

На правах рукописи



ПОЛИНКЕВИЧ КОНСТАНТИН ЮРЬЕВИЧ

**ОПРЕДЕЛЕНИЕ НАПРЯЖЕННО-ДЕФОРМИРОВАННОГО
СОСТОЯНИЯ ТОНКОСТЕННЫХ АНИЗОТРОПНЫХ СТЕРЖНЕЙ
ОТКРЫТОГО ПРОФИЛЯ ПРИ КРУЧЕНИИ**

Специальность 05.23.17 – Строительная механика

АВТОРЕФЕРАТ
диссертации на соискание ученой степени
кандидата технических наук

Санкт-Петербург – 2019

Работа выполнена в федеральном государственном бюджетном образовательном учреждении высшего образования «Петербургский государственный университет путей сообщения Императора Александра I».

Научный руководитель: кандидат технических наук, доцент
Аллахвердов Борис Михайлович

Официальные оппоненты: **Мельников Борис Евгеньевич**
доктор технических наук, профессор,
ФГАОУ ВО «Санкт-Петербургский политехнический университет Петра Великого»,
кафедра «Сопrotивление и прочность»,
профессор;

Мелешко Владимир Аркадьевич
кандидат технических наук,
ФГБОУ ВО «Санкт-Петербургский государственный архитектурно-строительный университет» кафедра «Механика», доцент;

Ведущая организация: Акционерное Общество «Научно-исследовательский центр «Строительство».

Защита состоится 19 июня 2019 года в 13 час 30 мин на заседании диссертационного совета Д 212.223.03 при ФГБОУ ВО «Санкт-Петербургский государственный архитектурно-строительный университет» по адресу: 190103, Санкт-Петербург, 2-я Красноармейская ул., д. 4, аудитория 219.

Тел/факс: 8(812)316-58-72,
E-mail: rector@spbgasu.ru

С диссертацией можно ознакомиться в фундаментальной библиотеке ФГБОУ ВО «Санкт-Петербургский государственный архитектурно-строительный университет» и на сайте <http://dis.spbgasu.ru/specialtys/personal/polinkevich-konstantin-yurevich>

Автореферат разослан 17 мая 2019 года.

Ученый секретарь
диссертационного совета



Кондратьева Лидия Никитовна

I. ОБЩАЯ ХАРАКТЕРИСТИКА РАБОТЫ

Актуальность избранной темы. Использование современных строительных технологий для создания новых конструкций требуют применения столь же современных материалов. Большинство из них являются композитами – соединением двух и более ингредиентов. Практически все известные строительные материалы, например, дерево или бетон, также являются композитами. Но сегодняшние методы создания новых композитов позволяют менять их упругие свойства в разных направлениях путем изменения ориентации волокон в определенном объеме, то есть получать искусственные анизотропные материалы, обладающие наперед заданными упругими характеристиками.

В строительной отрасли композиционные материалы нашли свое применение: при строительстве мостов (несущие и ограждающие конструкции), хорошо зарекомендовали себя как конструкции усиления, конструкции для химической промышленности, отдельные конструктивные элементы.

При строительстве мостов из композиционных материалов получается легкое, быстровозводимое сооружение, не подверженное коррозии. А ограждающие конструкции могут быть смонтированы без применения тяжелой строительной техники.

Легкие композитные тонкостенные стержни могут быть особо эффективны при усилении конструкций в сейсмически опасных районах. Благодаря высокой прочности такие элементы значительно повысят несущую способность сооружения, при этом обладая незначительной массой динамическая нагрузка практически не изменится.

Композиционные материалы хорошо переносят воздействие агрессивной среды, поэтому широко используются в различных конструкциях, связанных с химическим производством.

Несмотря на свою изначально высокую стоимость, применение композитов приводит к экономическому эффекту в процессе монтажа и эксплуатации конструкции, а в отдельных случаях является единственным материалом, обеспечивающим необходимые свойства.

В строительных конструкциях в большинстве случаев используется тип поперечного сечения открытого профиля. Такое сечение легче изготовить на производстве, проще организовать монтажные узлы.

Использование анизотропных материалов в составе тонкостенных стержней открытого профиля, работающих на кручение, позволяет, например, варьировать в зависимости от поставленной задачи величину угла закручивания при одной и той же внешней нагрузке, что позволяет более оптимально использовать материал.

Степень разработанности темы исследования. Теория расчетов тонкостенных стержней открытого профиля при стесненном кручении была сформулирована Власовым В.З., затем получила свое развитие в трудах Джанелидзе Г.Ю., Пановко Я.Г., Бычкова Д.В., Мещерякова В.Б. Вопрос конечно-элементного моделирования тонкостенных стержней рассмотрен во многих трудах Лалина В.В. Вопросы анизотропии рассматривались такими авторами, как: Лехницкий С. Г.,

С.А. Амбарцумян, Ашкенази Е.К., Глухих В.Н. Тонкостенными анизотропными конструкциями занимались: Семенов П.И., Родионова В.А.

Цель и задачи исследования.

Целью диссертационной работы является:

- разработка аналитического итерационного способа расчета, тонкостенных анизотропных стержней открытого профиля на кручение, с учетом сдвигов и коэффициентов влияния линейной деформации на сдвиговую деформацию.
- получение численных и графических результатов НДС (напряженно-деформированного состояния) рассматриваемых стержней в зависимости от угла армирования заполнителя.
- оценка влияния заданных свойств материала на величину перемещений (углов закручивания) элементов

Для достижения поставленной цели решались следующие **задачи**:

1. Описание метода последовательных приближений на примере расчета балки на двух опорах.
2. Разработка итерационного способа расчета слоистых балок на прочность. Решение задачи изгиба слоистой балки.
3. Разработка итерационного способа применительно к решению задачи кручения тонкостенных изотропных стержней с учетом деформаций сдвигов. Сравнение результатов расчетов с решением Власова В.З., и результатами по методу конечных элементов.
4. Разработка итерационного способа расчета анизотропной балки на прочность. Решение задачи изгиба анизотропной балки с учетом сдвигов и коэффициентов влияния линейной деформации на сдвиговую деформацию. Сравнение с аналитическим решением, записанным Лехницким С.Г. и результатами, полученными в пространственном конечно-элементном расчете.

Объект исследования – тонкостенные элементы открытого профиля, выполненные из анизотропных материалов.

Предмет исследования – напряженно деформированное состояние и жесткостные характеристики анизотропных тонкостенных элементов конструкции.

