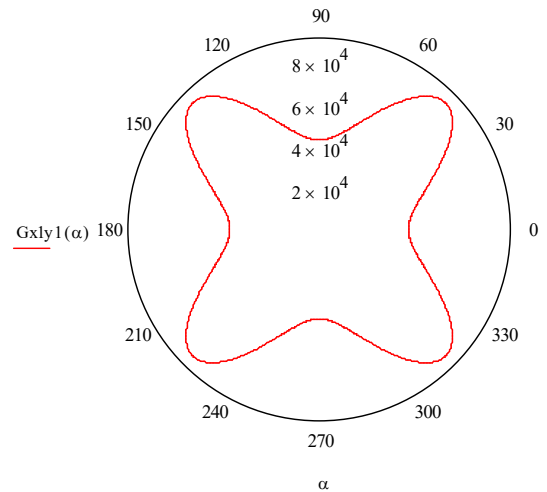
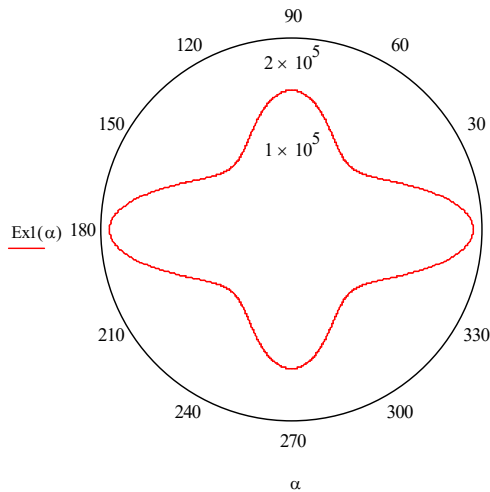
3. Фанера

$$E_1 = 1,2 \cdot 10^5 \text{ кг/см}^2, \quad E_2 = 0,644 \cdot 10^5 \text{ кг/см}^2, \quad \nu_2 = 0,044, \quad G_{12} = 0,072 \cdot 10^5 \text{ кг/см}^2$$



4. Стеклопластик АГ-4с

$$E_1 = 2,1 \cdot 10^5 \text{ кг/см}^2, \quad E_2 = 1,6 \cdot 10^5 \text{ кг/см}^2, \quad \nu_2 = 0,07, \quad G_{12} = 0,42 \cdot 10^5 \text{ кг/см}^2$$

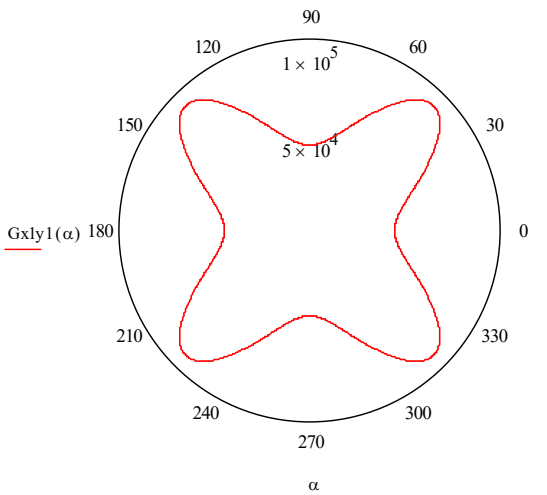
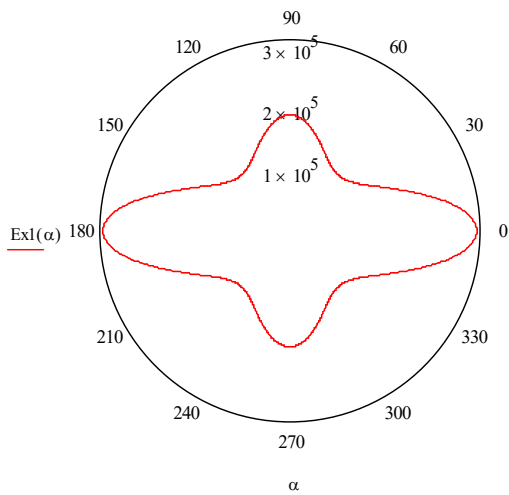


5. СВММ

$$E_1 = 3,05 \cdot 10^5 \text{ кг/см}^2, \\ = 0,49 \cdot 10^5 \text{ кг/см}^2$$

$$E_2 = 1,88 \cdot 10^5 \text{ кг/см}^2,$$

$$\nu_2 = 0,12, \quad G_{12}$$

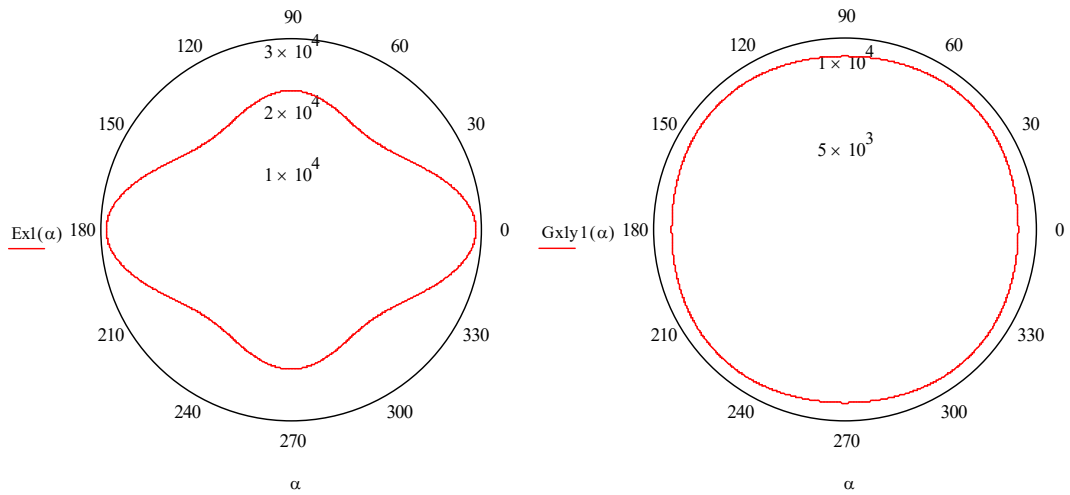


6. Бумага

$$E_1 = 30,1 \cdot 10^3 \text{ кг/см}^2, \\ = 9,96 \cdot 10^3 \text{ кг/см}^2$$

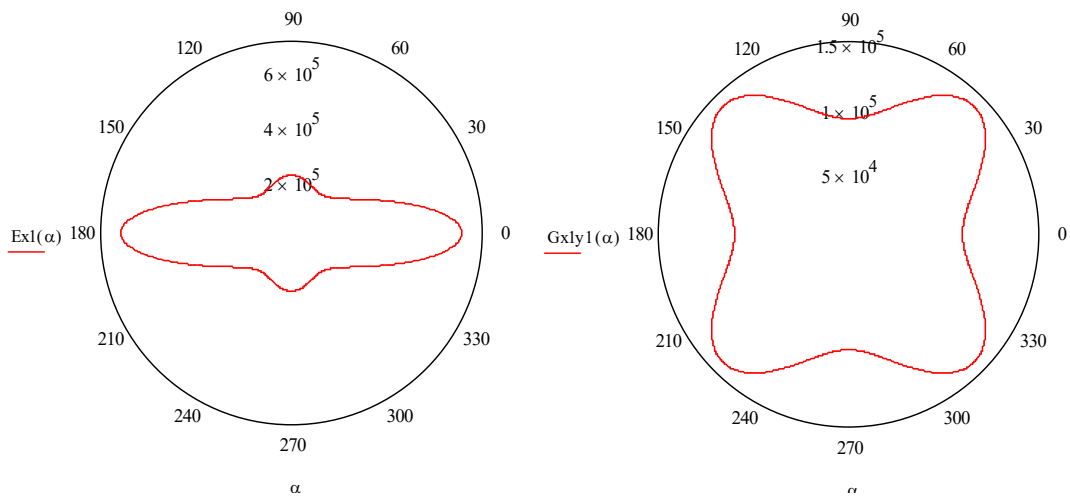
$$E_2 = 22,6 \cdot 10^3 \text{ кг/см}^2,$$

$$\nu_2 = 0,23, \quad G_{12}$$



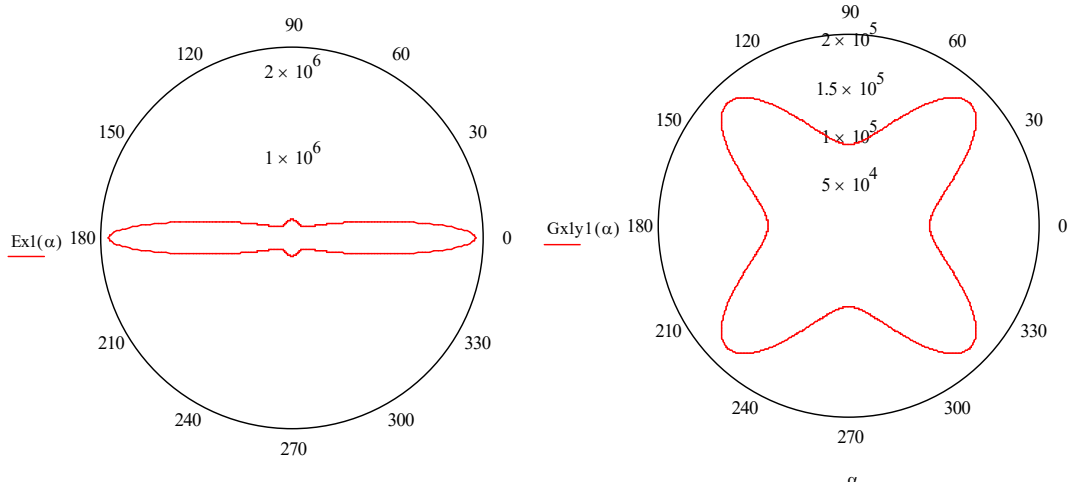
7. S – стекло-эпоксидная смола

$$E_1 = 6,25 \cdot 10^5 \text{ кг/см}^2, \quad E_2 = 2,12 \cdot 10^5 \text{ кг/см}^2, \quad \nu_2 = 0,251, \quad G_{12} = 0,9 \cdot 10^5 \text{ кг/см}^2$$



8. Narmco 5505 бор-эпоксидная смола

$$E_1 = 21,1 \cdot 10^5 \text{ кг/см}^2, \quad E_2 = 2,11 \cdot 10^5 \text{ кг/см}^2, \quad \nu_2 = 0,35, \quad G_{12} = 0,85 \cdot 10^5 \text{ кг/см}^2$$



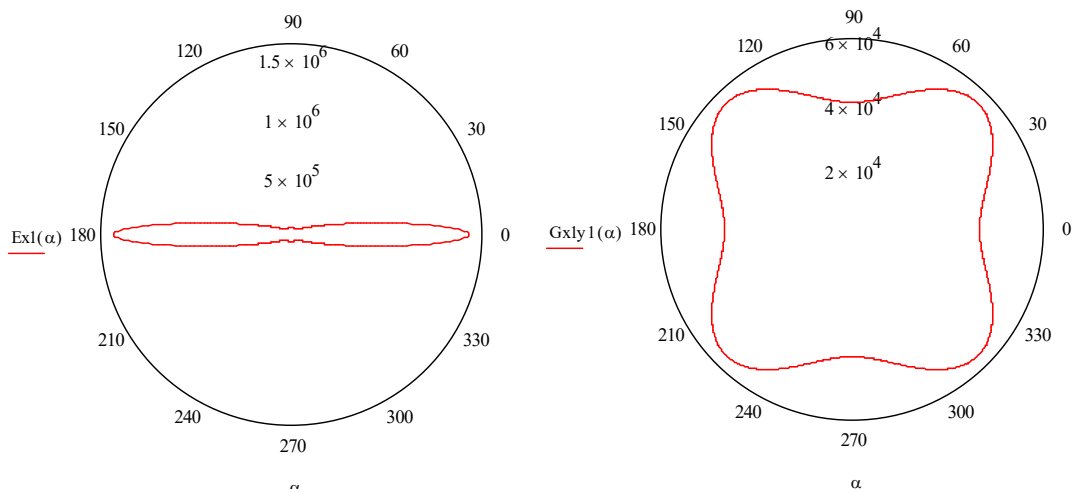
9. Thornel 50-E798 эпоксидная смола

$$E_1 = 14,9 \cdot 10^5 \text{ кг/см}^2, \\ = 0,31 \cdot 10^5 \text{ кг/см}^2$$

$$E_2 = 0,6 \cdot 10^5 \text{ кг/см}^2,$$

$$\nu_2 = 0,4,$$

$$G_{12}$$



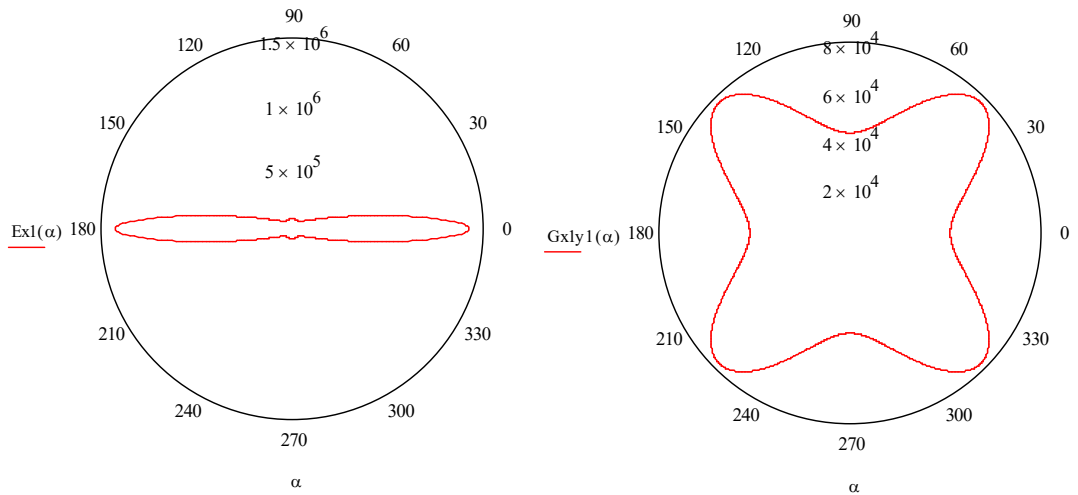
10. Morganite 11-2387 эпоксидная смола

$$E_1 = 13,9 \cdot 10^5 \text{ кг/см}^2, \\ = 0,42 \cdot 10^5 \text{ кг/см}^2$$

$$E_2 = 0,85 \cdot 10^5 \text{ кг/см}^2,$$

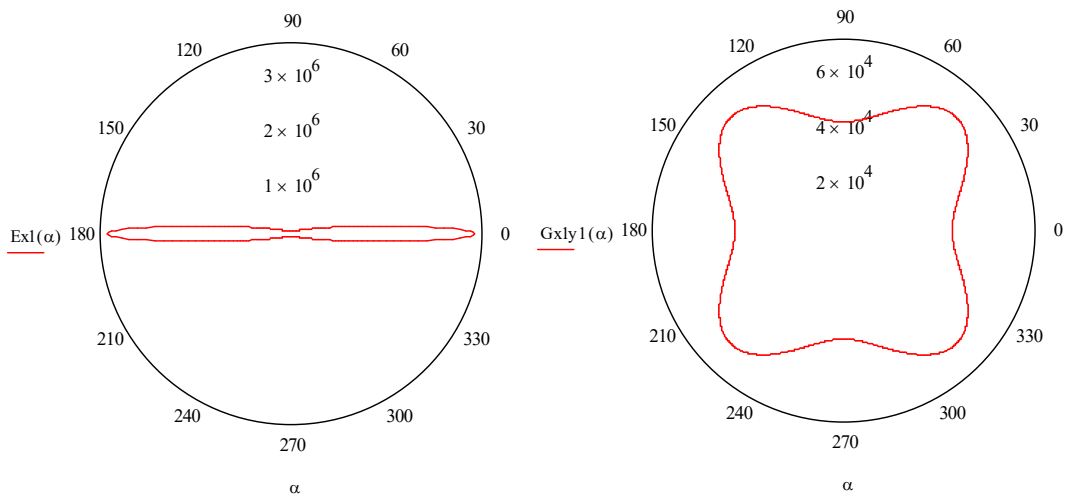
$$\nu_2 = 0,3,$$

$$G_{12}$$



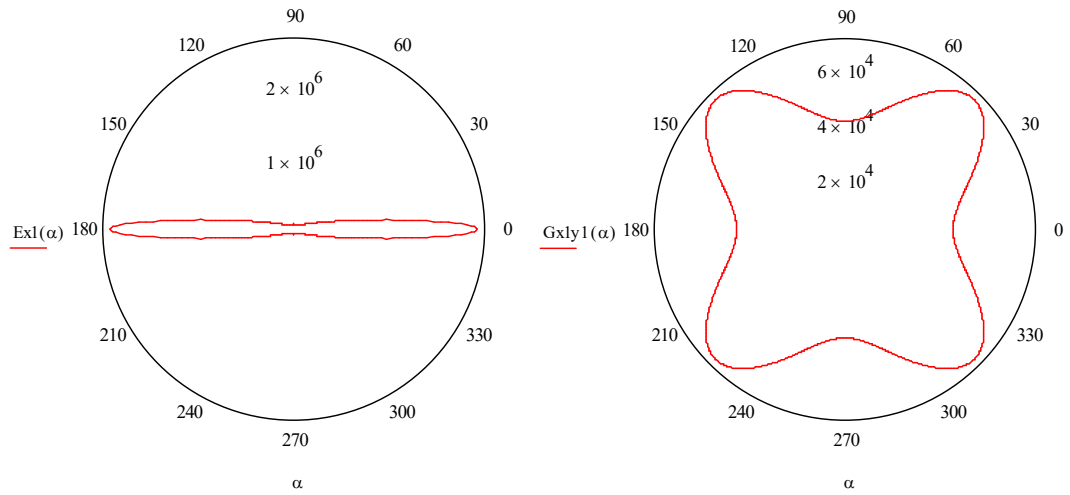
11. Углепластик М60J/Ероху

$$E_1 = 33,64 \cdot 10^5 \text{ кг/см}^2, \quad E_2 = 0,6 \cdot 10^5 \text{ кг/см}^2, \quad \nu_2 = 0,32, \quad G_{12} = 0,4 \cdot 10^5 \text{ кг/см}^2$$



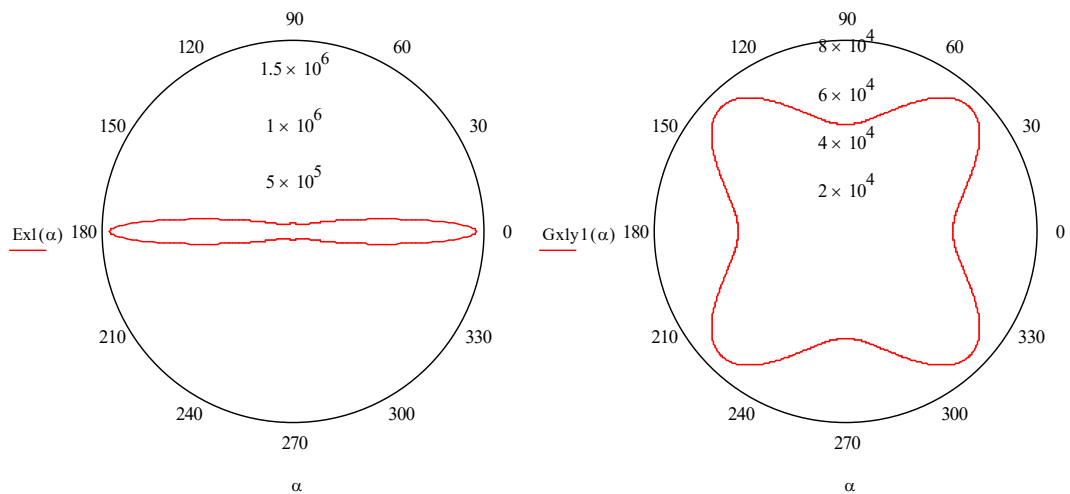
12. Углепластик М46J/Ероху

$$E_1 = 24,97 \cdot 10^5 \text{ кг/см}^2, \quad E_2 = 0,7 \cdot 10^5 \text{ кг/см}^2, \quad \nu_2 = 0,32, \quad G_{12} = 0,4 \cdot 10^5 \text{ кг/см}^2$$



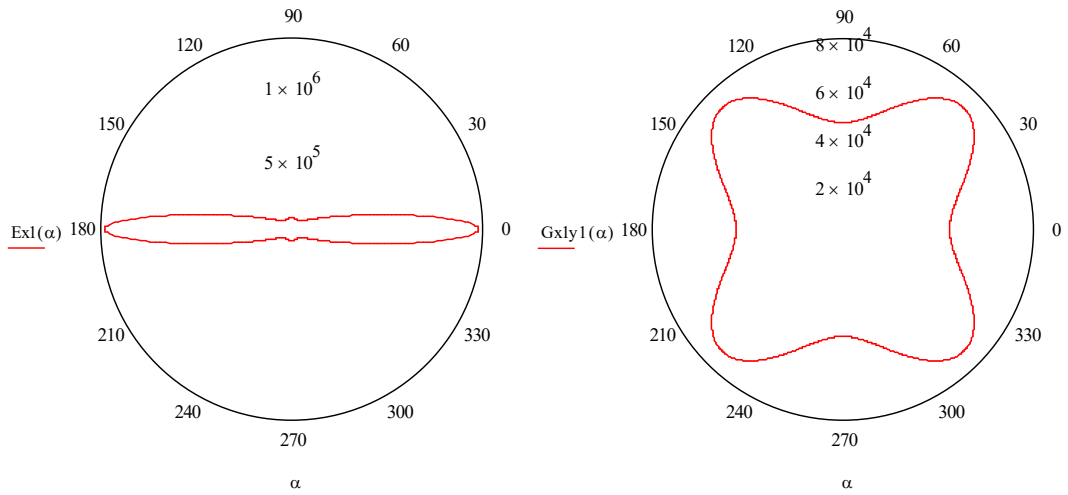
13. Углепластик Т800Н/Ероху

$$E_1 = 16,31 \cdot 10^5 \text{ кг/см}^2, \quad E_2 = 0,795 \cdot 10^5 \text{ кг/см}^2, \quad \nu_2 = 0,34, \quad G_{12} = 0,45 \cdot 10^5 \text{ кг/см}^2$$



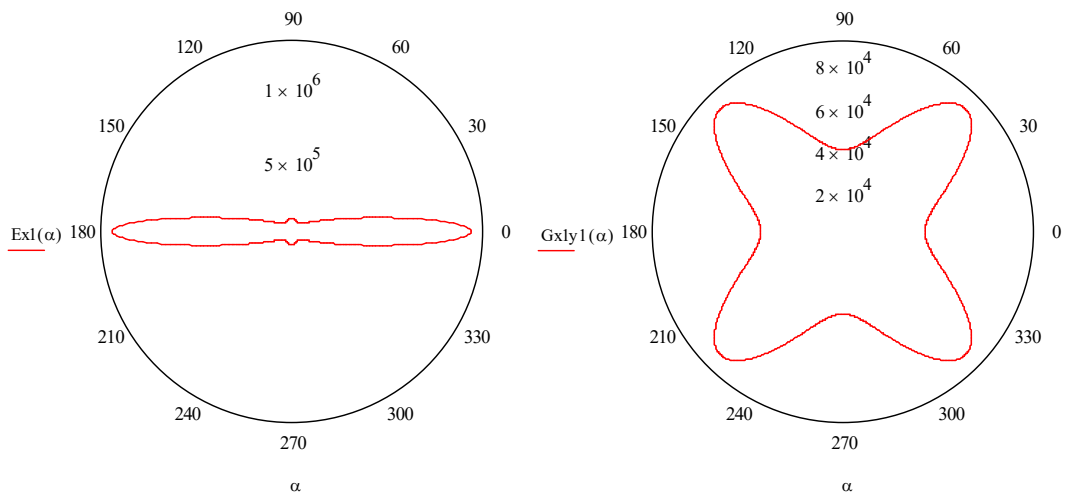
14. Углепластик Т300Н/Ероху

$$E_1 = 12,74 \cdot 10^5 \text{ кг/см}^2, \quad E_2 = 0,795 \cdot 10^5 \text{ кг/см}^2, \quad \nu_2 = 0,34, \quad G_{12} = 0,45 \cdot 10^5 \text{ кг/см}^2$$



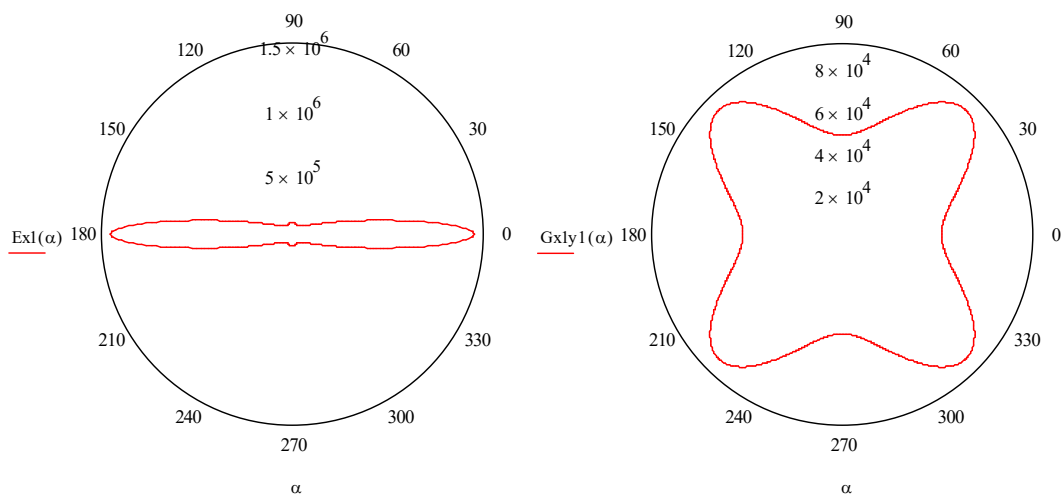
15. Углепластик УКН5000/ЭХД-МК

$$E_1 = 12,23 \cdot 10^5 \text{ кг/см}^2, \quad E_2 = 0,92 \cdot 10^5 \text{ кг/см}^2, \quad \nu_2 = 0,3, \quad G_{12} = 0,387 \cdot 10^5 \text{ кг/см}^2$$



16. Углепластик ЛУ-П/ЭНФБ

$$E_1 = 14,27 \cdot 10^5 \text{ кг/см}^2, \quad E_2 = 0,98 \cdot 10^5 \text{ кг/см}^2, \quad \nu_2 = 0,3, \quad G_{12} = 0,47 \cdot 10^5 \text{ кг/см}^2$$



Следует обратить внимание, что по направлению армирующих волокон модуль упругости достигает максимального значения, при этом модуль сдвига достигает своего максимума при угле $\pi/4$.

4.6. Прочность анизотропных материалов

Для анизотропных материалов прочностные характеристики также меняются в зависимости от направления, как и упругие характеристики. Кроме того при описании прочности анизотропного материала следует учитывать различие пределов прочности при растяжении и сжатии по каждому направлению. В таком материале в зависимости от ориентации волокон могут возникать неожиданные ситуации, представленные на рис.4.3.

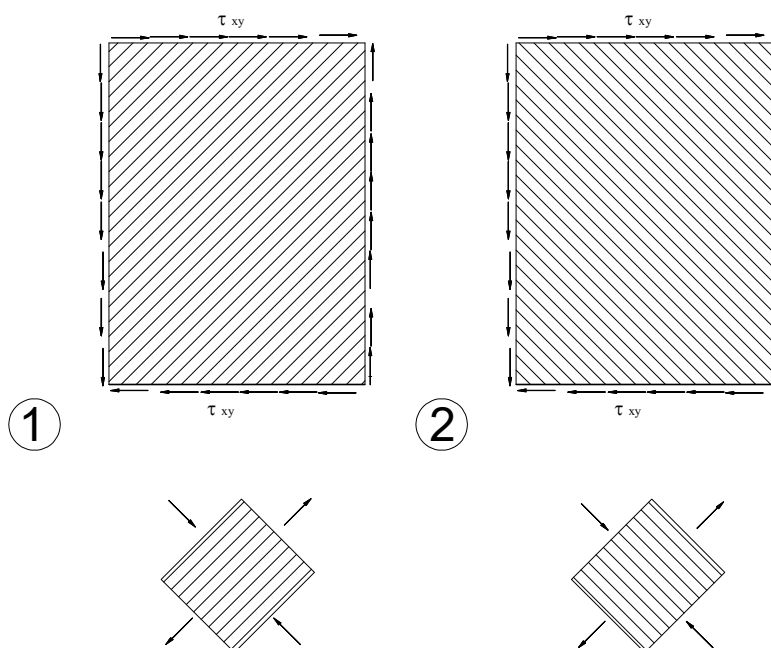


Рис.4.3. Влияние касательных напряжений на работу составляющих композита.

Под действием одинаково ориентированных касательных напряжений в первом случае армирующие волокна растянуты, матрица сжата, во втором наоборот, матрица растянута, а волокна сжаты.

В таких ситуациях обычные, классические теории прочности становится практически неприменимыми.

Для построения теорий прочности анизотропного материала требуются дополнительные экспериментальные данные о поведении образцов. Обычного испытания образца на растяжение (сжатие) для получения данных об опасных напряжениях (например, пределе прочности для хрупкого материала) становится явно недостаточно. Если опытным путем определить пределы прочности σ_{B1} и σ_{B2} композиционного материала в двух взаимно перпендикулярных направлениях, соответствующих главным осям ортотропии, а также предел прочности при сдвиге между теми же осями τ_{B12} , можно определить пределы прочности по другим направлениям - под углом α к главным осям, - используя теорию прочности Хилла (теорию максимальных работ):

$$\sigma = 1 / \left[\sqrt{\frac{\cos^2 \alpha}{\sigma_{B1}^2} + \left(\frac{1}{\tau_{B12}^2} - \frac{1}{\sigma_{B1}^2} \right) \cos^2 \alpha \cdot \sin^2 \alpha + \frac{\sin^2 \alpha}{\sigma_{B2}^2}} \right] \quad (4.12)$$

Эта теория прочности хорошо подтверждается экспериментально для материалов, у которых предел прочности при растяжении незначительно отличается от предела прочности при сжатии.

4.7. Выбор актуального материала для численных расчетов

В работе исследованы и приведены упругие характеристики большого количества материалов. Рассматривались как природные материалы, например, древесина, так и современные углепластики и прочее. Научный интерес представляли материалы, которые имеют значительное изменение модуля упругости, при повороте осей. Поэтому для численных исследований и апробации предложенного алгоритма решения был выбран углепластик марки

М60J/Ероху, широко применяемый в современных строительных решениях. Композит имеет следующие характеристики: $E_1 = 330$ ГПа; $E_2 = 5,9$ ГПа; $\nu_2 = 0,32$; $G_{12} = 3,9$ ГПа.

