

Федеральное государственное автономное образовательное учреждение высшего  
образования  
«САНКТ-ПЕТЕРБУРГСКИЙ ПОЛИТЕХНИЧЕСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ ПЕТРА  
ВЕЛИКОГО»

На правах рукописи

КУЗНЕЦОВА Дарья Александровна

**ВАРИАЦИОННЫЕ ПОСТАНОВКИ И АНАЛИТИЧЕСКИЕ РЕШЕНИЯ  
ФИЗИЧЕСКИ И ГЕОМЕТРИЧЕСКИ НЕЛИНЕЙНЫХ ЗАДАЧ СТАТИКИ И  
УСТОЙЧИВОСТИ УПРУГИХ СТЕРЖНЕЙ С УЧЕТОМ ДЕФОРМАЦИЙ  
РАСТЯЖЕНИЯ – СЖАТИЯ И СДВИГА**

Специальность 05.23.17 – Строительная механика

**ДИССЕРТАЦИЯ**

на соискание ученой степени  
кандидата технических наук

Научный руководитель:  
доктор технических наук,  
профессор Лалин В.В.

Санкт-Петербург  
2016 г.

## Содержание

	ВВЕДЕНИЕ .....	6
1	ОСНОВНЫЕ УРАВНЕНИЯ И ВАРИАЦИОННЫЕ ПОСТАНОВКИ ФИЗИЧЕСКИ И ГЕОМЕТРИЧЕСКИ НЕЛИНЕЙНЫХ ЗАДАЧ УПРУГИХ СТЕРЖНЕЙ .....	19
1.1	Основные определения и обозначения в нелинейной теории стержней .....	19
1.2	Основные уравнения нелинейной теории стержней .....	27
1.3	Энергетическая сопряженность векторов усилий и деформаций .....	34
1.4	Вычисление вариаций векторов деформаций .....	39
1.5	Вариационная постановка нелинейных задач статики упругих стержней .....	44
1.6	Основные уравнения и вариационные постановки для плоской задачи нелинейной теории стержней .....	47
1.7	Пример физически нелинейной модели для упругих стержней .....	53
	Выводы по главе 1 .....	61
2	ЗАДАЧИ УСТОЙЧИВОСТИ ПЛОСКИХ УПРУГИХ СТЕРЖНЕЙ С УЧЕТОМ ЖЕСТКОСТЕЙ НА РАСТЯЖЕНИЕ – СЖАТИЕ, СДВИГ И ИЗГИБ. СТАТИЧЕСКИЙ ПОДХОД .....	62
2.1	Вариационная формулировка статической задачи геометрически нелинейного деформирования физически нелинейного упругого стержня .....	62
2.2	Граничные условия для нелинейных задач статики физически нелинейного стержня ....	65
2.3	Вариационная формулировка задачи устойчивости физически нелинейного упругого стержня .....	73
2.4	Граничные условия для задач устойчивости физически нелинейного стержня .....	80
2.5	Уравнения устойчивости физически нелинейного упругого стержня как уравнения равновесия в вариациях .....	89
2.6	Вариационная формулировка статической задачи геометрически нелинейного деформирования физически линейного стержня .....	94
2.7	Вариационная формулировка задачи устойчивости физически линейного упругого стержня .....	96
2.8	Уравнения устойчивости как уравнения равновесия в вариациях .....	102

2.9	Примеры решения задачи устойчивости для физически линейного стержня статическим методом .....	104
2.9.1	Классическая задача Эйлера – шарнирно опертый стержень (рисунок 2.8) .....	104
2.9.2	Консольный стержень (рисунок 2.9) .....	108
2.9.3	Стержень с заделкой с одной стороны и скользящей заделкой, допускающей перемещения вдоль оси стержня, с другой (рисунок 2.10) .....	110
2.9.4	Стержень с заделкой с одной стороны и скользящей заделкой, допускающей перемещения перпендикулярно оси стержня, с другой (рисунок 2.11).....	113
2.9.5	Шарнирно опертый стержень со скользящей заделкой, допускающей перемещения перпендикулярно оси стержня (рисунок 2.12) .....	116
2.9.6	Шарнирно опертый стержень с заделкой (рисунок 2.13).....	119
2.9.7	Консольный стержень под действием момента (рисунок 2.14).....	125
2.10	Пример решения задачи устойчивости для физически нелинейного стержня статическим методом .....	128
	Выводы по главе 2 .....	132
3	ЗАДАЧИ УСТОЙЧИВОСТИ ПЛОСКИХ УПРУГИХ СТЕРЖНЕЙ С УЧЕТОМ ЖЕСТКОСТЕЙ НА РАСТЯЖЕНИЕ – СЖАТИЕ, СДВИГ И ИЗГИБ. ДИНАМИЧЕСКИЙ ПОДХОД .....	134
3.1	Вариационная формулировка динамической задачи геометрически нелинейного деформирования физически линейного стержня .....	134
3.2	Вариационная формулировка динамической задачи устойчивости физически линейного стержня .....	138
3.3	Уравнения устойчивости как уравнения движения в вариациях .....	142
3.4	Примеры решения задачи устойчивости динамическим методом .....	144
	Выводы по главе 3 .....	148
4	УСТОЙЧИВОСТЬ УПРУГИХ СТЕРЖНЕЙ ПО УПРОЩЕННЫМ МОДЕЛЯМ С ТОЧКИ ЗРЕНИЯ ОБЩЕЙ ТЕОРИИ.....	149
4.1	Устойчивость стержня Тимошенко .....	149