Научная новизна работы состоит в следующем:

1. Разработан итерационный аналитический способ, позволяющий решить задачу кручения тонкостенного анизотропного стержня открытого профиля с учетом влияния сдвиговых, поперечных деформаций и коэффициентов влияния линейной деформации на сдвиговую деформацию.
2. Получены численные и графические результаты НДС рассматриваемых конструкций.
3. Доказано существенное влияние на НДС второго и последующего циклов.
4. Проанализировано влияние угла армирования анизотропного материала на перемещения;
5. Доказана сходимость итерационного способа.

Теоретическая значимость: получен аналитический метод определения НДС при кручении тонкостенных стержней с учетом анизотропных свойств отдельных элементов.

Практическая значимость заключается в возможности применения рассмотренного аналитического метода расчета для более детального определения НДС конструкции, выполненной из композитных материалов. Подбор необходимой жесткости конструктивных элементов в зависимости от угла армирования.

Методологической основой и методами диссертационного исследования являются основные законы теории упругости, методы численного моделирования, экспериментальные и теоретические данные, полученные учеными в области расчетов строительных конструкций из композитных материалов.

Положения, выносимые на защиту.

1. Итерационный способ аналитического расчета тонкостенных анизотропных стержней открытого профиля на кручение, с учетом сдвигов, поперечных деформаций и коэффициентов влияния линейной деформации на сдвиговую деформацию.

2. Определение НДС рассматриваемых стержней в зависимости от угла армирования заполнителя.

3. Результаты расчетов анизотропного швеллера на кручение итерационным способом. Влияние заданных свойств материала на величину перемещений (углов закручивания) элементов.

Область исследования соответствует требованиям паспорта специальности 05.23.17– Строительная механика, а именно п. 3 «Аналитические методы расчета сооружений и их элементов».

Личный вклад автора

Для каждого из рассмотренных типов задач автором лично проведены исследования, записаны алгоритмы решения и произведены расчеты в комплексе MathCAD. Построены модели по методу конечных элементов, проанализированы результаты. Выполнен ряд расчетов по известным аналитическим решениям. По результатам опубликованы научные статьи.

Обоснованность и достоверность. Методика основана на основных уравнениях теории упругости. Полученные результаты расчетов по пространственным конечно-элементным моделями построенных в Midas/Civil, показывает хорошую согласованность параметров напряженно-деформированного состояния. Достоверность результатов подтверждается сходимостью с известными аналитическими решениями. Результаты первого цикла итераций согласуются с известными методами расчетов.

Апробация. Основные положения диссертационных исследований представлены и одобрены:

– На VII Международной конференции "Проблемы прочности материалов и сооружений на транспорте", 23–24 апреля 2008 г. СПб.

– На IX Международной конференции "Проблемы прочности материалов и сооружений на транспорте", 27–28 мая 2014 г. СПб.

– На расширенном заседании кафедры «Механика и прочность материалов и конструкций» «Петербургского государственного университета путей сообщения Императора Александра I» 22 марта 2017 года.

– Докладчик вебинара на тему «Учет 7ой степени свободы при расчетах МКЭ в Midas/Civil» 21 февраля 2017 г. <http://ru.midasuser.com/web/e-learning/reviewing-courses-detail.php?sec=127>

– На X Международной конференции "Проблемы прочности материалов и сооружений на транспорте", 23-25 мая 2017 г. СПб.

– На семинаре научного совета РАН по строительной механике, Дом ученых им. М. Горького, 13 февраля 2019г. СПб.

Публикации. Материалы диссертации опубликованы в 6 печатных работах, общим объемом 3,188 п. л., лично автором – 2,438 п. л., в том числе 3 работы опубликованы в изданиях, входящих в перечень ведущих рецензируемых научных журналов, утвержденный ВАК РФ.

Структура и объем работы. Диссертация состоит из введения, 6 глав, основных выводов, списка литературы (147 наименований) и приложений. Общий объем работы 165 страницы, в том числе 24 рисунка, 10 таблиц, 37 диаграмм.

Во введении сформулирована проблема и обоснована актуальность разработки аналитического метода расчета тонкостенных анизотропных стержней открытого профиля. Представлена степень разработанности в области тонкостенных стержней и анизотропии. Определены цель и задачи исследования, научная новизна, теоретическая и практическая значимость работы, степень достоверности результатов и апробация работы.

В первой главе приводится описание методики расчета на прочность, основанной на итерационном способе последовательного удовлетворения условиям равновесия, совместности деформаций и закону Гука. Для наглядности данный способ реализован при расчете обычной изотропной однослойной однопролетной балки. На численном примере определено напряженно-деформированное состояние балки. Получены функции нормальных напряжений продольного и поперечного направлений, касательные напряжения, осевые и сдвиговые деформации.

Во второй главе рассмотрена возможность применения метода последовательных приближений для определения НДС слоистых балок. В данном случае имеем составное сечение по высоте балки, что приводит к большему числу неизвестных, соответственно необходимо дополнительное количество уравнений для решения поставленной задачи. Каждый слой описывается своей системой уравнений. В зоне сращивания слоев учитывается равенство деформаций.

В третьей главе рассмотрена задача кручения изотропного тонкостенного стержня открытого профиля. Определено НДС балки методом итераций. В отличие от задач изгиба, в задаче кручения определены в первую очередь координаты центра кручения, через которые в дальнейшем найдена функция угла закручивания балки и получены соответствующие поступательные перемещения.

В четвертой главе даны общие сведения о композитных материалах. Даны понятия удельной прочности и удельного модуля упругости. Записан закон Гука для общего случая анизотропии и рассмотрены частные случаи. Приведены математические зависимости между постоянными упругостями. Рассмотрена теория прочности для анизотропных материалов. Приведены характеристики

ряда анизотропных материалов в зависимости от угла ориентации волокон. В результате выбран материал, с соответствующими физическими характеристиками, который рассматривается далее в численных примерах.

В пятой главе рассмотрена возможность применения метода последовательных приближений к расчету изгиба анизотропной балки на двух опорах.

В шестой главе приведен алгоритм расчета тонкостенных анизотропных стержней открытого профиля на стесненное кручение.

В заключении приведены итоги выполненных исследований, а также предложены пути развития метода последовательных приближений.

