На правах рукописи

КУЗНЕЦОВА ДАРЬЯ АЛЕКСАНДРОВНА

ВАРИАЦИОННЫЕ ПОСТАНОВКИ И АНАЛИТИЧЕСКИЕ РЕШЕНИЯ ФИЗИЧЕСКИ И ГЕОМЕТРИЧЕСКИ НЕЛИНЕЙНЫХ ЗАДАЧ СТАТИКИ И УСТОЙЧИВОСТИ УПРУГИХ СТЕРЖНЕЙ С УЧЕТОМ ДЕФОРМАЦИЙ РАСТЯЖЕНИЯ – СЖАТИЯ И СДВИГА

Специальность **05.23.17 – Строительная механика**

АВТОРЕФЕРАТ

диссертации на соискание ученой степени
кандидата технических наук

Санкт-Петербург – 2016 г.

Работа выполнена в ФГАОУ ВО «Санкт-Петербургский политехнический университет Петра Великого» на кафедре «Строительная механика и строительные конструкции»

Научный руководитель:	доктор технических наук, профессор **Лалин Владимир Владимирович**
Официальные оппоненты:	**Голоскоков Дмитрий Петрович** доктор технических наук, профессор, ФГБОУ ВО «Государственный университет морского и речного флота имени адмирала С.О. Макарова», (г. Санкт-Петербург), заведующий кафедрой прикладной математики **Галишникова Вера Владимировна** доктор технических наук, доцент, ФГАОУ ВО «Российский университет дружбы народов» (г. Москва), заведующая кафедрой строительных конструкций и сооружений
Ведущая организация:	**ФГБОУ ВО «Национальный исследовательский Московский государственный строительный университет»**

Защита диссертации состоится «13» октября 2016 г. в 14^{30} часов на заседании диссертационного совета **Д 212.223.03** при ФГБОУ ВО «Санкт-Петербургский государственный архитектурно-строительный университет» по адресу: 190005, г. Санкт-Петербург, ул. 2-я Красноармейская, д.4, зал заседаний диссертационного совета (аудитория 219).

Тел./факс: (812) 316-58-72; Email: rector@spbgasu.ru

С диссертацией можно ознакомиться в библиотеке ФГБОУ ВО «Санкт-Петербургский государственный архитектурно-строительный университет» и на сайте www.spbgasu.ru.

Автореферат разослан «_____» _________ 2016 г.

Учёный секретарь
диссертационного совета
доктор технических наук,
профессор Кондратьева Лидия Никитовна

I ОБЩАЯ ХАРАКТЕРИСТИКА РАБОТЫ

Актуальность темы исследования. В последнее время в строительстве наблюдается тенденция к уменьшению материалоемкости сооружений. В связи с этим появляется необходимость применения более легких и податливых элементов конструкций. В то же время возрастает вероятность потери устойчивости таких элементов. Таким образом, проверка устойчивости исходной формы равновесия становится неотъемлемым шагом при проектировании несущих конструкций.

На сегодняшний день оценка устойчивости стержневых элементов конструкций производится по приближенным формулам, созданным еще в 18 – 19 веках. Использование общепринятых методов оценки устойчивости, сформированных на классической формуле Эйлера, приводит к получению для гибких податливых элементов приближенных значений критических сил, в связи с тем, что формула Эйлера учитывает исключительно жесткость стержня на изгиб. В конце 19 века Энгессером была предложена формула для определения критической силы, в которой, кроме жесткости на изгиб, учитывалась жесткость стержня на сдвиг. Эти же формулы лежат в основе всех компьютерных программ, с помощью которых в настоящее время производится расчет устойчивости стержневых элементов конструкций. До сих пор общепринятого решения задачи устойчивости стержня с учетом всех его жесткостей не существует.

Как подчеркивалось в работах Болотина, Вольмира, Новожилова, Перельмутера и Сливкера, наиболее последовательным способом получения уравнений устойчивости является вариационный способ. Уравнения устойчивости - уравнения Эйлера для второй вариации функционала, соответствующего исходной геометрически нелинейной задаче. Таким образом, для получения уравнений устойчивости необходимо записать функционал, соответствующий исходной нелинейной статической или динамической задаче, вычислить вторую вариацию исходного функционала, получить уравнения устойчивости как уравнения Эйлера для второй вариации функционала. Такой способ исследования устойчивости был разработан в классическом вариационном исчислении на рубеже 19-20 веков.

Анализ литературы показал, что на сегодняшний день в задачах устойчивости стержней подобный подход не был использован ни разу. Более того, выяснилось, что в мировой научной литературе не существует вариационной постановки геометрически нелинейных задач для упругих стержней в виде задачи поиска точки стационарности некоторого функционала, а используются только вариационные постановки в виде принципа возможных перемещений (принципа виртуальной работы).

Безусловно, полное решение задачи устойчивости должно включать также учет пластических свойств материала, из которого выполнен стержень, что будет являться следующим этапом исследования, основывающимся на решении задач устойчивости упругих стержней, полученных в данной работе.

Степень разработанности. Основателем теории устойчивости был Леонард Эйлер, впервые сумевший в 1744 году найти критическую силу для прямолинейного упругого шарнирно опертого стержня, загруженного вдоль оси сжимающей силой. Бельгийский инженер Э. Ламарль в 1845 году первым установил, что пределом применимости формулы Эйлера является предел упругости. Опытным путем он определил минимальное значение гибкости стержня, при которой формула Эйлера является достоверной.

Впоследствии теория устойчивости Эйлера была подтверждена опытным путем такими учеными как И. Баушингер, Л. Тетмайер и М. Консидер.

Ф. С. Ясинский подтвердил справедливость формулы Эйлера, а также вычислил величину критической силы для различных типов граничных условий, получив универсальную формулу, в которой вид граничного условия входит в качестве коэффициента.