4.2	Сравнение полученных результатов с классическими результатами для стержня Тимошенко .....	153
4.3	Оценка влияния жесткости стержня на растяжение – сжатие на значение критической силы .....	156
4.4	Устойчивость стержня Бернулли – Эйлера без учета продольной податливости .....	157
4.5	Устойчивость стержня Бернулли – Эйлера с учетом продольной податливости .....	159
4.6	Оценка влияния жесткости стержня на растяжение – сжатие и сдвиг на значение критической силы .....	164
4.7	Асимптотическое решение задачи устойчивости стержня с заделкой на одном конце и шарнирной опорой на другом .....	165
4.7.1	Случай большой жесткости на растяжение – сжатие ( $1/k_1 = 0$ Стержень Тимошенко) ..	166
4.7.2	Случай большой жесткости на сдвиг ( $1/k_2 = 0$ Стержень Бернулли – Эйлера с учетом продольной податливости) .....	167
4.7.3	Общий случай ( $1/k_1 \neq 0$ ; $1/k_2 \neq 0$ ) .....	169
4.8	Устойчивость трехслойного стержня .....	171
	Выводы по главе 4 .....	174
	 ЗАКЛЮЧЕНИЕ .....	176
	 СПИСОК ИСПОЛЬЗУЕМОЙ ЛИТЕРАТУРЫ .....	178
	 ПРИЛОЖЕНИЕ А ПРИМЕРЫ РЕШЕНИЯ ЗАДАЧИ УСТОЙЧИВОСТИ ДИНАМИЧЕСКИМ МЕТОДОМ .....	186
	 ПРИЛОЖЕНИЕ Б ОЦЕНКА ВЛИЯНИЯ ЖЕСТКОСТИ СТЕРЖНЯ НА РАСТЯЖЕНИЕ – СЖАТИЕ НА ЗНАЧЕНИЕ КРИТИЧЕСКОЙ СИЛЫ .....	197
	 ПРИЛОЖЕНИЕ В СРАВНЕНИЕ ПОЛУЧЕННЫХ РЕЗУЛЬТАТОВ ДЛЯ СТЕРЖНЯ БЕРНУЛЛИ – ЭЙЛЕРА С УЧЕТОМ ПРОДОЛЬНОЙ ПОДАТЛИВОСТИ С РЕЗУЛЬТАТАМИ, ПОЛУЧЕННЫМИ ПО ТОЧНОЙ ФОРМУЛЕ, УЧИТЫВАЮЩЕЙ ЖЕСТКОСТИ НА РАСТЯЖЕНИЕ – СЖАТИЕ, СДВИГ И ИЗГИБ .....	198
	 ПРИЛОЖЕНИЕ Г ОЦЕНКА ВЛИЯНИЯ ЖЕСТКОСТЕЙ СТЕРЖНЯ НА РАСТЯЖЕНИЕ – СЖАТИЕ И СДВИГ НА ЗНАЧЕНИЕ КРИТИЧЕСКОЙ СИЛЫ .....	199

ПРИЛОЖЕНИЕ Д АСИМПТОТИЧЕСКОЕ РЕШЕНИЕ ЗАДАЧИ УСТОЙЧИВОСТИ СТЕРЖНЯ С ЗАДЕЛКОЙ НА ОДНОМ КОНЦЕ И ШАРНИРНОЙ ОПОРОЙ НА ДРУГОМ (СЛУЧАЙ БОЛЬШОЙ ЖЕСТКОСТИ НА РАСТЯЖЕНИЕ - СЖАТИЕ ( $1/k_1 = 0$ , СТЕРЖЕНЬ ТИМОШЕНКО) .....	200
ПРИЛОЖЕНИЕ Е АСИМПТОТИЧЕСКОЕ РЕШЕНИЕ ЗАДАЧИ УСТОЙЧИВОСТИ СТЕРЖНЯ С ЗАДЕЛКОЙ НА ОДНОМ КОНЦЕ И ШАРНИРНОЙ ОПОРОЙ НА ДРУГОМ (СЛУЧАЙ БОЛЬШОЙ ЖЕСТКОСТИ НА СДВИГ ( $1/k_2 = 0$ , СТЕРЖЕНЬ БЕРНУЛЛИ – ЭЙЛЕРА С УЧЕТОМ ПРОДОЛЬНОЙ ПОДАТЛИВОСТИ) .....	203
ПРИЛОЖЕНИЕ Ж АСИМПТОТИЧЕСКОЕ РЕШЕНИЕ ЗАДАЧИ УСТОЙЧИВОСТИ СТЕРЖНЯ С ЗАДЕЛКОЙ НА ОДНОМ КОНЦЕ И ШАРНИРНОЙ ОПОРОЙ НА ДРУГОМ (ОБЩИЙ СЛУЧАЙ ( $1/k_1 \neq 0$ ; $1/k_2 \neq 0$ ) .....	205

## Введение

**Актуальность темы исследования.** В последнее время в строительстве наблюдается тенденция к уменьшению материалоемкости сооружений. В связи с этим появляется необходимость применения более легких и податливых элементов конструкций. В то же время возрастает вероятность потери устойчивости таких элементов. Таким образом, проверка устойчивости исходной формы равновесия является неотъемлемым шагом при проектировании несущих конструкций.

На сегодняшний день оценка устойчивости производится по приближенным формулам, созданным еще в 18 – 19 веках. Использование общепринятых методов оценки устойчивости стержневых элементов конструкций, сформированных на классической формуле Эйлера, приводит к получению для гибких податливых элементов приближенных значений критических сил, в связи с тем, что формула Эйлера учитывает исключительно жесткость стержня на изгиб. В конце 19 века Энгессером была предложена формула для определения критической силы, в которой кроме жесткости на изгиб учитывалась жесткость стержня на сдвиг [87]. Эти же формулы лежат в основе всех компьютерных программ, с помощью которых в настоящее время производится расчет устойчивости элементов конструкций. До сих пор общепринятого решения задачи устойчивости стержня с учетом всех его жесткостей не существует. То есть в задачах о сжатии стержня продольной силой стержень сжимается, однако его жесткость на растяжение – сжатие не участвует в решении задачи о нахождении критической силы. В настоящей работе получены точные решения задач устойчивости стержневых элементов конструкций, сжимаемых «мертвой» осевой силой, учитывающие кроме жесткости на изгиб, также жесткости на сдвиг и растяжение – сжатие.

Как подчеркивалось в работах [4, 12, 45, 47], при исследовании устойчивости наиболее последовательным способом получения уравнений устойчивости является вариационный способ. Уравнения устойчивости - уравнения Эйлера для второй вариации функционала, соответствующего исходной геометрически нелинейной задаче (необходимо иметь в виду, что вариационная постановка в виде задачи поиска стационарности некоего функционала возможна только для потенциальной нагрузки). Таким образом, для получения уравнений устойчивости необходимо записать функционал, соответствующий исходной нелинейной статической или динамической задаче, вычислить вторую вариацию исходного функционала, получить уравнения устойчивости как уравнения Эйлера для второй вариации функционала. Такой способ исследования устойчивости был разработан в классическом вариационном исчислении на рубеже 19-20 веков. Условием устойчивости является условие положительной определенности второй вариации исходного функционала.

Анализ литературы показал, что на сегодняшний день в задачах устойчивости стержней подобный подход не был использован ни разу. Более того, выяснилось, что в мировой научной литературе не существует вариационной постановки геометрически нелинейных задач для упругих стержней в виде задач поиска точки стационарности некоего функционала, а используются только вариационные постановки в виде принципа возможных перемещений (принципа виртуальной работы).

Безусловно, полное решение задачи устойчивости должно включать также учет пластических свойств материала, из которого выполнен стержень, что будет являться следующим этапом работы, основывающимся на решении задач устойчивости упругих стержней, полученных в данной работе.