Предел прочности:

- при растяжении в продольном направлении $\sigma_{B1}^+ = 1760$ МПа
- при сжатии в продольном направлении $\sigma_{B1}^- = 780$ МПа
- при растяжении в поперечном направлении $\sigma_{B2}^+ = 30$ МПа
- при сжатии в поперечном направлении $\sigma_{B2}^- = 168$ МПа
- при сдвиге $\tau_{B12} = 39$ МПа

Приняв в расчет минимальные характеристики предела прочности продольного и поперечного направления можно построить диаграмму предела прочности в зависимости от угла по формуле (4.12) (рис. 4.4)

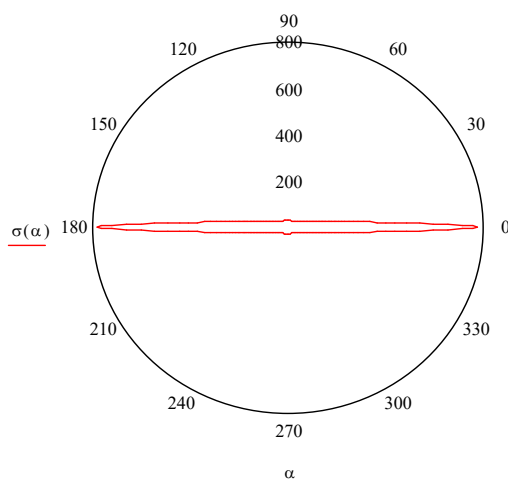


Рис. 4.4. Полярная диаграмма предела прочности

Глава 5. ИТЕРАЦИОННЫЙ СПОСОБ ОПРЕДЕЛЕНИЯ НДС АНИЗОТРОПНОЙ БАЛКИ РАБОТАЮЩЕЙ НА ИЗГИБ.

Рассмотрена применимость метода итераций к расчету анизотропных конструкций на примере однопролетной балки, работающей на изгиб.

5.1 Выбор актуального материала для численных расчетов.

Различные вариации углепластиков широко применяются в различных отраслях. Ведущие производители самолетов являются основными покупателями углеволокна. Фюзеляжи самолетов, произведенные компаниями «Боинг» и «Эйрбас», более чем на 50% состоят из композитов. Углепластики обладают высокими характеристиками прочности и жесткости.

Для численного примера возьмем углепластик, о котором говорилось в пункте 4.7, марки М60J/Ероху [79].

На рис.5.1 показаны полярные диаграммы зависимости модулей упругости и сдвига от угла поворота.

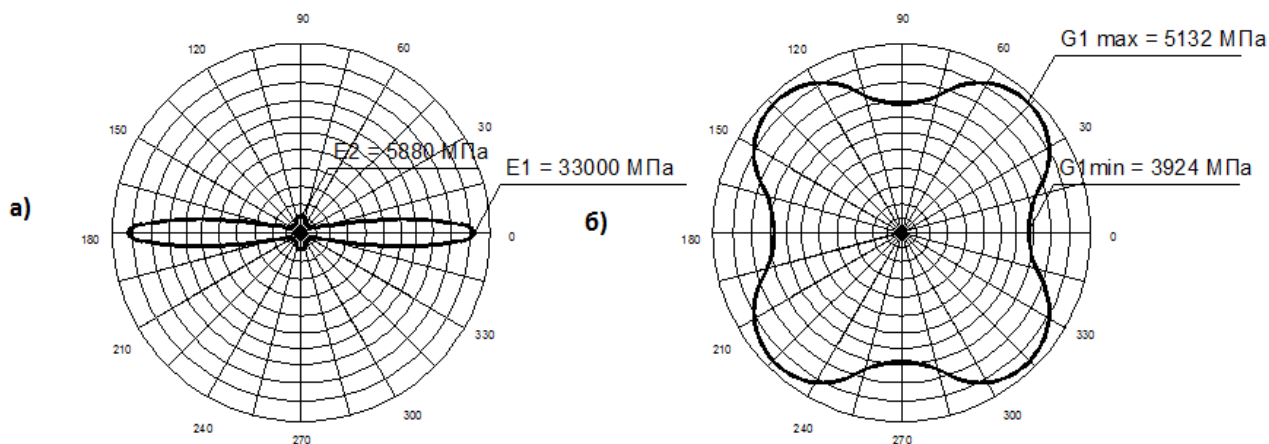


Рис.5.1. Значение модуля при различных углах анизотропии для углепластика М60J/Ероху:

- а) продольной упругости;
- б) сдвига

5.2. Итерационный способ расчета анизотропной балки на прочность.

Итерационный способ был модифицирован, для того чтобы добавить возможность рассчитывать элементы из анизотропных материалов. При этом направление главных осей анизотропии может отличаться от осей исследуемого стержня.

В главе приведено решение задачи по определению напряженно-деформированного состояния анизотропной балки на двух опорах работающей на изгиб методом итераций. Балка длиной L , шириной b и высотой h схематично показана на рис. 5.2. Координатные оси начинаются у левой опоры в центре тяжести балки. Ось X_1 направлена вдоль балки, ось Y_1 направлена по высоте балки. По верхней грани балки приложена равномерно распределенная нагрузка q . Направление армирования отличается от оси X_1 на угол α .

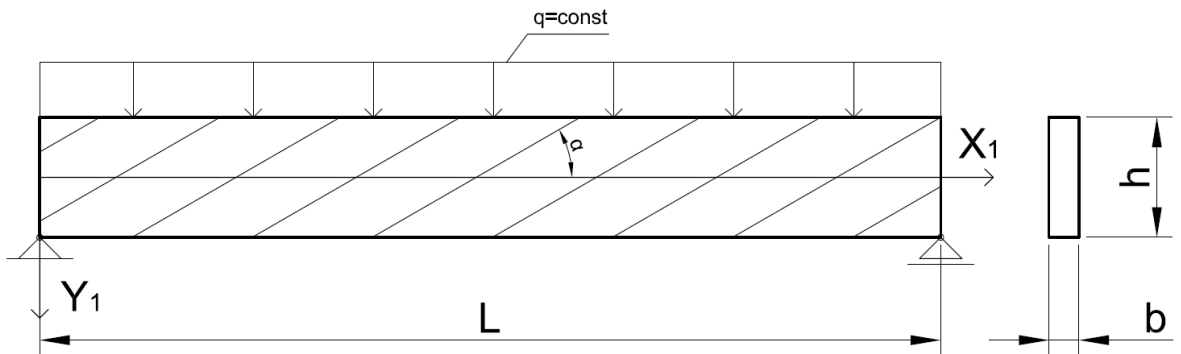


Рис. 5.2. Расчетная схема анизотропной балки. Принятые оси координат.

Направление главных осей армирования.

Чтобы была возможность сравнить результаты с известным аналитическим способом расчета и с результатами полученными по методу конечных элементов принимаются следующие значения исходных данных:

$$L=3\text{м}; h=0,6\text{м}; b=0,1\text{м}; q=100\text{кН}; \alpha=30^\circ.$$

Для углепластика марки М60J/Ероху получены упругие постоянные по формуле (4.11), с учетом того что главные оси анизотропии отклоняются от оси X_1 на 30° . В итоге приняты следующие физические характеристики:

$$E_{x1}=16739,0\text{МПа}; E_{y1}= 6984,7\text{МПа}; G_{x1y1}= 5131,9\text{МПа}; \nu_{x1} = 0,26725; \nu_{y1} = 0,11152; \eta_{1\sigma}=1,4993; \eta_{2\sigma}= 0,38373.$$

С учетом того, что балка загружена постоянной по длине нагрузкой, функция изгибающего момента примет следующий вид:

$$M(x) = \frac{qx}{2}(L-x).$$

Функция продольной силы постоянна и равна нулю: $N(x) = 0$.

Первый цикл.

1.1. В соответствии с гипотезами отсутствия сдвигов и не надавливания деформации $\varepsilon_y(x, y)$ и $\gamma(x, y)$ равны нулю.

1.2. По гипотезе плоских сечений, деформации ε_x имеют линейный вид:

$$\varepsilon_x(x, y) = \varepsilon_0(x) + \chi(x) \cdot y \quad (5.5)$$

где $\varepsilon_0(x)$ и $\chi(x)$ неизвестные функции физического смысла которых можно описать как продольную деформацию и кривизну соответственно.

1.3. По линейному закону Гука переходим к нормальным напряжениям. В расчет берем модуль упругости E_{x1} , который соответствует направлению оси X_1 . На данном этапе считается изотропный вариант задачи:

$$\sigma_x(x, y) = E_{x1} \cdot \varepsilon_x(x, y) = E_{x1}(\varepsilon_0(x) + \chi(x) \cdot y) \quad (5.6)$$

1.4. Значения функций $\varepsilon_0(x)$ и $\chi(x)$ находятся из условия равновесия,

$$\begin{aligned} N(x) &= \int_A \sigma_x(x, y) dA = E_{x1} b \int_{-h/2}^{h/2} (\varepsilon_0(x) + \chi(x) \cdot y) dy = \\ &= E_{x1} b \cdot \varepsilon_0(x) \cdot h = 0 \quad \rightarrow \varepsilon_0(x) = 0 \end{aligned} \quad (5.7)$$

$$\begin{aligned} M(x) &= \int_A (\sigma_x(x, y) \cdot y) dA = E_{x1} b \int_{-h/2}^{h/2} (\varepsilon_0(x) + \chi(x) \cdot y) \cdot y dy = \\ &= E_{x1} b \cdot \frac{h^3}{12} \chi(x) \quad \rightarrow \chi(x) = \frac{M(x)}{E_{x1} \cdot J_{x1}}; \quad \text{здесь } J_{x1} = b \cdot \frac{h^3}{12}. \end{aligned} \quad (5.8)$$

Функция нормальных напряжений может быть выражена через изгибающий момент в рамках первого цикла, когда задача считается изотропной:

$$\sigma_x(x, y) = \frac{M(x) \cdot y}{J_{x1}} \quad (5.9)$$

1.5. Далее находим функцию касательных напряжений с точностью до произвольной функции:

$$\frac{\partial \sigma_x(x, y)}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{yx}(x, y)}{\partial y} = 0 \quad (5.10)$$

$$\begin{aligned} \tau_{yx}(x, y) &= - \int \frac{\partial \sigma_x(x, y)}{\partial x} \cdot dy + \tau_0(x) = \\ &= - \int \frac{dM(x)}{dx \cdot J_{x1}} y dy + \tau_0(x) = - \frac{Q(x)}{J_{x1}} \frac{y^2}{2} + \tau_0(x). \quad \text{Здесь } Q(x) = \frac{dM(x)}{dx} \end{aligned} \quad (5.11)$$

1.6. Из условия, что на крайней фибре при $y = \frac{h}{2}$ касательные напряжения отсутствуют, получаем:

$$-\frac{6Q(x)}{bh^3}y^2 + \tau_0(x) = 0 \rightarrow \tau_0(x) = \frac{3}{2} \frac{Q(x)}{A}$$

$$\text{и } \tau(x, y) = \frac{3}{2} \frac{Q(x)}{A} \left(1 - \frac{4y^2}{h^2}\right). \quad \text{Здесь } A = bh. \quad (5.12)$$

1.7. Аналогично находятся нормальные напряжения поперечного направления с точностью до произвольной функции $\sigma_{y0}(x)$:

$$\frac{\partial \sigma_y(x, y)}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{yx}(x, y)}{\partial x} = 0; \quad (5.13)$$

$$\sigma_y(x, y) = -\int \frac{\partial \tau_{yx}(x, y)}{\partial x} \cdot dy + \sigma_{y0}(x) = -\int \frac{3 \cdot dQ(x)}{2 \cdot A \cdot dx} \left(1 - \frac{4y^2}{h^2}\right) dy + \sigma_{y0}(x) =$$

$$= \frac{3 \cdot q(x)}{2A} y \left(1 - \frac{4y^2}{3h^2}\right) + \sigma_{y0}(x). \quad \text{Здесь } q(x) = -\frac{dQ(x)}{dx}. \quad (5.14)$$

1.8. Напряжения $\sigma_y(x, y)$ по нижнему волокну $y = \frac{h}{2}$ отсутствуют или можно рассмотреть условие, когда напряжения по верхнему волокну зависят от заданной нагрузки:

$$\frac{3q(x)}{2A} \frac{h}{2} \left(1 - \frac{h^2}{3h^2}\right) + \sigma_{y0}(x) = 0 \rightarrow \sigma_{y0}(x) = -\frac{q(x)}{2 \cdot b} \quad (5.15)$$

$$\text{и } \sigma_y(x, y) = \frac{3q(x)}{2A} y \left(1 - \frac{4y^2}{3h^2}\right) - \frac{q(x)}{2b} = \frac{q(x)}{2b} \left(3 \frac{y}{h} + \frac{4y^3}{h^3} - 1\right).$$

Первый цикл заканчивается на этапе нахождения линейной функции нормальных напряжений, которая зависела от двух неизвестных. Данное решение повторяет классическое решение сопротивления материалов для изотропного стержня.

2. Второй цикл

2.1. Второй цикл начинается с определения поперечных деформаций по закону Гука для плоской анизотропной задачи. Деформации вдоль оси y - ε_y :

$$\varepsilon_y(x, y) = -\frac{\nu_{x1y1}}{E_{x1}} \sigma_x(x, y) + \frac{1}{E_{y1}} \sigma_y(x, y) + \frac{\eta_{2\sigma}}{E_{y1}} \tau_{yx}(x, y) \quad (5.16)$$

2.2. Вертикальные перемещения $V(x, y)$ определяются, как интегральная сумма деформаций $\varepsilon_y(x, y)$ с точностью до произвольной функции $V_0(x)$:

$$V(x, y) = \int_h \varepsilon_y(x, y) \cdot dy + V_0(x) \quad (5.17)$$

2.3. Деформации сдвига определяются по обобщенному закону Гука (3) и зависят не только от касательных напряжений но и от нормальных напряжений в том числе:

$$\gamma_{xy} = \frac{\eta_{1\sigma}}{E_{x1}} \sigma_x(x, y) + \frac{\eta_{2\sigma}}{E_{y1}} \sigma_y(x, y) + \frac{1}{G_{x1y1}} \tau_{yx}(x, y) \quad (5.18)$$

2.4. Функция продольных деформаций $\varepsilon_x(x, y)$ принимает нелинейный вид:

$$\begin{aligned} \gamma_{xy} &= \frac{\partial W}{\partial y} + \frac{\partial V}{\partial x}; \\ \frac{\partial \gamma_{xy}}{\partial x} &= \frac{\partial W}{\partial y \partial x} + \frac{\partial^2 V}{\partial x^2}; \\ \varepsilon_x(x, y) &= \frac{\partial W}{\partial x} = \int \frac{\partial \gamma_{xy}}{\partial x} dy - \int \frac{\partial^2 V}{\partial x^2} dy + \varepsilon_0(x) - V_0''(x) \cdot x \end{aligned} \quad (5.19)$$

Функция продольных деформаций учитывает не только сдвиговые деформации и поперечные деформации, но и учитывает влияние коэффициента зависимости между осевыми деформациями и сдвигами и наоборот.

Функции $\varepsilon_0(x)$ и $\chi(x)$ находятся из условия равновесия.

2.5. На втором цикле значения нормальных напряжений находятся по обобщенному закону Гука:

$$\sigma_x(x, y) = \varepsilon_x(x, y) \cdot E_{x1} + \nu_{x1} \cdot \sigma_y(x, y) - \eta_{1\sigma} \cdot \tau_{yx}(x, y) \quad (5.20).$$

При необходимости можно провести последующие циклы итераций.

Ниже приведены результаты расчетов по известному аналитическому методу, а так же решена задача методом конечных элементов с целью верификации итерационного способа.

5.3. Аналитическое решение

Лехницкий С.Г. [59] привел аналитическое решение для расчета анизотропной балки на двух опорах, загруженной равномерно распределенной нагрузкой. Решение записано с использованием функции Эри (Airy)^

$$\sigma_x = \frac{q}{2I} (l^2 - z^2) \cdot y + \frac{q}{b} \left[-\frac{a_{16}}{a_{11}} \cdot \frac{x}{h} \left(1 - 12 \frac{y^2}{h^2} \right) + 2 \left(\frac{2a_{12} + a_{66}}{4a_{11}} - \frac{a_{16}^2}{a_{11}^2} \right) \cdot \left(\frac{4y^3}{h^3} - \frac{3y}{5h} \right) \right], \quad (5.21)$$

$$\tau = \frac{q \cdot Z}{2J_{x1}} \cdot \left(\frac{h^2}{4} - Y^2 \right) - \frac{q}{b} \cdot \frac{a_{16}}{a_{11}} \cdot \left(\frac{Y}{h} - \frac{4Y^3}{h^3} \right),$$

где

$$l = \frac{L}{2}; \quad J_{x1} = \frac{bh^3}{12}; \quad a_{11} = \frac{1}{E_{x1}}; \quad a_{12} = \frac{\nu_{x1}}{E_{x1}}; \quad a_{16} = \frac{\eta_{1\sigma}}{E_{x1}}.$$

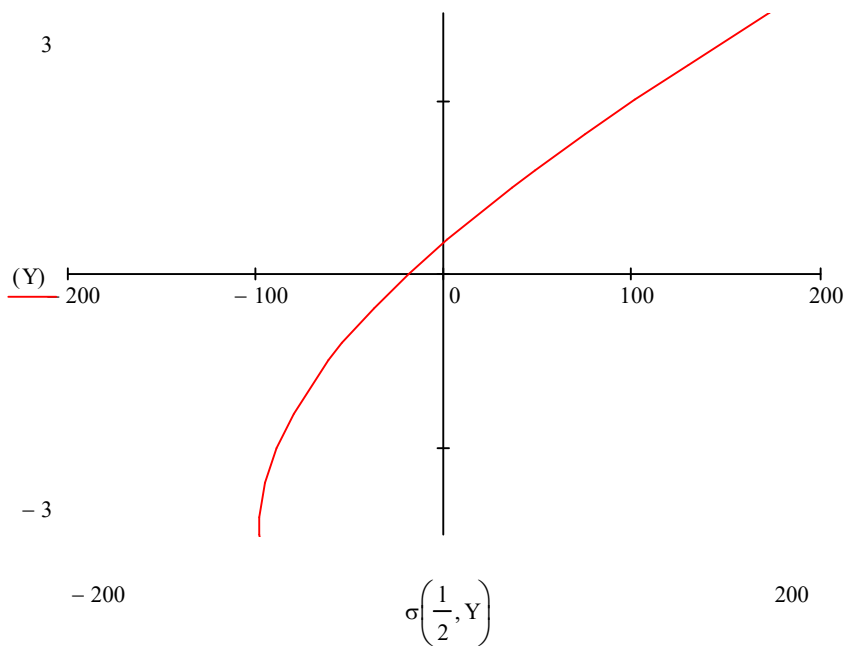


Рис. 5.3. Изменение нормальных напряжений по высоте балки.

Рассматривается поперечное сечение на расстоянии $L/4$ от опоры.

Аналитическое решение по (5.21).

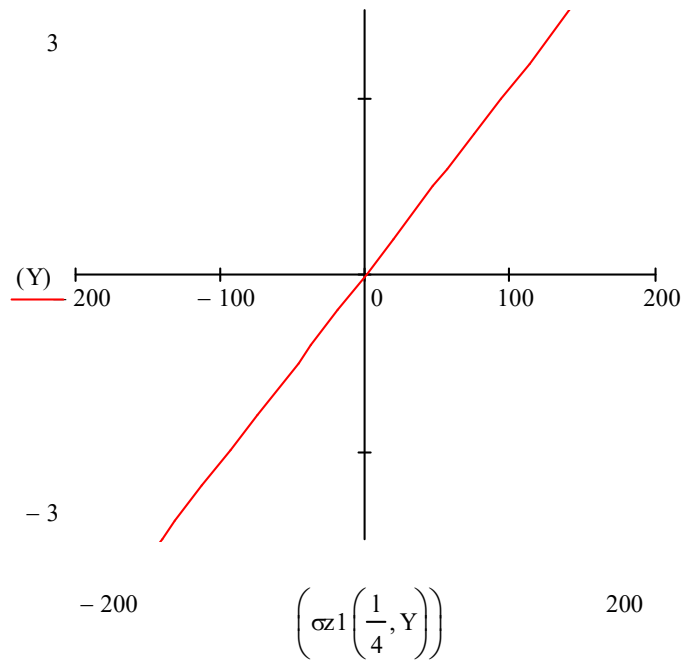


Рис. 5.4. Изменение нормальных напряжений по высоте балки.
Рассматривается поперечное сечение на расстоянии $L/4$ от опоры.

Итерационный метод, первый цикл.

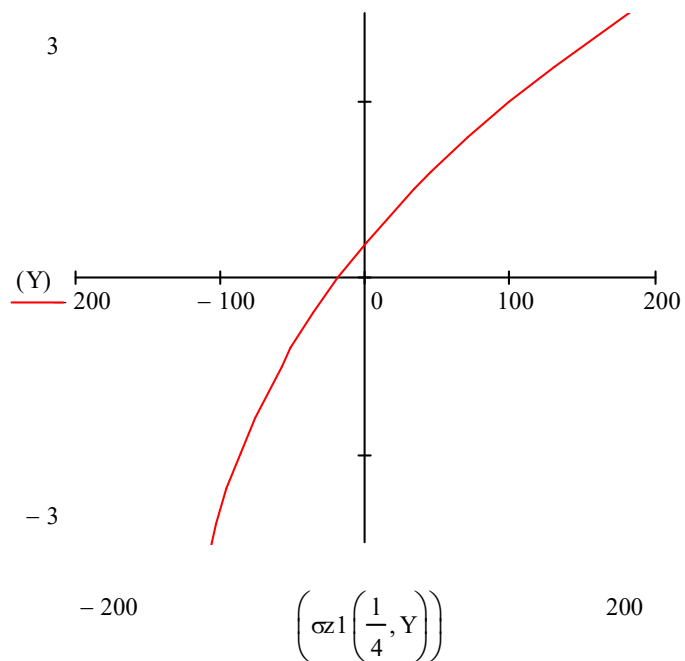


Рис. 5.5. Изменение нормальных напряжений по высоте балки.
Рассматривается поперечное сечение на расстоянии $L/4$ от опоры.

Итерационный метод, второй цикл.

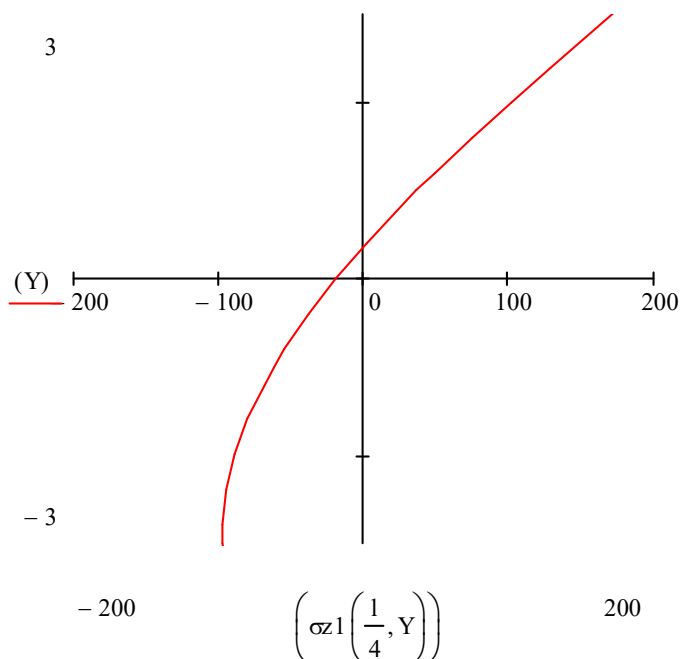


Рис. 5.6. Изменение нормальных напряжений по высоте балки. Рассматривается поперечное сечение на расстоянии $L/4$ от опоры. Итерационный метод, третий цикл.

5.4. Расчет методом конечных элементов

Выполнен расчет методом конечных элементов применительно к программному комплексу Midas/Civil. Исходные данные для расчета представлены на рис. 2. Рассмотрено две конечно-элементные модели. Первая модель выполнена из пластин, включает в себя 419 узлов и 758 конечных элемента типа PLATE. Вторая модель выполнена из объемных элементов, включает в себя 2095 узлов и 1544 конечных элемента типа SOLID.

Программа позволяет задавать различные упругие характеристики материала по различным направлениям локальных осей конечного элемента. Поэтому сетка конечных элементов разбита под углом α к горизонту (рис. 5.7).

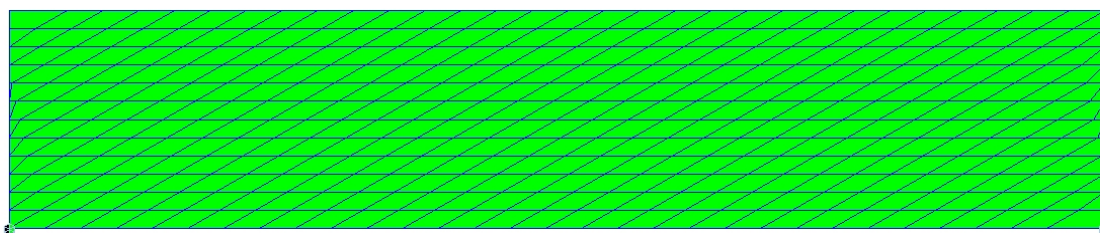


Рис. 5.7. Сетка конечных элементов анизотропной балки.

В результате получены нормальные напряжения продольного направления по двум расчетным схемам. На рис. 5.8 показаны нормальные

напряжения продольного направления для пластинчатой модели. Из рисунка видно, что распределения напряжений по верхней и нижней фибре балки симметричны. На рис. 5.9. показаны нормальные напряжения продольного направления для модели с использованием трехмерных конечных элементов. На рисунке не показаны крайние элементы расчетной схемы, там где возникают концентраторы в зоне опирания. Из рисунка видно, что распределение напряжений по верхней и нижней фибрам не симметрично.

Значения напряжений в четверти пролета балки для обеих расчетных схем приведены в табл. 5.1.

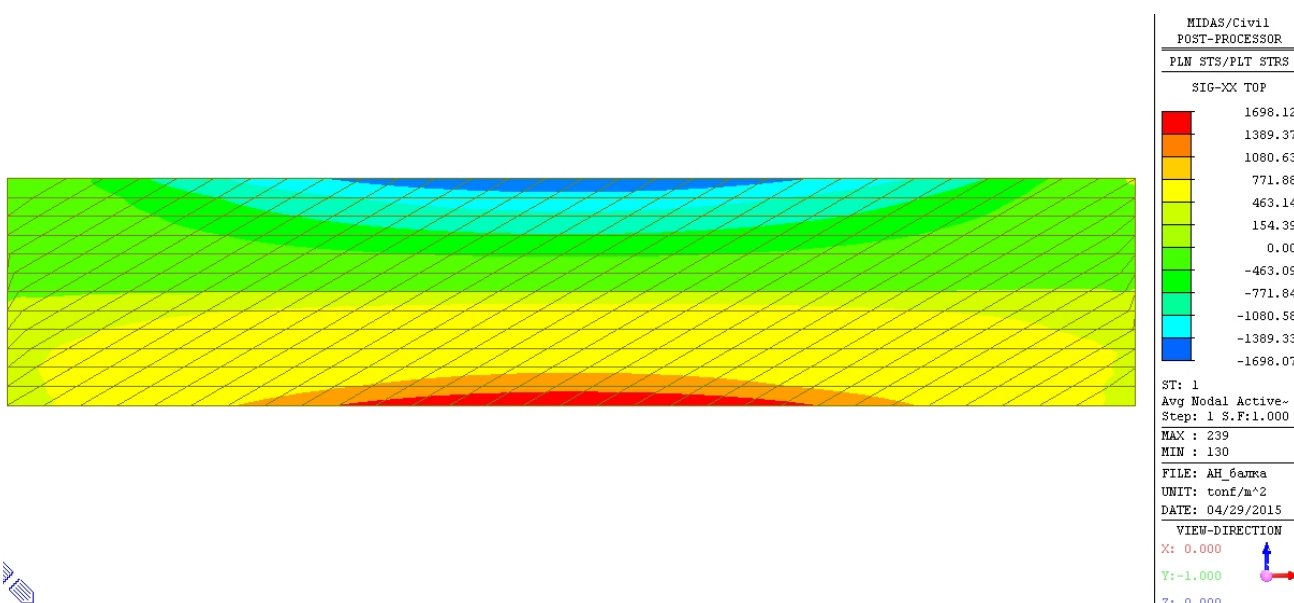


Рис. 5.8. Распределение нормальных напряжений продольного направления в пластинчатой модели.

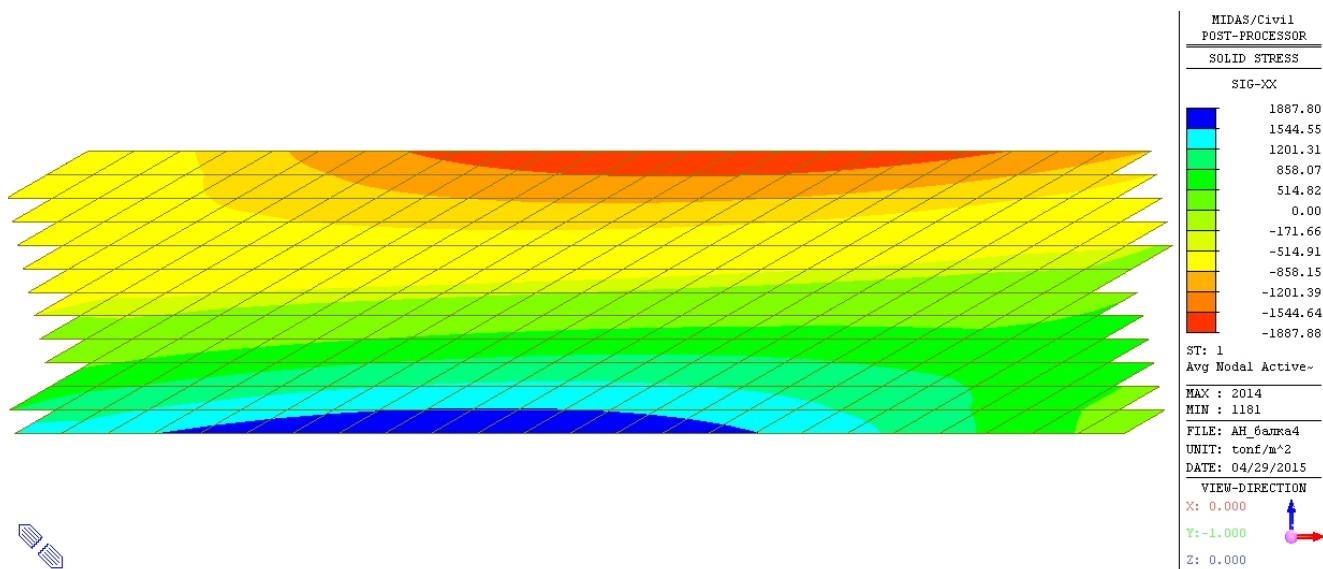


Рис. 5.9. Распределение нормальных напряжений продольного направления в модели с использованием объемных конечных элементов.