Немецкий механик и инженер Ф. Энгессер был первым автором, который получил формулу, учитывающую влияние сдвига на критическую силу (формула Энгессера). Позднее J. Haringx разработал альтернативную формулу для определения критической силы. Энгессер и Haringx применяли разные подходы к определению критической силы. Энгессер считал, что продольная сила направлена по касательной к оси стержня, в то время как поперечная сила направлена по перпендикуляру к оси. Haringx, в свою очередь, предполагал, что продольная сила направлена по нормали к плоскости поперечного сечения стержня, а перерезывающая сила направлена перпендикулярно и лежит в плоскости поперечного сечения. Эти два подхода приводят к различным формулам для определения критической силы. Такие ученые, как Z. Bazant и A. Beghini, Г. Циглер, J. Nänni, поддерживали подход, предложенный Энгессером. M. Attard и G. Hunt, E. Рейсснер в своих работах придерживаются подхода, используемого Haringx. До сих пор в отечественной и зарубежной научной литературе нет однозначного мнения, чей подход является правильным и обоснованным.

Значительный вклад в развитие теории устойчивости внесли работы С. П. Тимошенко, А. Н. Динника, Е.Л. Николаи, В.В. Болотина, Г. Циглера, Ф.Р. Шенли, А.С. Вольмира, А.Р. Ржаницына, В.В. Новожилова, Н.А. Алфутова, А.М. Масленникова, В.В. Карпова.

Особенно следует отметить трехтомную работу А.В. Перельмутера и В.И. Сливкера «Устойчивость равновесия конструкций и родственные проблемы». В данной работе дана систематизация вариационных постановок задач устойчивости. Также впервые в истории науки корректно сформулированы задачи теории устойчивости при действии на систему потенциальной моментной нагрузки.

Расчет стержней с учетом их физической нелинейности рассматривался в работах В.В. Елисеева, В.В. Лалина, Д.П. Голоскокова, Ю.Л. Рутмана, В.В. Галишниковой.

В работах В.В. Галишниковой разработан численный метод, позволяющий исследовать закритическое поведение стержня, даже на ниспадающей ветви кривой нагружение – перемещение.

Существенный вклад в исследование устойчивости стержней с упругопластическими свойствами внесли работы В.В. Улитина и И.Д. Грудева.

Цель и задачи исследования.

Цель исследования:

- разработка вариационных постановок задач деформирования физически и геометрически нелинейных упругих стержней с учетом жесткостей на растяжение – сжатие, сдвиг и изгиб в виде задач поиска точки стационарности функционалов типа Лагранжа и Гамильтона;
- разработка вариационных и дифференциальных постановок задач устойчивости физически и геометрически нелинейных упругих стержней с учетом жесткостей на растяжение – сжатие, сдвиг и изгиб;
- получение аналитических решений задач устойчивости упругого стержня, сжатого осевой «мертвой» силой, с произвольными граничными условиями с учетом всех жесткостей;
- сравнение полученных точных решений с известными приближенными решениями, учитывающими либо только сдвиговую и изгибную жесткости (стержень Тимошенко), либо только изгибную жесткость (стержень Бернулли – Эйлера).

Задачи исследования:

- получить выражения для функционала типа Лагранжа вариационной постановки пространственных статических задач геометрически и физически нелинейных стержней;
- получить функционал и уравнения устойчивости равновесия;
- решить конкретные задачи устойчивости равновесия с учетом жесткостей на изгиб, сдвиг и растяжение – сжатие статическим методом;
- получить выражения для функционала типа Гамильтона вариационной постановки плоских динамических задач геометрически нелинейных стержней;
- получить уравнения устойчивости динамическим методом;
- решить конкретные задачи устойчивости с учетом жесткостей на изгиб, сдвиг и растяжение – сжатие динамическим методом;
- оценить погрешность результатов расчета, полученных по существующим приближенным формулам, с результатами, учитывающими жесткости стержня на растяжение – сжатие, сдвиг и изгиб.

Объектом исследования является геометрически и физически нелинейный упругий стержень.

Предметом исследования являются напряженно-деформированное состояние и устойчивость физически и геометрически нелинейных упругих стержней при статическом механическом нагружении.

Научная новизна исследования заключается в следующем:

1. Получена вариационная формулировка пространственных и плоских статических и динамических задач физически и геометрически нелинейных упругих стержней в виде задач поиска точки стационарности функционалов типа Лагранжа и Гамильтона.

2. Получены функционал устойчивости, уравнения устойчивости, а также динамический функционал и уравнения динамической устойчивости для плоской задачи для физически нелинейных и линейных упругих стержней с учетом жесткостей на растяжение – сжатие, сдвиг и изгиб. Уравнения устойчивости равновесия получены двумя способами: как уравнения Эйлера для функционала устойчивости и как уравнения в вариациях уравнений равновесия. Аналогичным образом двумя способами получены уравнения динамической устойчивости: как уравнения Эйлера для динамического функционала устойчивости и как уравнения в вариациях уравнений движения.

3. Получена статическим и динамическим методами точная универсальная формула, позволяющая определить значение критической силы для упругого стержня, сжатого осевой «мертвой» силой, с учетом жесткостей на растяжение – сжатие, сдвиг и изгиб для пяти основных типов граничных условий.

4. Получено асимптотическое решение для задачи устойчивости стержня, сжатого осевой силой, с заделкой на одном конце и шарнирной опорой на другом.

5. Доказана ошибочность классических результатов в задаче устойчивости для балки Тимошенко (функционала устойчивости, уравнений устойчивости и формулы Энгессера).

Практическая ценность и реализация результатов исследования. В работе получены новые вариационные постановки задач устойчивости нелинейных упругих стержней с учетом всех жесткостей, а также аналитическое решение задач устойчивости, доведенное до простых формул. Полученные формулы позволяют получить значение критической силы, вызывающей потерю устойчивости стержневых элементов конструкций, с учетом всех жесткостей. Эти результаты могут быть непосредственно использованы:

- для оценки устойчивости элементов стержневых конструкций, в частности при проектировании новых и реконструкции существующих опорных элементов таких сооружений как высотные многоэтажные здания, морские нефтедобывающие платформы, мачты, вытяжные башни и другие;
- при разработке новых и модернизации существующих компьютерных программ для решения нелинейных задач статики и устойчивости строительных конструкций.

Отличительной особенностью результатов данной работы является их доступность. Полученные решения, представленные в виде простых формул, могут быть использованы непосредственно при проектировании и анализе устойчивости стержневых конструкций и позволяют достаточно легко оценить устойчивость стержневых элементов конструкции любому проектировщику, инженеру, строителю без использования сложных программных комплексов.