### **Степень разработанности.**

Основателем теории устойчивости был Леонард Эйлер, впервые сумевший в 1744 году найти критическую силу для прямолинейного упругого шарнирно опертого стержня, нагруженного вдоль оси сжимающей силой. Формула Эйлера для определения критической силы была получена более 200 лет назад, однако она до сих пор актуальна, хотя долгое время после своего создания она не находила практического применения, поскольку наиболее часто используемыми материалами были дерево и камень, что приводило к необходимости применения массивных конструкций, для которых вопросы устойчивости не имели первостепенного значения.

Вывод формулы Эйлера основан на использовании дифференциального уравнения изогнутой оси упругого стержня. Таким образом, применение данной формулы ограничено случаями линейной зависимости между напряжениями и деформациями. Для элементов конструкций, которые являются недостаточно гибкими, полученная Эйлером формула дает завышенные значения критической силы. Этот факт впервые был установлен английским исследователем И. Ходкинсоном в 1840 году [89]. Неприменимость формулы Эйлера для определения критической силы для коротких стержней и стержней средней длины являлась первоначальной причиной для почти полного отказа от нее.

Бельгийский инженер Э. Ламарль в 1845 году первым установил, что пределом применимости формулы Эйлера является предел упругости [3, 95]. Опытным путем он определил минимальное значение гибкости стержня, при которой формула Эйлера является достоверной.

Впоследствии, теория устойчивости Эйлера была подтверждена опытным путем такими учеными как И. Баушингер, Л. Тетмайер и М. Консидер [3, 70, 109].

В 1887 году немецкий инженер и механик И. Баушингер опубликовал результаты экспериментальных исследований устойчивости сжатых стержней, выполненных из сварочного

железа различного сечения, согласно которым он получил значения сил, вызывающих разрушение стержней, близкие к значениям критических сил, вычисленных по формуле Эйлера в случаях, когда напряжения не достигают предела пропорциональности [70].

В 1890 немецкий ученый Л. Тетмайер в результате экспериментальных исследований устойчивости сжатых стержней, выполненных из литого и сварочного железа различного сечения, подтвердил достоверность формулы Эйлера для определения критической силы, для случая, когда отношение длины стержня к наименьшему радиусу инерции, а напряжения меньше предела пропорциональности. Для случаев, когда напряжения выше, чем предел пропорциональности, Тетмайер вывел линейную зависимость между критическими напряжениями и гибкостью стержня [109].

Аналогичный результат был получен Ф. С. Ясинским. Ясинский подтвердил справедливость формулы Эйлера, а также вычислил величину критической силы для различных типов граничных условий, получив универсальную формулу, в которой вид граничного условия входит в качестве коэффициента [66]. ,

Немецкий механик и инженер Ф. Энгессер был первым автором, который получил формулу, учитывающую влияние сдвига на критическую силу (формула Энгессера) [77, 78]. Полученное решение использовалось при проектировании спиральных пружин, упругих опор, сэндвич панелей, составных и раскосных решетчатых колонн [71, 73, 75, 84, 93, 106, 108, 110]. Однако, полученная формула, прогнозирующая потерю устойчивости для любой гибкости, не подтверждалась экспериментами на очень коротких сильно сжатых спиральных пружинках, которые показывали, что такие пружинки устойчивость не теряли.

Позднее J. Haringx [86 - 88] разработал альтернативную формулу для определения критической силы, которая подтверждалась экспериментальными данными, согласно которым спиральные пружины с гибкостью менее 4.9 не теряют устойчивость. Энгессер и Haringx применяли разные подходы к определению критической силы. Они использовали разную ориентацию векторов внутренних усилий: перерезывающей силы и продольной силы. Энгессер считал, что продольная сила направлена по касательной к оси стержня, в то время как перерезывающая сила направлена по перпендикуляру к оси. Haringx, в свою очередь, предполагал, что продольная сила направлена по нормали к плоскости поперечного сечения стержня, а перерезывающая сила направлена перпендикулярно и лежит в плоскости поперечного сечения. Эти два подхода приводят к различным формулам для определения критической силы. Такие ученые, как Z. Bazant и A. Veghini, К. Симо [106 - 108], Г. Циглер, J. Nänni поддерживали подход, предложенный Энгессером. М. Attard и G. Hunt [68], Е. Рейсснер в своих работах придерживаются подхода, используемого Haringx.



При исследовании устойчивости сэндвич колонн с мягким заполнителем, Bazant и Beghini [72, 74] обнаружили, что результаты, получаемые по формуле Энгессера, соответствуют экспериментальным результатам Fleck и Sridhar [81]. Они пришли к выводу, что формула для критической силы, полученная Энгессером, приемлема при анализе устойчивости сэндвич колонн с мягким заполнителем. Nänni на основе трехмерной теории упругости установил, что для стержней предпочтительным является подход, используемый Engesser [100]. Циглер в своей работе [114] приводит аргументы за и против подхода, используемого Энгессером. На основании более фундаментального одномерного подхода он подтверждает результаты, полученные в работах Nänni, а, следовательно, и Энгессера.

Рейсснер в своей работе [103], поддерживает подход Haringx к определению внутренних усилий. Подход Haringx также вошел в общеизвестную работу Тимошенко как так называемый модифицированный метод [110].

До сих пор в отечественной и зарубежной научной литературе нет однозначного мнения, чей подход является правильным и обоснованным.

Значительный вклад в развитие теории устойчивости внесли работы С. П. Тимошенко, А. Н. Динника, Е.Л. Николаи, В.В. Болотина, Г. Циглера, Ф. Шенли, А.С. Вольмира [12], А.Р. Ржаницына [48], В.В. Новожилова [45], Н.А. Алфутова [1], А.М. Масленникова [28, 40], В.В. Карпова [28, 31].

А. Н. Динник занимался исследованием устойчивости стоек переменного сечения, а также определением критической длины для стержня, нагруженного собственным весом, учитывая различные варианты граничных условий, рассматривал влияние равномерного вращения стержня на значение крутящего момента, вызывающего потерю устойчивости, то есть критического крутящего момента [20].

Большое значение в развитие теории устойчивости внесли работы С. П. Тимошенко, который составил уравнение изогнутой оси балки, учитывая перерезывающую силу, и установил, что учет данной силы при определении критической силы для сплошных стержней вызывает незначительные изменения в значении этой силы. Таким образом, он установил, что перерезывающей силой в практических расчетах устойчивости стержней сплошного сечения можно пренебречь [55 - 59].

Задачами устойчивости неконсервативных систем, в частности задачей устойчивости стержня, под действием следящей нагрузки, занимались многие ученые. Однако Е.Л. Николаи впервые установил необходимость использования динамического метода вместо статического при исследовании устойчивости неконсервативных систем [42 - 44].