5.5. Сравнение результатов

Полученные результаты по нескольким методам сведены в таблицу 5.1. Результаты рассмотрены для поперечного сечения, расположенного $L/4$ от опоры. Приведены значения нормальных и касательных напряжений. Общий принцип изменения результатов в зависимости от количества итераций показан на рис. 5.10.

Из таблицы видно, что трех циклов достаточно для достижения точного решения. На первом цикле эпюра напряжений симметрична, свойственна изотропному материалу

Табл. 5.1

Нормальные и касательные напряжения (т/м^2)

Сечение	Итерационный способ						Аналитический метод		МКЭ	
	Цикл 1		Цикл 2		Цикл 3		σ	τ	σ plate	σ solid
	σ	τ	σ	τ	σ	τ	σ	τ		
Верхняя фибра	-1406,25	0	-979,48	0	-1058,68	0	-968,49	0	-1290.2	-1102.0
Центр сечения	0	187,50	-187,41	187,50	-187,41	187,50	-187,41	187,49	-	-
Нижняя фибра	1406,25	0	1729,12	0	1808,35	0	1718,40	0	1259.7	1698.50

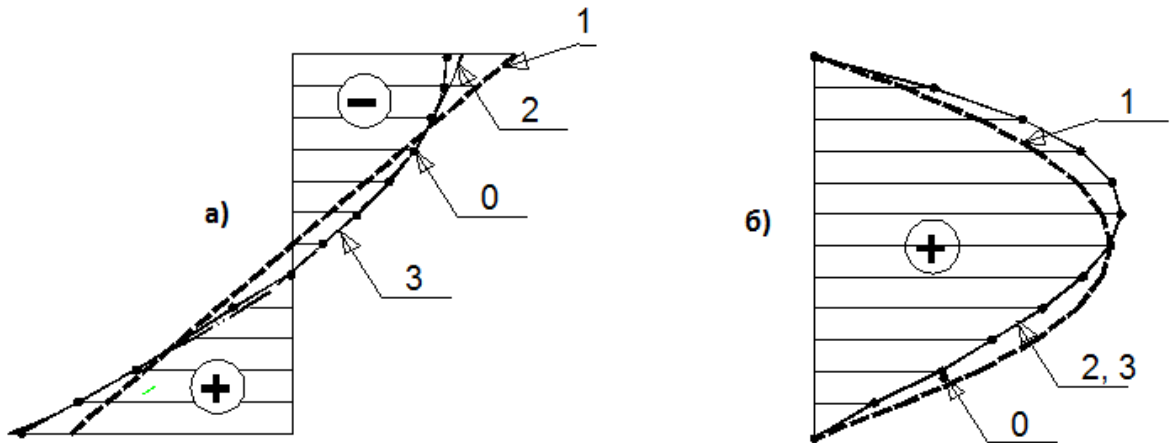


Рис.5.10. Эпюры нормальных (а) и касательных (б) напряжений по высоте балки.

1 – первая итерация; 2 – вторая итерация;

3 – третья итерация; 0 – аналитическое решение.

Алгоритм метода итераций применительно к расчету анизотропной балки записан в среде MathCAD. По результатам данной главы можно сделать основной вывод о том, что метод итераций справедлив для использования при действии обобщенного закона Гука для анизотропного материала.

Глава 6. ИТЕРАЦИОННЫЙ СПОСОБ ОПРЕДЕЛЕНИЯ Н.Д.С ТОНКОСТЕННЫХ АНИЗОТРОПНЫХ СТЕРЖНЕЙ ОТКРЫТОГО ПРОФИЛЯ ПРИ КРУЧЕНИЕ.

Теория кручения тонкостенных изотропных стержней без учета сдвигов предложена Власовым В.З. Далее предложенным методом итераций данное решение уточняется, учитываются деформации сдвига и поперечные деформации [4, 87, 88, 89]. Метод итераций основан на последовательном удовлетворении условиям равновесия и совместности деформаций.

Данная глава преследует основную цель работы: разработка аналитического итерационного способа расчета, тонкостенных анизотропных стержней открытого профиля на кручение, с учетом сдвигов и коэффициентов влияния линейной деформации на сдвиговую деформацию.

Для достижения цели решен ряд задач, представленных в 1 – 5 главе. Итерационный метод опробован на примере балки на двух опорах. Расчет балок, состоящих из нескольких элементов, опробован на примере слоистой балки. Расчет на кручение с учетом стесненного кручения представлен в главе 3. В главе 5 рассмотрен принцип учета анизотропии.

6.1 Предварительный этап

Рассмотрим консольный стержень (граничные условия могут быть различными) открытого профиля, состоящего из n пластин, объединенных по граням (рис. 6.1). Каждая пластинка имеет свою толщину t_i , ширину h_i и свой набор упругих постоянных. Дальнейшие построения и рассуждения будут основаны на гипотезе неизменяемости контура.

Стержень закручивается сосредоточенным внешним моментом $M_{кр}$. Необходимо найти значение угла закручивания по длине стержня z .

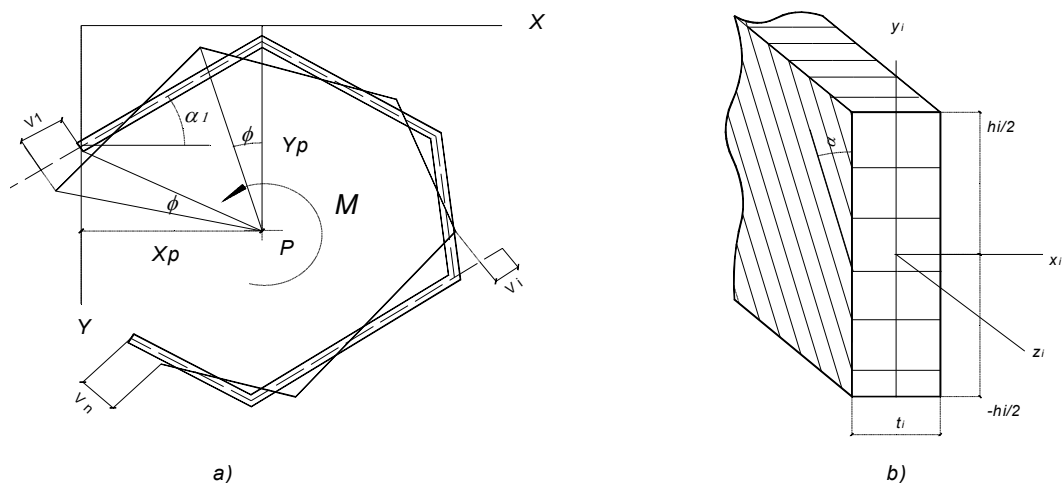


Рис. 6.1. Математическая модель

- а) Поперечное сечение тонкостенного стержня открытого профиля в глобальной системе координат (до и после поворота на угол φ)
- б) Один из элементов с обозначением направления армирования и локальными осями

Поперечное сечение рассматриваемого элемента располагается в глобальной произвольной системе координат X, Y (рис. 6.1 а). Ось Z направлена вдоль оси стержня. Каждая пластинка в отдельности, из которых состоит стержень, имеет свою локальную систему координат (рис. 6.1 б).

Закручивание стержня происходит вокруг полюса P с координатами X_p, Y_p . При повороте сечения перемещение пластинки реализуется за счет смещения ее в своей плоскости на величину V_i , и закручивание на угол α_i . Смещение в плоскости пластинки V_i реализуется за счет ее изгиба, поворот на угол α_i реализуется за счет закручивания.

Перемещение V_i можно выразить через функцию угла закручивания $\varphi(z)$ вокруг полюса P .

$$V_i = (y_i - Y_p) \cos \varphi(z) - (x_i - X_p) \sin \varphi(z) = r_i \cdot \varphi(z) \quad (6.1)$$

где r_i – нормаль, проведенная к i -ой пластине из полюса P .

Кривизна пластины, вызванная изгибом, запишется следующим образом:

$$\chi_i \approx -V_i''(X_p, Y_p, \varphi''(z)) \quad (6.2)$$

Итерационный аналитический способ определения напряженно-деформированного состояния тонкостенных стержней открытого профиля при стесненном кручении основан на основных уравнениях теории упругости. Закон Гука для плоской задачи, при использовании анизотропного материала в матричной форме будет иметь размер 3x3:

$$\begin{pmatrix} \varepsilon_y \\ \varepsilon_z \\ \gamma_{yz} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1/E_y & -\nu_{yz}/E_y & \eta_{\sigma y}/E_y \\ -\nu_{zy}/E_z & 1/E_z & \eta_{\sigma z}/E_z \\ \eta_{\tau y}/G_{yz} & \eta_{\tau z}/G_{yz} & 1/G_{yz} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \sigma_y \\ \sigma_z \\ \tau_{yz} \end{pmatrix} \quad (6.3)$$

E_y, E_z – осевые модули упругости;

G_{yz} – модуль сдвига;

$\varepsilon_y, \varepsilon_z$ – осевые деформации;

γ_{yz} – деформация сдвига;

ν_{yz}, ν_{zy} – влияние продольной деформации на поперечную и наоборот, коэффициент Пуассона, при этом всегда справедливо соотношение: $\frac{\nu_{zy}}{E_z} = \frac{\nu_{yz}}{E_y}$;

$\eta_{\tau y}, \eta_{\tau z}, \eta_{\sigma y}, \eta_{\sigma z}$ – коэффициент влияния деформации сдвига на осевую деформацию и наоборот. В случае, когда армирующие волокна направлены вдоль или поперек оси рассматриваемого элемента данные коэффициенты равны нулю. При этом всегда справедливо соотношение: $\frac{\eta_{\tau z}}{G_{yz}} = \frac{\eta_{\sigma z}}{E_z} \frac{\eta_{\tau y}}{G_{yz}} = \frac{\eta_{\sigma y}}{E_y}$.

Физические характеристики материала обычно экспериментально определяются для главных осей y, z . В случае, когда ось исследуемого стержня не совпадает с направлением армирования, и отличается от направления осей y, z на угол α , необходимо определить упругие постоянные для новой системы координат y_1, z_1 . Вариант перехода к новой системе координат при повороте осей был предложен Ашкенази Е.К и определяются по формулам (5.4)

В работе исследованы и приведены упругие характеристики большого количества материалов. Рассматривались как природные материалы, например, древесина, так и современные углепластики и прочее. Научный интерес

представляли материалы, которые имеют значительное изменение модуля упругости, при повороте осей. Поэтому для численных исследований и апробации предложенного алгоритма решения был выбран углепластик марки М60J/Ероху, широко применяемый в современных строительных решениях. На рис. 1. Приведена полярная диаграмма изменения модуля упругости и модуля сдвига в зависимости от угла поворота осей анизотропии.

На рис.5.1 показаны графики зависимости модуля упругости и модуля сдвига углепластика марки М60J/Ероху [79] от угла поворота осей анизотропии.

6.2 Начальная итерация.

6.2.1 На начальном этапе принимаем гипотезу отсутствия сдвигов и гипотезу ненадавливания, т.е. $G_{yzi} = \infty; E_y = \infty$. При таком подходе для каждого i -го элемента закон Гука примет вид:

$$\begin{pmatrix} \varepsilon_{zi} \\ \varepsilon_{yi} \\ \gamma_{yzi} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1/E_{zi} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \sigma_{zi} \\ \sigma_{yi} \\ \tau_{yzi} \end{pmatrix} \quad (6.4)$$

6.2.2 Гипотеза ненадавливания делает справедливым следующее

$$\text{выражение: } \varepsilon_{yi}(y, z) = \frac{\partial V_i(y, z)}{\partial y} = 0$$

$$6.2.3 \quad V_i(y, z) = \int \varepsilon_{yi}(y, z) dy + V_{0i}(z) = V_{0i}(z).$$

$$6.2.4 \quad \text{Из (6.4) } \gamma_i(y, z) = \frac{\partial V_i}{\partial z} + \frac{\partial W_i}{\partial y} = 0.$$

$$6.2.5 \quad W_i(y, z) = -\int \frac{\partial V_i}{\partial z} dy + W_{0i}(z) = -V'_{0i}(z) \cdot y + W_{0i}(z).$$

$$6.2.6 \quad \varepsilon_{zi}(y, z) = \frac{\partial W_i}{\partial z} = W'_{0i}(z) - V''_{0i}(z) \cdot y = \varepsilon_{0i}(z) + \chi_{0i}(z) \cdot y. \quad (6.5)$$

Уравнение (6.5) является линейной функцией деформации. Данная зависимость соответствует гипотезе плоских сечений. Значения $\varepsilon_{0i}(z)$ и $\chi_{0i}(z) = -V''_{0i}(z)$ являются неизвестными и имеют следующий физический смысл: $\varepsilon_{0i}(z)$ – осевая деформация элемента, $\chi_{0i}(z)$ – кривизна оси.

При этом очевидно, что деформации соседних пластин по грани их стыковки должны быть равными (рис. 6.2).

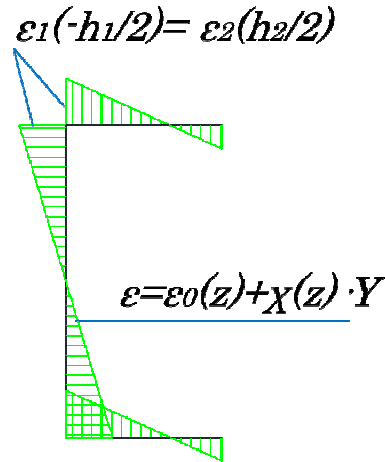


Рис. 6.2. Принцип равенства деформаций по общей грани элементов сечения

Связь деформаций между первой и второй пластиной и второй и третьей:

$$\varepsilon_{01} + \chi_1 \cdot \frac{-h_1}{2} = \varepsilon_{02} + \chi_2 \cdot \frac{h_2}{2},$$

$$\varepsilon_{02} + \chi_2 \cdot \frac{-h_2}{2} = \varepsilon_{03} + \chi_3 \cdot \frac{h_3}{2}.$$

Отсюда видно, что деформацию каждой пластинки можно выразить через деформацию первой:

$$\varepsilon_{0n} = \varepsilon_{01} - \chi_1 \cdot \frac{h_1}{2} - \chi_2 \cdot h_2 - \dots - \chi_i \cdot h_i - \dots - \chi_n \cdot \frac{h_n}{2}. \quad (6.6)$$

Формула (6.6) включает в себя 4 неизвестных. Кривизна является функцией X_p , Y_p , $\varphi(z)$ и неизвестная ε_{01} . Для их нахождения необходимо составить 4 уравнения:

$$\sum_n N_i = \sum_n \int \varepsilon_{zi} E_{zi} A_i dz = 0, \text{ позволяет найти } \varepsilon_{01},$$

$$\sum M_x = 0 \text{ и } \sum M_y = 0, \text{ позволяет найти } X_p, Y_p.$$

Изгибающий момент находится через кривизну:

$$M_i = \frac{E_{zi} J_{xi}}{\rho_i} = -E_{zi} J_{xi} \cdot V_i''(X_p, Y_p, \varphi''(z)). \quad (6.7)$$

А далее определяется перерезывающая сила:

$$Q_i = \frac{dM_i}{dz} = E_{zi} J_{xi} \cdot V_i'''(X_p, Y_p, \varphi'''(z)), \quad (6.8)$$

которая создает часть крутящего момента, связанного с изгибом пластины:

$$M_i^{uzz} = Q_i \cdot r_i = E_{zi} J_{xi} \cdot V_i'''(X_p, Y_p, \varphi'''(z)) \cdot r_i. \quad (6.9)$$

Вторая часть связана со свободным кручением пластин:

$$M_i^{cb.kp} = G_{zi} (h \cdot t^3 / 3) \cdot \varphi'(z). \quad (6.10)$$

Уравнение равновесия момента вокруг оси стержня $\sum M_z = M_{kp}$ примет следующий вид:

$$\sum_n M_i^{cb.kp} + \sum_n M_i^{uzz} = M_{kp}, \quad (6.11)$$

что полностью повторяет уравнение Власова В.З.

Решив полученное дифференциальное уравнение, с соответствующими граничными условиями, зависящими от типа закрепления, найдем четвертую неизвестную функцию $\varphi(z)$.

На этом заканчивается начальная итерация, записывается функция нормальных напряжений для каждой пластинки:

$$\sigma_{z,i}^{(1)} = \varepsilon_{0i}(z) - V_{0i}''(z) \cdot y.$$

Функция касательных напряжений находится из условий равновесия:

$$\begin{aligned} \frac{\partial \tau_{yz,i}^{(1)}}{\partial y} + \frac{\partial \sigma_{z,i}^{(1)}}{\partial z} &= 0, \\ \tau_{yz,i}^{(1)} &= - \int^y \frac{\partial \sigma_{z,i}^{(1)}}{\partial z} dy + \tau_{0yz,i}^{(1)}. \end{aligned} \quad (6.12)$$

Аналогично равенству деформаций по граням, соблюдается равенство потоков касательных напряжений по теореме Бредта: $t_i \cdot \tau_{yz,i}^{(1)} = t_{i+1} \cdot \tau_{yz,i+1}^{(1)}$. Зная значение касательных напряжений на свободных гранях, и опираясь на последнее равенство можно найти постоянные интегрирования по y для касательных напряжений $\tau_{0yz,i}^{(1)}$

Аналогично находятся функции нормальных напряжений поперечного направления:

$$\frac{\partial \sigma_{y,i}^{(1)}}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{yz,i}^{(1)}}{\partial z} = 0,$$

$$\sigma_{y,i}^{(1)} = - \int \frac{\partial \tau_{yz,i}^{(1)}}{\partial z} dy + \sigma_{0y,i}^{(1)}. \quad (6.13)$$

И аналогично определяются произвольные интегрирования по y функции $\sigma_{0y,i}^{(1)}$.

На данном этапе получены все составляющие напряженного состояния стержня по результатам первого цикла. Стоит обратить внимание на следующие особенности:

- Нормальные напряжения продольного направления $\sigma_{z,i}^{(1)}$ по ширине пластины являются линейной функцией.
- По длине пластины нормальные напряжения зависят от $\varphi''(z)$.
- Касательные напряжения по ширине пластины выражаются через квадратную параболу
- По длине пластины касательные напряжения зависят от $\varphi'''(z)$
- Нормальные напряжения поперечного направления по ширине пластины имеют функцию кубической параболы
- В продольном направлении нормальные напряжения поперечного направления зависят от $\varphi^{IV}(z)$

6.3 Итерация 2.

На втором этапе вычислений остается справедливой лишь гипотеза неизменяемости контура. Координаты центра кручения известны. За неизвестные принимаются:

- Функция угла закручивания $\varphi^{(2)}(z)$
- Осевая деформация пластинок $\varepsilon_{0i}^{(2)}$
- Кривизна элементов $\chi_{0i}^{(2)}$

Индекс (2) – обозначает принадлежность второму этапу итераций, индекс (1) – первому.

Закон Гука принимает вид в соответствии с :

$$A = \begin{vmatrix} 1/E_y & -\nu_{yz}/E_y & \eta_{\sigma_y}/E_y \\ -\nu_{zy}/E_z & 1/E_z & \eta_{\sigma_z}/E_z \\ \eta_{\tau_y}/G_{yz} & \eta_{\tau_z}/G_{yz} & 1/G_{yz} \end{vmatrix},$$

$$\varepsilon = A \cdot \sigma.$$

$$\varepsilon_{y,i}^{(2)} = \sigma_{y,i}^{(1)} / E_{y,i} - \nu_{yz,i} \sigma_{z,i}^{(1)} / E_{y,i} + \tau_{yz,i}^{(1)} \eta_{\sigma_y,i} / E_{y,i}. \quad (6.14)$$

$$V_i^{(2)} = \int \varepsilon_{yi}^{(2)} dy + V_{0i}^{(2)}(z) \quad (6.15)$$

$$\gamma_{yz,i}^{(2)} = \sigma_{y,i}^{(1)} \eta_{\tau_y,i} / G_{yz,i} + \sigma_{z,i}^{(1)} \eta_{\tau_z,i} / G_{yz,i} + \tau_{yz,i}^{(1)} / G_{yz,i}. \quad (6.16)$$

Функция деформаций продольного направления находится аналогично, как и на первом этапе:

$$\begin{aligned} \gamma_{zx} &= \frac{\partial W}{\partial x} + \frac{\partial V}{\partial z}, \\ \frac{\partial \gamma_{zy}}{\partial z} &= \frac{\partial W}{\partial x \partial z} + \frac{\partial^2 V}{\partial z^2}, \\ \varepsilon_{z,i}^{(2)} &= \frac{\partial W}{\partial x} = \int \frac{\partial \gamma_{yz,i}^{(2)}}{\partial z} dy - \int \frac{\partial^2 V_i^{(2)}}{\partial z^2} dy + \varepsilon_{0,i}^{(2)} + V_{0,i}^{(2)''} \cdot y = \\ &= \int \frac{\partial}{\partial z} (\sigma_y^{(1)} \eta_{\tau_y} / G_{yz} + \sigma_z^{(1)} \eta_{\tau_z} / G_{yz} + \tau_{yz}^{(1)} / G_{yz}) dy - \\ &- \int dy \int \frac{\partial^2}{\partial z^2} (\sigma_y^{(1)} / E_y - \nu_{yz} \sigma_z^{(1)} / E_y + \tau_{yz}^{(1)} \eta_{\sigma_y} / E_y) dy + \\ &+ \varepsilon_{0,i}^{(2)} - \chi_{0,1}^{(2)} \cdot y, \end{aligned} \quad (6.17)$$

$$\sigma = A^{-1} \cdot \varepsilon.$$

Функция продольных деформаций состоит из двух частей. Последняя линейная составляющая зависит от производных $\varphi^{(2)}(z)$ и повторяет распределение полученное на первом этапе. Функции, которые зависят от производных $\varphi^{(1)}(z)$, имеют более высокий порядок.

При необходимости, дальнейшие циклы вычислений ведутся по аналогичному алгоритму. Для величин с индексом (2) решение сводится к

уравнению (6.11). А величины с индексом ⁽¹⁾ будут переноситься в правую часть и играть роль увеличения или уменьшения внешнего крутящего момента. При этом уравнение (6.11) примет следующий вид, с прежними граничными условиями:

$$\sum_n M_i^{св.кр} + \sum_n M_i^{изз} = M_{кр} \pm \sum M_{дон}(\varphi^{(1)}(z)) \quad (6.19)$$

Дальнейшие уточнения решения проводятся в той же последовательности.

Для определения прочности предлагается зависимость Хилла Р.:

$$\sigma = 1 / \left[\sqrt{\frac{\cos^2 \alpha}{\sigma_{B1}^2} + \left(\frac{1}{\tau_{B12}^2} - \frac{1}{\sigma_{B1}^2} \right) \cos^2 \alpha \cdot \sin^2 \alpha + \frac{\sin^2 \alpha}{\sigma_{B2}^2}} \right]$$

Для материала М60Ж/Ероху:

предел прочности в продольном направлении $\sigma_{B1}=780$ МПа,

предел прочности в поперечном направлении $\sigma_{B2}=30$ МПа,

предел прочности при сдвиге $\tau_{B12}=39$ МПа.

Анализ сходимости результатов

При итерационном подходе вычисления, связанные с дифференцированием, производятся по длине стержня, по координате z . А операции интегрирования производятся по высоте пластинке, по координате y . Данная последовательность действий приводит к результатам, приведенным в таблице 1.

Таблица 1

Напряжения	Первый цикл		Второй цикл	
	высшая степень производной $\varphi(z)$	высшая степень разложения по координате y	высшая степень производной $\varphi(z)$	высшая степень разложения по координате y
σ_z	$\varphi''(z)$	y^1	$\varphi^{VI}(z)$	y^5
τ_{yz}	$\varphi'''(z)$	y^2	$\varphi^{VII}(z)$	y^6
σ_y	$\varphi^{IV}(z)$	y^3	$\varphi^{VIII}(z)$	y^7

Сходимость итерационного процесса основана на этих данных. Рассмотрим m циклов. По длине стержня L напряжения зависят от степени производной $\varphi(z)$, $(1/L)^m$. По высоте отдельной пластины H , напряжения зависят от степени разложения по координате y , $(H)^m$. Следовательно общее приращение величины пропорционально $(H/L)^m$.

При отношении $H/L=1/3$, на втором цикле получим $(1/3)^4=0.012$, на третьем $0,15^{-4}$. Наблюдается высокая скорость сходимости, обычно достаточно 2 – 3 цикла для получения достоверных результатов, обладающих высокой точностью.

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Основные результаты данной работы состоят в следующем:

1. Разработан итерационный аналитический способ решения задачи стесненного кручения анизотропного стержня открытого профиля, с учетом сдвигов, поперечных деформаций и коэффициентов влияния линейной деформации на сдвиговую деформацию. Создан алгоритм для решения задачи о стесненном кручении тонкостенного анизотропного стержня.
2. Получены численные и графические результаты Н.Д.С (напряженно-деформированного состояния) тонкостенных анизотропных стержней открытого профиля, работающих в условиях стесненного кручения. Рассмотрены случаи различного направления арматуры в матрице.
3. Получено, что в зависимости от направления армирования при прочих равных исходных данных, угол закручивания стержня может измениться более чем в 20 раз. Влияние 2-го и последующих приближений для изотропных задач достигает 15%. Для анизотропных материалов на первом цикле невозможно получить достоверный результат, который достигается на втором этапе.
4. Записан алгоритм метода последовательных приближений на примере расчета балки на двух опорах.
5. Разработан итерационный способ расчета слоистых балок на прочность, как один из шагов создания составного сечения открытого профиля. Получено решение задачи изгиба слоистой балки.
6. Разработан итерационный способ применительно к решению задачи кручения тонкостенных изотропных стержней. Результаты первого цикла итераций повторяют решение Власова В.З., последующие итерации уточняют решение с учетом сдвигов и поперечных деформаций.

7. Разработан итерационный способ расчета анизотропной балки на прочность. Решена задача изгиба анизотропной балки с учетом сдвигов и коэффициентов влияния линейной деформации на сдвиговую деформацию. Полученные результаты соответствуют аналитическому решению, записанному Лехницким С.Г. и с результатами, полученными в пространственном конечно-элементном расчете.

В данной диссертации рассмотрены не все возможные случаи напряженно-деформированного состояния анизотропных элементов. Вместе с тем, предложенный аналитический метод является универсальным, и может быть использован для дальнейшего более детального исследования поведения анизотропных конструкций. Дальнейшую исследовательскую деятельность в области расчетов анизотропных конструкций, по мнению автора, необходимо развивать в направлении учета динамических нагрузок и работы материала в зоне пластических деформаций.

Приложение.

Выполнен анализ напряженно деформированного состояния консольного анизотропного швеллера, работающего на кручение. Рассмотрено 6 задач. Геометрические размеры швеллера, интенсивность нагрузки и физические характеристики материала для каждой задачи одинаковы, меняется только угол ориентации армирующих волокон. В таблице 1 приведены рассмотренные варианты армирования швеллера.

Таблица 1

Номер и название задачи	Угол армирования швеллера		
	Верхняя полка	Стенка	Нижняя полка
1 (угол 0)	0	0	0
2 (угол 30)	30	30	30
3 (угол 60)	60	60	60
4 (угол 90)	90	90	90
5 (3E 30)	30	0	-30
6 (3E 60)	60	0	-60

Далее по каждой задаче приведены результаты напряженно деформированного состояния. На рис. 1. показан график угла закручивания стержня по длине. На рис. 2. представлено поперечное сечение швеллера с локальными осями для каждой пластины и соответствующие эпюры нормальных напряжений продольного направления, а также наглядная схема направления армирующих волокон. На рис. 3. представлены эпюры касательных напряжений. На рис. 4. представлены эпюры нормальных напряжений поперечного направления.

Так же выполнено сопоставление и приведены соответствующие результаты не по циклам, а по углам армирования.

В зависимости от угла армирования, жесткость конструкции может меняться в разы. В таблице 2 приведены значения максимальных углов закручивания консольного стержня по каждой из рассмотренных задач на первом и втором цикле.

Таблица 2.

Задача	Максимальный угол поворота рад.		Разница %
	Цикл 1	Цикл 2	
1 (угол 0)	-0.001695	-0.001665	1.8
2 (угол 30)	-0.02192	-0.02176	0.7
3 (угол 60)	-0.03519	-0.03500	0.5
4 (угол 90)	-0.04406	-0.04389	0.4
5 (3E 30)	-0.01337	-0.01327	0.8
6 (3E 60)	-0.02434	-0.02417	0.7

Из таблицы видно, что в зависимости от направления армирующих волокон, крутильную жесткость стержня можно менять в более чем 25 раз.

В таблицах 3-5 приведены значения нормальных напряжений продольного направления, касательных напряжений и нормальных напряжений поперечного направления соответственно.

Из таблиц видно, что значение нормальных напряжений продольного направления для полок в задаче №1 выше в 1.5 – 2 раза по сравнению с другими вариантами. Также в задаче 1 максимальны и касательные напряжения в полках. При этом значения нормальных напряжений поперечного направления в данной постановке наименьшие.

В задаче №5 возникают максимальные нормальные напряжения продольного направления в стенке швеллера.

Для задач №2 и №3 наблюдается следующая особенность: не симметрия напряжений по верхней и нижней полке.

Таблица 3.

Задача	Значение нормальных напряжений σ_z					
	Верхняя полка		Стенка		Нижняя полка	
	Цикл 1	Цикл 2	Цикл 1	Цикл 2	Цикл 1	Цикл 2
1 (угол 0)	-945.56	-947.66	567.34	562.67	945.56	947.66
2 (угол 30)	-647.83	-281.0	388.70	78.09	647.83	1055.63
3 (угол 60)	-457.02	-432.21	274.21	244.43	457.02	496.89
4 (угол 90)	-478.59	-481.48	287.16	285.91	478.59	481.49
5 (3E 30)	-576.07	18.80	803.00	796.94	576.06	-18.87
6 (3E 60)	-465.18	-411.98	676.30	671.86	465.18	411.99

Таблица 4.

Задача	Значение касательных напряжений τ					
	Верхняя полка		Стенка		Нижняя полка	
	Цикл 1	Цикл 2	Цикл 1	Цикл 2	Цикл 1	Цикл 2
1 (угол 0)	33.26	33.56	-10.66	-10.04	33.26	33.56
2 (угол 30)	30.38	52.54	-9.74	-3.33	30.38	14.24
3 (угол 60)	28.14	31.97	-9.02	-6.96	28.14	26.30
4 (угол 90)	28.42	28.69	-9.11	-8.59	28.42	28.69
5 (3E 30)	31.39	32.70	-17.21	-8.25	-31.39	32.71
6 (3E 60)	29.99	30.05	-16.81	-19.58	29.99	30.05

Таблица 5.

Задача	Значение нормальных напряжений σ_y					
	Верхняя полка		Стенка		Нижняя полка	
	Цикл 1	Цикл 2	Цикл 1	Цикл 2	Цикл 1	Цикл 2
1 (угол 0)	-0.06	-0.059	-0.06	-0.059	0.06	0.059
2 (угол 30)	-1.059	-2.804	-1.059	-2.804	1.059	-1.052
3 (угол 60)	-1.791	-2.051	-1.791	-2.051	1.791	1.302
4 (угол 90)	-1.702	-1.668	-1.702	-1.668	1.702	1.668
5 (3E 30)	-0.556	0.058	-0.556	0.058	0.556	-0.058
6 (3E 60)	-1.036	-1.021	-1.036	-1.021	1.036	1.021

Угол 0°.