II. СНОВНЫЕ ПОЛОЖЕНИЯ И РЕЗУЛЬТАТЫ ИССЛЕДОВАНИЙ ДИССЕРТАЦИИ, ВЫНОСИМЫЕ НА ЗАЩИТУ

Итерационный аналитический способ определения напряженно-деформированного состояния тонкостенных стержней открытого профиля при стесненном кручении основан на основных уравнениях теории упругости. Закон Гука для плоской задачи, при использовании анизотропного материала в матричной форме будет иметь размер 3x3:

$$\begin{pmatrix} \varepsilon_y \\ \varepsilon_z \\ \gamma_{yz} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1/E_y & -\nu_{yz}/E_y & \eta_{\sigma y}/E_y \\ -\nu_{zy}/E_z & 1/E_z & \eta_{\sigma z}/E_z \\ \eta_{\tau y}/G_{yz} & \eta_{\tau z}/G_{yz} & 1/G_{yz} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \sigma_y \\ \sigma_z \\ \tau_{yz} \end{pmatrix}. \quad (1)$$

E_y, E_z – осевые модули упругости; G_{yz} – модуль сдвига; $\varepsilon_y, \varepsilon_z$ – осевые деформации; γ_{yz} – деформация сдвига; ν_{yz}, ν_{zy} – влияние продольной деформации на поперечную и наоборот, коэффициент Пуассона, при этом всегда справедливо соотношение $\frac{\nu_{zy}}{E_z} = \frac{\nu_{yz}}{E_y}$; $\eta_{\tau y}, \eta_{\tau z}, \eta_{\sigma y}, \eta_{\sigma z}$ – коэффициент влияния деформации сдвига на осевую деформацию и наоборот.

В случае, когда армирующие волокна направлены вдоль или поперек оси рассматриваемого элемента данные коэффициенты равны нулю. При этом всегда справедливо соотношение $\frac{\eta_{\tau z}}{G_{yz}} = \frac{\eta_{\sigma z}}{E_z}, \frac{\eta_{\tau y}}{G_{yz}} = \frac{\eta_{\sigma y}}{E_y}$.

Физические характеристики материала обычно экспериментально определяются для главных осей y, z . В случае когда ось исследуемого стержня не совпадает с направлением армирования, и отличается от направления осей y, z на угол α , необходимо определить упругие постоянные для новой системы координат y_1, z_1 . Вариант перехода к новой системе координат при повороте осей был предложен Ашкенази Е.К.:

$$\begin{aligned} \frac{1}{E_{y1}} &= \frac{\cos^4 \alpha}{E_y} + \left(\frac{1}{G_{yz}} - \frac{2\nu_{yz}}{E_y} \right) \sin^2 \alpha \cdot \cos^2 \alpha + \frac{\sin^4 \alpha}{E_z}, \\ \frac{1}{E_{z1}} &= \frac{\sin^4 \alpha}{E_y} + \left(\frac{1}{G_{yz}} - \frac{2\nu_{zy}}{E_z} \right) \sin^2 \alpha \cdot \cos^2 \alpha + \frac{\cos^4 \alpha}{E_z}, \end{aligned} \quad (2)$$

$$\frac{1}{G_{y1,z1}} = \frac{1}{G_{yz}} + \left(\frac{1+\nu_{yz}}{E_y} + \frac{1+\nu_{zy}}{E_z} - \frac{1}{G_{yz}} \right) \sin^2 2\alpha,$$

$$\nu_{y1,z1} = E_y \left[\frac{\nu_{yz}}{E_y} - \frac{1}{4} \left(\frac{1+\nu_{yz}}{E_y} + \frac{1+\nu_{zy}}{E_z} - \frac{1}{G_{yz}} \right) \sin^2 2\alpha \right]; \quad \frac{\nu_{y1,z1}}{E_{y1}} = \frac{\nu_{z1,y1}}{E_{z1}},$$

$$\eta_{\sigma,y1} = E_y \left[\frac{\sin^2 \alpha}{E_z} - \frac{\cos^2 \alpha}{E_y} + \frac{1}{2} \left(\frac{1}{G_{yz}} - \frac{2\nu_{yz}}{E_y} \right) \cos 2\alpha \right] \sin 2\alpha,$$

$$\eta_{\sigma,z1} = E_z \left[\frac{\cos^2 \alpha}{E_z} - \frac{\sin^2 \alpha}{E_y} - \frac{1}{2} \left(\frac{1}{G_{yz}} - \frac{2\nu_{yz}}{E_y} \right) \cos 2\alpha \right] \sin 2\alpha.$$

В работе исследованы и приведены упругие характеристики большого количества материалов. Рассматривались как природные материалы, например, древесина, так и современные углепластики и прочее. Научный интерес представляли материалы, которые имеют значительное изменение модуля упругости, при повороте осей. Поэтому для численных исследований и апробации предложенного алгоритма решения был выбран углепластик марки М60J/Ероху, широко применяемый в современных строительных решениях. На рисунок 1. Приведена полярная диаграмма изменения модуля упругости и модуля сдвига в зависимости от угла поворота осей анизотропии.

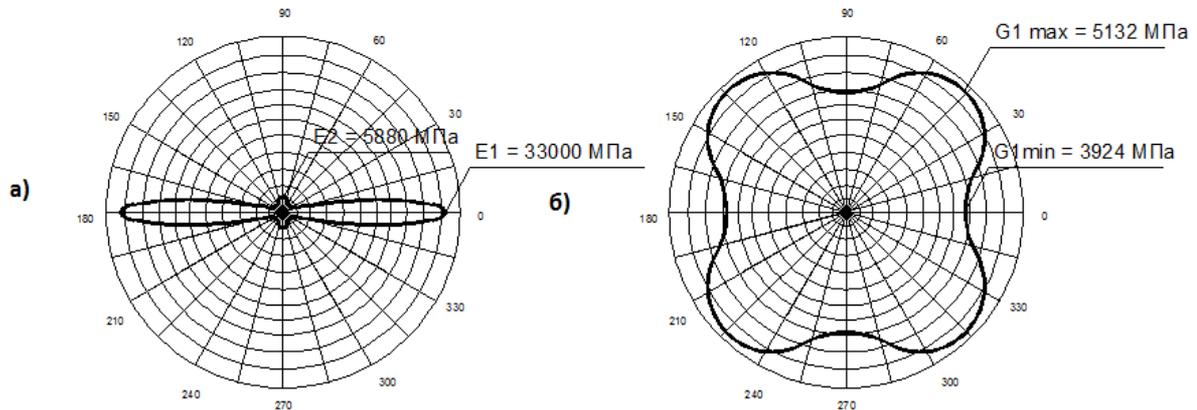


Рисунок 1 – Значение модуля при различных углах анизотропии для углепластика М60J/Ероху:

а) продольной упругости; б) сдвига

Математическая модель.

Рассмотрим консольный стержень (граничные условия могут быть различными) открытого профиля, состоящего из n пластинок объединенных по граням (рисунок 2). Каждая пластинка имеет свою толщину t_i , ширину h_i и свой набор упругих постоянных. Дальнейшие построения и рассуждения будут основаны на гипотезе неизменяемости контура.