Методология и методы исследования.

В данной работе рассматривается общая геометрически нелинейная теория нелинейно упругих стержней Коссера – Тимошенко, в которой учитываются деформации изгиба, сдвига и растяжения – сжатия, а на величины перемещений и поворотов, а также на характер напряженно – деформированного состояния не накладывается никаких ограничений.

В данной работе использован так называемый прямой подход, при котором стержень изначально моделируется одномерной кривой, обладающей распределенными инерционными и жесткостными характеристиками. Каждая геометрическая точка такой кривой обладает шестью степенями свободы: тремя трансляционными и тремя вращательными. Такая теория называется теорией Коссера – Тимошенко, в зарубежной научной литературе эта теория также носит название «геометрически точная теория» («geometrically exact theory»).

Использование энергетически сопряженных векторов усилий и деформаций позволяет получить вариационную постановку задачи, которая может быть сформулирована как задача поиска точки стационарности функционала типа Лагранжа (для статического метода) или функционала типа Гамильтона (для динамического метода). Согласно классическому вариационному исчислению, для задачи, допускающей вариационную постановку, можно получить функционал устойчивости, вычислив вторую вариацию исходного функционала. Уравнения устойчивости являются уравнениями Эйлера для второй вариации исходного функционала.

Используются два основных метода исследования устойчивости: статический и динамический. Как известно, статический и динамический методы исследования устойчивости систем с потенциальными нагрузками приводят к одинаковым результатам. Таким образом, решение задач устойчивости равновесия стержня под действием потенциальной нагрузки динамическим методом является проверкой решения этой же задачи статическим методом.

Основные научные положения, выносимые на защиту:

- вариационная формулировка пространственных и плоских статических и динамических задач физически и геометрически нелинейных упругих стержней;
- функционал и уравнения устойчивости для плоской задачи для физически нелинейных и линейных упругих стержней с учетом жесткостей на растяжение – сжатие, сдвиг и изгиб;
- точная универсальная формула, позволяющая определить значение критической силы для упругого стержня, сжатого осевой «мертвой» силой, с учетом жесткостей на растяжение – сжатие, сдвиг и изгиб для пяти различных типов граничных условий;
- асимптотическое решение задачи устойчивости стержня, сжатого осевой силой, с заделкой на одном конце и шарнирной опорой на другом;

- доказательство ошибочности классических результатов в задаче устойчивости для балки Тимошенко (функционала устойчивости, уравнений устойчивости и формулы Энгессера).

Область исследования соответствует требованиям паспорта научной специальности ВАК: 05.23.17 – Строительная механика, а именно: п. 2 «Линейная и нелинейная механика конструкций и сооружений, разработка физико-математических моделей их расчета», п. 3 «Аналитические методы расчета сооружений и их элементов».

Достоверность полученных результатов обосновывается использованием классического математического аппарата и вариационного исчисления. Уравнения устойчивости и динамические уравнения устойчивости были получены двумя способами: как уравнения Эйлера функционала устойчивости и динамического функционала устойчивости, и как уравнения в вариациях уравнений равновесия и движения, соответственно. Универсальная формула для определения критической силы была получена двумя методами: статическим и динамическим. В случае применения упрощенной модели стержня – стержня Бернулли – Эйлера, учитывающей только жесткость на изгиб, из полученных точных функционала устойчивости, уравнений устойчивости и новой универсальной формулы для определения критической силы вытекают общепринятые классические функционал устойчивости, уравнения устойчивости и формула Эйлера.

Апробация работы. Основные положения и результаты работы докладывались на 14 конференциях и научно – технических семинарах:

- XVIII Зимняя школа по механике сплошных сред (Пермь, 18-22 февраля 2013г.);
- Юбилейная X Всероссийская научно – практическая и учебно – методическая конференция «Фундаментальные науки в современном строительстве» (Москва, 29 марта 2013);
- Международная научная конференция «Молодые исследователи – регионам» (Вологда, 10-19 апреля 2013);
- XXV International Conference “Mathematical and Computer Simulation in Mechanics of Solids and Structures. Methods of Boundary and Finite Elements” (Saint – Petersburg, 23-26 September 2013);
- International Conference “Innovative Materials, Structures and Technologies” (Riga, 08 November 2013);
- XLII Scientific and practical conference “Week of Science in SPbSPU” for students, graduate students and young scientists (Saint-Petersburg, 02-06 December 2013);
- International Scientific Conference and Workshop “METNET – SPb-2014” (Saint – Petersburg, 17-19 February 2014);
- Третья международная научная конференция «Задачи и методы компьютерного моделирования конструкций и сооружений» («Золотовские чтения») (Москва, 15 апреля 2014);

- IX международная конференция «Проблемы прочности материалов и сооружений на транспорте» (Санкт – Петербург, 27-28 мая 2014);
- 6th International Scientific Conference on Dynamics of Civil Engineering and Transport Structures and Wind Engineering DYN-WIND'2014 (Slovak Republic, the village Donovaly, 25-29 may, 2014);
- V международный симпозиум «Актуальные проблемы компьютерного моделирования конструкций и сооружений» (Иркутск, 01-06 июля, 2014);
- Научно - техническая конференция по механике корабля, посвященная памяти профессора И.Г. Бубнова и 110-летию со дня образования кафедры строительной механики корабля «Бубновские чтения» (Санкт – Петербург, 23-24 декабря, 2014);
- International Scientific Conference SPbWOSCE (Saint-Petersburg, 03-04 December 2014);
- International Scientific Conference – Urban Civil Engineering and Municipal Facilities (Saint-Petersburg, 18-20 March 2015).
- Семинар кафедры механики Санкт – Петербургского государственного архитектурно – строительного университета (Санкт – Петербург, 15 декабря 2015).

Публикации. По результатам исследования опубликовано 8 печатных работ (общим объемом 5.015 п.л., лично автору принадлежат 2.6017), из которых публикаций в журналах по перечню ВАК – 6.

Структура и объем работы.

Диссертация состоит из введения, четырех глав, заключения, списка литературы, включающего в себя 115 источников, в том числе 49 – на иностранном языке, и семи приложений. Объем диссертации составляет 177 страниц печатного текста без приложений. Работа содержит 33 рисунка и 8 таблиц.