Значительный вклад в развитие теории устойчивости неконсервативных систем внесли работы академика В.В. Болотина [4 - 9].

Ф. Шенли исследовал устойчивость шарнирно опертого стержня под воздействием непрерывно возрастающей нагрузки [105].

А.Р. Ржаницын занимался исследованием устойчивости составных стержней, а также предложил графический способ определения критической нагрузки для случая продольного изгиба [48].

Н.К.Снитко исследовал критическую силы, вызывающую потерю устойчивости сжатых и сжато – изогнутых стержней, используя метод начальных параметров [51-54].

Особенно следует отметить трехтомную работу А.В. Перельмутера и В.И. Сливкера «Устойчивость равновесия конструкций и родственные проблемы» [47]. В данной работе дана систематизация вариационных постановок задач устойчивости. Также впервые в истории науки корректно сформулированы задачи теории устойчивости при действии на систему потенциальной моментной нагрузки.

Расчет стержней с учетом их физической нелинейности рассматривался в работах В.В. Елисеева, В.В. Лалина, Д.П. Голоскокова, Ю.Л. Рутмана, В.В. Галишниковой.

В работах В.В. Галишниковой разработан численный метод, позволяющий исследовать закритическое поведение стержня, даже на ниспадающей ветви кривой нагружение – перемещение.

Существенный вклад в исследование устойчивости стержней с упругопластическими свойствами внесли работы В.В.Улитина [60 - 64] и И.Д. Грудева [19]. В работах В.В.Улитина для решения задач устойчивости применяется итерационный алгоритм корректировки модулей. Суть данного метода заключается в последовательном решении линейно упругих задач, с последующей корректировкой модуля упругости на каждом этапе итерации в зависимости от напряжения.

Также следует отметить, что формула для критической силы с учетом всех жесткостей для консольного стержня, сжатого осевой силой, впервые была получена в работах В.В. Елисеева [21]. Однако, способ, которым данная формула была получена, отличается от способа вывода формулы для определения критической силы, рассмотренного в данной работе.

Достаточно много работ посвящено исследованию устойчивости трехслойных стержней. В большинстве работ наружный слой моделировался как стержень Бернулли – Эйлера, отличие заключалось в различных способах моделирования заполнителя [67, 82, 97, 101, 102].

L. Leotoing [97], Y. Frostig и M. Baruch [82], рассматривали заполнитель в виде линейной упругой основы и использовали для описания поля смещений заполнителя теории более высокого порядка. В работах Н. Allena [67], а также К. Niu и R. Talreja [101] заполнитель рассматривался как упругий изотропный материал. Они предложили универсальное выражение для силы, вызывающей потерю устойчивости, выраженное через случайный параметр, когда

стержень закреплен на обоих концах. Всесторонний обзор проведенных исследований потери устойчивости сэндвич колонн вплоть до 1998 года содержится в обзоре R. Ley [80].

N. Fleck и L. Sridhar [82] испытывали сэндвич колонны, имеющие различные геометрические характеристики и выполненные из различных комбинаций материалов заполнителя и наружных слоев. Они наблюдали различные виды разрушений, в зависимости от свойств материалов и основных геометрических характеристик колонн.

В работах В. Hadi [85] приведено сравнение значений критической силы для стержня, внешние слои которого выполнены из алюминиевого сплава, а в качестве внутреннего слоя использован ячеистый заполнитель, полученных с использованием метода конечных элементов, с экспериментальными данными, полученными в работах J. Webber, S. Kyriakides и C. Lee [111].

В работах П. А. Жилина [23, 24] получены формулы для определения эквивалентной жесткости тонких трехслойных оболочек, которые, как будет показано далее, могут быть использованы при определении эквивалентных жесткостей трехслойного стержня.

**Объектом** исследования является геометрически и физически нелинейный упругий стержень.

**Предметом** исследования является напряженно-деформированное состояние и устойчивость физически и геометрически нелинейных упругих стержней при статическом нагружении.

#### **Цель и задачи исследования.**

Цель данного исследования:

- разработка вариационных постановок задач деформирования физически и геометрически нелинейных упругих стержней с учетом жесткостей на растяжение – сжатие, сдвиг и изгиб в виде задач поиска точки стационарности функционалов типа Лагранжа и Гамильтона;
- разработка вариационных и дифференциальных постановок задач устойчивости физически и геометрически нелинейных упругих стержней с учетом жесткостей на растяжение – сжатие, сдвиг и изгиб;
- получение аналитических решений задач устойчивости упругого стержня, сжатого осевой «мертвой» силой, с произвольными граничными условиями с учетом всех жесткостей;
- сравнение полученных точных решений с известными приближенными решениями, учитывающими либо только сдвиговую и изгибную жесткости (стержень Тимошенко), либо только изгибную жесткость (стержень Бернулли – Эйлера).

Задачи данного исследования:

- получить выражения для функционала типа Лагранжа вариационной постановки пространственных статических задач геометрически и физически нелинейных стержней;
- получить функционал и уравнения устойчивости равновесия;

- решить конкретные задачи устойчивости равновесия с учетом жесткостей на изгиб, сдвиг и растяжение – сжатие статическим методом;
- получить выражения для функционала типа Гамильтона вариационной постановки плоских динамических задач геометрически нелинейных стержней;
- получить уравнения устойчивости динамическим методом;
- решить конкретные задачи устойчивости с учетом жесткостей на изгиб, сдвиг и растяжение – сжатие динамическим методом;
- оценить погрешность результатов расчета, полученных по существующим приближенным формулам, с результатами, учитывающими жесткости стержня на растяжение – сжатие, сдвиг и изгиб.

**Научная новизна исследования** заключается в следующем:

1. Получена вариационная формулировка пространственных и плоских статических и динамических задач физически и геометрически нелинейных упругих стержней в виде задач поиска точки стационарности функционалов типа Лагранжа и Гамильтона.
2. Получены функционал устойчивости, уравнения устойчивости, а также динамический функционал и уравнения динамической устойчивости для плоской задачи для физически нелинейных и линейных упругих стержней с учетом жесткостей на растяжение – сжатие, сдвиг и изгиб. Уравнения устойчивости равновесия для плоских задач получены двумя способами: как уравнения Эйлера для функционала устойчивости и как уравнения в вариациях уравнений равновесия. Аналогичным образом двумя способами получены уравнения динамической устойчивости: как уравнения Эйлера для динамического функционала устойчивости и как уравнения в вариациях уравнений движения.
3. Получена статическим и динамическим методами точная универсальная формула, позволяющая определить значение критической силы для упругого стержня, сжатого осевой «мертвой» силой, с учетом жесткостей на растяжение – сжатие, сдвиг и изгиб для пяти основных типов граничных условий.
4. Получено асимптотическое решение для задачи устойчивости стержня, сжатого осевой силой, с заделкой на одном конце и шарнирной опорой на другом.
5. Доказана ошибочность классических результатов в задаче устойчивости для балки Тимошенко (функционала устойчивости, уравнений устойчивости и формулы Энгессера).