Стержень закручивается сосредоточенным внешним моментом $M_{кр}$. Необходимо найти значение угла закручивания $\varphi(z)$ по длине стержня z .

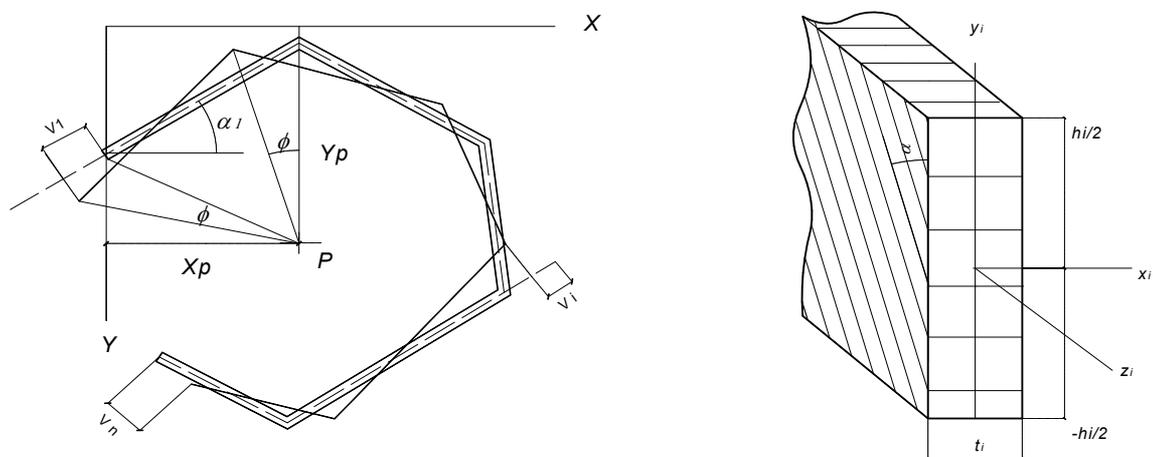


Рисунок 2 – Математическая модель:

а) поперечное сечение тонкостенного стержня открытого профиля в глобальной системе координат (до и после поворота на угол ϕ); б) один из элементов с обозначением направления армирования и локальными осями

Поперечное сечение рассматриваемого элемента располагается в глобальной произвольной системе координат X, Y (рисунок 2, а). Ось Z направлена вдоль оси стержня. Каждая пластинка в отдельности, из которых состоит стержень имеет свою локальную систему координат (рисунок 2, б).

Закручивание стержня происходит вокруг полюса P с координатами X_p, Y_p . При повороте сечения перемещение пластинки реализуется за счет смещения ее в своей плоскости на величину V_i , и закручивание на угол α_i . Смещение в плоскости пластинки V_i реализуется за счет ее изгиба, поворот на угол α_i реализуется за счет закручивания.

Перемещение V_i можно выразить через функцию угла закручивания $\varphi(z)$ вокруг полюса P .

$$V_i = (y_i - Y_p) \cos \varphi(z) - (x_i - X_p) \sin \varphi(z) = r_i \cdot \varphi(z), \quad (3)$$

где r_i – нормаль, проведенная к i -й пластине из полюса P .

Кривизна пластины, вызванная изгибом, запишется следующим образом:

$$\chi_i = -V_i''(X_p, Y_p, \varphi(z)). \quad (4)$$

Задача решена методом итераций. Ранее этот метод рассматривался в работах Аллахвердова Б.М., Ткаченко А.С. и применялся лишь для решения задачи изгиба изотропной однопролетной балки или пластинки.

Далее приведены расчеты тонкостенного анизотропного стержня открытого профиля на кручение методом итераций. Здесь комплексно применяются все методики, описанные в главах 1–5. Используется тот же итерационный принцип, который был на простейшем примере рассмотрен в первой главе. Так как тонкостенный стержень состоит из нескольких элементов, он имеет аналогию со слоистой балкой описанной во второй главе. Задача с анизотропными материалами приведена в пятой главе. А вопросы стесненного кручения рассмотрены в третьей главе. Все выше указанные задачи, решенные методом итераций, сравнивались с известными аналитическими решениями или с решениями по МКЭ. Отсюда можно сделать вывод, что применение данного алгоритма спра-

ведливо и для такого сложного случая, когда рассматривается вопрос стесненного кручения тонкостенного анизотропного стержня открытого профиля.

Начальная итерация

1. Начальная итерация

1.1 На начальном этапе принимаем гипотезу отсутствия сдвигов и гипотезу не надавливания, т. е. $G_{yzi} = \infty$; $E_y = \infty$. При таком подходе для каждого i -го элемента закон Гука примет вид:

$$\begin{pmatrix} \varepsilon_{zi} \\ \varepsilon_{yi} \\ \gamma_{yzi} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1/E_{zi} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \sigma_{zi} \\ \sigma_{yi} \\ \tau_{yzi} \end{pmatrix} \quad (6)$$

1.2 Гипотеза не надавливания делает справедливым следующее выражение: $\varepsilon_{yi}(y, z) = \frac{\partial V_i(y, z)}{\partial y} = 0$.

$$1.3 \quad V_i(y, z) = \int \varepsilon_{yi}(y, z) dy + V_{0i}(z) = V_{0i}(z).$$

$$1.4 \quad \text{Из (6)} \quad \gamma_i(y, z) = \frac{\partial V_i}{\partial z} + \frac{\partial W_i}{\partial y} = 0.$$

$$1.5 \quad W_i(y, z) = -\int \frac{\partial V_i}{\partial z} dy + W_{0i}(z) = -V'_{0i}(z) \cdot y + W_{0i}(z).$$

$$1.6 \quad \varepsilon_{zi}(y, z) = \frac{\partial W_i}{\partial z} = W'_{0i}(z) - V''_{0i}(z) \cdot y = \varepsilon_{0i}(z) + \chi_{0i}(z) \cdot y. \quad (7)$$

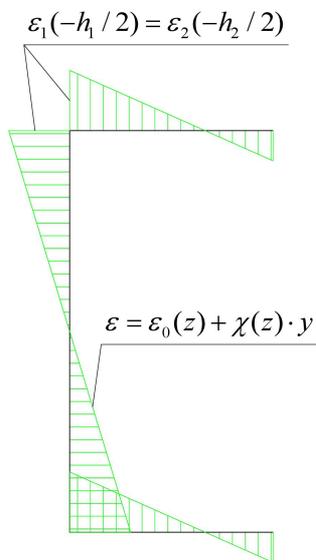


Рисунок 3 – Принцип равенства деформаций по общей грани элементов сечения

Уравнение (7) является линейной функцией деформации. Данная зависимость соответствует гипотезе плоских сечений. Значения $\varepsilon_{0i}(z)$ и $\chi_{0i}(z) = -V''_{0i}(z)$ являются неизвестными и имеют следующий физический смысл: $\varepsilon_{0i}(z)$ – осевая деформация элемента, $\chi_{0i}(z)$ – кривизна оси.