Во введении обоснована актуальность работы, сформулированы цели и задачи исследования, приведены основные методы исследования, обзор литературных источников, а также аргументирована теоретическая и практическая значимость диссертации.

В первой главе приведены основные понятия, определения и уравнения задачи нелинейного деформирования стержней. Получено выражение для функционала типа Лагранжа вариационной постановки пространственных статических задач геометрически и физически нелинейных стержней. Приведены основные уравнения и вариационные постановки для плоской задачи нелинейной теории стержней.

Во второй главе рассмотрена геометрически нелинейная плоская задача статики линейно и нелинейно упругих стержней. Приведены постановки задач в виде системы дифференциальных уравнений и вариационные постановки в виде задачи о поиске точки стационарности функционала типа Лагранжа. Получено выражение для второй вариации функционала Лагранжа, из которой получены точные уравнения задачи устойчивости для любого типа физической нелинейности стержня. В задаче об устойчивости стержня, сжатого осевой силой, получено универсальное решение с учетом жесткостей на изгиб, сдвиг и растяжение – сжатие, дающее значение критической силы для основных типов граничных условий.

В третьей главе рассмотрена геометрически нелинейная плоская задача динамики линейно упругих стержней. Приведена постановка задачи в виде системы дифференциальных уравнений и вариационная постановка в виде задачи о поиске точки стационарности функционала типа Гамильтона. Получено выражение для второй вариации функционала Гамильтона, из которой получены точные уравнения задачи устойчивости. В задаче об устойчивости стержня, сжатого осевой силой, динамическим методом получено универсальное решение с учетом жесткостей на изгиб, сдвиг и растяжение – сжатие, дающее значение критической силы для основных типов граничных условий. Показано, что формулы для определения критической силы для пяти основных типов граничных условий, полученные динамическим методом, совпадают с формулами, полученными ранее в главе 2 с использованием статического метода.

В четвертой главе исследована устойчивость упругих стержней, модель которых является упрощенной: теория стержней Тимошенко, в которой учитываются жесткости стержня на сдвиг и изгиб; теория стержней Бернулли – Эйлера, учитывающая только жесткость стержня на изгиб. Для этих моделей, как частных случаев общей теории, получены функционалы устойчивости, уравнения устойчивости и формулы для критической силы. Произведена оценка влияния жесткостей на растяжение – сжатие и сдвиг на значение критической силы. В задаче об устойчивости трехслойного стержня показана возможность использования универсального решения с учетом жесткостей на изгиб, сдвиг и растяжение – сжатие, в котором трехслойный стержень моделируется как однородный с эквивалентными жесткостями.

В заключении приведены основные результаты, полученные в работе.

II ОСНОВНЫЕ ПОЛОЖЕНИЯ И РЕЗУЛЬТАТЫ ИССЛЕДОВАНИЙ, ВЫНОСИМЫЕ НА ЗАЩИТУ

1. Получена вариационная формулировка пространственных и плоских статических и динамических задач физически и геометрически нелинейных упругих стержней в виде задач поиска точки стационарности функционалов типа Лагранжа и Гамильтона.

В диссертации были получены дифференциальные и вариационные постановки пространственной и плоской статической задачи для физически линейного и нелинейного стержня, а также дифференциальная и вариационная постановки динамической задачи для физически линейного стержня. В автореферате приведены дифференциальная и вариационная постановки только плоской статической задачи для физически линейного упругого стержня.

Постановка геометрически нелинейной задачи для упругого стержня состоит из трех групп уравнений: уравнений равновесия, физических уравнений и геометрических уравнений.

Уравнения равновесия для плоской задачи имеют вид:

$$\begin{cases} \left(N\cos\varphi - Q\sin\varphi\right)' + q_x = 0; \\ \left(N\sin\varphi + Q\cos\varphi\right)' + q_y = 0; \\ M' + x'\left(N\sin\varphi + Q\cos\varphi\right) + y'\left(Q\sin\varphi - N\cos\varphi\right) + m = 0, \end{cases} \qquad (1)$$

где N – продольная сила; Q – перерезывающая сила; M – изгибающий момент; q_x, q_y – проекции распределенных сил на координатные оси X, Y, соответственно; m – распределенная моментная нагрузка. В плоской задаче геометрически нелинейного деформирования упругого стержня функции x(s), y(s) и φ(s) представляют собой три степени свободы, где x(s), y(s) – координаты точки стержня в деформированном положении, φ (s) – угол поворота вокруг оси Z, (…)' – обозначает частную производную по координате s. В отсчетной конфигурации стержень занимает отрезок $0 \leq s \leq L$, где L – длина недеформированного стержня.

Геометрические уравнения для плоской задачи геометрически нелинейного деформирования стержня имеют вид:

$$\begin{cases} \varepsilon = x'\cos\varphi + y'\sin\varphi - 1; \\ \gamma = -x'\sin\varphi + y'\cos\varphi; \\ \psi = \varphi', \end{cases} \qquad (2)$$

где ε, γ, ψ – компоненты деформации растяжения – сжатия, сдвига и изгиба, соответственно, выраженные через функции x (s), y (s) и φ (s).

Физические уравнения для физически линейного материала можно записать в следующем виде:

$$N = k_1\varepsilon; \qquad Q = k_2\gamma; \qquad M = k_3\psi, \qquad (3)$$

где $k_1 = EA$ – жесткость на растяжение – сжатие, $k_2 = GAk$ – жесткость на сдвиг, $k_3 = EJ$ – жесткость на изгиб; E – модуль Юнга; A – площадь поперечного сечения; J – момент инерции сечения; G – модуль сдвига; k – коэффициент формы сечения.

Функционал Лагранжа П может быть записан в виде:

$$\Pi\left(x, y, \varphi\right) = \int_0^L \left[\frac{1}{2}\left(k_1\varepsilon^2 + k_2\gamma^2 + k_3\psi^2\right) - q_x\left(x - s\right) - q_y y - m\varphi\right] ds - \qquad (4)$$

$$-F_{1вн}\left(x\left(L\right) - L\right) - F_{2вн}\,y\left(L\right) - M_{вн}\,\varphi\left(L\right),$$

где $F_{1вн}$ – «мертвая» нагрузка, параллельная оси X, $F_{2вн}$ – «мертвая» нагрузка, параллельная оси Y, $M_{вн}$ – внешний момент, приложенные на конце стержня при s=L.