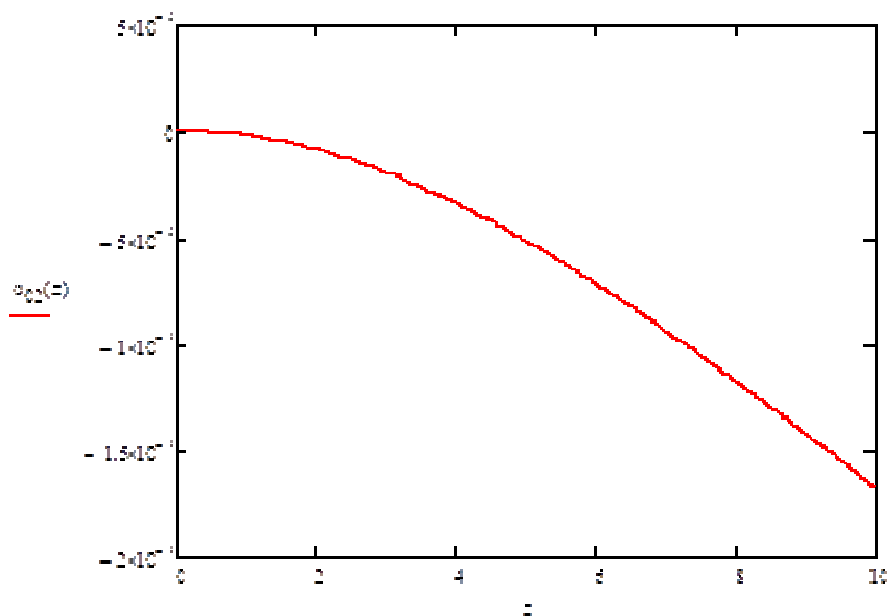
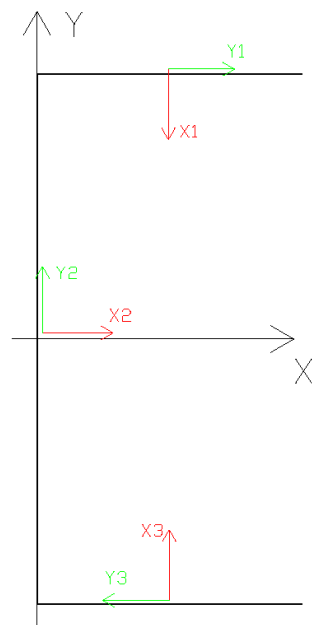
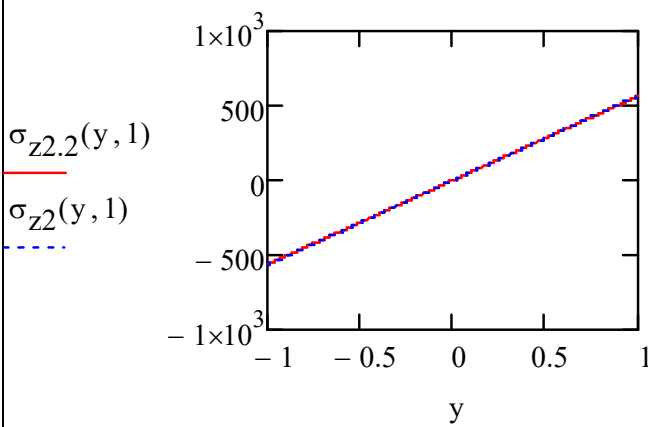
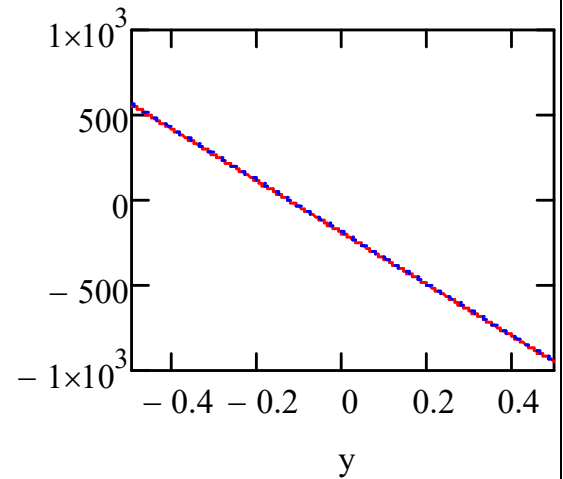


Рис. 1. График углов закручивания стержня на втором цикле.

$$\varphi = -0.00166$$

Рис. 2.
Эпюры нормальных напряжений продольного направления на расстоянии $0.1L$ от заделки для первой, второй и третьей пластины соответственно.



Ориентация волокон армирования

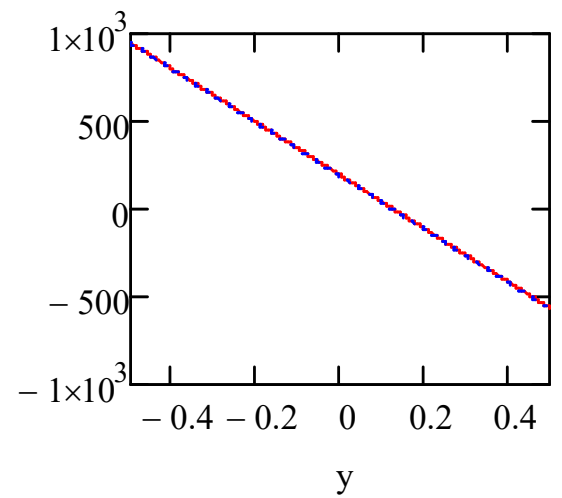
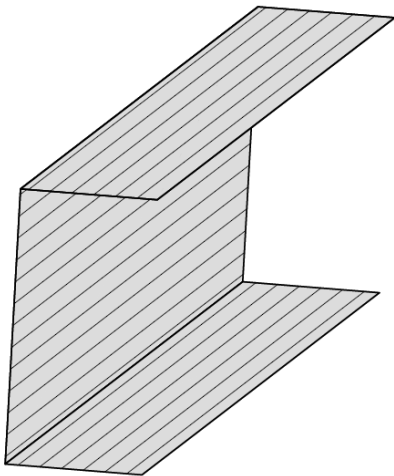
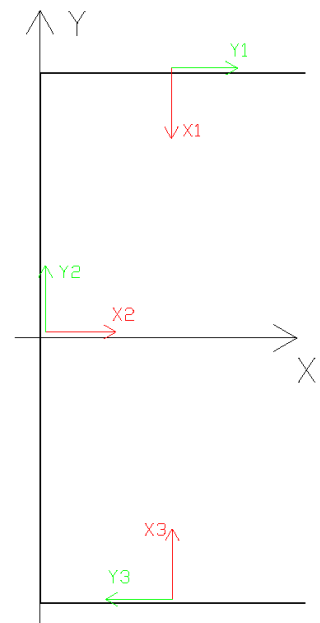
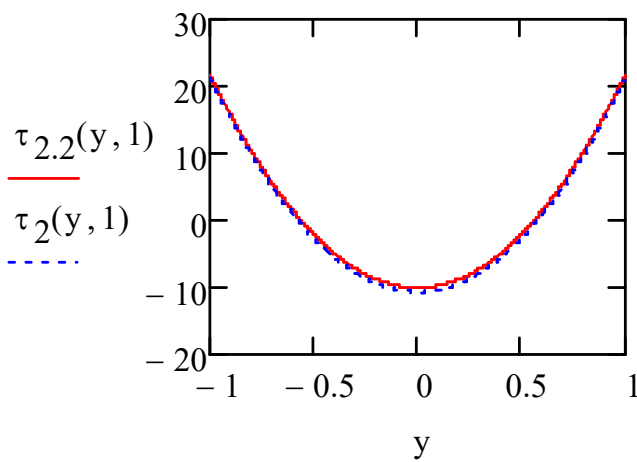
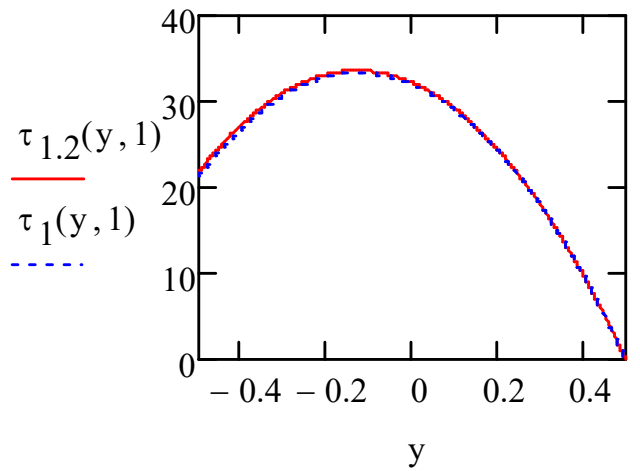


Рис. 3.

Эпюры касательных напряжений на расстоянии $0.1L$ от заделки для первой, второй и третьей пластины соответственно.



Ориентация волокон армирования

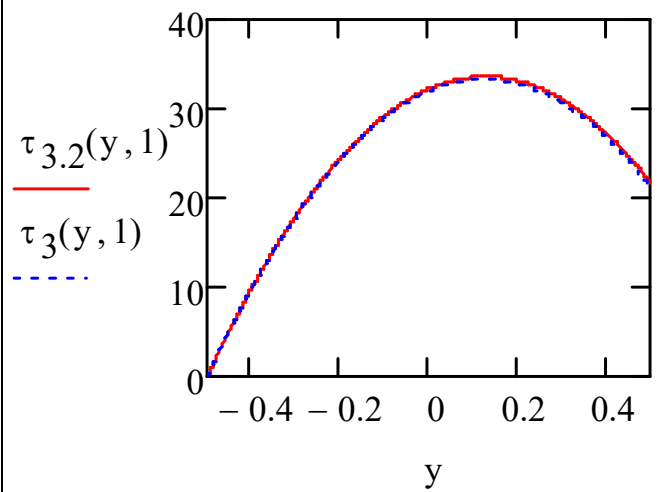
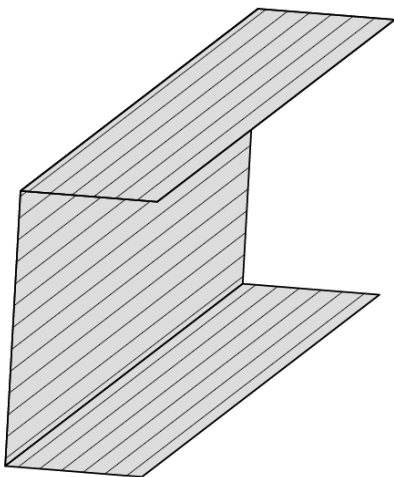
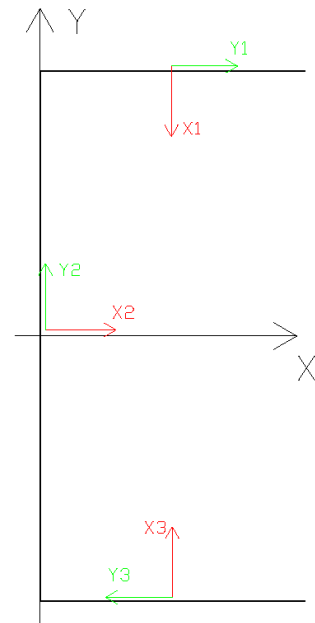
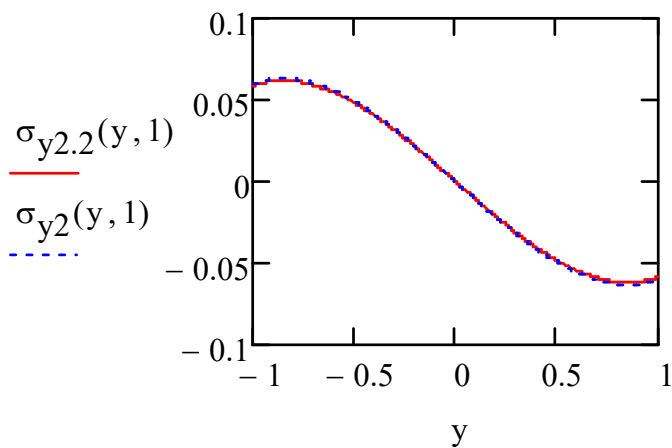
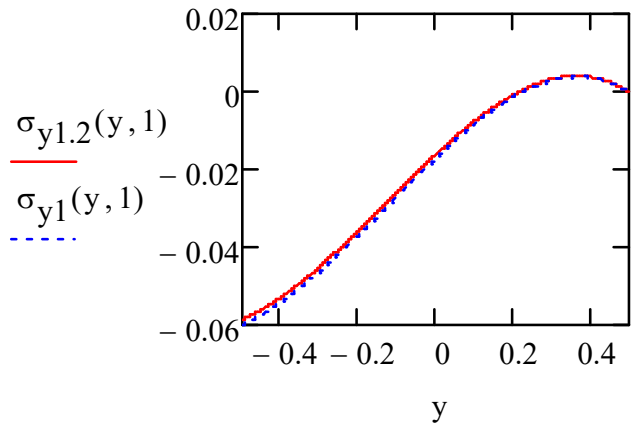
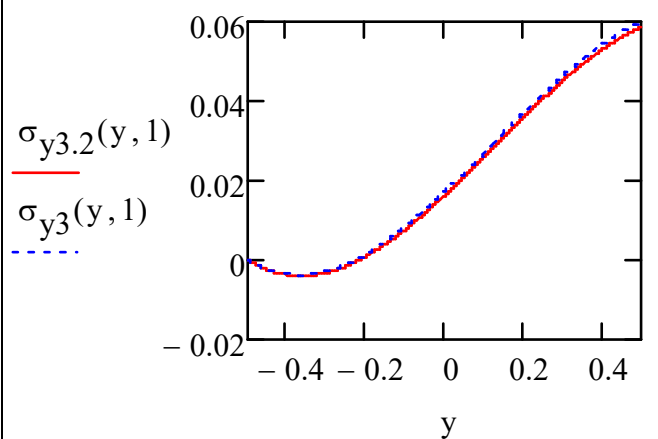
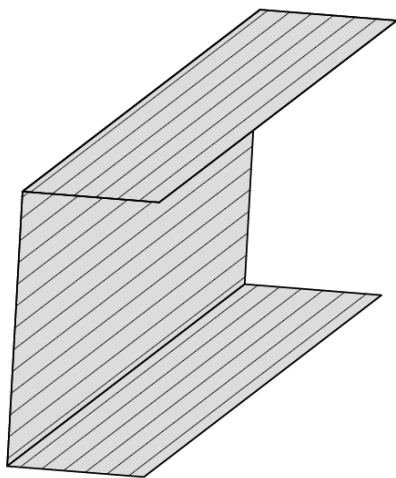


Рис. 4.
Эпюры нормальных напряжений поперечного направления на расстоянии $0.1L$ от заделки для первой, второй и третьей пластины соответственно.



Ориентация волокон армирования



Угол 30°.

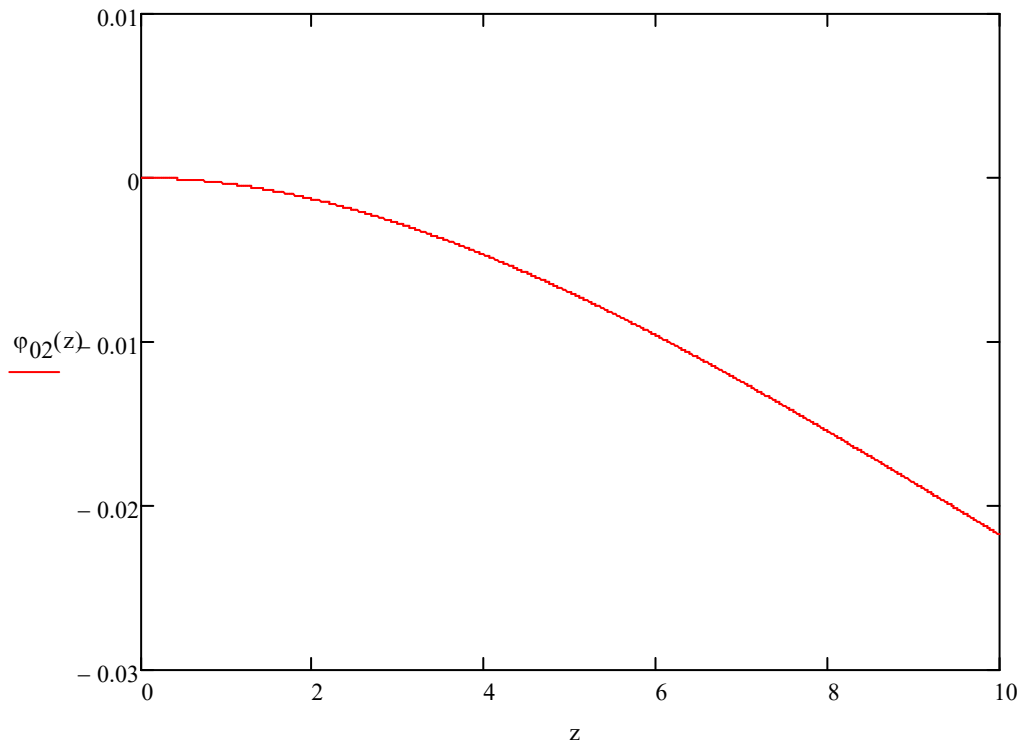
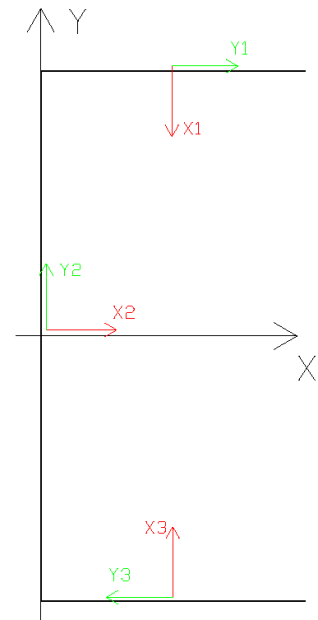
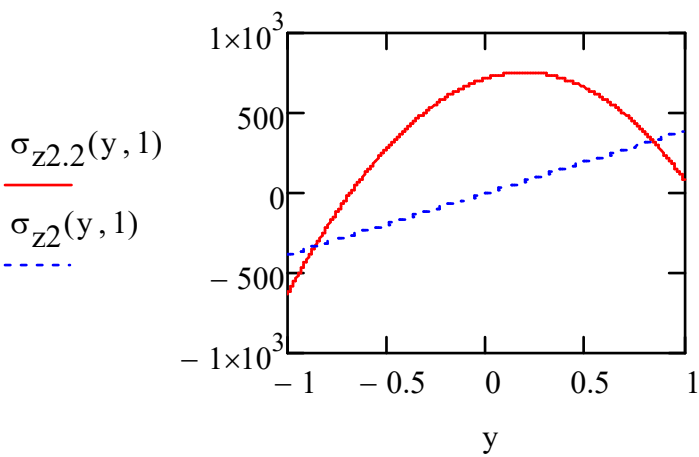
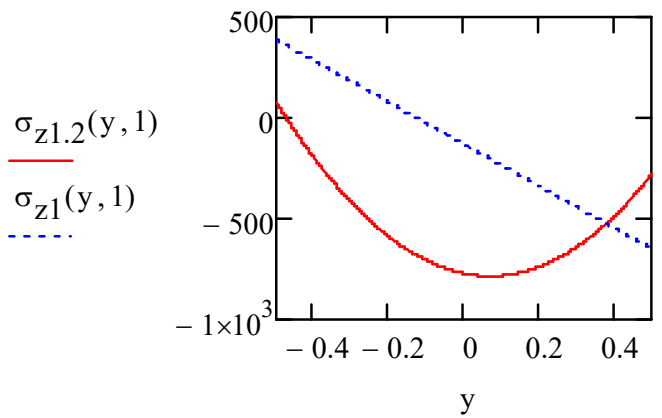


Рис. 1. График углов закручивания стержня на втором цикле.
 $\varphi=-0.02176$

Рис. 2.

Эпюры нормальных напряжений продольного направления на расстоянии $0.1L$ от заделки для первой, второй и третьей пластины соответственно.



Ориентация волокон армирования

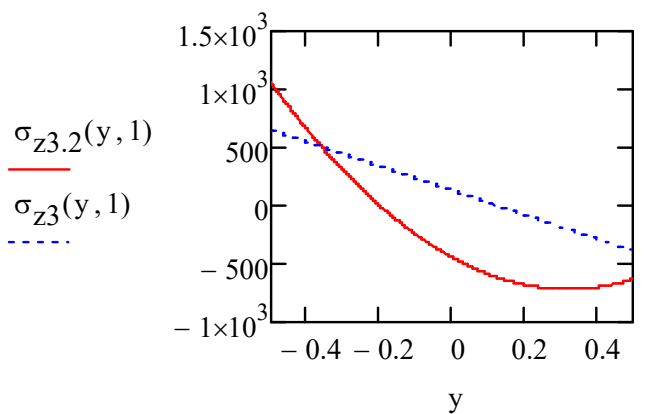
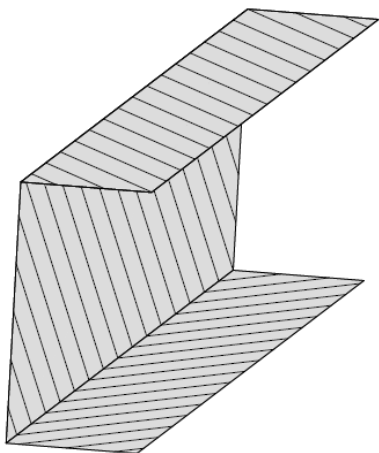
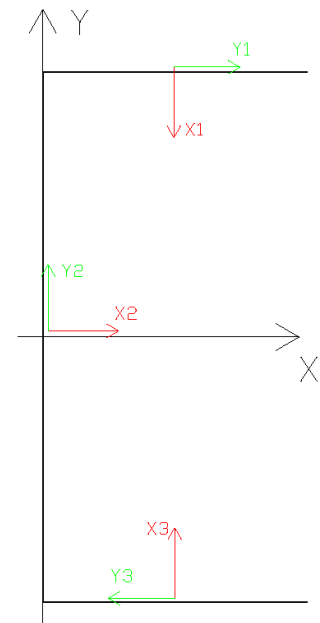
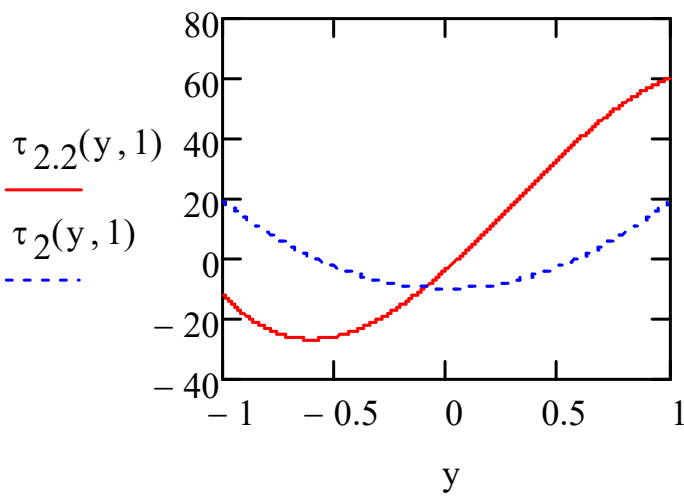
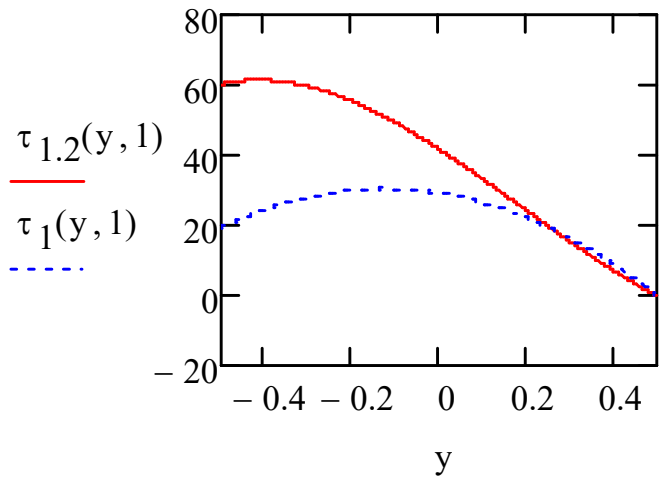


Рис. 3.

Эпюры касательных напряжений на расстоянии $0.1L$ от заделки для первой, второй и третьей пластины соответственно.



Ориентация волокон армирования

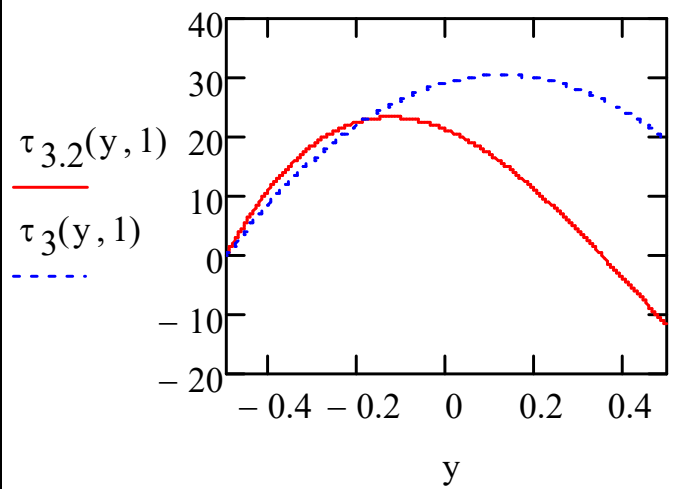
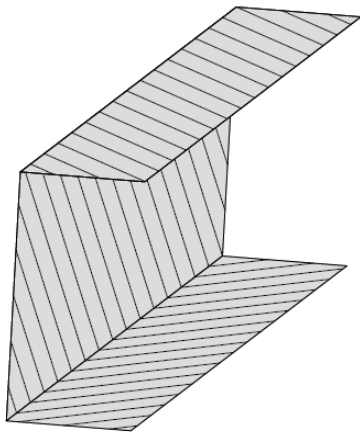
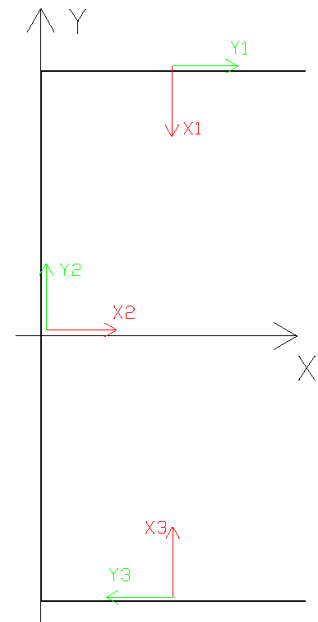
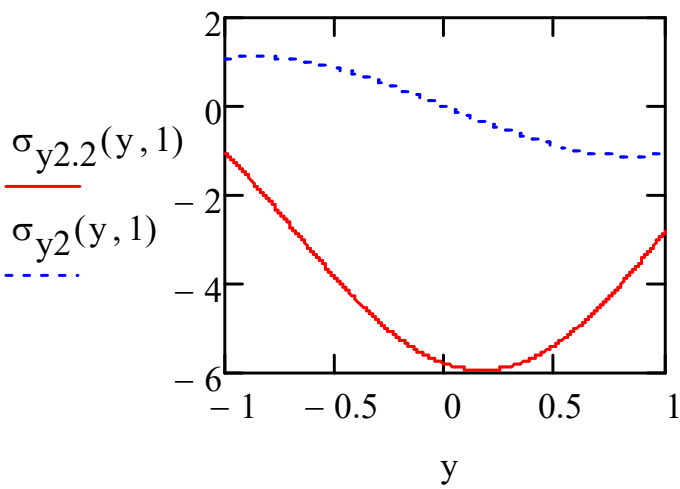
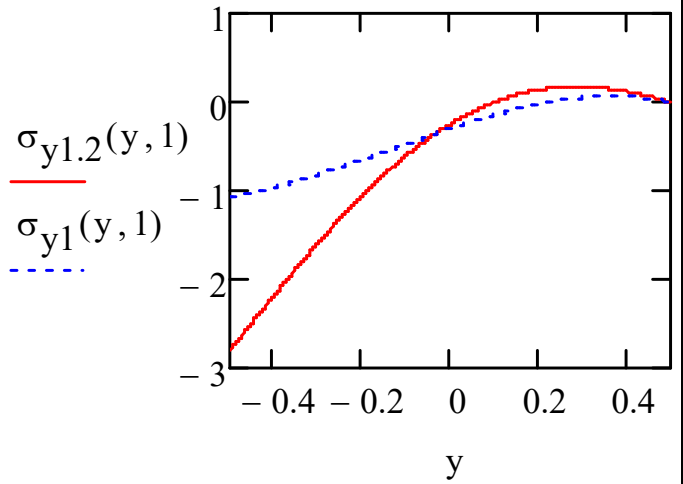
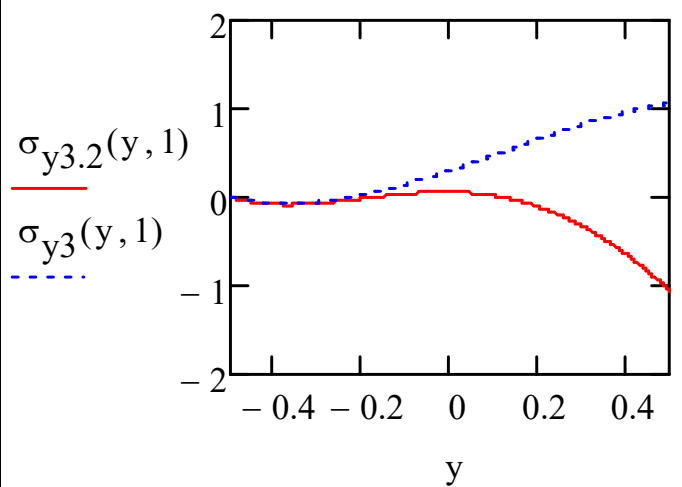
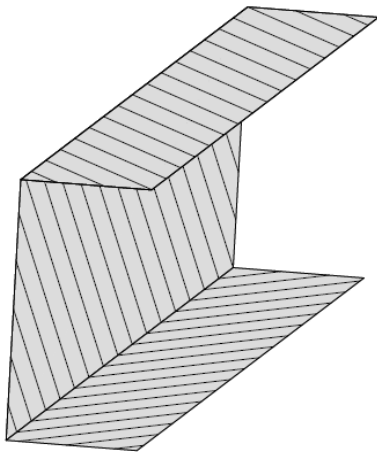


Рис. 4.

Эпюры нормальных напряжений поперечного направления на расстоянии $0.1L$ от заделки для первой, второй и третьей пластины соответственно.



Ориентация волокон армирования



Угол 60° .