При этом очевидно, что деформации соседних пластин по грани их стыковки должны быть равными (рисунок 3).

Связь деформаций между первой и второй пластиной и второй и третьей:

$$\begin{aligned} \varepsilon_{01} + \chi_1 \cdot \frac{-h_1}{2} &= \varepsilon_{02} + \chi_2 \cdot \frac{h_2}{2}, \\ \varepsilon_{02} + \chi_2 \cdot \frac{-h_2}{2} &= \varepsilon_{03} + \chi_3 \cdot \frac{h_3}{2}. \end{aligned}$$

Отсюда видно, что деформацию каждой пластинки можно выразить через деформацию первой:

$$\varepsilon_{0n} = \varepsilon_{01} - \chi_1 \cdot \frac{h_1}{2} - \chi_2 \cdot h_2 - \dots - \chi_i \cdot h_i - \dots - \chi_n \cdot \frac{h}{2}. \quad (8)$$

Формула (8) включает в себя 4 неизвестных. Кривизна является функцией $X_p, Y_p, \varphi(z)$ и неизвестная ε_{01} . Для их нахождения необходимо составить 4 уравнения:

$$\sum_n N_i = \sum_n \int E_{zi} E_{zi} A_i dz = 0, \text{ позволяет найти } \varepsilon_{01},$$

$$\sum M_x = 0 \text{ и } \sum M_y = 0, \text{ позволяет найти } X_p, Y_p.$$

Изгибающий момент находится через кривизну:

$$M_i = \frac{E_{zi} J_{xi}}{\rho_i} = -E_{zi} J_{xi} \cdot V_i''(X_p, Y_p, \varphi''(z)). \quad (9)$$

А далее определяется перерезывающая сила:

$$Q_i = \frac{dM_i}{dz} = E_{zi} J_{xi} \cdot V_i'''(X_p, Y_p, \varphi'''(z)), \quad (10)$$

которая создает часть крутящего момента, связанного с изгибом пластины:

$$M_i^{uz2} = Q_i \cdot r_i = E_{zi} J_{xi} \cdot V_i'''(X_p, Y_p, \varphi'''(z)) \cdot r_i. \quad (11)$$

Вторая часть связана со свободным кручением пластин:

$$M_i^{c6.kp} = G_{zi} (h \cdot t^3 / 3) \cdot \varphi'(z). \quad (12)$$

Уравнение равновесия момента вокруг оси стержня $\sum M_z = M_{kp}$ примет следующий вид:

$$\sum_n M_i^{c6.kp} + \sum_n M_i^{uz2} = M_{kp}, \quad (13)$$

что полностью повторяет уравнение Власова В.3.

Решив полученное дифференциальное уравнение, с соответствующими граничными условиями, зависящими от типа закрепления, найдем четвертую неизвестную функцию $\varphi(z)$.

На этом заканчивается начальная итерация, записывается функция нормальных напряжений для каждой пластинки:

$$\sigma_{z,i}^{(1)} = \varepsilon_{0i}(z) - V_{0i}''(z) \cdot y.$$

Функция касательных напряжений находится из условий равновесия:

$$\frac{\partial \tau_{yz,i}^{(1)}}{\partial y} + \frac{\partial \sigma_{z,i}^{(1)}}{\partial z} = 0, \quad (14)$$

$$\tau_{yz,i}^{(1)} = - \int \frac{\partial \sigma_{z,i}^{(1)}}{\partial z} dy + \tau_{0yz,i}^{(1)}.$$

Аналогично равенству деформаций по граням, соблюдается равенство потоков касательных напряжений по теореме Бредта: $t_i \cdot \tau_{yz,i}^{(1)} = t_{i+1} \cdot \tau_{yz,i+1}^{(1)}$. Зная значения касательных напряжений на свободных гранях, и опираясь на последнее

равенство можно найти постоянные интегрирования для касательных напряжений $\tau_{0yz,i}^{(1)}$

Аналогично находятся функции нормальных напряжений поперечного направления:

$$\frac{\partial \sigma_{y,i}^{(1)}}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{yz,i}^{(1)}}{\partial z} = 0,$$

$$\sigma_{y,i}^{(1)} = - \int \frac{\partial \tau_{yz,i}^{(1)}}{\partial z} dy + \sigma_{0y,i}^{(1)}. \quad (15)$$

И аналогично определяются произвольные интегрирования $\sigma_{0y,i}^{(1)}$.

На данном этапе получены все составляющие напряженного состояния стержня по результатам первого цикла. Стоит обратить внимание на следующие особенности:

- Нормальные напряжения продольного направления $\sigma_{z,i}^{(1)}$ по ширине пластины являются линейной функцией.
- По длине пластины нормальные напряжения зависят от $\varphi''(z)$.
- Касательные напряжения по ширине пластины выражаются через квадратную параболу
- По длине пластины касательные напряжения зависят от $\varphi'''(z)$
- Нормальные напряжения поперечного направления по ширине пластины имеют функцию кубической параболы
- В продольном направлении нормальные напряжения поперечного направления зависят от $\varphi^{IV}(z)$

Итерация 2

На втором этапе вычислений остается справедливой гипотеза неизменяемости контура. Координаты центра кручения известны. За неизвестные принимаются:

- Функция угла закручивания $\varphi^{(2)}(z)$.
- Осевая деформация пластинок $\varepsilon_{0i}^{(2)}(z)$.
- Кривизна элементов $\chi_{0i}^{(2)}$.

Индекс ⁽²⁾ – обозначает принадлежность второму этапу итераций, индекс ⁽¹⁾ – первому.