**Теоретическая и практическая значимость работы.** В работе получены новые вариационные постановки задач устойчивости физически нелинейных упругих однородных стержней с учетом всех жесткостей, а также аналитическое решение задач устойчивости, доведенное до простых формул. Полученные формулы могут быть непосредственно использованы:

- для оценки устойчивости элементов стержневых конструкций;
- при проектировании новых и реконструкции существующих опорных элементов таких сооружений как высотные многоэтажные здания, морские нефтедобывающие платформы, мачты и вытяжные башни
- при разработке новых и модернизации существующих компьютерных программ для решения нелинейных задач статики и устойчивости строительных конструкций.

Практическая ценность данной работы заключается в том, что полученные результаты позволяют впервые получить значение критической силы, вызывающей потерю устойчивости стержневых элементов конструкций, с учетом всех жесткостей, при этом принимая во внимание геометрическую нелинейность элементов. Полученные результаты являются точными (в рамках одномерных моделей), при их выводе не делается никаких упрощающих предположений о величинах перемещений и поворотов, а также о характере напряженно – деформированного состояния.

Отличительной особенностью результатов данной работы является их доступность. Полученные решения, представленные в виде простых формул, могут быть использованы непосредственно при проектировании и анализе устойчивости стержневых конструкций и позволяют достаточно легко оценить устойчивость стержневых элементов конструкции любому проектировщику, инженеру, строителю без использования сложных программных комплексов. Кроме этого, результаты, полученные в диссертации, могут быть применимы как для физически линейных материалов (например, металлических конструкций), так и для физически нелинейных материалов (например, железобетонных конструкций), то есть для конструкций, выполненных из любого линейно или нелинейно упругого материала.

Полученные точные решения позволяют вскрыть резервы несущей способности сжатых элементов и, тем самым, проектировать более экономичные конструкции.

#### **Методология и методы исследования.**

В качестве расчетной модели используется та или иная теория стержней. В данной работе рассматривается общая геометрически нелинейная теория нелинейно упругих стержней Коссера – Тимошенко, в которой учитываются деформации изгиба, сдвига и растяжения – сжатия, а на величины перемещений и поворотов, а также на характер напряженно – деформированного состояния не накладывается никаких ограничений.

В теории стержней существует два основных подхода. Первый основывается на общих трехмерных уравнениях теории упругости. В этом подходе используются гипотезы о распределении перемещений и напряжений по сечению стержня, после чего производится переход к одномерным теориям [13, 47]. Во втором, так называемом прямом подходе, используемом в данной работе, стержень изначально моделируется одномерной кривой,

обладающей распределенными инерционными и жесткостными характеристиками [17, 21, 26]. Каждая геометрическая точка такой кривой обладает шестью степенями свободы: тремя трансляционными и тремя вращательными. Такая теория называется теорией Коссера – Тимошенко, в зарубежной научной литературе эта теория носит название «геометрически точная теория» или «geometrically exact theory» [10, 13, 17, 21, 25, 36, 69, 76, 79, 83, 90 - 92, 96, 99, 104, 105, 107, 112, 115].

Особенно ощутимо учет всех жесткостей сказывается на результатах расчета сильно нагруженных опорных элементов таких сооружений как высотные многоэтажные здания, морские нефтедобывающие платформы, мачты и вытяжные башни. Как известно, в качестве расчетной теории таких элементов может быть использована линейная теория идеально упругих стержней. Однако практические исследования в процессе эксплуатации конструкции указывают на необходимость учета геометрической нелинейности, поскольку большие нагрузки приводят к значительным изменениям в геометрии стержня. Таким образом, необходимо учитывать напряженно – деформированное состояние в уравнениях устойчивости. Из вышесказанного следует, что необходимо использовать геометрически нелинейную теорию стержней.

Несмотря на наличие большого количества отечественных и зарубежных публикаций по расчету упругих стержней с учетом геометрической нелинейности, остается много неясных и нерешенных вопросов.

В работе будет показано, что использование энергетически сопряженных векторов усилий и деформаций позволяет получить вариационную постановку задачи, которая может быть сформулирована как задача поиска точки стационарности функционала типа Лагранжа (для статического метода) или функционала типа Гамильтона (для динамического метода). Согласно классическому вариационному исчислению, для задачи, допускающей вариационную постановку можно получить функционал устойчивости, вычислив вторую вариацию функционала типа Лагранжа (типа Гамильтона). Уравнения устойчивости являются уравнениями Эйлера для второй вариации исходного функционала (типа Лагранжа или Гамильтона). Следует отметить, что данный математический строго обоснованный подход для задачи устойчивости до сих пор не использовался, поскольку на сегодняшний день применяется традиционный подход в вариационной постановке задачи нелинейного деформирования стержней, заключающийся в использовании принципа возможных перемещений, а уравнения устойчивости выводятся с использованием приближенных методов.

Из приведенных точных уравнений устойчивости и функционала устойчивости можно получить приближенные функционал и уравнения устойчивости для упрощенных моделей с

точки зрения общей теории (теории стержней Бернулли – Эйлера и теории стержней Тимошенко).

Общеизвестно, что существуют два основных метода исследования устойчивости системы: статический и динамический. Динамический метод заключается в исследовании возмущенного движения системы, то есть движения, происходящего в результате некоего возмущения, выводящего систему из состояния равновесия. Проанализировав это движение, можно судить об устойчивости или неустойчивости системы. В том случае, если возмущенное движение представляет собой колебательное движение с возрастающей амплитудой, равновесие системы является неустойчивым. Аналогичный вывод можно сделать при неколебательном движении, уводящем систему из состояния равновесия. Таким образом, «при наличии устойчивости всегда можно подобрать такие начальные возмущения, чтобы при последующем движении системы перемещения ее точек не вышли за некоторые, наперед заданные границы. Если речь идет о консервативной системе, на которую действуют консервативные заданные силы, а работа реакций связей и сил сопротивления равна нулю, то такая система будет совершать собственные колебания около положения равновесия» [12].

Существенным преимуществом динамического метода является его пригодность для исследования устойчивости равновесия системы под действием любой нагрузки, как потенциальной, так и непотенциальной.