В работе доказано, что вариационная задача поиска точки стационарности функционала Лагранжа П→СТАЦ равносильна задаче (1) – (3).

2. Получены функционал устойчивости, уравнения устойчивости, а также динамический функционал и уравнения динамической устойчивости для плоской задачи для физически нелинейных и линейных упругих стержней с учетом жесткостей на растяжение – сжатие, сдвиг и изгиб.

В диссертации были получены функционал устойчивости и уравнения устойчивости плоской задачи для физически линейного и нелинейного упругих стержней, а также динамические функционал устойчивости и уравнения устойчивости. В автореферате приведены функционал и уравнения устойчивости только для физически линейного упругого стержня.

Функционал устойчивости плоской задачи для физически линейных упругих стержней с учетом жесткостей на растяжение – сжатие, сдвиг и изгиб, вытекающий из второй вариации исходного функционала Лагранжа, имеет следующий вид:

$$\begin{aligned}\Phi_{\text{ст}}\ \ u,\upsilon,\theta\ \ =\frac{1}{2}\int_0^L\Big[& N_{\text{в}}\varepsilon_{\text{в}}+N\theta\ \ 2\gamma_{\text{в}}+\theta\ \ \varepsilon+1\ \ \ +Q_{\text{в}}\gamma_{\text{в}}+\\ & +Q\ \ -2\varepsilon_{\text{в}}+\theta\gamma\ \ +M_{\text{в}}\psi_{\text{в}}\Big]ds,\end{aligned} \tag{5}$$

где использованы обозначения:

$$N_{\text{в}}=k_1\varepsilon_{\text{в}};\qquad Q_{\text{в}}=k_2\gamma_{\text{в}};\qquad M_{\text{в}}=k_3\psi_{\text{в}};$$

$$\varepsilon_{\text{в}}=u'\cos\varphi-x'\theta\sin\varphi+\upsilon'\sin\varphi+y'\theta\cos\varphi;$$

$$\gamma_{\text{в}}=-u'\sin\varphi-x'\theta\cos\varphi+\upsilon'\cos\varphi-y'\theta\sin\varphi;\qquad \psi_{\text{в}}=\theta'.$$

Величины x, y, φ, ε, γ, ψ, N, Q, M обозначают характеристики напряженно – деформированного состояния, удовлетворяющие системе уравнений (1) – (3), а также граничным условиям. То есть, это величины того напряженно – деформированного состояния, устойчивость которого исследуется. Величинами с нижним индексом «в» обозначаются вариации; $u\ \ s\ \ ,\upsilon\ \ s\ \ ,\theta\ \ s$ – вариации координат x, y и угла поворота φ соответственно.

Уравнения устойчивости являются уравнениями Эйлера вариационной задачи $\Phi_{\text{ст}}\to$СТАЦ. Уравнения, вытекающие из условия $\delta\Phi_{\text{ст}}=0$, имеют следующий вид:

$$\begin{cases} N_{\text{в}}\cos\varphi-Q_{\text{в}}\sin\varphi\ \ '-\ \ \theta\ \ N\sin\varphi+Q\cos\varphi\ \ \ '=0;\\ N_{\text{в}}\sin\varphi+Q_{\text{в}}\cos\varphi\ \ '+\ \ \theta\ \ N\cos\varphi-Q\sin\varphi\ \ \ '=0;\\ M_{\text{в}}'+u'\ \ N\sin\varphi+Q\cos\varphi\ \ +\upsilon'\ \ Q\sin\varphi-N\cos\varphi\ \ +x'\ \ N_{\text{в}}\sin\varphi+Q_{\text{в}}\cos\varphi+\\ +\theta\ \ N\cos\varphi-Q\sin\varphi\ \ \ +y'\ \ Q_{\text{в}}\sin\varphi-N_{\text{в}}\cos\varphi+\theta\ \ N\sin\varphi+Q\cos\varphi\ \ \ =0.\end{cases} \tag{6}$$

Система (6) является системой уравнений относительно функций u, υ и θ. Функции x, y и φ, а также N, Q, M фиксированы и являются решениями задачи (1) – (3).

Уравнения (6) являются точными уравнениями устойчивости упругого физически линейного стержня для плоской задачи. При их выводе не делалось никаких упрощающих предположений о величинах перемещений и углов поворота, а также о характере напряженно-деформированного состояния стержня. Полученные функционал (5) и уравнения (6) записаны в общем виде и применимы для любого вида нагрузки и граничных условий.

Уравнения устойчивости (6) в работе были также получены вторым способом, как уравнения в вариациях уравнений равновесия (1).

3. Получена статическим и динамическим методами точная универсальная формула, позволяющая определить значение критической силы для упругого стержня, сжатого осевой «мертвой» силой, с учетом жесткостей на растяжение – сжатие, сдвиг и изгиб для пяти основных типов граничных условий.

Функционал устойчивости (5) для классической задачи Эйлера – физически линейного упругого стержня, сжатого «мертвой» осевой силой T имеет следующий вид:

$$\Phi\;\upsilon,\theta\; = \frac{1}{2}\int_0^L\left[k_2\left(\upsilon' - \left(1 - \frac{T}{k_1}\right)\theta\right)^2 + k_3\theta'^2 + T\theta\left(\left(1 - \frac{T}{k_1}\right)\theta - 2\upsilon'\right)\right]ds. \qquad (7)$$

Уравнения устойчивости, вытекающие из функционала (7), имеют вид:

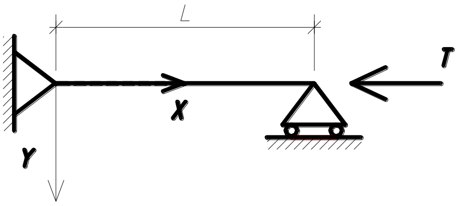
$$\begin{cases} k_2\left(\upsilon' - \left(1 - \dfrac{T}{k_1}\right)\theta\right)' - T\theta' = 0; \\ k_3\theta'' + k_2\left(\upsilon' - \left(1 - \dfrac{T}{k_1}\right)\theta\right)\left(1 + T\left(\dfrac{1}{k_2} - \dfrac{1}{k_1}\right)\right) = 0. \end{cases} \qquad (8)$$