Закон Гука принимает вид в соответствии с (1):

$$A = \begin{pmatrix} 1/E_y & -\nu_{yz}/E_y & \eta_{\sigma y}/E_y \\ -\nu_{zy}/E_z & 1/E_z & \eta_{\sigma z}/E_z \\ \eta_{\tau y}/G_{yz} & \eta_{\tau z}/G_{yz} & 1/G_{yz} \end{pmatrix},$$

$$\varepsilon = A \cdot \sigma.$$

$$\varepsilon_{y,i}^{(2)} = \sigma_{y,i}^{(1)} / E_{y,i} - \nu_{yz,i} \sigma_{z,i}^{(1)} / E_{y,i} + \tau_{yz,i}^{(1)} \eta_{\sigma y,i} / E_{y,i}. \quad (16)$$

$$V_i^{(2)} = \int \varepsilon_{yi}^{(2)} dy + V_{0i}^{(2)}(z) \quad (17)$$

$$\gamma_{yz,i}^{(2)} = \sigma_{y,i}^{(1)} \eta_{\tau y,i} / G_{yz,i} + \sigma_{z,i}^{(1)} \eta_{\tau z,i} / G_{yz,i} + \tau_{yz,i}^{(1)} / G_{yz,i}. \quad (18)$$

Функция деформаций продольного направления находится аналогично, как и на первом этапе:

$$\begin{aligned} \gamma_{zx} &= \frac{\partial W}{\partial x} + \frac{\partial V}{\partial z}, \\ \frac{\partial \gamma_{zy}}{\partial z} &= \frac{\partial W}{\partial x \partial z} + \frac{\partial^2 V}{\partial z^2}, \\ \varepsilon_{z,i}^{(2)} &= \frac{\partial W}{\partial x} = \int \frac{\partial \gamma_{yz,i}^{(2)}}{\partial z} dy - \int \frac{\partial^2 V_i^{(2)}}{\partial z^2} dy + \varepsilon_{0,i}^{(2)} + V_{0,i}^{(2)''} \cdot y = \\ &= \int \frac{\partial}{\partial z} (\sigma_y^{(1)} \eta_{\tau y} / G_{yz} + \sigma_z^{(1)} \eta_{\tau z} / G_{yz} + \tau_{yz}^{(1)} / G_{yz}) dy - \\ &- \int dy \int \frac{\partial^2}{\partial z^2} (\sigma_y^{(1)} / E_y - \nu_{yz} \sigma_z^{(1)} / E_y + \tau_{yz}^{(1)} \eta_{\sigma y} / E_y) dy + \\ &+ \varepsilon_{0,i}^{(2)} - \chi_{0,1}^{(2)} \cdot y, \end{aligned} \quad (19)$$

$$\sigma = A^{-1} \cdot \varepsilon.$$

Функция продольных деформаций состоит из двух частей. Последняя линейная составляющая зависит от производных $\varphi^{(2)}(z)$ и повторяет распределение полученное на первом этапе. Функции, которые зависят от производных $\varphi^{(1)}(z)$ имеют более высокий порядок.

При необходимости, дальнейшие циклы вычислений ведутся по аналогичному алгоритму. Для величин с индексом ⁽²⁾ решение сводится к уравнению (13). А величины с индексом ⁽¹⁾ будут переноситься в правую часть и играть роль увеличения или уменьшения внешнего крутящего момента. При этом уравнение (13) примет следующий вид, с прежними граничными условиями:

$$\sum_n M_i^{св.кр} + \sum_n M_i^{узг} = M_{кр} \pm \sum_n M_{дон}(\varphi^{(1)}(z)) \quad (20)$$

Дальнейшие уточнения решения проводятся в той же последовательности.

Получен ряд результатов расчетов консольного швеллера с заданными параметрами. Между собой конструкции отличаются лишь направлением армирующих волокон (рисунок 4.).

На рисунке 5 приведены графики углов закручивания по длине стержня в зависимости от угла армирования. Рассмотрено четыре случая армирования: 0, 30, 60, 90 градусов. Из графика видно, что угол закручивания можно изменять более чем в 20 раз, варьируя лишь параметр угла армирования.

На рисунке 6 даны графики нормальных и касательных напряжений для первого и второго цикла итераций. Данные результаты получены для консольного швеллера, армированного под углом 60°.