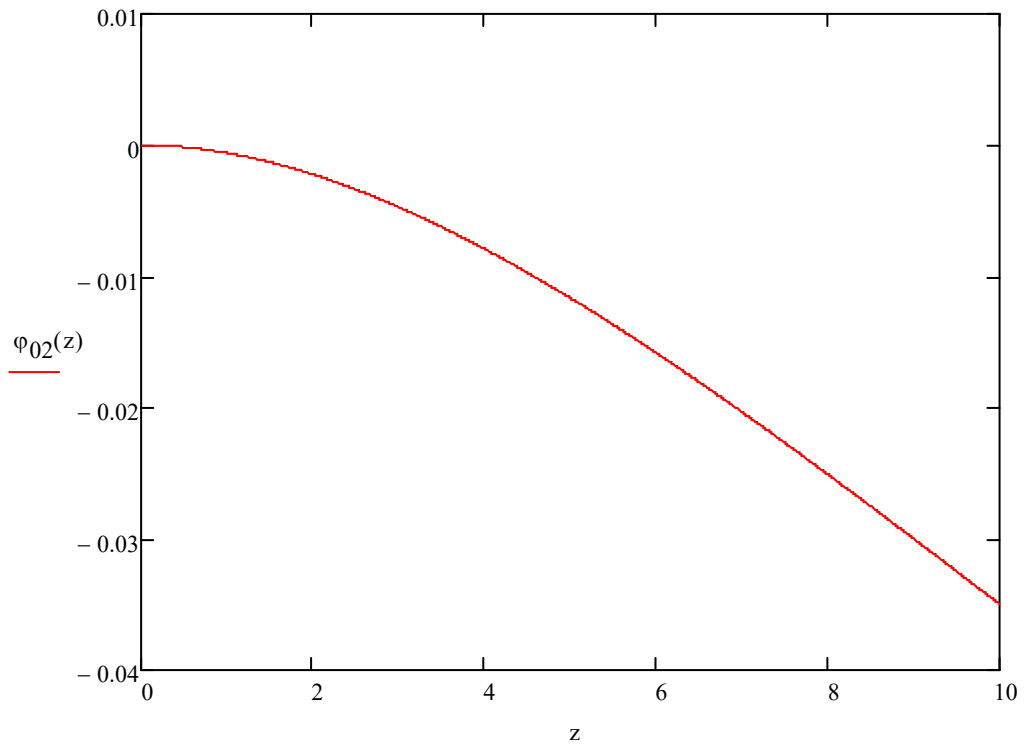
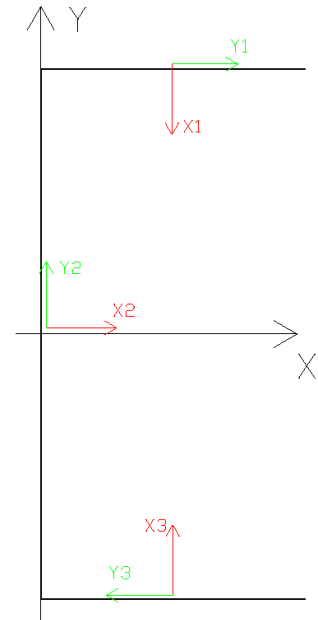
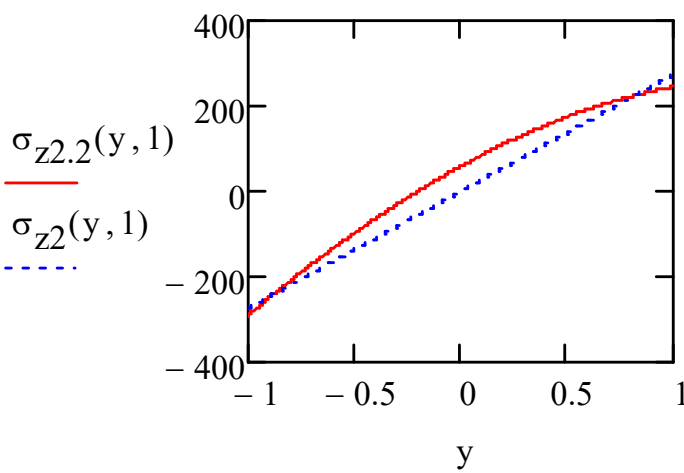
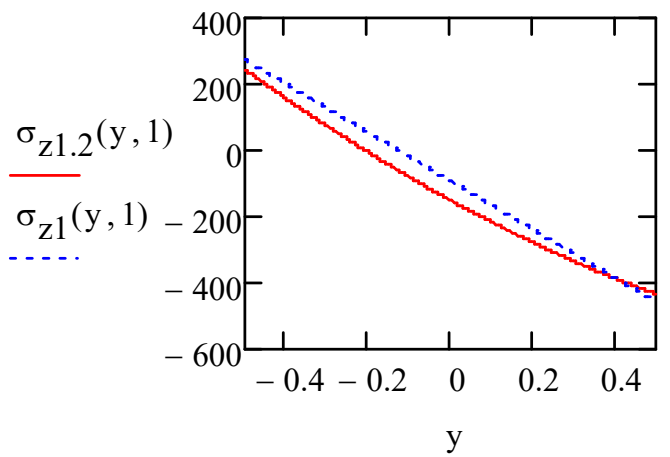


Рис. 1. График углов закручивания стержня на втором цикле.
 $\varphi = -0.03498$

Рис. 2.
Эпюры нормальных напряжений
продольного направления на расстоянии
 $0.1L$ от заделки для первой, второй и
третьей пластины соответственно.



Ориентация волокон армирования

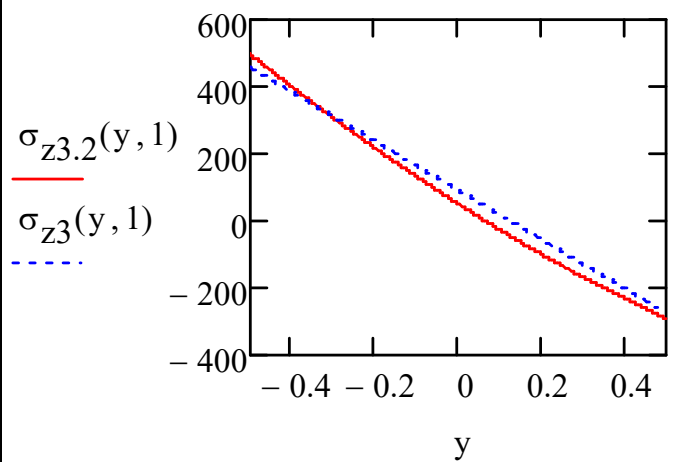
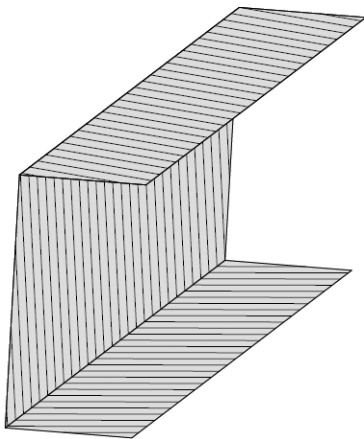
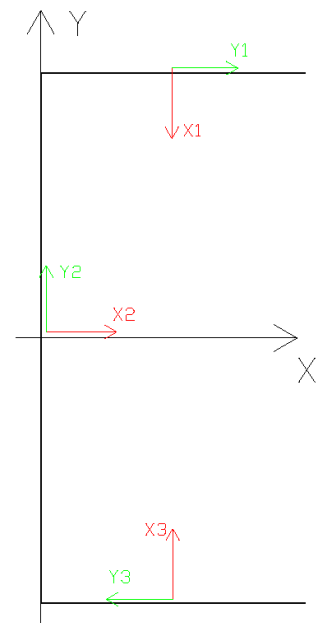
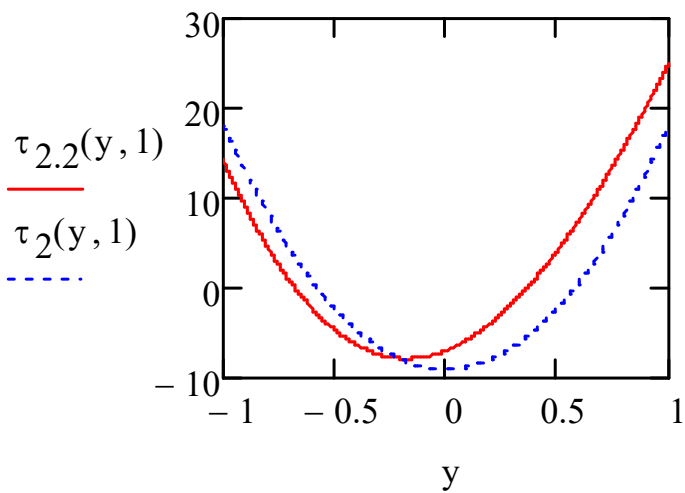
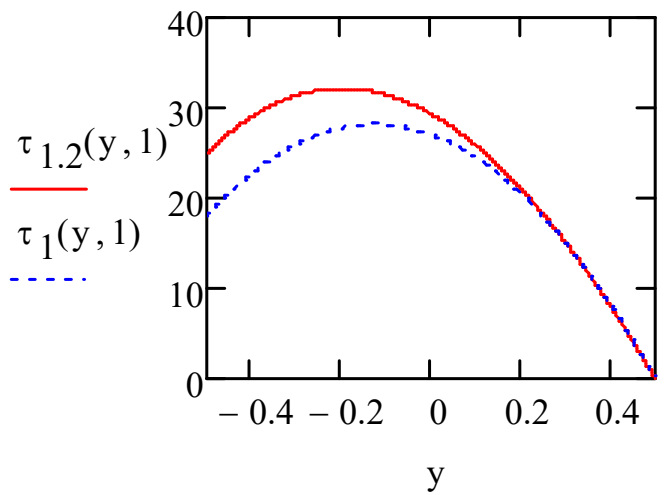


Рис. 3.

Эпюры касательных напряжений на расстоянии $0.1L$ от заделки для первой, второй и третьей пластины соответственно.



Ориентация волокон армирования

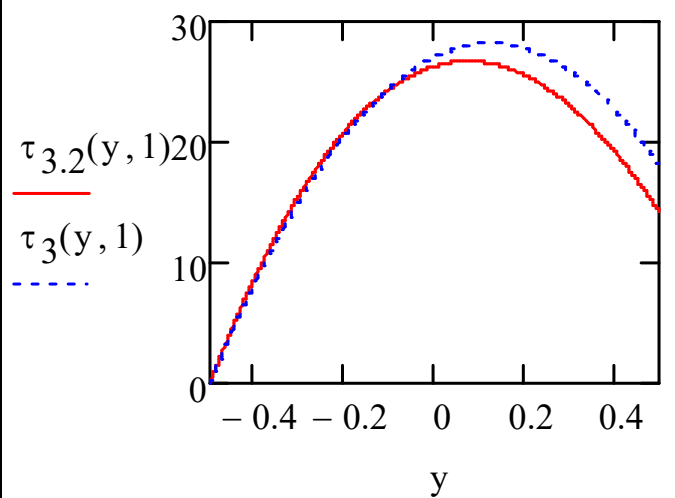
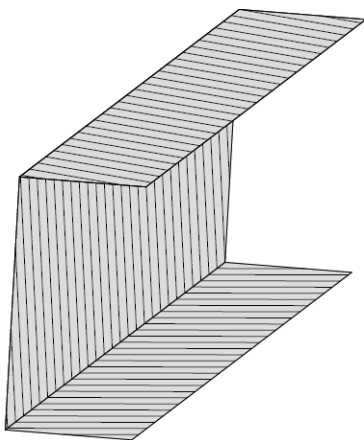
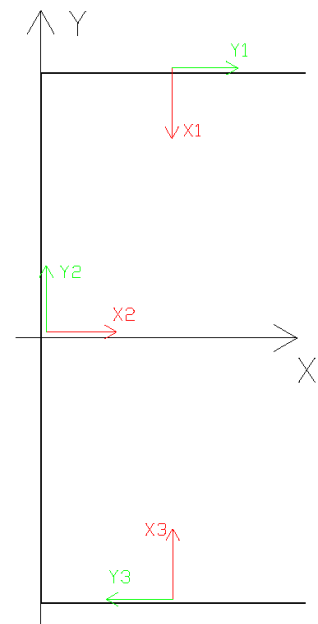
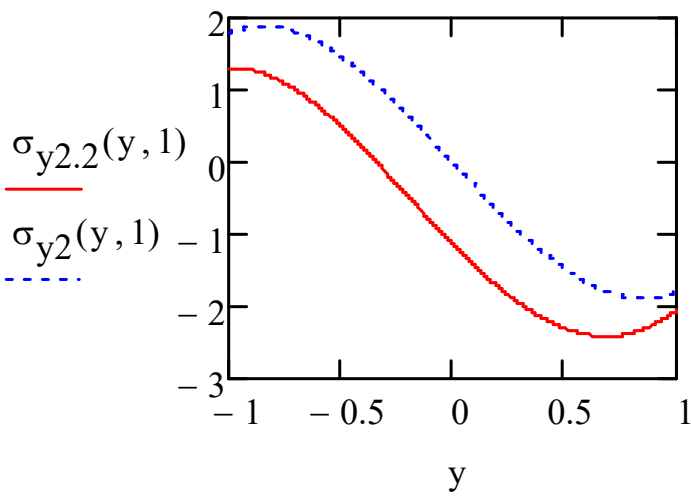
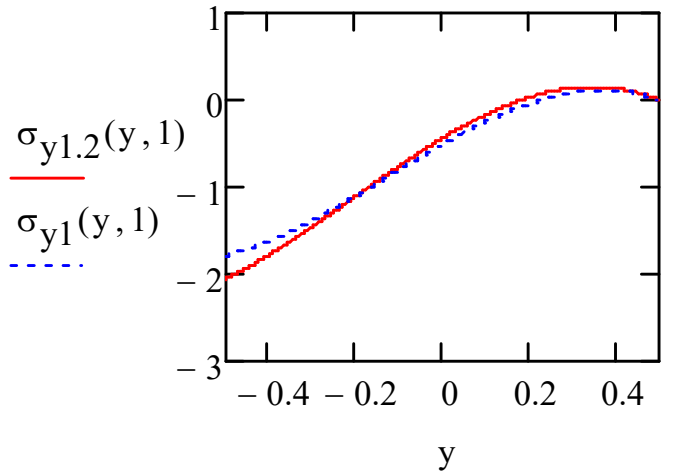
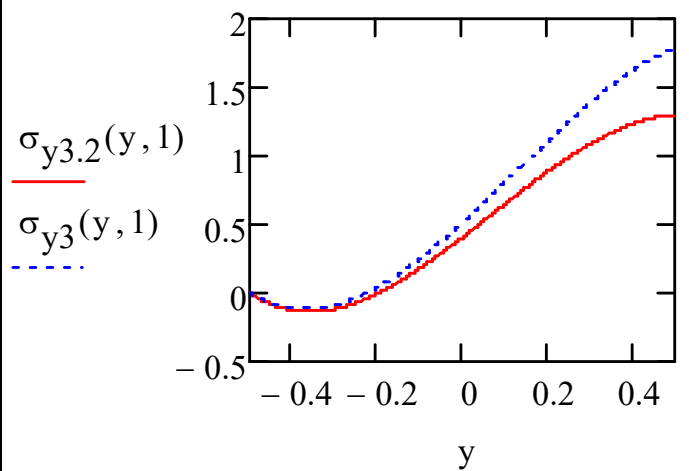
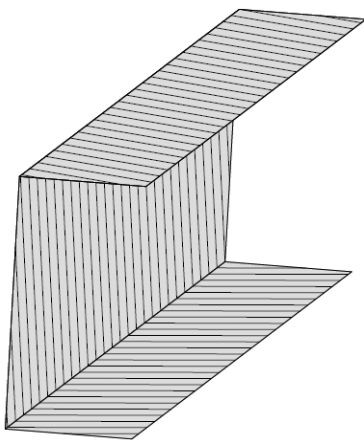


Рис. 4.
Эпюры нормальных напряжений поперечного направления на расстоянии $0.1L$ от заделки для первой, второй и третьей пластины соответственно.



Ориентация волокон армирования



Угол 90° .

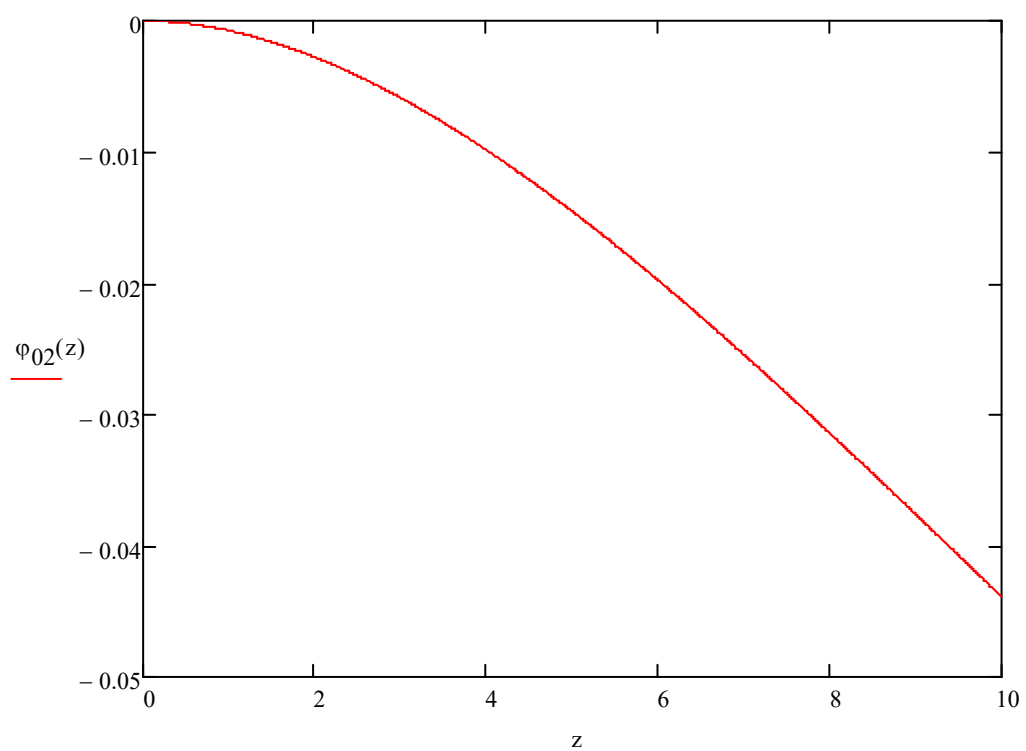
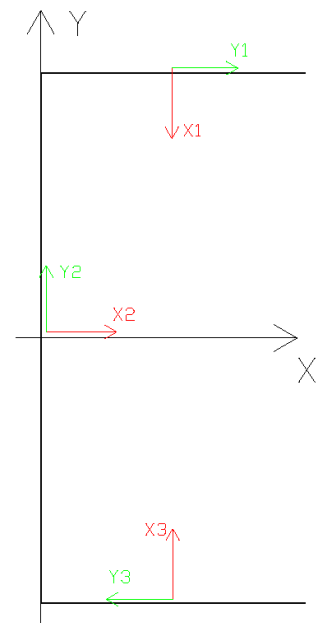
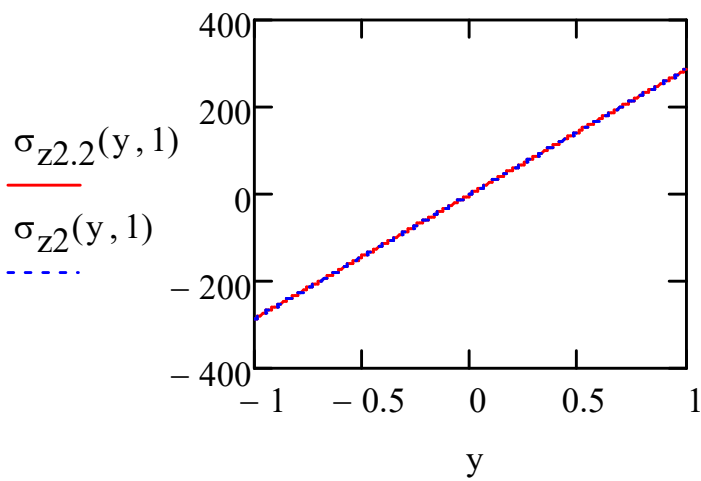
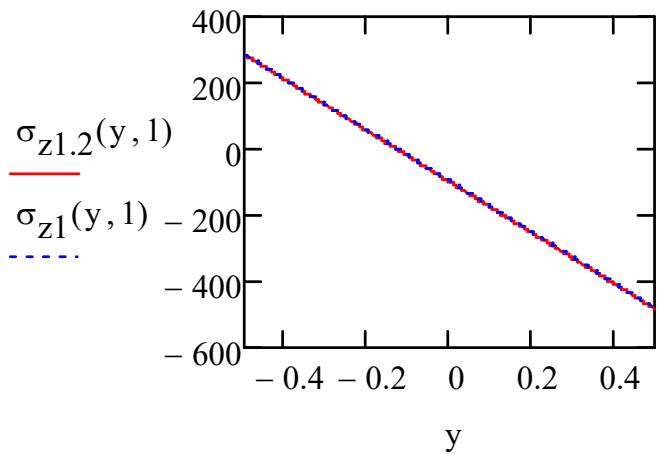


Рис. 1. График углов закручивания стержня на втором цикле.

$$\varphi = -0.04389$$

Рис. 2.

Эпюры нормальных напряжений продольного направления на расстоянии $0.1L$ от заделки для первой, второй и третьей пластины соответственно.



Ориентация волокон армирования

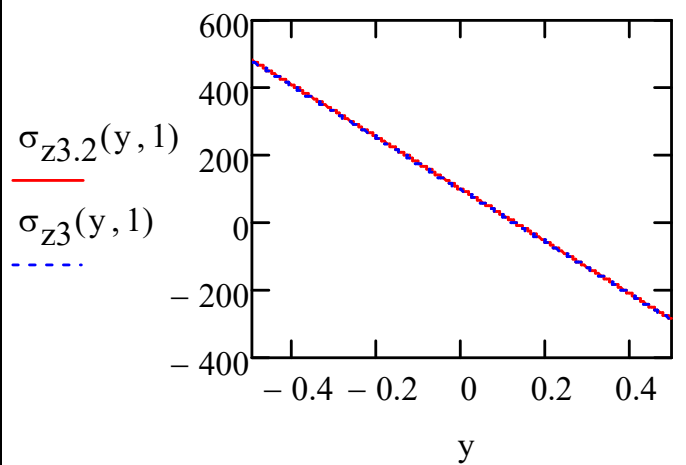
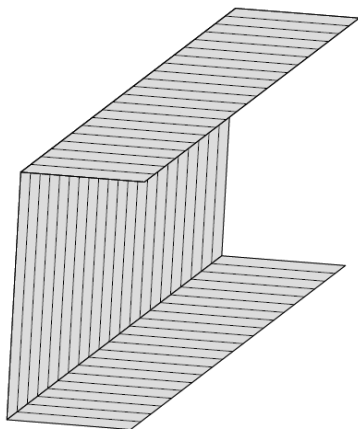
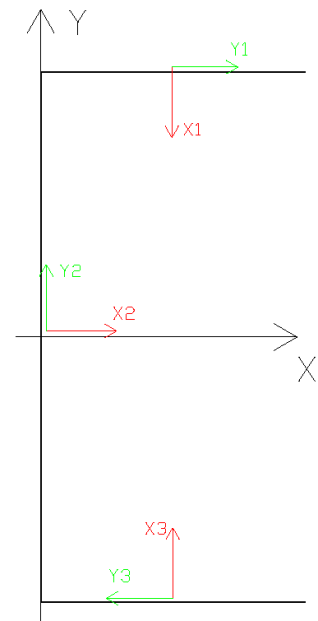
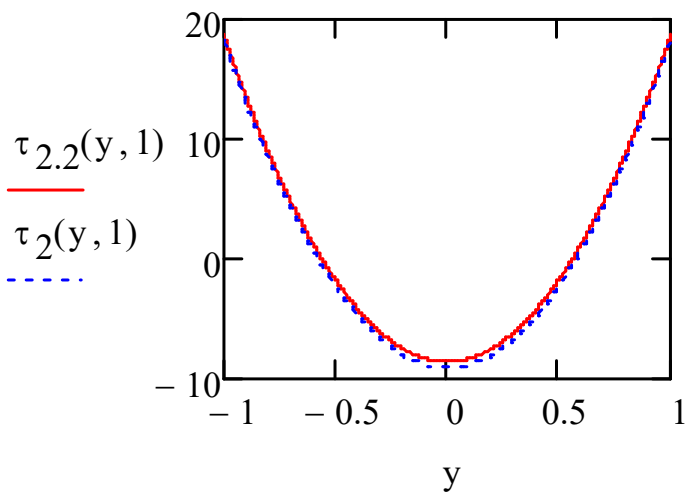
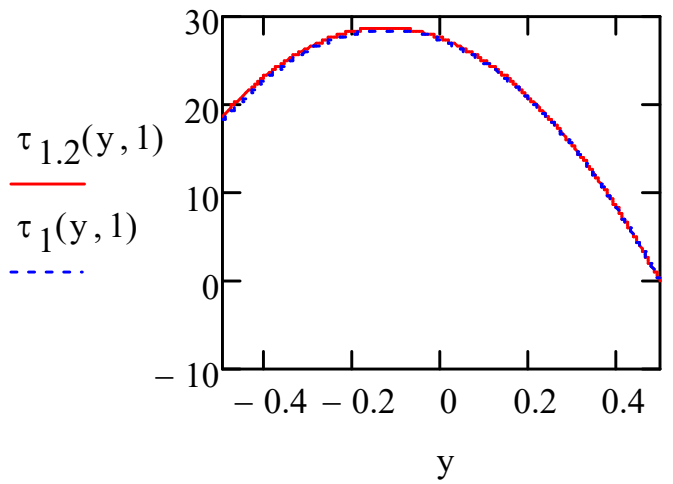


Рис. 3.

Эпюры касательных напряжений на расстоянии $0.1L$ от заделки для первой, второй и третьей пластины соответственно.



Ориентация волокон армирования

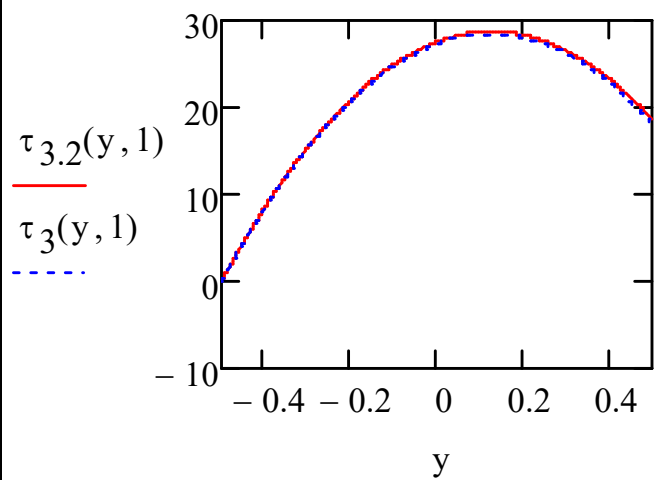
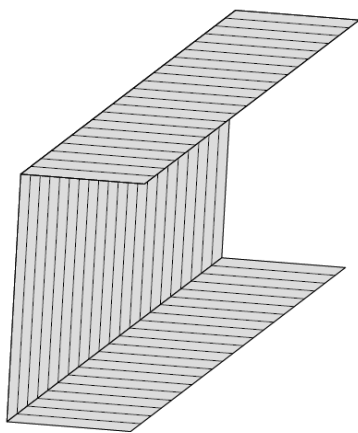
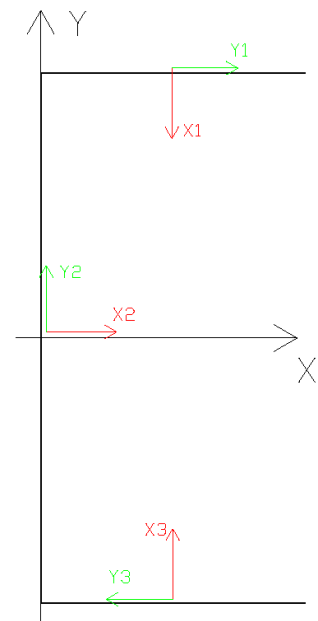
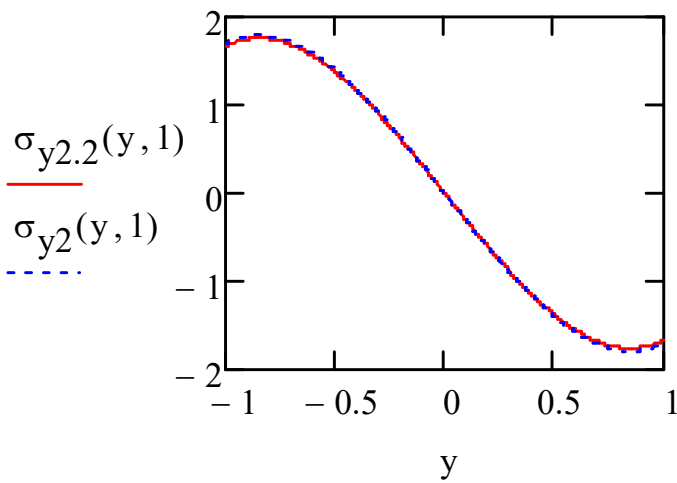
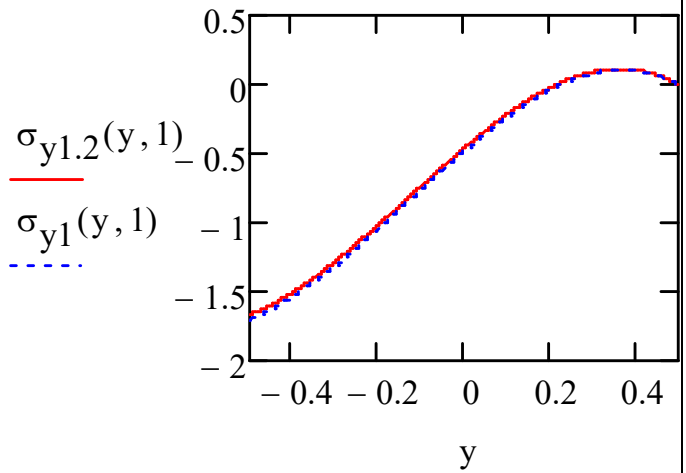
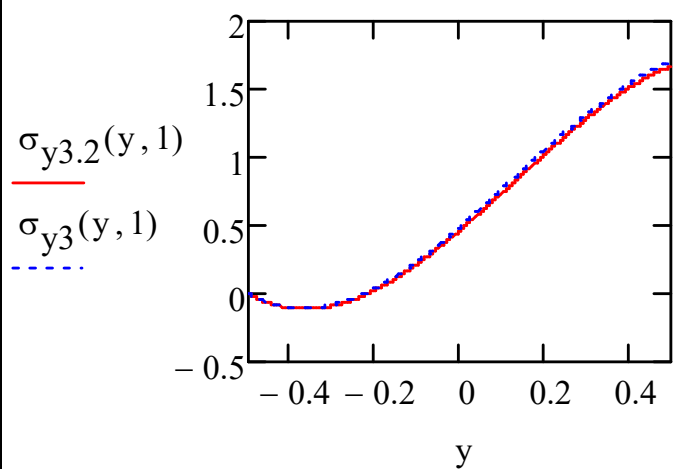
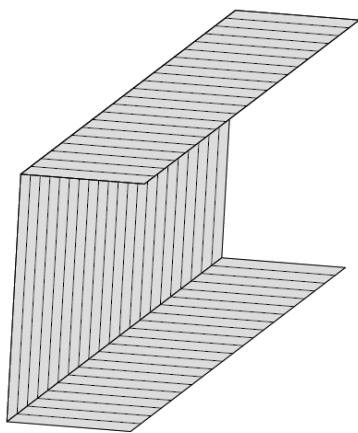


Рис. 4.