Принято считать, что статический и динамический методы исследования устойчивости систем с потенциальными нагрузками приводят к одинаковым результатам [12, 46]. Таким образом, решение задач устойчивости равновесия упругого стержня под действием потенциальной нагрузки динамическим методом является проверкой решения этой же задачи статическим методом.

#### **Основные научные положения, выносимые на защиту:**

- вариационная формулировка пространственных и плоских статических и динамических задач физически и геометрически нелинейных упругих стержней;
- функционал и уравнения устойчивости для плоской задачи для физически нелинейных и линейных упругих стержней с учетом жесткостей на растяжение – сжатие, сдвиг и изгиб;
- точная универсальная формула, позволяющая определить значение критической силы для упругого стержня, сжатого осевой «мертвой» силой, с учетом жесткостей на растяжение – сжатие, сдвиг и изгиб для пяти различных типов граничных условий;
- асимптотическое решение задачи устойчивости стержня, сжатого осевой силой, с заделкой на одном конце и шарнирной опорой на другом;
- доказательство ошибочности классических результатов в задаче устойчивости для балки Тимошенко (функционала устойчивости, уравнений устойчивости и формулы Энгессера).

**Достоверность** полученных результатов обосновывается использованием классического математического аппарата и вариационного исчисления. В ходе исследования не строилось никаких упрощающих предположений о характере напряженно – деформированного состояния, а также не накладывалось ограничений на величины углов поворота и перемещений. Уравнения устойчивости и динамические уравнения устойчивости были получены двумя способами: как уравнения Эйлера функционала устойчивости и динамического функционала устойчивости, и как уравнения в вариациях уравнений равновесия и движения, соответственно. В данной работе показано, что полученные статическим методом формулы для определения критической силы совпадают с формулами, полученными динамическим методом, что доказывает, что выведенные формулы для критической силы являются верными. Также в работе показано, что в случае применения упрощенной модели стержня – стержня Бернулли – Эйлера, учитывающей только жесткость на изгиб, из полученных точных функционала устойчивости, уравнений устойчивости и формулы для определения критической силы, учитывающих все жесткости, вытекают общепринятые классические функционал устойчивости, уравнения устойчивости и формула Эйлера, как частный случай общей теории.

**Апробация работы.** Основные положения и результаты работы докладывались на 14 конференциях и научно – технических семинарах:

- XVIII Зимняя школа по механике сплошных сред, Пермь, 18-22 февраля 2013г.
- Юбилейная X Всероссийская научно – практическая и учебно – методическая конференция «Фундаментальные науки в современном строительстве», Москва, 29 марта 2013.
- Международная научная конференция «Молодые исследователи – регионам», Вологда, 10-19 апреля 2013.
- XXV International Conference “Mathematical and Computer Simulation in Mechanics of Solids and Structures. Methods of Boundary and Finite Elements”, Saint – Petersburg, 23-26 September 2013.
- International Conference “Innovative Materials, Structures and technologies”, Riga, 08 November 2013.
- XLII Scientific and practical conference “Week of Science in SPbSPU” for students, graduate students and young scientists, Saint-Petersburg, 02-06 December 2013.
- International Scientific Conference and Workshop “METNET – SPb-2014”, Saint – Petersburg, 17-19 February 2014.



- Третья международная научная конференция «Задачи и методы компьютерного моделирования конструкций и сооружений» («Золотовские чтения»), Москва, 15 апреля 2014.
- IX международная конференция «Проблемы прочности материалов и сооружений на транспорте», Санкт – Петербург, 27-28 мая 2014.
- 6th International Scientific Conference on Dynamics of Civil Engineering and Transport Structures and Wind Engineering DYN-WIND'2014, Slovak Republic, the village Donovaly, 25-29 may, 2014.
- V международный симпозиум «Актуальные проблемы компьютерного моделирования конструкций и сооружений», Иркутск, 01-06 июля, 2014.
- Научно - техническая конференция по механике корабля, посвященной памяти профессора И.Г. Бубнова и 110-летию со дня образования кафедры строительной механики корабля «Бубновские чтения», Санкт – Петербург, 23-24 декабря, 2014.
- International Scientific Conference SPbWOSCE, Saint-Petersburg, 03-04 December 2014.
- International Scientific Conference – Urban Civil Engineering and Municipal Facilities, Saint-Petersburg, 18-20 March 2015.
- Семинар кафедры механики Санкт – Петербургского государственного архитектурно – строительного университета (Санкт – Петербург, 15 декабря 2015).

**Публикации.** По результатам исследования опубликовано 8 печатных работ общим объемом 5.015 п.л., лично автору принадлежат 2.6017, из которых публикаций в журналах по перечню ВАК – 6.

**Структура и объем работы.** Диссертация состоит из введения, четырех глав, заключения, списка литературы, включающего в себя 115 источников, в том числе 49 – на иностранном языке, и семи приложений. Объем диссертации составляет 177 страниц печатного текста без приложений. Работа содержит 33 рисунка и 8 таблиц.

Во введении обоснована актуальность работы, сформулированы цели и задачи исследования, приведены основные методы исследования, обзор литературных источников, а также аргументирована теоретическая и практическая значимость диссертации.

В первой главе приведены основные понятия, определения и уравнения задачи нелинейного деформирования стержней. Получено выражение для функционала типа Лагранжа вариационной постановки пространственных статических задач геометрически и физически нелинейных стержней. Приведены основные уравнения и вариационные постановки для плоской задачи нелинейной теории стержней.

*Во второй главе* рассмотрена геометрически нелинейная плоская задача статики линейно и нелинейно упругих стержней. Приведены постановки задач в виде системы дифференциальных уравнений и вариационные постановки в виде задачи о поиске точки стационарности функционала типа Лагранжа. Получено выражение для второй вариации функционала Лагранжа, из которой получены точные уравнения задачи устойчивости для любого типа физической нелинейности стержня. В задаче об устойчивости стержня, сжатого осевой силой, получено универсальное решение с учетом жесткостей на изгиб, сдвиг и растяжение – сжатие, дающее значение критической силы для основных типов граничных условий.

*В третьей главе* рассмотрена геометрически нелинейная плоская задача динамики линейно упругих стержней. Приведена постановка задачи в виде системы дифференциальных уравнений и вариационная постановка в виде задачи о поиске точки стационарности функционала типа Гамильтона. Получено выражение для второй вариации функционала Гамильтона, из которой получены точные уравнения задачи устойчивости. В задаче об устойчивости стержня, сжатого осевой силой, динамическим методом получено универсальное решение с учетом жесткостей на изгиб, сдвиг и растяжение – сжатие, дающее значение критической силы для основных типов граничных условий. Показано, что формулы для определения критической силы для пяти основных типов граничных условий, полученные динамическим методом, совпадают с формулами, полученными ранее в главе 2 с использованием статического метода.