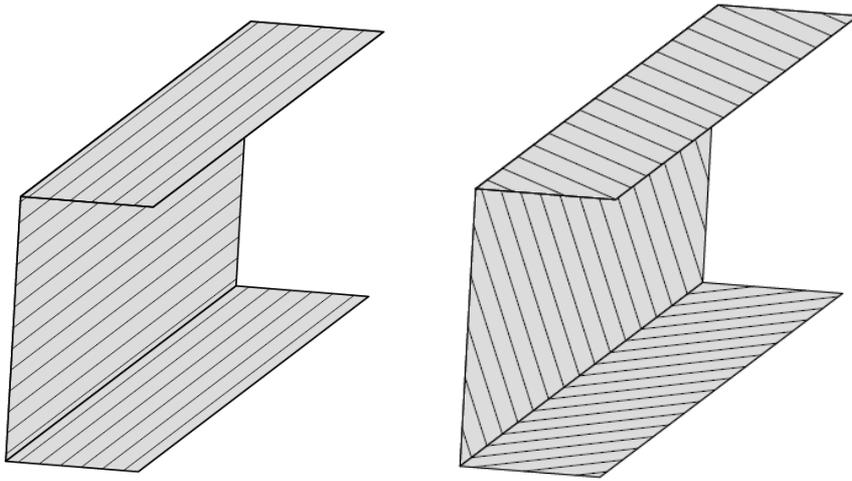


Рисунок 4 – Варианты армирования стержня

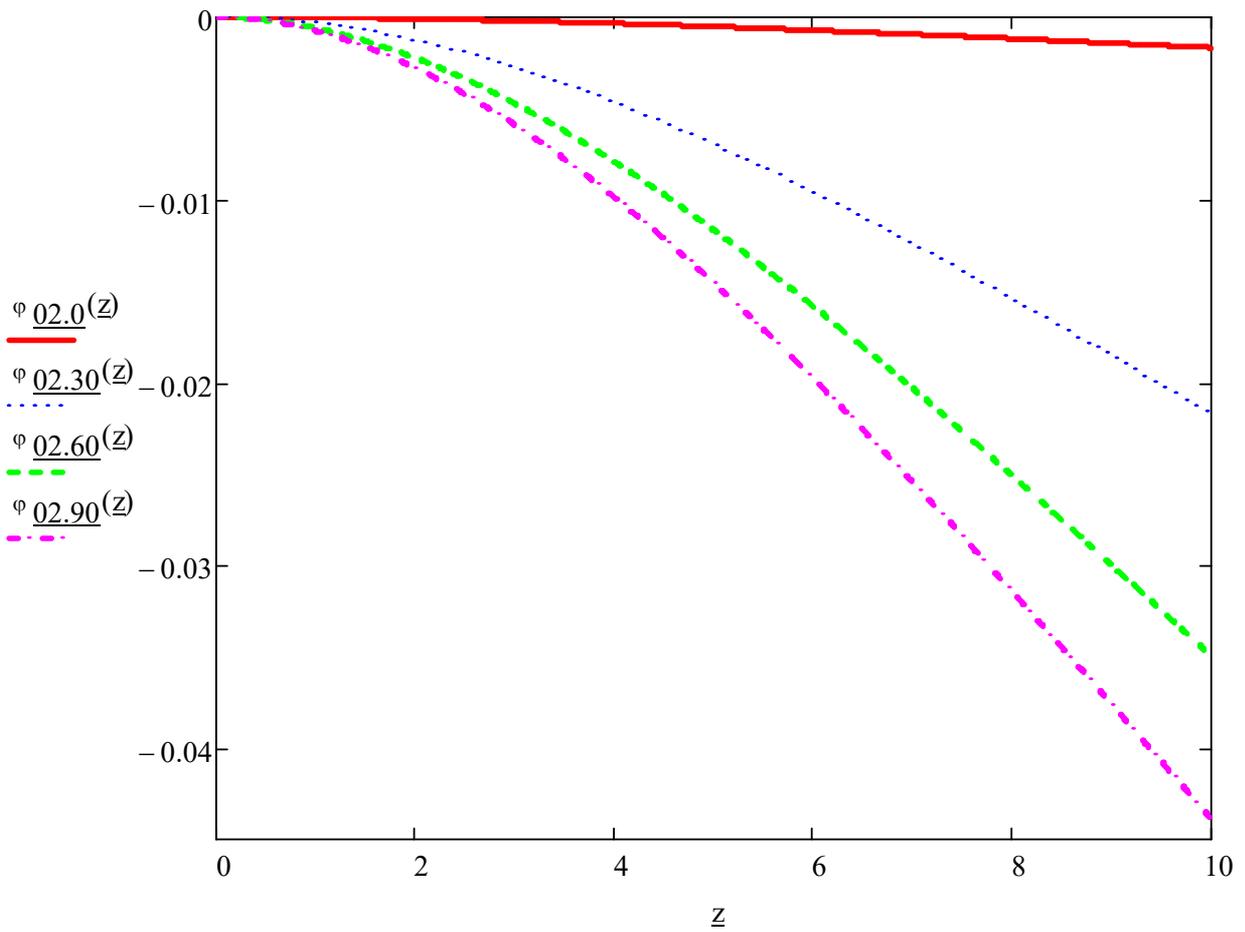


Рисунок 5 – График углов закручивания стержня на втором цикле для различных направлений армирования

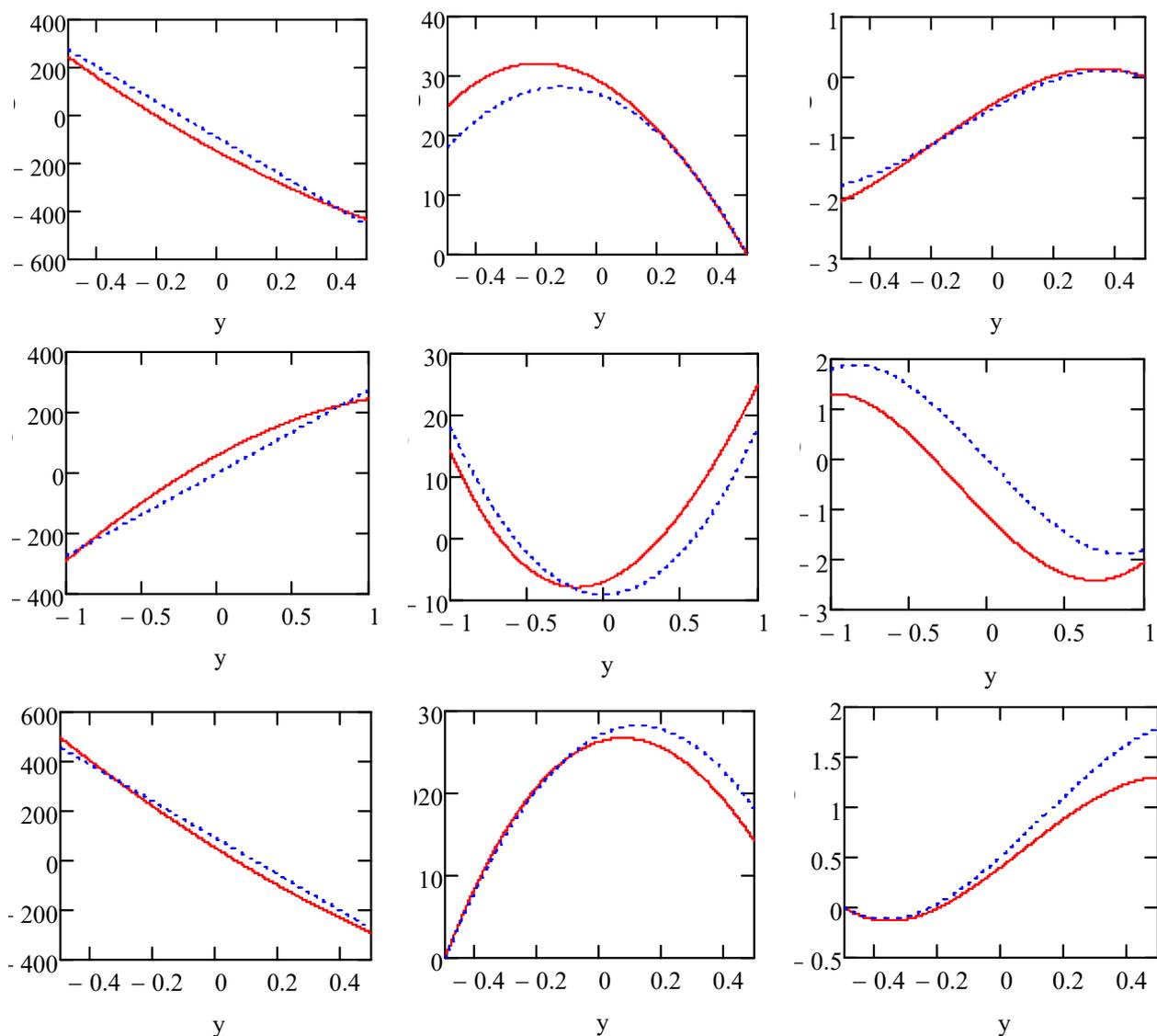


Рисунок 6 – Эпюры напряжений в поперечном сечении швеллера с углом армирования 60° на расстоянии $0.1L$ от заделки для первой, второй и третьей пластины соответственно. Пунктиром показаны результаты первого цикла итераций. Сплошной линией – результаты второго цикла

- а) нормальные напряжения вдоль оси стержня б) касательные напряжения в) нормальные напряжения поперек оси стержня

Для определения прочности предлагается зависимость Хилла Р.:

$$\sigma = 1 / \left[\sqrt{\frac{\cos^2 \alpha}{\sigma_{B1}^2} + \left(\frac{1}{\tau_{B12}^2} - \frac{1}{\sigma_{B1}^2} \right) \cdot \cos^2 \alpha \cdot \sin^2 \alpha + \frac{\sin^2 \alpha}{\sigma_{B2}^2}} \right]$$

Для материала М60J/Ероху:

предел прочности в продольном направлении $\sigma_{B1}=780$ МПа,
 предел прочности в поперечном направлении $\sigma_{B2}=30$ МПа,
 предел прочности при сдвиге $\tau_{B12}=39$ МПа.