Эпюры нормальных напряжений поперечного направления на расстоянии $0.1L$ от заделки для первой, второй и третьей пластины соответственно.



Ориентация волокон армирования



Угол $\pm 30^\circ$.

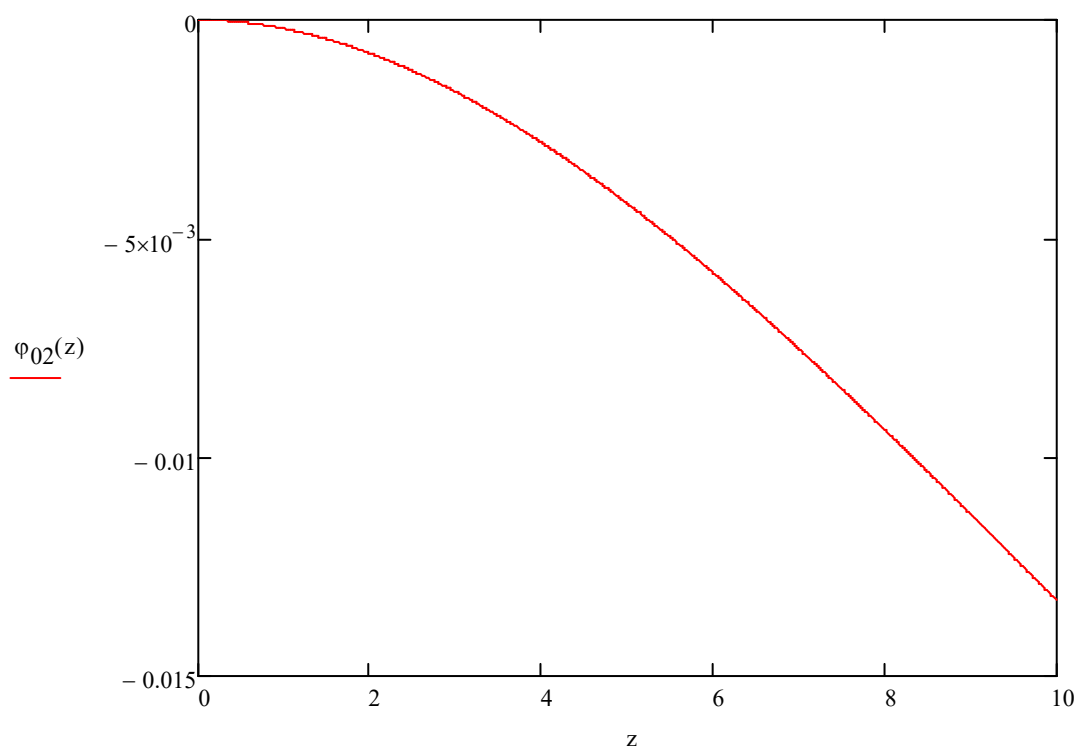
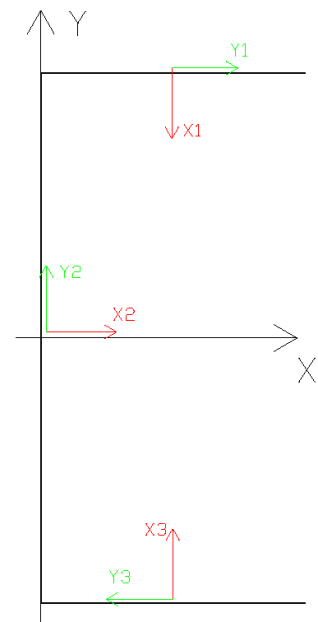
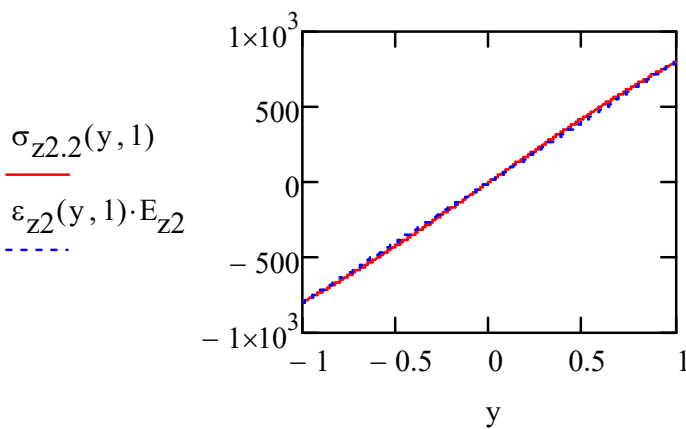
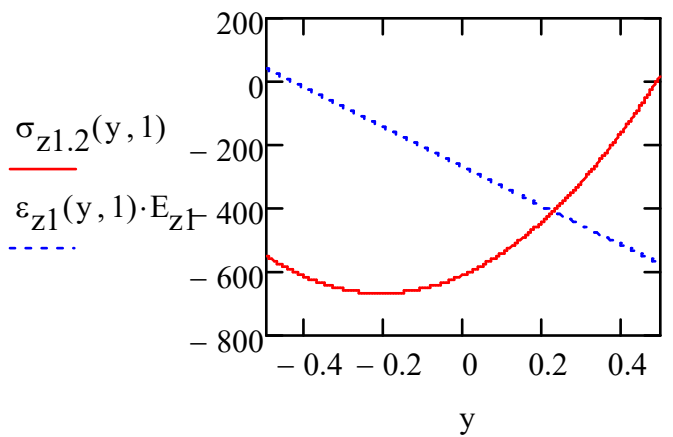


Рис. 1. График углов закручивания стержня на втором цикле.

$$\varphi = -0.01327$$

Рис. 2.
Эпюры нормальных напряжений
продольного направления на расстоянии
 $0.1L$ от заделки для первой, второй и
третьей пластины соответственно.



Ориентация волокон армирования

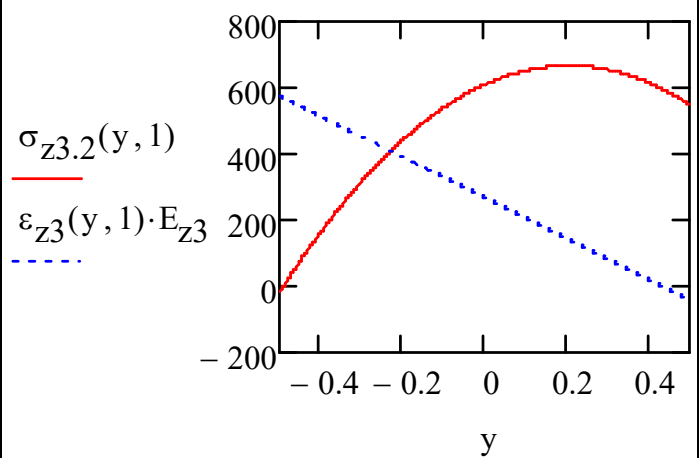
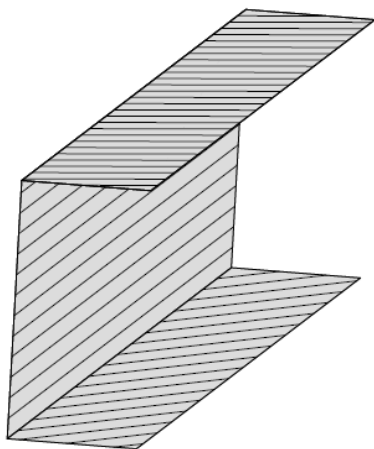
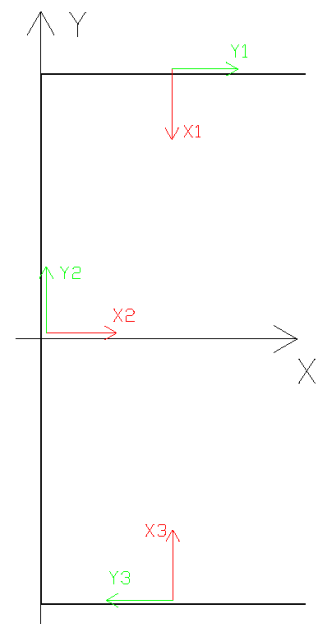
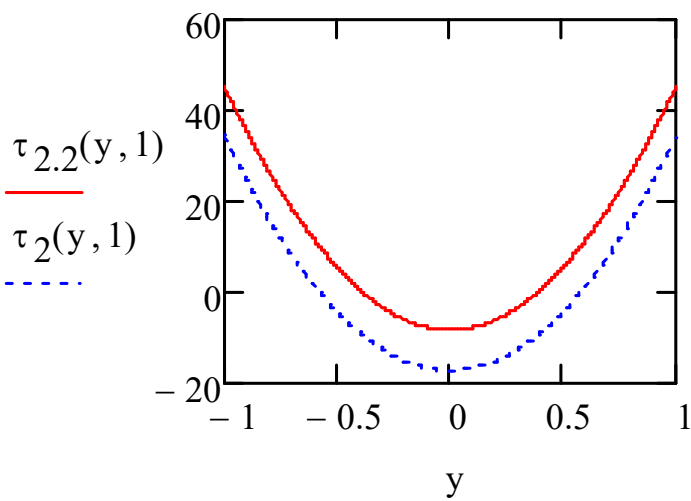
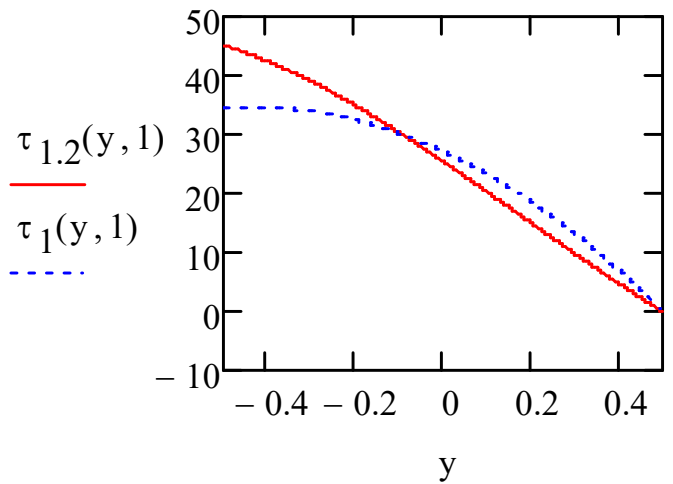


Рис. 3.

Эпюры касательных напряжений на расстоянии $0.1L$ от заделки для первой, второй и третьей пластины соответственно.



Ориентация волокон армирования

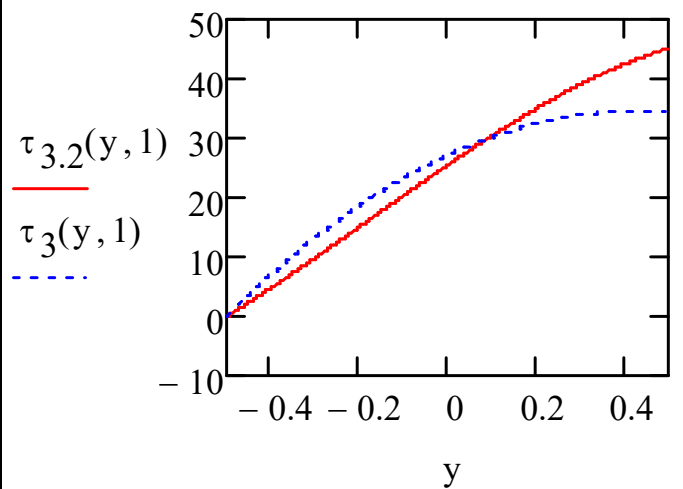
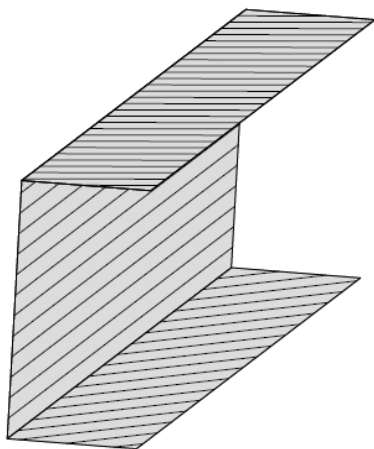
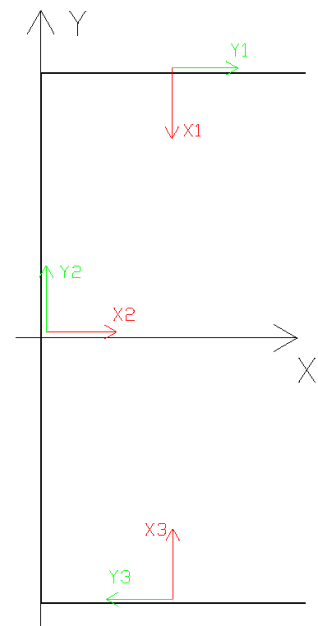
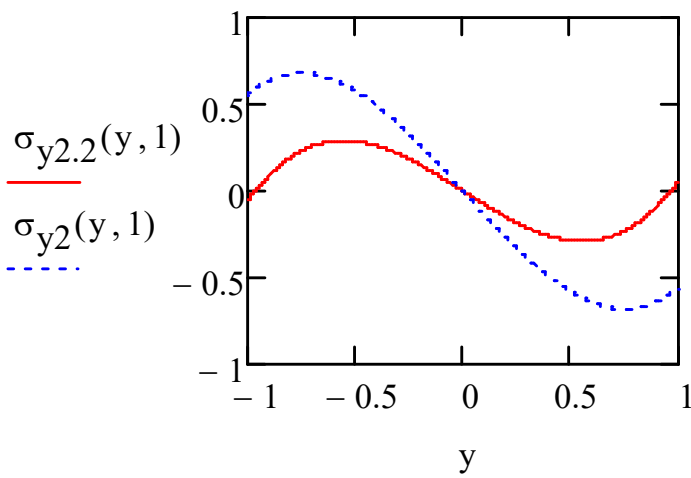
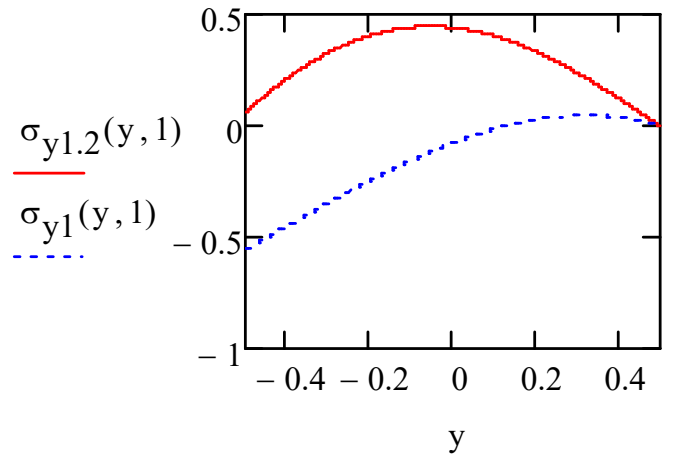
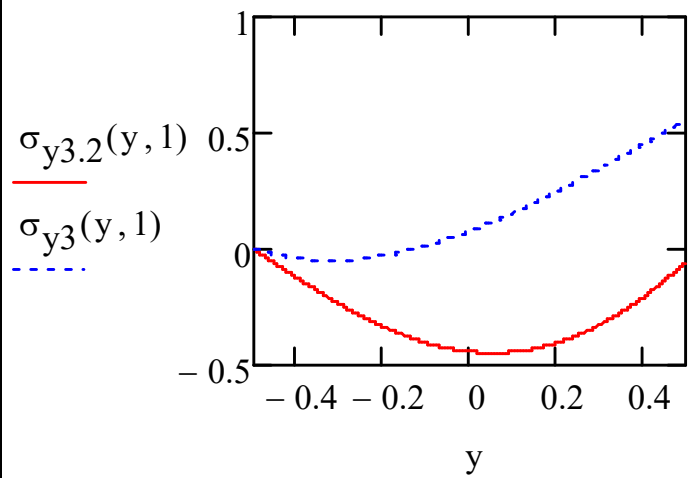
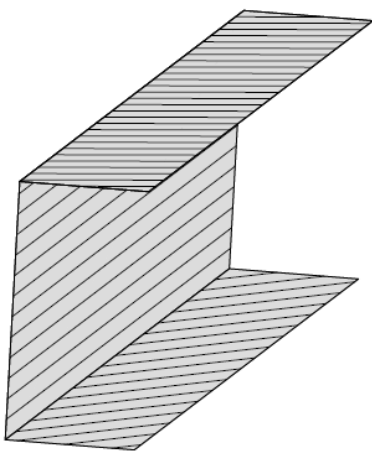


Рис. 4.

Эпюры нормальных напряжений поперечного направления на расстоянии $0.1L$ от заделки для первой, второй и третьей пластины соответственно.



Ориентация волокон армирования



Угол $\pm 60^\circ$.

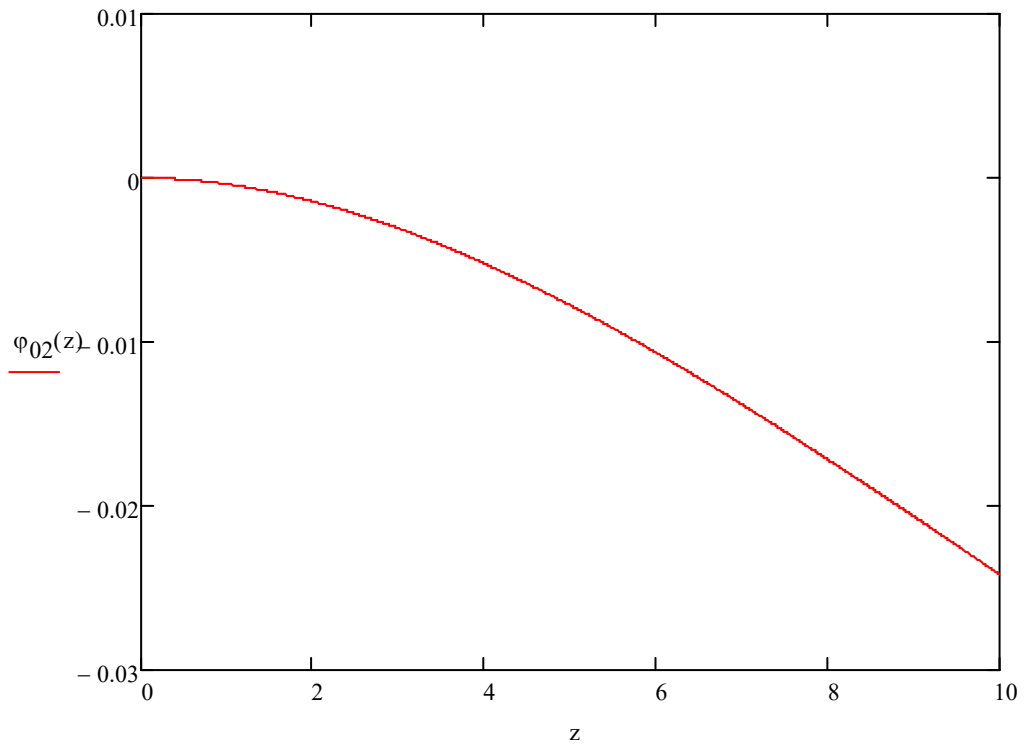
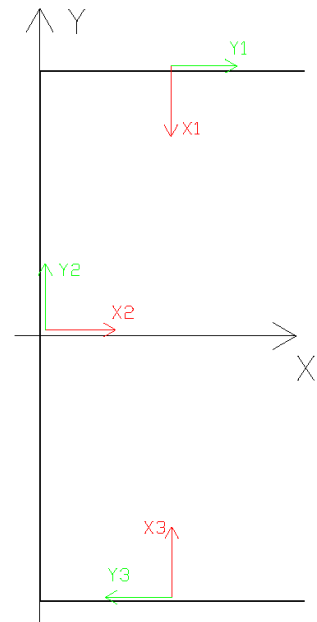
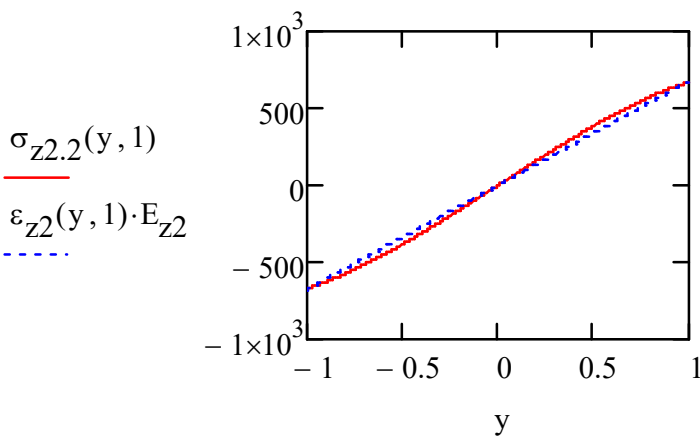
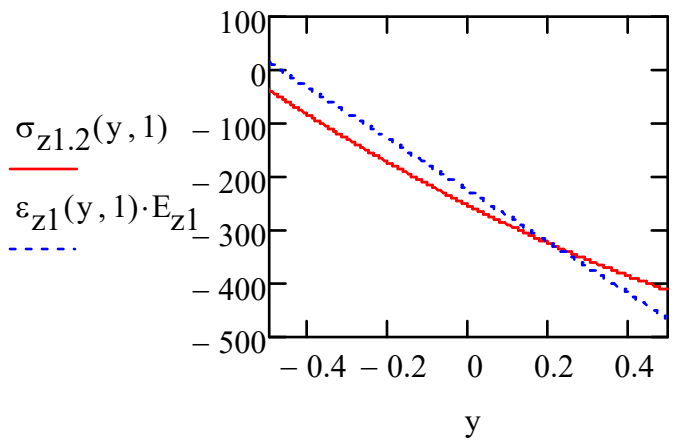


Рис. 1. График углов закручивания стержня на втором цикле.

$$\varphi = -0.02417$$

Рис. 2.

Эпюры нормальных напряжений продольного направления на расстоянии $0.1L$ от заделки для первой, второй и третьей пластины соответственно.



Ориентация волокон армирования

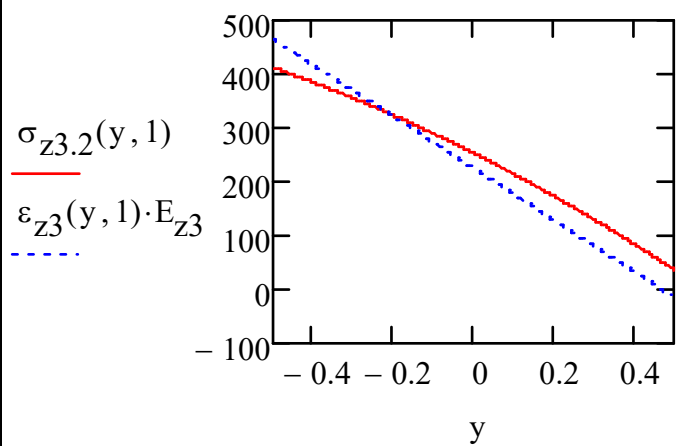
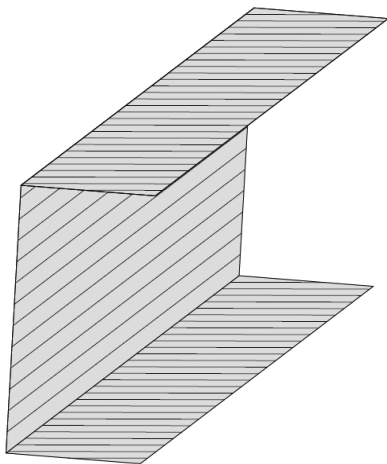
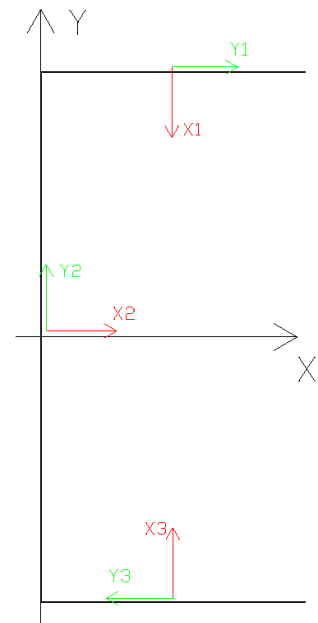
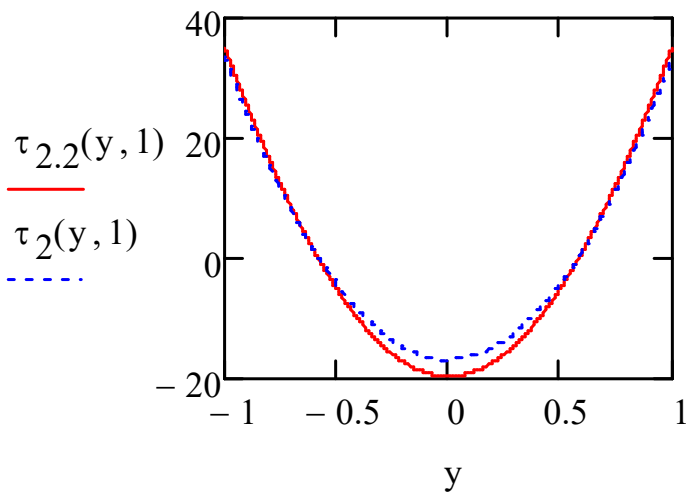
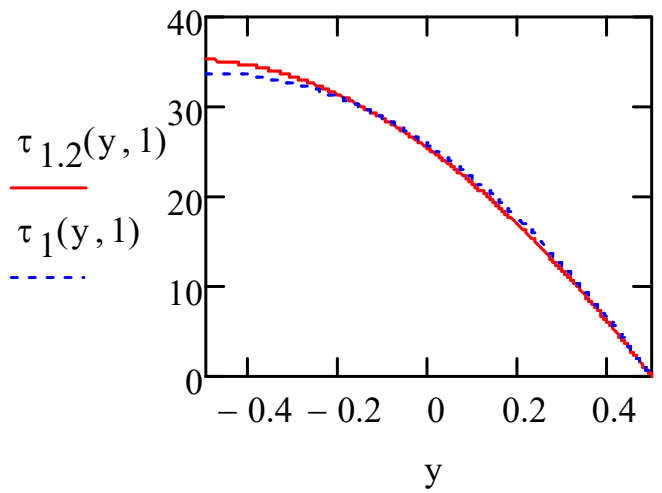


Рис. 3.

Эпюры касательных напряжений на расстоянии $0.1L$ от заделки для первой, второй и третьей пластины соответственно.



Ориентация волокон армирования

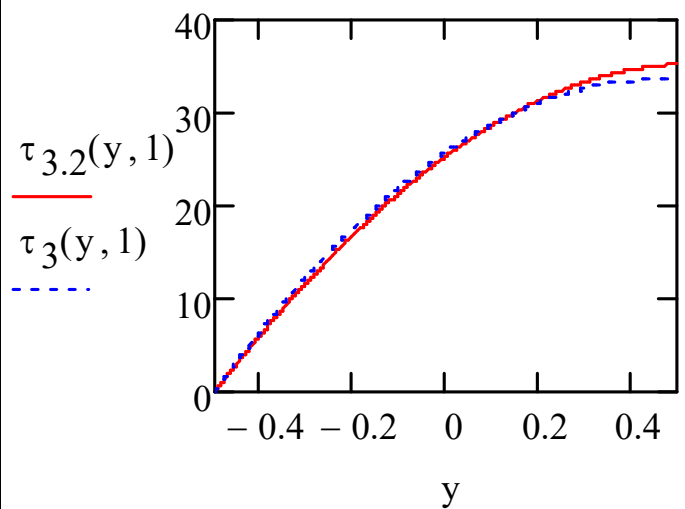
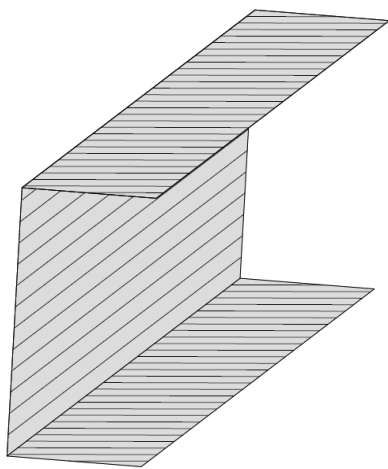
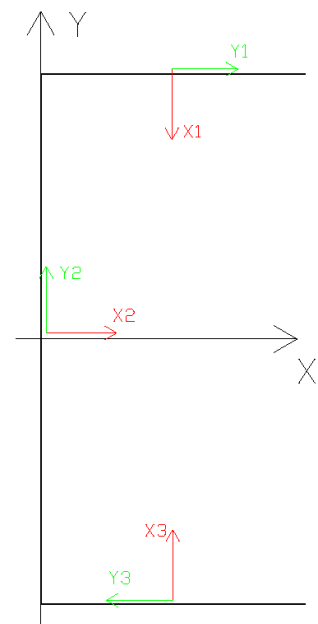
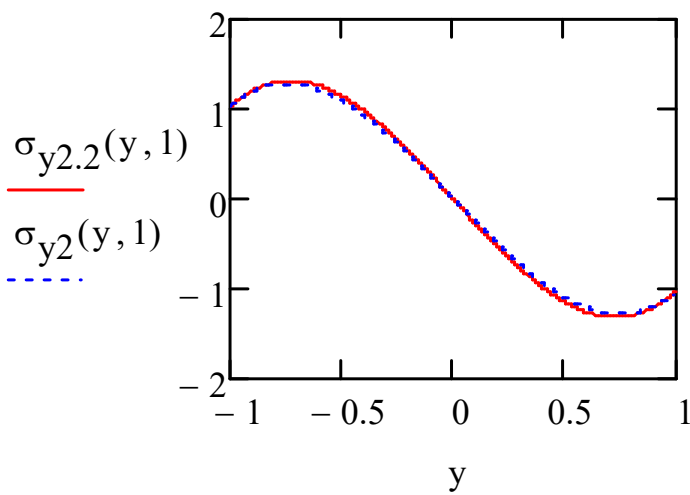
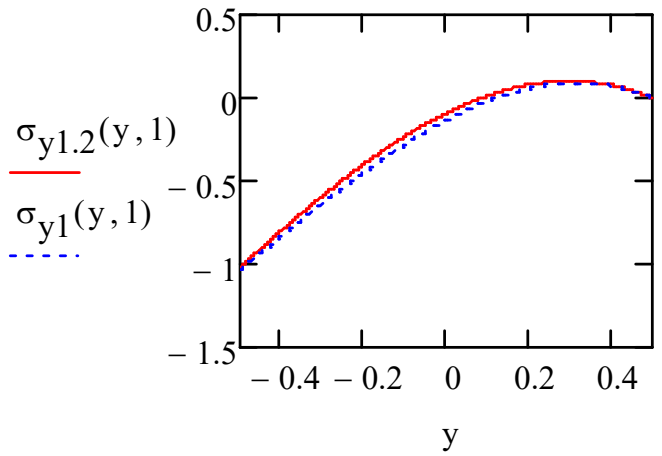
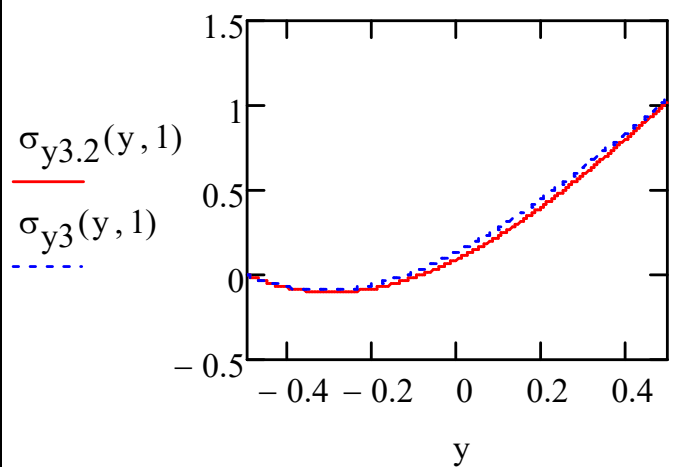
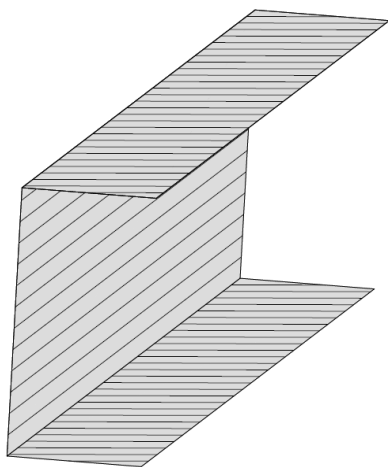


Рис. 4.