*В четвертой главе* исследована устойчивость упругих стержней, модель которых является упрощенной: теория стержней Тимошенко, в которой учитываются жесткости стержня на сдвиг и изгиб; теория стержней Бернулли – Эйлера, учитывающая только жесткость стержня на изгиб. Для этих моделей, как частных случаев общей теории, получены функционалы устойчивости, уравнения устойчивости и формулы для критической силы. Произведена оценка влияния жесткостей на растяжение – сжатие и сдвиг на значение критической силы. В задаче об устойчивости трехслойного стержня показана возможность использования универсального решения с учетом жесткостей на изгиб, сдвиг и растяжение – сжатие, в котором трехслойный стержень моделируется как однородный с эквивалентными жесткостями.

*В заключении* приведены основные результаты, полученные в работе.

# 1 ОСНОВНЫЕ УРАВНЕНИЯ И ВАРИАЦИОННЫЕ ПОСТАНОВКИ ФИЗИЧЕСКИ И ГЕОМЕТРИЧЕСКИ НЕЛИНЕЙНЫХ ЗАДАЧ УПРУГИХ СТЕРЖНЕЙ

## 1.1 Основные определения и обозначения в нелинейной теории стержней

«При формулировке теории стержней в прямом подходе стержень моделируется пространственной кривой, которая обладает распределенными инерциальными и жесткостными характеристиками, т.н. «оснащенная кривая» [36]. Каждая геометрическая точка такой кривой обладает шестью степенями свободы: тремя трансляционными и тремя вращательными. Такая теория называется теорией Коссера – Тимошенко или «geometrically exact theory» [10, 13, 17, 21, 25, 36, 69, 76, 79, 83, 90 - 92, 96, 99, 104, 105, 107, 112, 115].

В качестве отсчетной конфигурации (ОК) принимается положение кривой в начальный момент времени  $t = t_0$ . В ОК положение каждой точки стержня задается координатой  $s$ ,  $0 \leq s \leq L$ , где  $s$  – длина дуги, а  $L$  – исходная длина стержня. В качестве актуальной конфигурации (АК) принимается положение кривой в текущий момент времени  $t$ .

В данной работе будет использоваться материальное (Лагранжево) описание, в котором все неизвестные характеристики, описывающие напряженно – деформированное состояние стержня, будут выражены через функции координат  $s$  и времени  $t$ .

В теории Коссера - Тимошенко с каждой точкой стержня связан репер (правая ортонормированная тройка векторов). Векторы репера в начальный момент времени в ОК обозначены  $\mathbf{D}_i$  ( $|\mathbf{D}_1| = 1$ ;  $\mathbf{D}_1 = \text{const}$ ). В каждой точке векторы репера могут быть направлены по-своему, но для рассматриваемого в строительной механике первоначально прямолинейного без естественного закручивания стержня будем считать, что во всех сечениях вектор  $\mathbf{D}_1$  направлен по оси стержня, векторы  $\mathbf{D}_2$ ,  $\mathbf{D}_3$  – по главным центральным осям инерции сечения, как показано на рисунке 1.1.

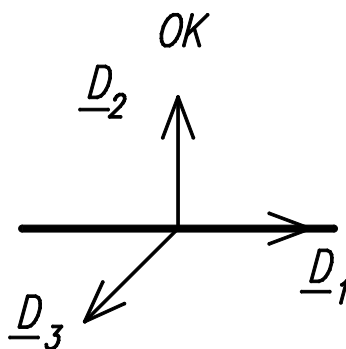


Рисунок 1.1 – Ортонормированная тройка векторов  $\mathbf{D}_i$  в отсчетной конфигурации стержня

В текущий момент времени при движении кривой векторы репера повернутся на некоторый угол, но останутся единичными и перпендикулярными друг другу. В АК векторы повернутого репера обозначены  $\underline{\mathbf{d}}_i$ , как показано на рисунке 1.2. Таким образом,  $\underline{\mathbf{D}}_i \cdot \underline{\mathbf{D}}_j = \delta_{ij}$ ;  $\underline{\mathbf{d}}_i \cdot \underline{\mathbf{d}}_j = \delta_{ij}$ , где  $\delta_{ij}$  - дельта Кронекера. Причем вектор  $\underline{\mathbf{d}}_1$  не обязан совпадать с вектором  $\underline{\mathbf{t}}$  – единичным вектором, касательным к деформированной оси стержня в актуальной конфигурации, как показано на рисунке 1.2. То есть, направление вектора  $\underline{\mathbf{d}}_1$  по оси, не совпадающей с касательной к оси стержня, означает учет деформации поперечного сдвига. В теории Бернулли – Эйлера, не учитывающей деформацию сдвига, векторы  $\underline{\mathbf{d}}_1$  и  $\underline{\mathbf{t}}$  совпадают.

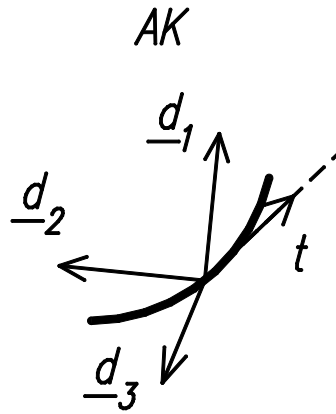


Рисунок 1.2 – Ортонормированная тройка векторов  $\underline{\mathbf{d}}_i$  в актуальной конфигурации стержня

Положение каждой точки кривой в АК задается радиус - вектором  $\underline{\mathbf{r}}(s, t)$ , в то время как положение каждой точки в ОК задается радиус – вектором  $\underline{\mathbf{R}}(s)$ , зависящим только от переменной  $s$  и не зависящим от времени  $t$ , как показано на рисунке 1.3. Таким образом, справедливо равенство:  $\underline{\mathbf{r}}(s, 0) = \underline{\mathbf{R}}(s)$ .