Анализ сходимости результатов

При итерационном подходе вычисления, связанные с дифференцированием, производятся по длине стержня, по координате z . А операции интегрирования производятся по высоте пластинке, по координате y . Данная последовательность действий приводит к результатам, приведенным в таблице 1.

Таблица 1

Напряжения	Первый цикл		Второй цикл	
	высшая степень производной $\varphi(z)$	высшая степень разложения по координате y	высшая степень производной $\varphi(z)$	высшая степень разложения по координате y
σ_z	$\varphi''(z)$	y^1	$\varphi^{VI}(z)$	y^5
τ_{yz}	$\varphi'''(z)$	y^2	$\varphi^{VII}(z)$	y^6
σ_y	$\varphi^{IV}(z)$	y^3	$\varphi^{VIII}(z)$	y^7

Сходимость итерационного процесса основана на этих данных. Рассмотрим m циклов. По длине стержня L напряжения зависят от степени производной $\varphi(z)$, $(1/L)^m$. По высоте отдельной пластины H , напряжения зависят от степени разложения по координате y , $(H)^m$. Следовательно общее приращение величины пропорционально $(H/L)^m$.

При отношении $H/L=1/3$, на втором цикле получим $(1/3)^4=0.012$, на третьем $0,15^{-4}$. Наблюдается высокая скорость сходимости, обычно достаточно 2–3 цикла для получения достоверных результатов, обладающих высокой точностью.

III. ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Основные результаты данной работы состоят в следующем:

1. Разработан итерационный аналитический способ решения задачи стесненного кручения анизотропного стержня открытого профиля, с учетом сдвигов, поперечных деформаций и коэффициентов влияния линейной деформации на сдвиговую деформацию. Создан алгоритма для решения задачи о стесненном кручении тонкостенного анизотропного стержня.

2. Получены численные и графические результаты НДС (напряженно-деформированного состояния) тонкостенных анизотропных стержней открытого профиля, работающих в условиях стесненного кручения. Рассмотрены случаи различного направления арматуры в матрице.

3. Получено, что в зависимости от направления армирования при прочих равных исходных данных, угол закручивания стержня может измениться более чем в 20 раз. Влияние второго и последующих приближений для изотропных задач достигает 15 %. Для анизотропных материалов на первом цикле невозможно получить достоверный результат, который достигается на втором этапе.

4. Записан алгоритм метода последовательных приближений на примере расчета балки на двух опорах.

5. Разработан итерационный способ расчета слоистых балок на прочность, как один из шагов создания составного сечения открытого профиля. Получено решение задачи изгиба слоистой балки.

6. Разработан итерационный способ применительно к решению задачи кручения тонкостенных изотропных стержней. Результаты первого цикла итераций повторяют решение Власова В.З., последующие итерации уточняют решение с учетом сдвигов и поперечных деформаций.

7. Разработан итерационный способ расчета анизотропной балки на прочность. Решена задача изгиба анизотропной балки с учетом сдвигов и коэффициентов влияния линейной деформации на сдвиговую деформацию. Полученные результаты соответствуют с аналитическим решением, записанным Лехницким С.Г. и с результатами, полученными в пространственном конечно-элементном расчете.

В данной диссертации рассмотрены не все возможные случаи напряженно-деформированного состояния анизотропных элементов. Вместе с тем, предложенный аналитический метод является универсальным, и может быть использован для дальнейшего более детального исследования поведения анизотропных конструкций. Дальнейшую исследовательскую деятельность в области расчетов анизотропных конструкций, по мнению автора, необходимо развивать в направлении учета динамических нагрузок и работы материала в зоне пластических деформаций.

IV. ОСНОВНЫЕ НАУЧНЫЕ ПУБЛИКАЦИИ ПО ТЕМЕ ДИССЕРТАЦИОННОГО ИССЛЕДОВАНИЯ

Научные статьи, опубликованные в ведущих рецензируемых научных изданиях, перечень которых размещен на официальном сайте Высшей аттестационной комиссии и приравненные к ним:

1. К. Ю. Полинкевич Итерационный способ расчета слоистых балок на прочность. Известия Петербургского университета путей сообщения / Вып 2 (35). Петерб. Гос. Универ. Путей сообщ. – СПб., 2013. – С. 148–153.

2. Б. М. Аллахвердов К. Ю. Полинкевич Итерационный способ расчета анизотропной балки на прочность. Известия Петербургского университета путей сообщения / Вып 2 (39). Петерб. Гос. Универ. Путей сообщ. – СПб., 2014. – С. 73–80.

3. К. Ю. Полинкевич Итерационный способ расчета тонкостенных стержней открытого профиля на прочность. Известия Петербургского университета путей сообщения / Вып 1 (50). Петерб. Гос. Универ. Путей сообщ. – СПб., 2017. – С. 157–165.

Статьи в других изданиях

4. Б.М. Аллахвердов К.Ю. Полинкевич Итерационный способ расчета тонкостенных анизотропных стержней открытого профиля на кручение. Сб. тр. IX Международной конференции по проблемам прочности материалов и сооружений на транспорте, 27–28 мая 2014 г., СПб., 2015. – С. 6–15.

5. Б. М. Аллахвердов К. Ю. Полинкевич Итерационный способ расчета тонкостенных анизотропных стержней открытого профиля на кручение. Международный Научно-исследовательский журнал /Вып 1 (55). Екатеринбург, 2017. – С. 12–18.

6. К. Ю. Полинкевич Графические результаты расчетов анизотропного швеллера на кручение итерационным способом. Сб. тр. X Международной конференции по проблемам прочности материалов и сооружений на транспорте, 23–25 мая 2017 г., СПб., 2018. – С. 195–204.

Компьютерная верстка С. Н. Яблокова

Подписано к печати 15.04.2019. Формат 60×84 1/16. Бум. офсетная.

Усл. печ. л. 1,2. Тираж 120 экз. Заказ 46.

Санкт-Петербургский государственный архитектурно-строительный университет.
190005, Санкт-Петербург, 2-я Красноармейская ул., д. 4.

Отпечатано на МФУ. 198095, Санкт-Петербург, ул. Розенштейна, д. 32, лит. А.