Эпюры нормальных напряжений поперечного направления на расстоянии $0.1L$ от заделки для первой, второй и третьей пластины соответственно.



Ориентация волокон армирования



Сравнение по углам для задач 1-6

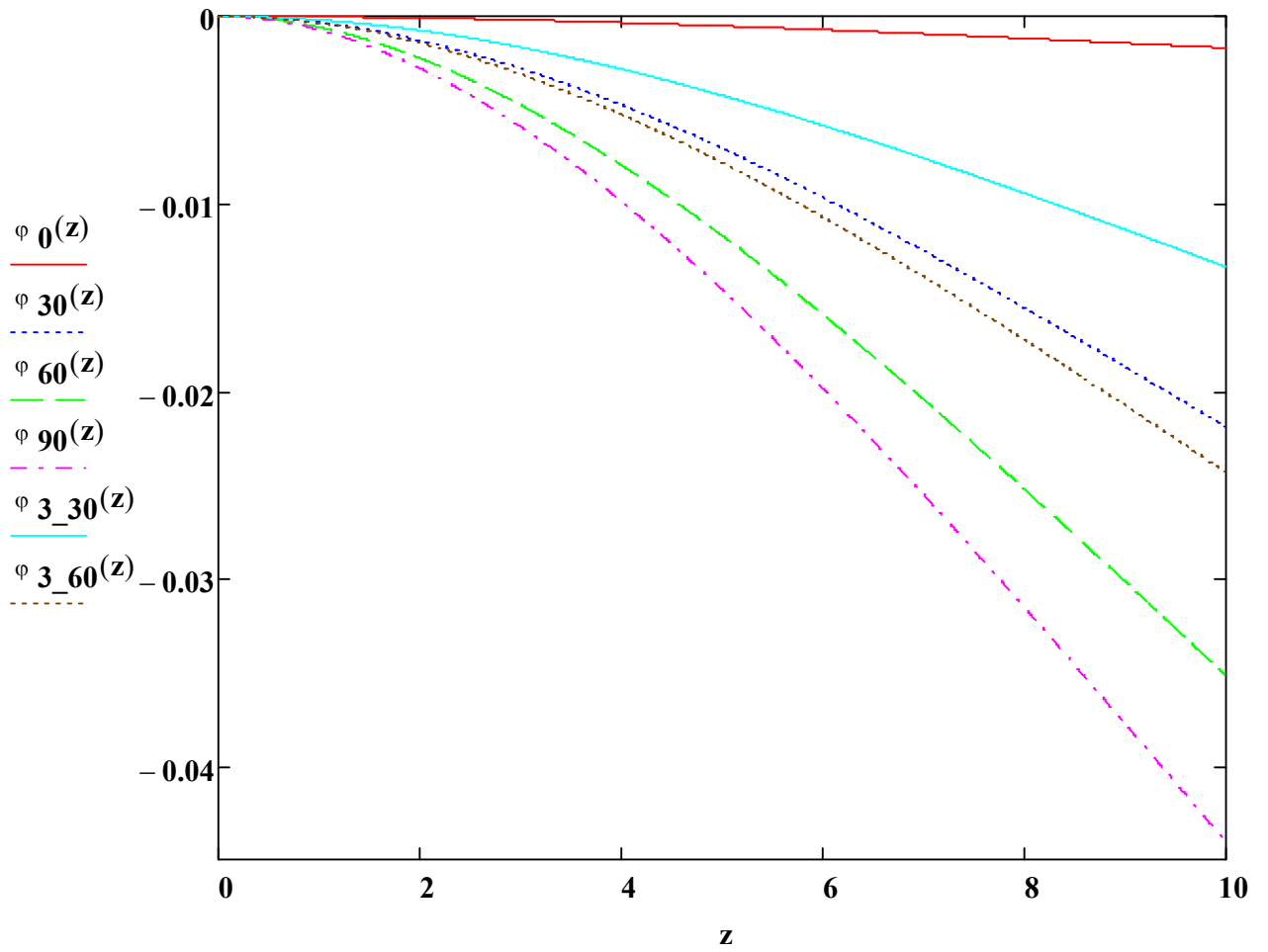


Рис. 1. График угла закручивания стержня по длине для различных углов армирования. Первый цикл.

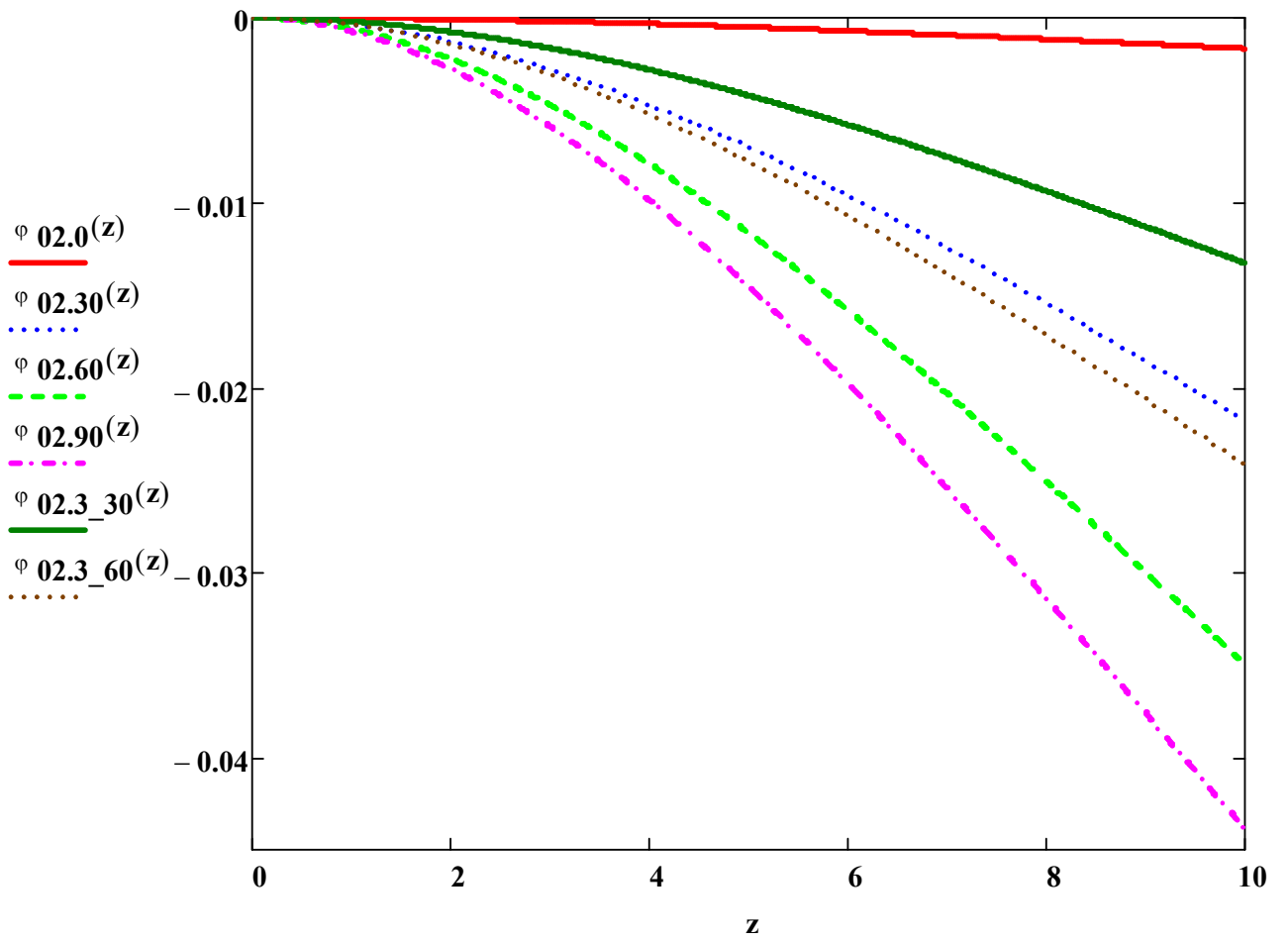


Рис. 2. График угла закручивания стержня по длине для различных углов армирования. Второй цикл.

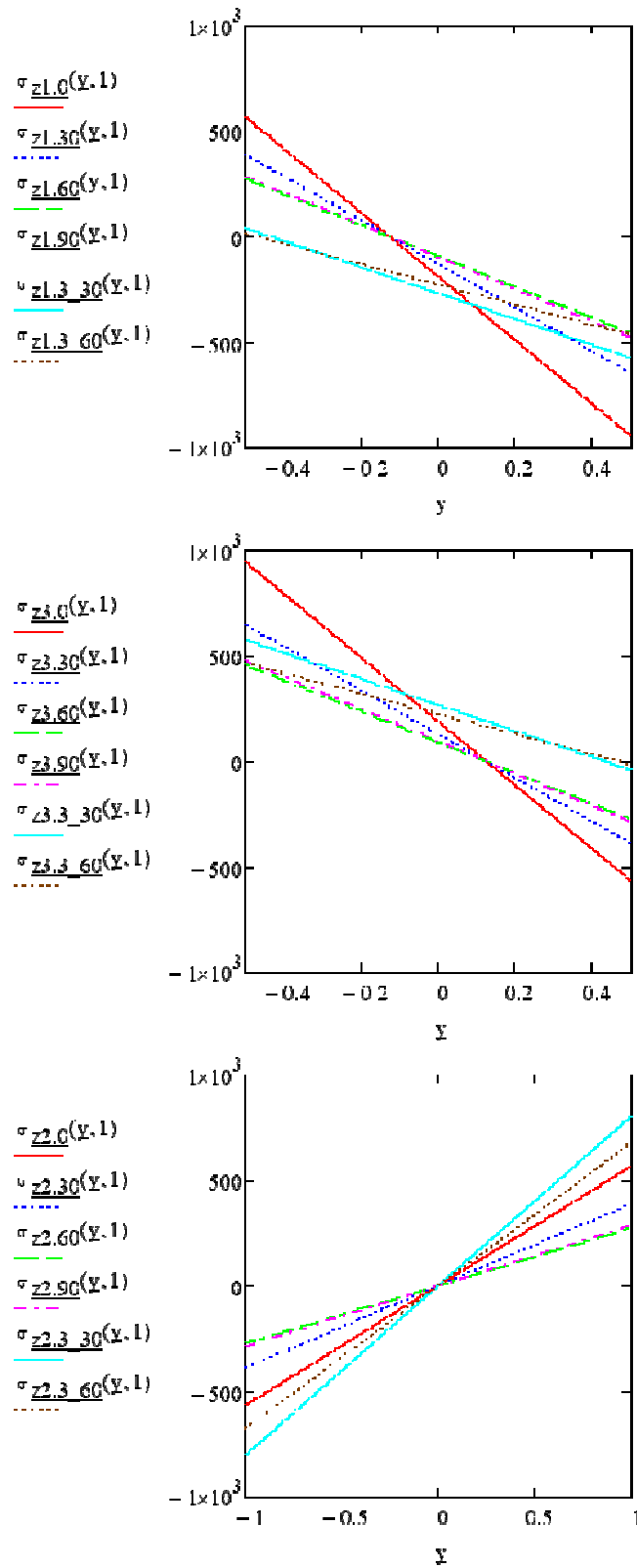


Рис. 3. Распределение нормальных напряжений продольного направления на расстоянии $0.1L$ от заделки, для первой второй и третьей пластины соответственно, для различных углов армирования. Первый цикл.

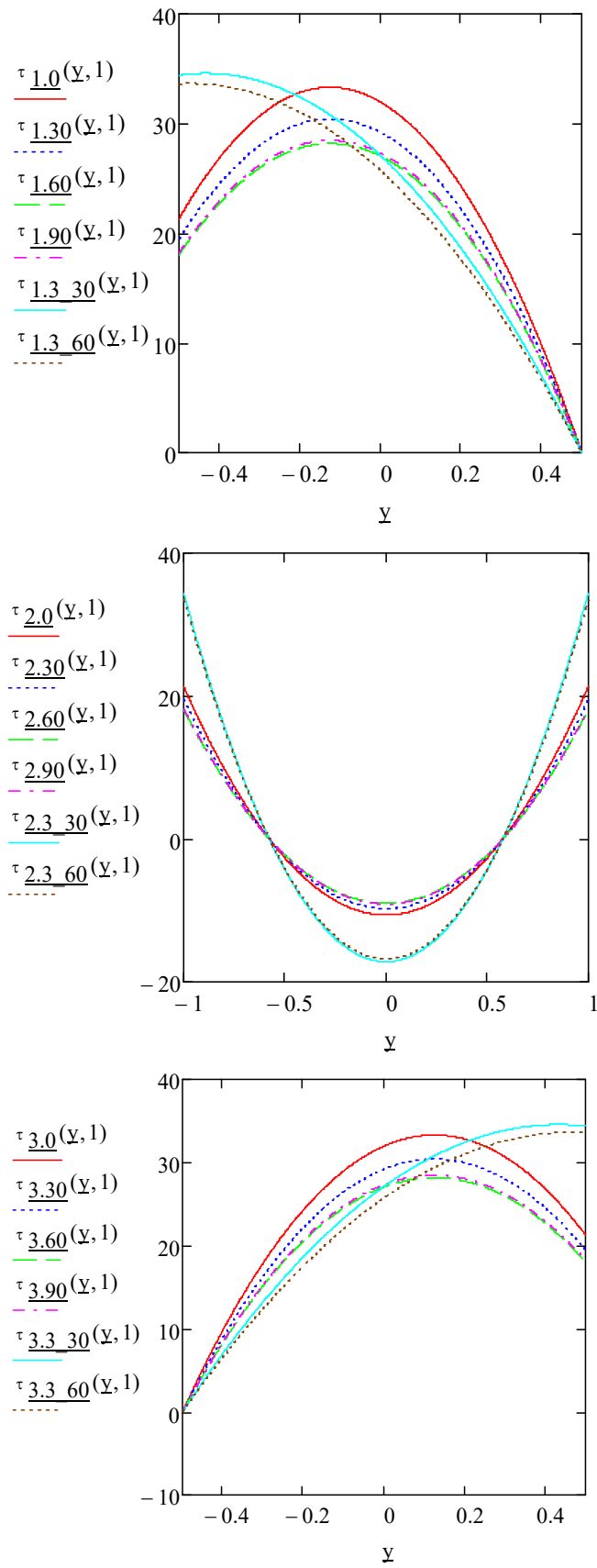


Рис. 4. Распределение касательных напряжений на расстоянии $0.1L$ от заделки, для первой второй и третьей пластины соответственно, для различных углов армирования. Первый цикл.

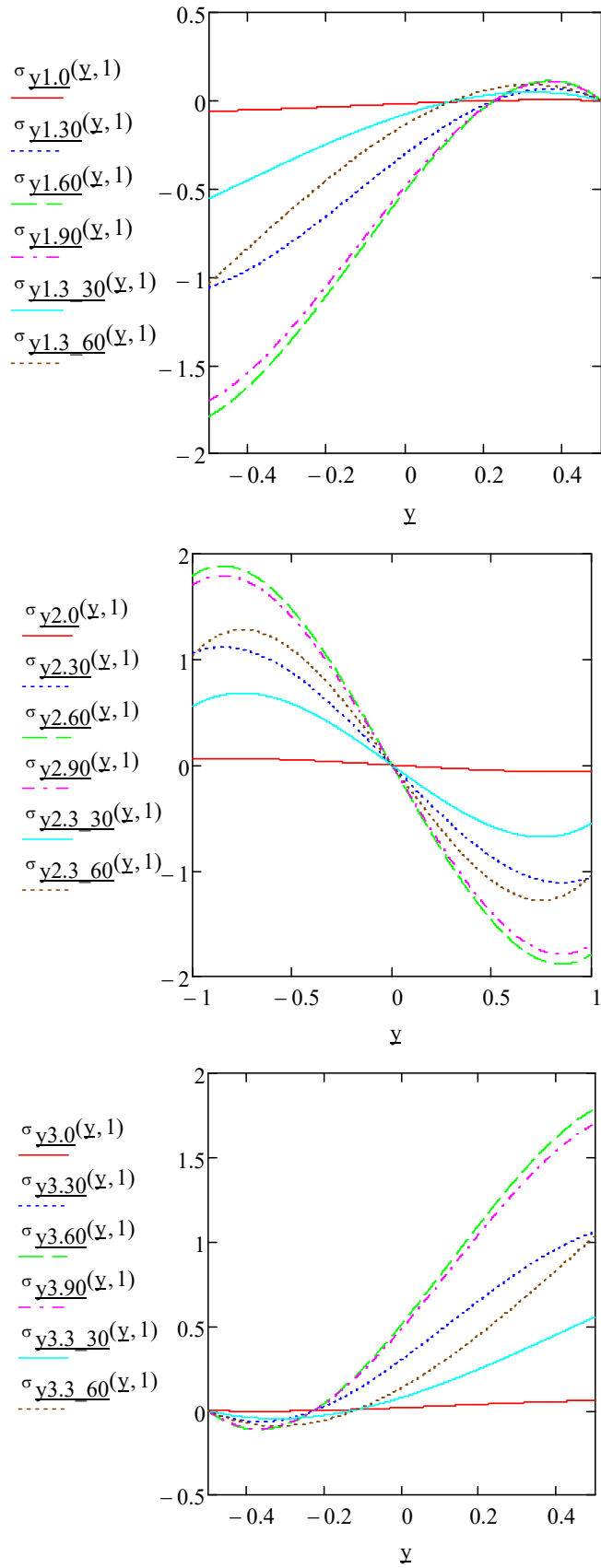


Рис. 5. Распределение нормальных напряжений поперечного направления на расстоянии $0.1L$ от заделки, для первой второй и третьей пластины соответственно, для различных углов армирования. Первый цикл.

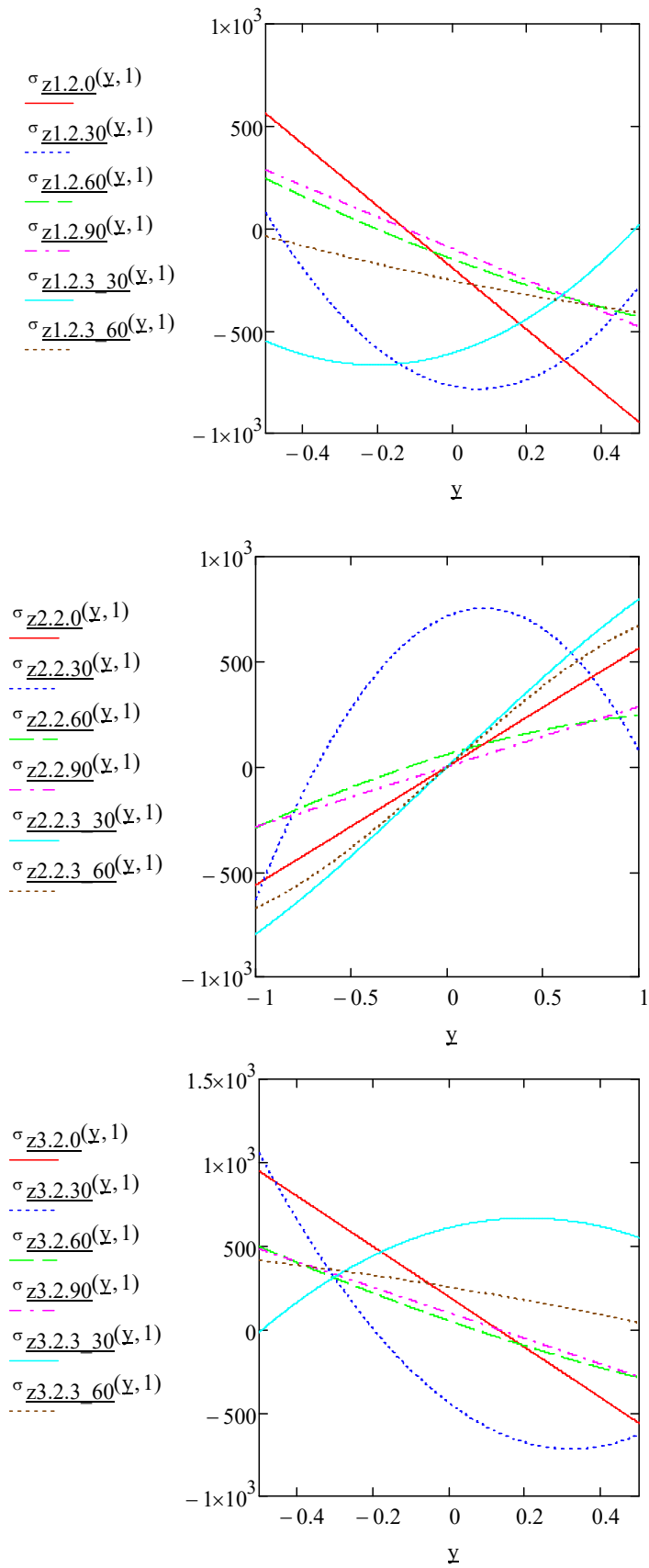


Рис. 6. Распределение нормальных напряжений продольного направления на расстоянии $0.1L$ от заделки, для первой второй и третьей пластины соответственно, для различных углов армирования. Второй цикл.

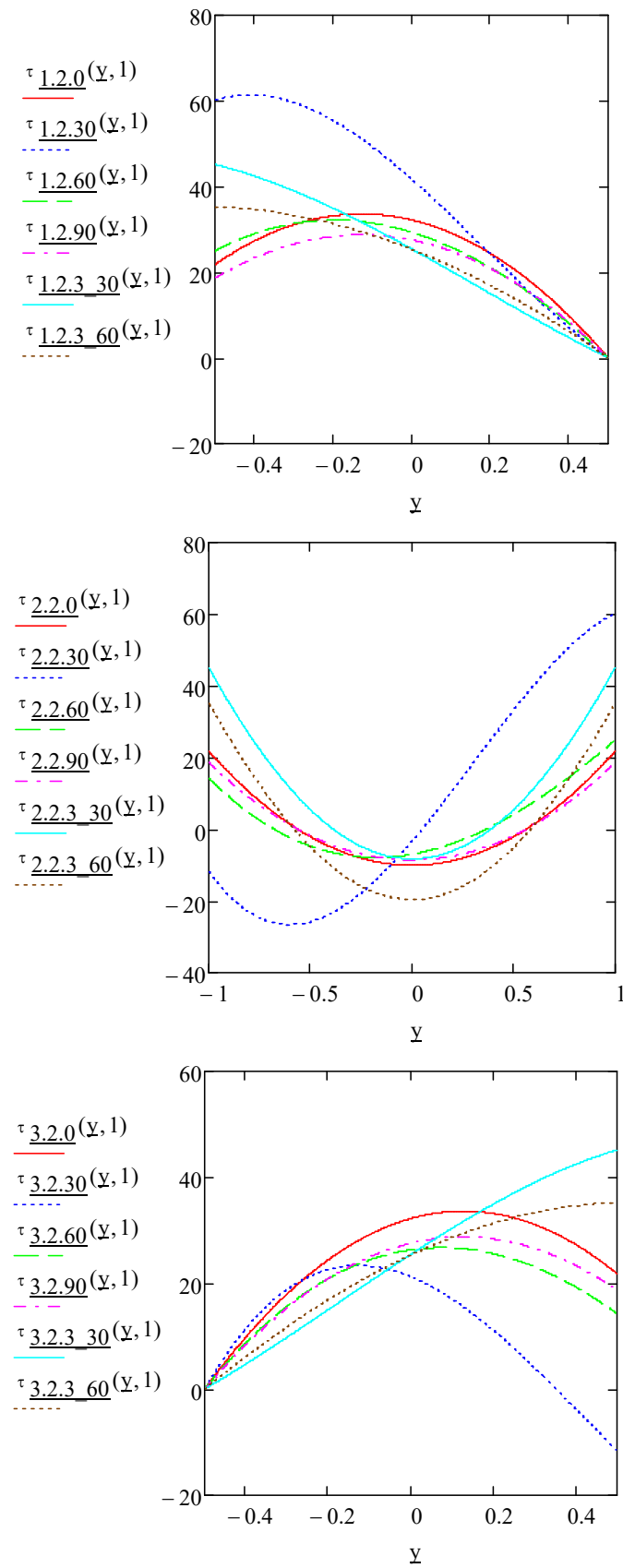


Рис. 7. Распределение касательных напряжений на расстоянии $0.1L$ от заделки, для первой второй и третьей пластины соответственно, для различных углов армирования. Второй цикл.

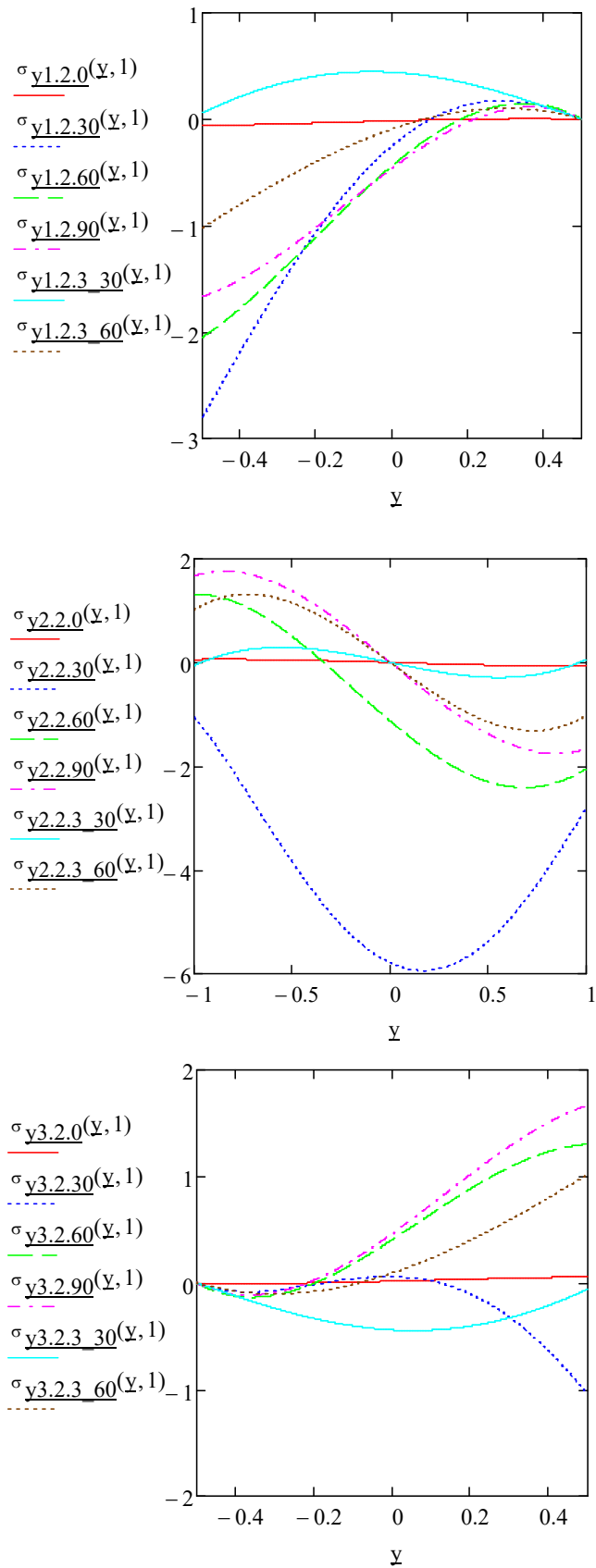


Рис. 8. Распределение нормальных напряжений поперечного направления на расстоянии $0.1L$ от заделки, для первой второй и третьей пластины соответственно, для различных углов армирования. Второй цикл.

ЛИТЕРАТУРА

1. Айрумян, Э.Л. Исследование работы из холодногнутых профилей с учетом их местной и общей устойчивости / Э.Л. Айрумян, Г.И. Белый // Промышленное и гражданское строительство. – 2010. – №5. С. 41-44.
2. Александров В.Г. Расчет тонкостенных неразрезных балок на совместное действие изгиба и кручения при подвижной нагрузке // Дис. канд. техн. наук (2008г)
3. Александров А.В. Сопротивление материалов / А.В. Александров, В.Д. Потапов, Б.П. Державин. – М.: Высшая школа, - 1995. –559 с.
4. Аллахвердов Б.М. Итерационный метод расчета балок с изменяющимися по высоте характеристиками. Исследования по механике материалов и конструкций.(сб. научн.статей)/Вып.12/ Петерб. Гос. Универ. Путей сообщ. –СПб,2002.-С.30 –34, Деп. ВИНТИ.№ 1400-В2002.
5. Аллахвердов Б.М., Корзон С.А., Ткаченко А.С., Устойчивость прямоугольных анизотропных пластин. В сб. III международной конференции «Проблемы прочности материалов и сооружений на транспорте», ПГУПС, СПб, 1995, с. 154.
6. Аллахвердов Б.М., Корзон С.А., Ткаченко А.С., Устойчивость прямоугольных анизотропных пластин с учетом сдвигов. В сб. «Механика материалов и транспортных конструкций», вып. 7, ПГУПС, СПб, 1995, с. 124-131.
7. Амбарцумян С.А. Теория анизотропных пластин (прочность, устойчивость и колебания). М., 1967.
8. Ашкенази Е.К. Ганов Э.В. Анизотропия конструкционных материалов.Л. «Машиностроение» 1972
9. Бейлин, Е.А. Статика и динамика тонкостенных криволинейных стержней произвольного профиля / Е.А. Бейлин // Известия вузов. Строительство. - 1997. - №7. С. 19-26.