Для пяти задач устойчивости стержня с разными граничными условиями (рисунок 1-5) было получено точное решение уравнений устойчивости (8) – значение критической силы (9):

$$T_{кр} = \frac{\sqrt{1 + 4T_э\left(\dfrac{1}{k_2} - \dfrac{1}{k_1}\right)} - 1}{2\left(\dfrac{1}{k_2} - \dfrac{1}{k_1}\right)}, \qquad (9)$$

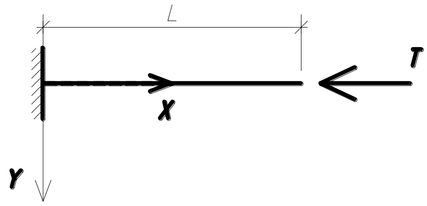
При этом формулы для определения критической силы отличаются лишь значением силы Эйлера $T_э = \dfrac{\pi^2 k_3}{\mu L^{\;2}}$ (μ – коэффициент, зависящий от условий закрепления стержня), изменяющимся в зависимости от типа граничных условий. Таким образом, полученная формула для определения значения критической силы является универсальным решением задачи устойчивости стержня, учитывающим жесткости на растяжение – сжатие, сдвиг и изгиб. Полученная формула является справедливой в пределах упругих деформаций, когда напряжения не превосходят предела пропорциональности $\sigma_{пц}$, то есть когда гибкость стержня $\lambda_{ст} = \frac{\mu L}{i}$ больше или равна предельной гибкости $\lambda_{пред} = \pi\sqrt{\frac{E}{\sigma_{пц}}}$, где E – модуль Юнга, i – радиус инерции сечения стержня.

Формула (9) в работе получена двумя методами: статическим и динамическим. Расчетные схемы стержней, а также соответствующая им сила Эйлера приведены на рисунках 1-5.



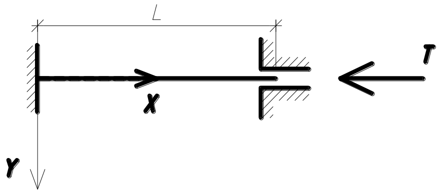
$$T_э = \frac{\pi^2 k_з}{L^2}$$

Рисунок 1 – Расчетная схема стержня



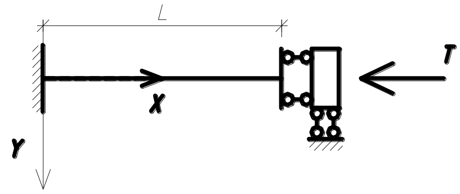
$$T_э = \frac{\pi^2 k_з}{4L^2}$$

Рисунок 2 – Расчетная схема стержня



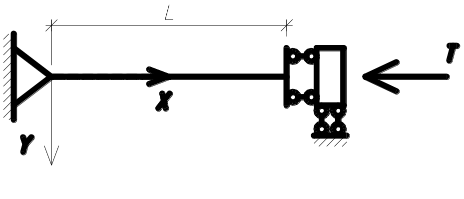
$$T_э = \frac{4\pi^2 k_з}{L^2}$$

Рисунок 3 – Расчетная схема стержня



$$T_э = \frac{\pi^2 k_з}{L^2}$$

Рисунок 4 – Расчетная схема стержня



$$T_э = \frac{\pi^2 k_з}{4L^2}$$

Рисунок 5 – Расчетная схема стержня

В работе показано, что для теории стержней Бернулли – Эйлера, в которой не учитывается влияние деформации сдвига на напряженно – деформированное состояние стержня, а также принимается гипотеза о недеформируемости стержня в докритическом состоянии $\left(k_1 \to \infty \quad \Rightarrow \dfrac{1}{k_1} = 0, \quad k_2 \to \infty \quad \Rightarrow \dfrac{1}{k_2} = 0\right)$, функционал устойчивости (7), уравнения устойчивости (8) и формула для критической силы (9) принимают вид классических функционала устойчивости, уравнений устойчивости и силы Эйлера. В случае, если принимается гипотеза о недеформируемости стержня в докритическом состоянии $\left(\dfrac{1}{k_1} = 0\right)$, а жесткость стержня на сдвиг учитывается $\left(\dfrac{1}{k_2} \neq 0\right)$, из полученных результатов (7), (8) и (9) вытекает решение для балки Тимошенко. Также полученные результаты позволяют исследовать устойчивость балки Бернулли – Эйлера с учетом продольной податливости, то есть $\left(\dfrac{1}{k_2} = 0, \quad \dfrac{1}{k_1} \neq 0\right)$.Результаты исследований для стоек, выполненных из колонных двутавров, в соответствии с ГОСТ 26020-83, показаны на рисунке 6.

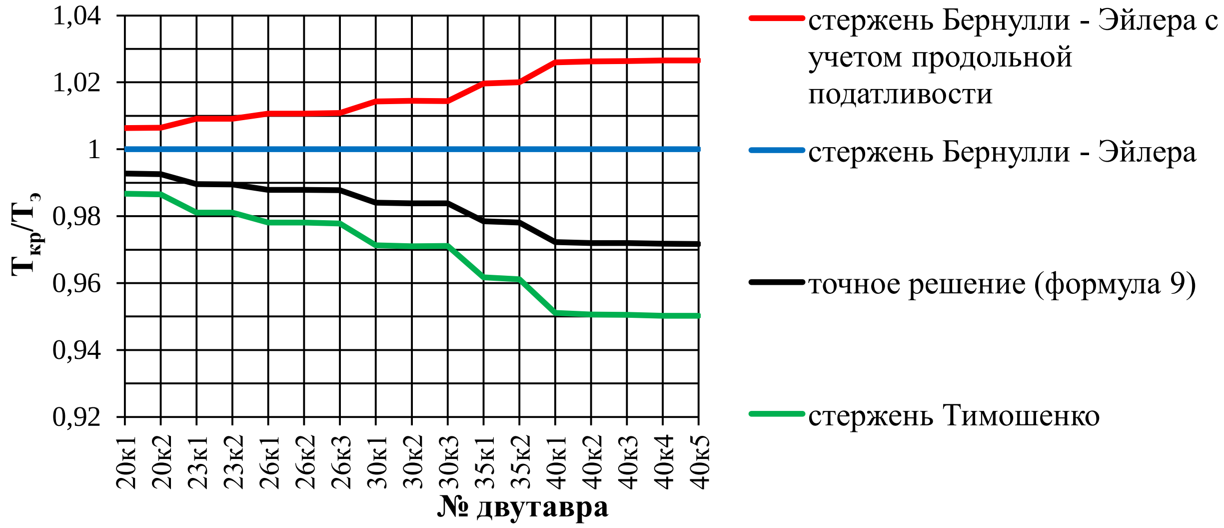


Рисунок 6 – Влияние жесткостей стержня на растяжение – сжатие и сдвиг на значение критической силы