10. Бейлин, Е.А. Элементы теории кручения тонкостенных стержней произвольного профиля [текст] / Е.А. Бейлин. - С.Пб: Из-во СПбГАСУ, -2003. 113 с.
11. Бельский Г.Е. Сердюков В.И. Предельные состояния сечений одиночных уголков // Строительная механика и расчет сооружений. 1983. - №2. – С54-58.
12. Бельский, Г.Е. Вариантное проектирование стальных балок составного двутаврового сечения / Г.Е. Бельский, Д.Б. Киселев // Монтаж. и спец. работы в стр.-ве. – 1995. – №10. С. 25-29.
13. Беляев Н.М. Сопротивление материалов. – М., 1965. 855 с.
14. Бидерман В.Л. Механика тонкостенных конструкций. Статика. М., «Машиностроение», 1977 (Б-ка расчетчика). 488 с. С ил.
15. Блейх Ф. Устойчивость металлических конструкций. М. 1959г. 544с.
16. Бычков Д.В. Мрощинский А.К. Кручение металлических балок.- М., 1944. 260 с.
17. Бычков Д.В. Расчет балочных и рамных стержневых систем из тонкостенных элементов // Дис. д-ра техн. наук. – М., 1945. 296с
18. Бычков Д.В. Расчет балочных и рамных стержневых систем из тонкостенных элементов. – М., 1948. 208 с.
19. Бычков Д.В. Строительная механика стержневых тонкостенных конструкций. – М., 1962. 476 с.
20. Ватин, Н.И. Расчет металлоконструкций: седьмая степень свободы / Н.И. Ватин, В.А. Рыбаков // Журнал «СтройПРОФИль». - 2007. -№3(57). С. 32-35.
21. Ветюков, Ю.М. Упругие деформации и устойчивость равновесия тонкостенных стержней открытого профиля / Ю.М. Ветюков, В.В. Елисеев // Научно-технические ведомости Санкт-Петербургского государственного политехнического университета. - 2007. - №52-1. С. 49-53.

22. Власов В.З. Тонкостенные упругие стержни. – М.: Физматгиз, 1959. 568 с.
23. Власов В.З. Общая теория оболочек и ее приложения в технике. – М.: Гостехиздат, 1949. 784 с.
24. Власов В.З. Новый практический метод расчета складчатых покрытий и оболочек // Строительная промышленность. 1932. - №11. – С.33-38; №12.- С.21-26.
25. Власов, В.З. Новый метод расчета призматических балок из тонкостенных профилей на совместное действие изгиба и кручения / В.З. Власов // Вестник ВИАБ №20, - 1936. 99
26. Власов В.З. Кручение и устойчивость тонкостенных открытых профилей// строительная промышленность. – 1938. - №6 – С49 -53; №7. – С.55 – 60.
27. Власов, В.З. Кручение, устойчивость и колебание тонкостенных стержней / В.З. Власов // Прикладная математика и механика. Т.3, вып.1, - 1939.
28. Власов В.З. Избранные труды. Том 3. Тонкостенные пространственные системы. – М.: Наука, 1964. 472 с.
29. Воробьев Л.Н. Деформационный расчет и устойчивость тонкостенных стержней открытого профиля. // Сб. научн. тр. / Новочеркасский политехнический институт. – Новочеркасск: НПИ, 1958. Том 69/83
30. Гайнулина С. Х. Применение вариационных методов к расчету систем наименьшего веса. [текст] / С.Х. Гайнулина // Тр.КАИ., Вып. 91-1966. С. 69-77.
31. Гильденгорн Л.А. Сопоставление отечественных и зарубежных норм расчета стальных конструкций. Обзор. – М.: ВНИИС, 1987. 71 с.
32. Глухих В.Н. Анизотропия упругости волокнистых композиционных материалов: учеб. Пособие / В.Н. Глухих. – СПб.: Изд-во Политехн. ун-та, 2018. – 94 с

33. Глухих В.Н., Черных А.Г. Анизотропия древесины. Технологический аспект: моногр. – СПб: редакция Санкт-Петербургского государственного ун-та, 2013. – 240 с.
34. Гольденвейзер А.Л. О теории тонкостенных стержней /А.Л. Гольденвейзер // ПММ, - 1949, - т.13, вып.6. 100
35. Горбунов Н.Г. Стрельбицкая А.И. Теория рам из тонкостенных стержней. –М., 1948. 198 с.
36. Горелов Н.Г. Пространственные блоки покрытия со стержнями из тонкостенных гнутых профилей // Автореф. дис. канд. техн. наук. – Екатеринбург, 1998. 23 с.
37. Городецкий А.С., Здоренко В.С., Карпиловский В.С. Применение МКЭ к расчету тонкостенных стержневых систем // Республиканский межведомственный научно-технический сборник «Сопротивление материалов и теория сооружений». – 1976. Вып. 28. – С. 134 – 140.
38. Горынин, Л.Г. Регулирование усилий при оптимальном проектировании мостовых металлических балок [текст] / Л.Г. Горынин, Ж.Б. Ищенко // Тр. СибАДИ. – 1975. – Вып. 54, сб. - №8. С. 74-87.
39. Гохберг М.М. Металлические конструкции подъемно-транспортных машин. – Л.: Машиностроение, 1969. 520 с.
40. Гуркова М.А. Кручение тонкостенного стержня открытого и замкнутого профиля и автоматизация процесса расчета // Автореф. дис. канд. техн. наук. – М., 2000. 23 с.
41. Дарков А.В. Шапошников Н.Н. Строительная механика. – М 1986. 607 с.
42. Демокритов В.Н. Оптимальное проектирование колеблющихся балок при соблюдении прочности и жесткости [текст] / В.Н. Демокритов // Строит. Механика и расчет сооружений. – 1972. - №2 С. 59-69.
43. Джанелидзе Г.Ю. Пановко Я.Г. Статика упругих тонкостенных стержней. – М., 1948. 208 с.

44. Джанелидзе Г.Ю. К теории тонких и тонкостенных стержней // Прикладная математика и механика. – 1949. – Вып. 6. – Том XIII. – С. 597 – 608.
45. Джанелидзе Г.Ю. Вариационная формулировка теории тонкостенных упругих стержней В.З. Власова // Прикладная математика и механика. – 1943. – Т. VII. – Вып. 6. – С. 455 – 462.
46. Дмитриева, Т.Л. К вопросу оптимизации однопролетной балки двутаврового профиля / Т.Л. Дмитриева // Вестник Иркутского государственного технического университета. – 2010. - №5. С. 88-94
47. Дьяков, С.Ф. Построение и анализ конечных элементов тонкостенного стержня открытого профиля с учетом деформаций сдвига при кручении / С.Ф. Дьяков, В.В. Лалин // Вестник Пермского государственного технического университета. Охрана окружающей среды, транспорт, безопасность жизнедеятельности. - 2011. - №2. С. 130-148.
48. Иванов П.С. Аналитическое решение некоторых упругопластических задач технической теории изгиба и оптимизации стержней. // Автореф. дис. канд. техн. наук. – Томск, 1996. 22 с.
49. Ижендеев, А.В. Оптимальное проектирование стержневых тонкостенных систем, находящихся под воздействием многопараметрического нагружения / А.В. Ижендеев. – Благовещенск: АмГУ, 2006. – 168 с.
50. Кан С.Н. Прочность замкнутых и открытых цилиндрических оболочек / В кн.: Расчет пространственных конструкций / Под ред А.А.Уманского. – М. Госстройиздат, 1961. – Вып. VI. – С. 213-248.
51. Карасев Г.Н. Оптимизация по массе параметров изгибаемых балок коробчатого сечения [текст] / Г.Н. Карасев // Вестник машиностроения, - 1988. - №11. С 9-10.
52. Карякин Н.И., Вестник инженеров и техников, 1948 г. № 3. Труды МЭМИИТ, вып. 57, 1949 г.

53. Карякин, Н.И. Основы расчета тонкостенных конструкций (прочность, устойчивость и колебаний) / Н.И. Карякин. – М.: Высшая школа, - 1960. – 239 с.
54. Кокодзо секкэй кидзюн. – Токио: Марудзэн, 1973. – Нормы проектирования стальных конструкций: Пер. с японск. – М., 1982. 86 с.
55. Кондрашев, Е.Д. Анализ основных гипотез теории изгибного кручения / Е.Д. Кондрашев // Тр. Таганрогского радиотехн. Ин-та, 1955, - №1
56. Кудрявцев, Е.П. Об учете влияния сдвигов и инерции вращения на изгибные колебания упругих стержней / Е.П. Кудрявцев // Изв. АН СССР, ОТН, Мех. и машиностр., - №5, - 1960.
57. Лалин, В.В. Исследование конечных элементов для расчета тонкостенных стержневых систем / В.В. Лалин, В.А. Рыбаков, С.А. Морозов // Инженерно строительный журнал. - 2011. - №1(27). С. 53-73. 103
58. Лампси Б.Б. Прочность тонкостенных металлических конструкций. – М., 1987. 279 с.
59. Лехницкий С.Г. Анизотропные пластинки. М., 1957.
60. Лужин, О.В. Об одной аналогии в теориях стесненного кручения тонкостенных стержней / О.В. Лужин // Строительная механика и расчет сооружений. – 1960. - №4. С.13-14.
61. Любаров Б.И. Кручение тонкостенных стержней открыто-закрытого профиля / В кн.: Материалы VI научной конф. молодых ученых-строителей. Исследования по строительным конструкциям. – Л.: ЛИСИ, 1972. С. 92 – 98.
62. Ляхович, Л.С. Оптимизация стержневых систем с ограничениями по прочности и устойчивости плоской формы изгиба при действии многопараметрических нагрузок [текст] / Л.С. Ляхович, А.В. Ижендеев // Изв. вузов. Строительство. – 1998. - №7. С. 11-14.
63. Маневич А.И. Оптимальное проектирование сжатых тонкостенных профилей с учетом нелинейного взаимодействия форм потери устойчивости

[текст] / А.И. Маневич, С.В. Ракша // Изв. Вузов. Строительство – 2001 - №12. С.15-21.

64. Металлические конструкции. В 3 т. Т.1. Элементы стальных конструкций: Учеб. пособие для строит. вузов / В.В. Горев, Б.Ю. Уваров, В.В. Филиппов и др.; Под. ред. Горева В.В. – М.: Высш. шк., 1997. 527 с.

65. Металлические конструкции. В 3. т. Т. 2. Стальные конструкции зданий и сооружений: Справочник проектировщика / Под общ. ред. В.В. Кузнецова – М.: Изд. АСВ, 1988. 512 с.

66. Мещеряков В.Б. Изгибно-крутильные колебания и динамическая устойчивость тонкостенных стержней открытого профиля с учетом сдвигов / В.Б. Мещеряков // Тр. Моск.ин-та.инж.трансп., - 1970, - вып.311. С.75-81. 104

67. Мещеряков, В.Б. О влиянии сдвигов на работу тонкостенных стержней / В.Б. Мещеряков // Инж. журнал, т.5, вып. 1, - 1965

68. Мещеряков, В.Б. О напряженном состоянии тонкостенных стержней открытого профиля / В.Б. Мещеряков // Тр. МИИТ, вып. 193, - 1964.

69. Мещеряков, В.Б. К вопросу определения прогибов и углов закручивания тонкостенных стержней с учетом сдвигов в срединной поверхности / В.Б. Мещеряков // Тр. МИИТ, вып. 193, - 1964.

70. Мещеряков, В.Б. К теории устойчивости тонкостенных стержней открытого профиля с учетом сдвигов / В.Б. Мещеряков // Вопросы прикладной механики. Тр. МИИТ, вып.260, Стройиздат, М., - 1968.

71. Мещеряков, В.Б. Свободные колебания тонкостенных стержней открытого профиля с учетом сдвигов [текст] / В.Б. Мещеряков // Вопросы прикладной механики. Тр. МИИТ, вып.260, Стройиздат, М., - 1968.

72. Мищенко, П.Д. К оценке влияния сдвига на величину деформаций и напряжений в тонкостенных стержнях открытого профиля /П.Д. Мищенко // Тр. Алтайск. политехн. ин-т. – 1975. – Вып. 27. С. 29-36

73. Мищенко, П.Д. Об одном варианте теории расчета тонкостенных стержней открытого профиля с учетом сдвига срединной поверхности / П.Д. Мищенко // Тр. Алтайск. политехн. ин-т. – 1975. – Вып. 53. С. 3-21.

74. Мрощинский, А.К. Исследование работы складчатых профилей методами теории упругости / А.К. Мрощинский // Тр. лаб. стр. мех. ЦНИИПС, Госстройиздат, - 1941.

75. Муравский, Г.Б. Действие подвижной нагрузки на балку бесконечной длины, лежащей на упругом основании / Г.Б. Муравский // Тр.МИИТа, - 1961, - вып.134, С.54-84.

76. Немчинов Ю.И. Расчет тонкостенных пространственных систем. МКЭ // Строит. механика и расчет сооружений. – 1976. - №5.-С. 14-17.

77. Оробей, В.Ф. Анализ напряженно-деформированного тонкостенного стержня открытого профиля в программе ANSYS / В.Ф. Оробей, Н.Г. Сурьянинов, А.М. Лимаренко // Труды ОГАСА. - 2005. - Вып.17. С.195-200.

78. Пановко, Я.Г. Внутреннее трение при колебаниях упругих систем / Я.Г. Пановко. – Физ-матгиз, - 1960.

79. Пановко, Я.Г. Тонкостенные стержни и системы, составленные из тонкостенных стержней / Я.Г. Пановко, Е.А. Бейлин // Обзорная статья в сб. Стр. мех. в СССР (1917-1967). Стройиздат, М., - 1969.106

80. Перельмутер А.В., Сливкер В.И. Расчетные модели сооружений и возможность их анализа/ А.В. Перельмутер В.И Сливкер. – Киев, Изд-во «Сталь», 2002. – 600с.

81. Постнов В.А. Хархурим И.Я. Метод конечных элементов в расчетах.

82. Почтман Ю.М. Оптимальное проектирование подкрановых балок с учетом усталостной прочности [текст] / Ю.М. Почтман, Е.Л. Коган // Изв. Вузов. Строительство и архитектура. – 1986. - №3. С. 14-17.

83. Рабинович, Б.И. Об уравнениях упругих колебаний тонкостенных стержней с жидким заполнением при наличии свободной поверхности [текст] / Б.И. Рабинович // Изв.АН СССР, ОТН, мех. И машиностр., №4, - 1959. 90.
- Работнов, Ю.Н. Теория тонких оболочек [текст] / Дис.... докт. техн. наук., - 1946.
84. Работнов, Ю.Н. Теория тонких оболочек / Дис. докт.техн. наук., - 1946.
- 73 Родионова В.А. Теория анизотропных оболочек с учетом поперечных сдвигов и обжатия. Учебное пособие. Ленинград. 1983 г. 116 с.
- 74 Резников. Р.А. Решение задач строительной механики на ЭЦВМ. – М., 1971. 312 с.
- 75 Рыбаков, В.А. Напряженно-деформированное состояние элементов каркасных сооружений из тонкостенных стержней / В.А. Рыбаков, О.С. Гамаюнова // Интернет-журнал «Строительство уникальных зданий и сооружений», - 2013. - №7(12). С.79-123
- 76 Сен-Венан, Б. Мемуар о кручении призм. Мемуар об изгибе призм / Б. Сен-Венан. – М.: Физматгиз, - 1961. – 518 с
- 77 Семенов П.И. Напряженно-деформированное состояние и устойчивость анизотропных тонкостенных стержней. М., 1980 г.
- 78 Сливкер В.И. Строительная механика. Вариационные основы. Учебное пособие. -М.: Издательство Ассоциации строительных вузов, 2005.- 736с.
- 79 Смердов А.А., Буянов И.А., Чуднов И.В. Анализ оптимальных сочетаний требований к разрабатываемым углепластикам для крупногабаритных ракетно-космических конструкций. Известия высших учебных заведений. Машиностроение./Вып 8/2012г.
- 80 СНиП II-23-81*. Стальные конструкции. Госстрой СССР.-М.: Стройиздат, 1982.96 с.

81 Стандарт СЭВ 3972-83. Надежность строительных конструкций и оснований. Конструкции стальные. Основные положения по расчету. – Взамен РС 131-74. Введ. 01.01.84. – М.: Изд-во стандартов, 1983. 28 с.

82 Соболевский Г.П. Тонкостенные стержни открытого профиля, усиленные бимоментными связями // Дис. д-ра техн. наук. – Тула 1967. 418 с.

83 Тимошенко, С.П. История науки о сопротивлении материалов / С.П. Тимошенко. – М.: Гостехиздат, - 1957. – 56 с.

84 Тимошенко С.П. Об устойчивости плоской формы изгиба двутавровой балки // Изв. С.-Петербургского политех. института. – 1905. – Т.4. – Вып.3-4.-1906.-Т.5. – Вып.1-4.

85 Тимошенко, С.П. Об устойчивости плоской формы изгиба двутавровой балки под влиянием сил, действующих в плоскости ее наибольшей жесткости / С.П. Тимошенко // Изв. СПб. Политехн. Ин-та. – 1906. –Т.5. – Вып. 1-2 – С. 3-34; Вып. 3-4. – С. 263-292.

86 Тимошенко С.П. Об устойчивости упругих систем // Изв. Киевского политехнического института. – 1910. Кн.4. 182с.

87 Ткаченко А.С. Метод итераций при решение задач изгиба и устойчивости анизотропных пластин. В сб. научно-практической конференции, ПГУПС, 1996, с. 66.

88 Ткаченко А.С. Сходимость итерационного процесса при расчете анизотропных пластин. В сб. научно-практической конференции, ПГУПС, 1996, с. 62.

89 Ткаченко А.С. Численная реализация метода итераций при решение задач изгиба и устойчивости анизотропных пластин. Диссертация на соискание ученой степени к.т.н. СПб, 1997.

90 Уманский А.А., Кручение и изгиб тонкостенных авиаконструкций, Оборонгиз, 1939 г.

91 Уманский, А.А. Кручение и изгиб тонкостенных авиаконструкций / А.А. Уманский. – М.: Оборонгиз, 1959. 112 с.

- 92 Уманский, А.А. О нормальных напряжениях при кручении крыла самолета / А.А. Уманский // Техника воздушного флота. – 1940. – №12. – С. 48-65.
- 93 Урбан, И.В. Теория расчета стержневых тонкостенных конструкций / И.В. Урбан. – М.: Трансжелдориздат, - 1955. – 192 с.
- 94 Филин, А.П. Классическое вариационное исчисление и задача оптимизации упругих стержневых систем / А.П. Филин, Я.И. Гуревич // Исследования по строительной механике. Сб.тр. ЛИИЖД, вып. 190. – 1962.
- 95 Филин А.П. Прикладная механика твердого деформируемого тела. Т.П.-М.; Наука. Главная редакция физико-математической литературы, 1978. 616 с.
- 96 Филоненко-Бородич М.М., Изюмов С.М., Олисов Б.А., Кудрявцев И.Н. и Мальгинов Л.И. Курс сопротивления материалов. Государственное издательство технико-теоретической литературы. 1949 г.
- 97 Фудзии Т., Дзако М. Механика разрушения композиционных материалов. М. «Мир» 1982
- 98 Харт. Ф., Хенн В., Зонтаг Х. Атлас стальных конструкций. Многоэтажные здания. – М.: Стройиздат, 1977. 352 с.
- 99 Храповицкий И.С. Расчет пространственных рам с оптимальными параметрами сечений элементов [текст] / И.С. Храповицкий // Оптимальные системы и применение ЭЦВМ при расчете сооружений. Труды ХИИЖТ. М. Транспорт. – 1967. С. 32-37.
- 100 Чамис К. Композиционные материалы. Анализ и проектирование конструкций. – М.: «Машиностроение» 1978.
- 101 Чирков А.А. Об экспериментальном и теоретическом определении координат центра изгиба П-образного профиля: Сб. науч. тр. / Новочеркасск. политехн. ин-т. – Новочеркасск: НПИ, 1959.-Т.104.-С.147-154.

- 102 Юзиков, В.П. Расчет тонкостенных стержней открытого профиля с учетом сдвига срединной поверхности / В.П. Юзиков, В.Б. Завьялова // Известия вузов. Строительство. - 2011. - №1. С. 108-115.
- 103 Argyris J.N., Kelsey S., Kamel H. Magrix methods of structural analysis. A précis of recent developments, 14th Meeting of Structures and materials Panel, AGARD, edited by de Veubeke.-London, New York: Pergamon Press, 1963. P.1-164.
- 104 Bach-Bauman. Elastizität and Festigkeit. / Bach-Bauman //Berlin, - VDI, - 1924. – P.268-271, 369-381..
- 105 Bach-Bauman. Elastizität and Festigkeit. / Bach-Bauman // Berlin, - VDI, - 1909. – T.53. – P.1710.
- 106 Bach-Bauman. Elastizität and Festigkeit. / Bach-Bauman // Berlin, - VDI, - 1910. – T.54. – P.385.
- 107 Barsoum R.S. Gallagher R.U. Finite element analysis of torsional and torsional-flexural stability problems // International Journal For Numerical Methods In Engineering. – 1970. - №2. – P.335-352.
- 108 Bazant P., Nimeiri M.E. Large-deflection spatial buckling of thin-walled beams and frame // Journal of Structural Engineering. – ACSE, 1973. - №99. – P.1259 – 1281.
- 109 Bochenec, B. Optimal I-section of elastic arch under stability constraints [текст] / B. Bochenec, M. Zyczkowski // Engineering Optimization in Design Processes. Proc. of Int. Conf. Karlsruhe, 3-4 sept., - 1990. – P. 259-266. 110
- 110 Chan S.L., Kitipornchai S. Geometric nonlinear analysis of asymmetrical thin-walled beams-columns // Engineering Structure. – 1987. -№9. – P.243 – 254.
- 111 Cheng, Y. Distortional buckling of cold-formed steel members in bending / Y. Cheng, B.W. Schafer. - Maryland: American Iron and Steel Institute Baltimore, - 2005. 213 p.

112 Chwalla, E. Einige Ergebnisse der Theorie der aussermittig gedruckten stabes mit dünnwandigem, Offenem Querschnitt / E. Chwalla //Forschungshefte aus dem Gebiete des Stahlbaus. Hefte 6. Springer-Verlag. – Berlin.– 1943. – S. 85-115.

113 Commission of the European Communities Industrial processes Building and civil Engineering. Eurocode №3; Common unified Rules for steel Structures. – Eur. 8849, 1984: Пер. с англ. – М., 1985, 264 с.

114 DIN. Taschenbuch 69. Bauwesen 10. Normen über Stahlbau 1, Hochbau. – 1981. 272 s.

115 Filipkowski K. Optimalne kształtowanie przekroju poprzecznego belki skrzynkowej / K. Filipkowski, S. Szymczak // Zesz. Nauk. Pol. Bud. Lad. – 1991. №46. P 39-44.

116 Freidman, Z. Multilevel optimal design of thin-walled – continuous beams / Z. Freidman, M. D. Fuchs // Comput. and Struct., - 1987, - 25, -№3, P. 405-414.

117 Gluck G., Kavel J. Computer method for analysis of multistory structures // Computer and Structures. – 1972. – 2. - №5 – 6. – P.25-32.

118 Grisfield M.A. Finite element methods for the analysis of multicellular structures // Proc. Civil Engineering. – 1971. - №48 – March. – P. 151 – 162.

119 Karihaloo, B.L. Optimum design of statically indeterminate structures subject to strength and stiffness constraints and multiple loading [текст] / B.L. Karihaloo, S. Kanagasundaram // Comput. and Struct. – 1988. -30, №3. – P.563- 572.

120 Kim M.C., Lee G.C., Chang K.C. inelastic buckling of tapered members with accumulated strain // Structural Engineering And Mechanics. – 1995. – v.3. - №6. – P.611 – 622.

121 Magnucki K., Zawodny P. Global and Local Elastic Buckling of Thin-Walled Beams with Sandwich Flanges. // Thin-Walled Structures. Recent Innovations and Developments. V.2. Brisbane, 2008, p.1025.

122 Maillart R. Zur Frage der Biegung // Schweizerische Bauzeitung. – 1921. - №18. – S. 195 – 197.

- 123 Maillart R. Uber Drehung und Biegung // Schweizerische Bauzeitung. – 1922. - №20. – S. 254 – 257.
- 124 National Standards of Canada. CAN3-S16.1-78. Steel Structures for Buildings-Limit States Design. Canadian standards Association-Redale, Ontario, 1978: Пер. с АНГЛ. – М.: 178, 121 с.
- 125 Navhovani ocelovych konstrukci CSN73 1401. – 1978.112 с.
- 126 Pavazza, R. Torsion of thin-walled beams of open cross-sections with influence of shear / R. Pavazza // International Journal of Mechanical Sciences.- 2005, - vol. 47, no. 7, P. 1099—1122.
- 127 Pettersson, O. Combined Bending and Torsion of simply supported Beams of Bisymmetrical Cross Section / O. Pettersson // Acta polytechnica,- N28. Goteborg. – 1949. – N29. – P.58-86.
- 128 Popelar, C.H. Optimal design of beams against buckling a potential energy approach / C.H. Popelar // J. Struct.Mech. 1976. – 4. - №2. – P.181-196.
- 129 Prandtl L. Eine neue Darstellung der Torsionsspannungen bei prismatischen Staben vol beliebigen Querschnitt // Jahresberichte der deutschen Mathematiker-Vereinigung. – 1904. – Bd.13. – Heft 1. – S. 31 – 36.
- 130 Programm: Biegetorsionstheorie II. Ordnung BT II. –Stuttgart, 1991.-42 s.
- 131 Rajasekaran S. Finite element analysis of thin-walled for open cross sections // Structural Engineering Report / Department of Civil Engineering, University of Alberta, Edmonton, Canada. – 1971. - №34. – Sept. – P. 144 – 160.
- 132 Rajasekaran S. And Murray D.W. Finite element solution of inelastic beam equations // Journal of Structural Divigion. – ASCE. – 99(st6). – P. 1025 – 1041.
- 133 Rajasekaran S. Instability of tapered thin-walled beams of generic section // Journal of Engineering Mechanics. – 1994. – v. 120. - №8. – P. 1630 – 1640.

- 134 Regles de calcul des constructions en acier. L'Institut technique du batiment et des travaux publics. Le centre technique – Paris, 1986: Пер. с франц. – М., 1970. 310 с.
- 135 Resaiee-Pajand M., Maayedian M. Explicit stiffness of tapered and monosymmetric I beam-columns // International Journal of Engineering. – 2000. – v.13. - №2. – P.1 – 18.
- 136 Rondal, J. On the optimal design of thin-walled compressed members / J. Rondal // Int. Colloq. East-Eur. Sess.: Stab.Steel Struct., Budapest, 1990, Apr. 25-27. – Final Rept. – Budapest, - 1990. – P.253-257.
- 137 Saade, K. Finite element modeling of shear in thin walled beams with a single warping function /K. Saade.- Bruxellesl, - 2005. 134 p.
- 138 Silva N.M.F., Camotim D., Silvestre N. GBT Cross-Section Analysis of Thin-Walled Members With Arbitrary Cross-Sections: A Novel Approach. // Thin-Walled Structures. Recent Innovations and Developments. V.2. Brisbane, 2008, p.1161.
- 139 Silva N.M.F., Camotim D., Silvestre N. Non-Linear Behaviour and Failure Analysis of Laminated FRP Composite Thin-Walled Members. // Thin-Walled Structures. Recent Innovations and Developments. V.2. Brisbane, 2008, p.1189.
- 140 Specification for the Design. Fabrication and Erection of Structural steel for Buildings. American institute of Steel Construction. – New-York, 1978. 166 p.
- 141 Stahlbau; Stahltragwerke. TGL 13500/01; Stabilitat von Stahltragwerke. TGL 13503/01, TGL 13503/02, 1982: Пер. с нем. – М., 1986. 176 с.
- 142 Stahlbau; Stahltragwerke im Hochbau; Berechnung nach dem Traglastverfahren. TGL 13450/02, 1984: Пер. с нем. – М., 1985. 16 с.
- 143 Takahashi K., Taguchi T., Mizuuchi T., Hirayama T., Oonuki M., Nakade Y. A New Thin-Walled Beam Theory Based on Multi-Scale Structural Mechanics // Thin-Walled Structures. Recent Innovations and Developments. V.2. Brisbane, 2008, p.1057.

144 Trahair N.S. Plastic torsion analysis of monosymmetric and pointsymmetric beams // Journal of Structural Engineering. ASCE. – 1999. – v.125. - №2.-P.175 -182.

145 Wagner C. und Pretschner W. Verdrehung und Knickung von offenen Profilen // Luftfahrtforschung. 1934. – t.11. - №6. – S. 174 – 180

146 Weber C. Übertragung des Drehmoments in Balken mit doppelflanschigem Querschnitt // Z.Fur angew. Math. und Mech. – 1926. – t.6. – S.85 – 97; 1924. – t.4. – S. 334 – 348.

147 Yang Y.B. Linear and nonlinear analysis of space frames with nonuniform torsion using interactive computer graphics // Ph.D.Thesis, Cjmell U., Ithaca Y. - !984. – P. 39 – 48.



ООО «Солидтех»
190005, Санкт-Петербург,
наб. Обводного канала, 118А,
лит. Х, оф. 3Н/15
Тел. +7 (812) 988-30-65
E-mail: info@solidt.ru
www.solidt.ru

СПРАВКА

О внедрении результатов диссертационной работы К.Ю. Полинкевича
«Определение напряженно деформированного состояния тонкостенных
анизотропных стержней открытого профиля при кручении»

Результаты диссертационной работы Полинкевича Константина Юрьевича
«Определение напряженно деформированного состояния тонкостенных
анизотропных стержней открытого профиля при кручении» внедрены в
практическую деятельность компании по производству элементов
строительных конструкций из композитных материалов ООО «Солидтех».

1. Внедрена методика расчета тонкостенных композитных стержней открытого профиля. Решение реализовано с использованием бюджетного программного обеспечения MathCad.
2. Проведено обучение сотрудников компании по методологии расчета композитных конструкций.
3. Решен ряд практических задач. Для композитного профиля, с поперечным сечением швеллер, рассмотрено несколько вариантов армирования стекловолокном. Изменение угла армирования позволило варьировать крутильную жесткость стержней, сохраняя единую архитектурную форму конструкции, а так же унифицировать сортамент проката, что дало существенный экономический эффект.

Генеральный директор ООО «Солидтех»

Д.В. Мащетов