Проанализировав приведенные графики, представленные на рисунке 6, можно сделать вывод, что значение критической силы, полученное из формулы Эйлера больше, чем значение, полученное из точной формулы (9). Таким образом, можно прийти к выводу, что применение формулы Эйлера приводит к риску потери устойчивости стержнем еще до достижения критической силы, вычисленной по этой формуле. Формула, позволяющая определить значение критической силы для стержня Тимошенко, наоборот приводит к заниженному значению критической силы. Как видно на графике, формула для определения критической силы для стержня Бернулли – Эйлера с учетом продольной податливости приводит к существенно завышенному значению критической силы. Следовательно, при анализе устойчивости стержня недопустимо учитывать жесткость на растяжение – сжатие, не учитывая жесткость на сдвиг.

4. Получено асимптотическое решение задачи устойчивости стержня, сжатого осевой силой, с заделкой на одном конце и шарнирной опорой на другом (рисунок 7).

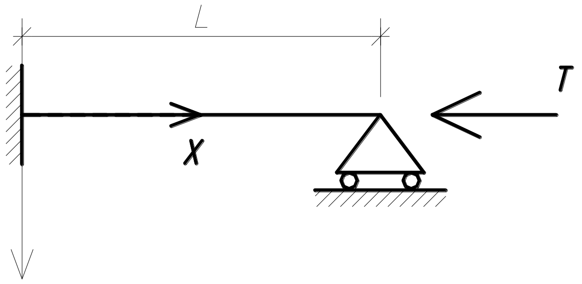


Рисунок 7 - Расчетная схема стержня

В работе показано, что для рассматриваемой задачи аналитическое решение не может быть получено, а критическая сила может быть определена численно, как наименьший положительный корень ($T=T_{кр}$) трансцендентного уравнения:

$$\left(\frac{T}{k_2}-B\right)L\cos\lambda L+\frac{B}{\lambda}\sin\lambda L=0, \qquad (10)$$

где использованы следующие обозначения:

$$B=1+T\left(\frac{1}{k_2}-\frac{1}{k_1}\right), \qquad \lambda^2=\frac{TB}{k_3}.$$

В работе получено асимптотическое решение уравнения (10). С этой целью уравнение (10) приведено к безразмерному виду:

$$\mathrm{tg}\left(b\sqrt{1+b^2\xi_1-b^2\xi_2}\right)=\frac{b\ \ 1-b^2\xi_2}{\sqrt{1+b^2\xi_1-b^2\xi_2}}, \qquad (11)$$

где $b=\sqrt{\frac{TL^2}{k_3}}$; $\xi_1=\frac{k_3}{k_2L^2}$; $\xi_2=\frac{k_3}{k_1L^2}$, ξ_1 и ξ_2 – безразмерные малые параметры.

Неизвестное b ищется в виде асимптотического разложения по малым параметрам ξ_1 и ξ_2:

$$b=b_0+b_1\xi_1+c_1\xi_2+b_2\xi_1^2+c_2\xi_2^2+d\xi_1\xi_2+\ldots, \qquad (12)$$

где $b_0=\sqrt{\frac{T_Э L^2}{k_3}}$; $T_Э=\frac{\pi^2k_3}{0.699L\ \ ^2}$.

В работе получена формула для определения критической силы стержня с точностью до третьего порядка малости. В автореферате приведена формула для критической силы с точностью до первого порядка малости:

$$T_{кр} = T_Э\left[1 - \frac{2k_3}{k_2 L^2} - T_Э\left(\frac{1}{k_2} - \frac{1}{k_1}\right)\right]. \qquad (13)$$

В работе показано, что формула (13), полученная асимптотически, позволяет определить значение критической силы с погрешностью менее одного процента по сравнению со значением, полученным в результате численного решения уравнения (10).

5. Доказана ошибочность классических результатов в задаче устойчивости для балки Тимошенко (функционала устойчивости, уравнений устойчивости и формулы Энгессера).

При анализе устойчивости стержня Тимошенко принимается допущение, заключающееся в том, что изменение геометрических размеров стержня при докритических деформациях считается пренебрежимо малым; в частности, в процессе нагружения длина стержня является неизменной. Таким образом, стержень напряжен, но не деформирован. То есть:

$$N = k_1\varepsilon = -T; \quad \varepsilon = 0; \quad \Rightarrow \quad k_1 \to \infty \quad \Rightarrow \frac{1}{k_1} = 0.$$

Функционал устойчивости для стержня Тимошенко вытекает из функционала устойчивости (7), в котором принимаем $\frac{1}{k_1} = 0$:

$$Ф_{ст}(\upsilon,\theta) = \frac{1}{2}\int_0^L \left[k_3\theta'^2 + k_2(\upsilon' - \theta)^2 + T\theta(\theta - 2\upsilon')\right]ds. \qquad (14)$$

Общепринятый классический вид функционала устойчивости для стержня Тимошенко в технической литературе имеет вид:

$$Ф_{ст}(\upsilon,\theta) = \frac{1}{2}\int_0^L \left[k_3\theta'^2 + k_2(\upsilon' - \theta)^2 - T\upsilon'^2\right]ds. \qquad (15)$$

Функционал (14) совпадет с функционалом (15), если в последнем слагаемом принять гипотезу о равенстве нулю вариации деформации сдвига $\gamma_в = \upsilon' - \theta = 0$, из которой следует равенство $\theta = \upsilon'$, в результате будем иметь: $T\upsilon'(\upsilon' - 2\upsilon') = -T\upsilon'^2$. Однако, во втором слагаемом функционала (15) вариация деформации сдвига не принимается равной нулю, что является непоследовательным. Вышесказанное позволяет нам сделать вывод, что классический функционал устойчивости (15) является ошибочным.

Уравнения устойчивости в задаче устойчивости равновесия стержня Тимошенко, вытекающие из функционала устойчивости (14) имеют следующий вид:

$$\begin{cases} k_2(\upsilon' - \theta)' - T\theta' = 0; \\ k_3\theta'' + k_2(\upsilon' - \theta)\left(1 + \frac{T}{k_2}\right) = 0. \end{cases} \qquad (16)$$

В то же время классические уравнения устойчивости для рассматриваемой задачи, вытекающие из функционала устойчивости (15), имеют вид:

$$\begin{cases} k_2\left(\upsilon' - \theta\right)' - T\upsilon'' = 0; \\ k_3\theta'' + k_2\left(\upsilon' - \theta\right) = 0. \end{cases} \tag{17}$$

Решение системы уравнений (16), представляющее собой точное решение задачи устойчивости для стержня Тимошенко с учетом жесткостей на сдвиг и изгиб, имеет вид:

$$T_{кр} = \frac{k_2}{2}\left(\sqrt{1 + \frac{4T_э}{k_2}} - 1\right). \tag{18}$$

Решение системы уравнений (17) приводит к классической формуле Энгессера:

$$T_{энг} = \frac{T_э}{1 + \frac{T_э}{k_2}}. \tag{19}$$

Поскольку полученные в настоящей работе результаты основаны на строгой математической процедуре, обоснованной в классическом вариационном исчислении, и при их выводе не делалось никаких упрощающих предположений, то сравнение полученных в работе результатов с существующими классическими результатами для стержня Тимошенко позволяет сделать вывод об ошибочности последних.

III ОБЩИЕ ВЫВОДЫ И РЕЗУЛЬТАТЫ ИССЛЕДОВАНИЯ:

1. Полученная в работе точная универсальная формула для критической сжимающей силы, учитывающая деформации растяжения – сжатия, сдвига и изгиба, может быть непосредственно использована для оценки устойчивости стержневых элементов конструкций без использования программных комплексов.
2. В работе показано, что полученное точное значение критической сжимающей силы с учетом всех жесткостей имеет меньшее значение, чем значение критической силы, вычисленное по классической формуле Эйлера. Поскольку обе формулы одинаково просты для ручного расчета, то полученная точная формула может быть рекомендована для использования во всех случаях, в которых ранее использовалась формула Эйлера.
3. Полученные в работе вариационные постановки задач устойчивости могут быть использованы для построения новых алгоритмов численного решения. В частности, в методе конечных элементов на основе полученного в работе функционала устойчивости могут быть построены новые матрицы геометрической жесткости стержневых конечных элементов с учетом деформаций растяжения – сжатия и сдвига.

IV ОСНОВНЫЕ НАУЧНЫЕ ПУБЛИКАЦИИ ПО ТЕМЕ ДИССЕРТАЦИОННОГО ИССЛЕДОВАНИЯ

публикации в периодических научных изданиях, рекомендованных ВАК РФ:

1. **Кушова, Д.А.** Вариационная постановка плоской задачи геометрически нелинейного деформирования и устойчивости упругих стержней [Текст] / Д.А. Кушова, В.В. Лалин, Л.А. Розин // Инженерно – строительный журнал. – 2013. – №1(36). – С. 87 – 96. (0.5625 / 0.1875 п.л.)
2. **Кушова, Д.А.** Геометрически нелинейное деформирование и устойчивость плоских упругих стержней с учетом жесткостей на растяжение-сжатие, сдвиг и изгиб [Текст] / Д.А. Кушова, В.В. Лалин // International Journal for Computational Civil and Structural Engineering. – 2013. Volume 9, Issue 4. – С. 178 – 185. (0.64 / 0.32 п.л.)
3. **Kushova, D.A.** New results in dynamic stability problems of elastic rods [Текст] / D.A. Kushova, V.V. Lalin // Applied Mechanics and Materials. – 2014. – Vol.617. – Pp. 181 – 186. (0.3125 / 0.1565 п.л.)
4. **Кушова, Д.А.** Решение задачи устойчивости сжатого стержня динамическим методом с учетом жесткостей на сдвиг и растяжение [Текст] / Д.А. Кушова, В.В. Лалин // Строительная механика и расчет сооружений. – 2014. – №5 (256). – С. 49 – 54. (0.375 / 0.1875 п.л.)
5. **Кушова, Д.А.** Вариационные постановки нелинейных задач с независимыми вращательными степенями свободы [Текст] / Д.А. Кушова, В.В. Лалин, Е.В. Зданчук, Л.А. Розин, // Инженерно – строительный журнал. – 2015. – №4. – С. 54 – 80. (1.625 / 0.4062 п.л.)
6. **Кузнецова, Д.А.** Влияние продольной и сдвиговой жесткостей на устойчивость балок и колонн [Текст] / Д.А. Кузнецова // Интернет – журнал «Науковедение», 2016 №2 (33) [Электронный ресурс] – М.: Науковедение, 2016. Режим доступа: http://naukovedenie.ru/PDF/96TV21.pdf (доступ свободный). Загл. с экрана. Яз. рус., англ. DOI: 10.15862/96TVN216

публикации в других изданиях:

7. **Кушова, Д.А.** Вариационная постановка и решение плоской задачи устойчивости упругих стержней [Текст] / Д.А. Кушова // Молодые исследователи – регионам: материалы международной научной конференции. В 2-х т. – Вологда: ВоГТУ, 2013. – Т. 1. – 206–208 с. (0.1875 п.л.)
8. **Kushova, D.A.** Varionational formulations of the nonlinear equilibrium and stability problems of elastic rods [Текст] / D.A. Kushova, V.V. Lalin // Proceedings of the International Conference «Innovative Materials, Structures and Technologies». – Riga: RTU Press, 2014. – Pp. 85 – 89. (0.3125 / 0.1565 п.л.)