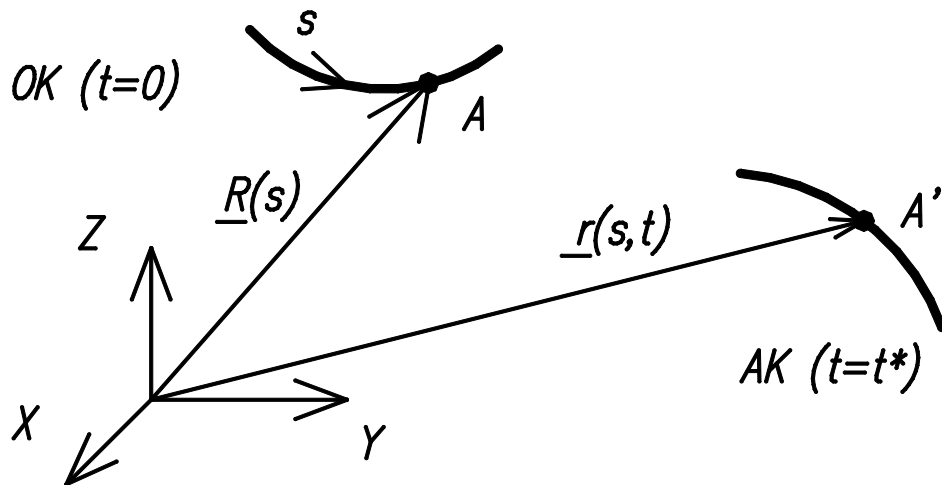


Рисунок 1.3 – Радиус – вектор в отсчетной и актуальной конфигурациях

Для описания повернутого репера  $\mathbf{d}_i$  в АК необходимо ввести тензор поворота  $\mathbf{P}(s, t)$ , описывающий независимые повороты:

$$\mathbf{P} = \mathbf{d}_i \mathbf{D}_i, \quad (1.1)$$

где  $\mathbf{d}_i \mathbf{D}_i$  – диадное произведение векторов  $\mathbf{d}_i$  и  $\mathbf{D}_i$ . Здесь и в дальнейшем все индексы имеют значения от 1 до 3, и используется правило суммирования по некому индексу, например,  $\varphi_i \mathbf{e}_i \equiv \varphi_1 \mathbf{e}_1 + \varphi_2 \mathbf{e}_2 + \varphi_3 \mathbf{e}_3$ , где  $\mathbf{e}_i$  – орты ортогональной декартовой системы координат.

Отсюда:

$$\mathbf{d}_i = \mathbf{P} \cdot \mathbf{D}_i. \quad (1.2)$$

Здесь и далее « $\cdot$ » обозначает скалярное произведение.

Докажем формулу (1.2), подставив в нее определение тензора поворота (1.1):

$$\mathbf{d}_i = \mathbf{d}_k \mathbf{D}_k \cdot \mathbf{D}_i.$$

В силу ортонормированности  $\mathbf{D}_k \cdot \mathbf{D}_i = \delta_{ki}$ , где  $\delta_{ki}$  – дельта Кронекера.

Таким образом:

$$\mathbf{d}_i = \mathbf{d}_k \delta_{ki} = \mathbf{d}_i.$$

Тензор поворота  $\mathbf{P}$  обладает следующими свойствами: его определитель равен единице; тензор, обратный к нему, равен транспонированному. То есть тензор поворота является ортогональным тензором, для которого справедливы равенства:

$$\mathbf{P} \cdot \mathbf{P}^T = \mathbf{P}^T \cdot \mathbf{P} = \mathbf{I}, \quad (1.3)$$

где  $\mathbf{I}$  – единичный тензор; индекс «Т» обозначает транспонирование.

Докажем равенство (1.3), подставив вместо тензора поворота его определение через  $\mathbf{d}_i \mathbf{D}_i$ :

$$(\mathbf{d}_i \mathbf{D}_i) \cdot (\mathbf{D}_s \mathbf{d}_s) = \mathbf{d}_k \mathbf{d}_s \delta_{ks}.$$

Или:

$$(\mathbf{d}_i \mathbf{D}_i) \cdot (\mathbf{D}_s \mathbf{d}_s) = \mathbf{d}_k \mathbf{d}_k.$$

Так как  $\mathbf{d}_k$  – единичный вектор,  $\mathbf{d}_k \mathbf{d}_k = \mathbf{d}_1 \mathbf{d}_1 + \mathbf{d}_2 \mathbf{d}_2 + \mathbf{d}_3 \mathbf{d}_3 = \mathbf{I}$  – сумма трех диад, составленных из единичных векторов. Следовательно:

$$(\mathbf{d}_i \mathbf{D}_i) \cdot (\mathbf{D}_s \mathbf{d}_s) = \mathbf{I}.$$

Окончательно, полученное равенство можно записать в виде:

$$\mathbf{P} \cdot \mathbf{P}^T = \mathbf{I}.$$

Что и требовалось доказать. При этом,  $\mathbf{P} \cdot \mathbf{P}^T$  – некий тензор с девятью составляющими в матричном виде. Так как  $\mathbf{I}$  – симметричный тензор с шестью независимыми компонентами, полученное равенство дает шесть условий, связывающих девять компонентов тензора  $\mathbf{P}$ . Таким образом, остаются всего три независимых компонента (три вращательных степени свободы).

Следовательно, каждая точка стержня, как было сказано ранее, имеет шесть степеней свободы: три трансляционных (компоненты радиус – вектора  $\mathbf{r}$ ) и три вращательных (независимые компоненты тензора поворота  $\mathbf{P}$ ) степени свободы.

Альтернативное описание независимых поворотов возможно с помощью вектора поворота  $\boldsymbol{\varphi}$ , имеющего три независимых компонента, которые соответствуют трем вращательным степеням свободы. Вектор поворота  $\boldsymbol{\varphi}$  задает ось поворота, а модуль вектора поворота – угол поворота. При этом положительное значение угла поворота означает поворот вокруг вектора по часовой стрелке, если смотреть с конца вектора в его начало. Через вектор поворота  $\boldsymbol{\varphi}$  тензор  $\mathbf{P}$  выражается следующим образом [23, 37, 80, 85, 95, 102, 104]:

$$\mathbf{P} \equiv \mathbf{P}(\boldsymbol{\varphi}) = \mathbf{I} \cos \Phi + \frac{\sin \Phi}{\Phi} \mathbf{I} \times \boldsymbol{\varphi} + \frac{1 - \cos \Phi}{\Phi^2} \boldsymbol{\varphi} \boldsymbol{\varphi}, \quad (1.4)$$

где  $\Phi = |\boldsymbol{\varphi}| = \sqrt{\varphi_1^2 + \varphi_2^2 + \varphi_3^2}$  - модуль вектора поворота  $\boldsymbol{\varphi}$ ;  $\boldsymbol{\varphi} \boldsymbol{\varphi}$  – диадное произведение вектора поворота самого на себя; "×" обозначает векторное произведение.

Покажем, что проекции повернутого вектора на повернутый репер совпадают с проекциями исходного вектора на исходный репер. Пусть некий вектор  $\mathbf{a}$  повернется на угол  $\Phi$  вокруг оси, заданной вектором поворота  $\boldsymbol{\varphi}$ . При этом, согласно рисунку 1.4, повернутый вектор будем обозначать  $\tilde{\mathbf{a}}$ ; 1, 2, 3 - исходные оси.

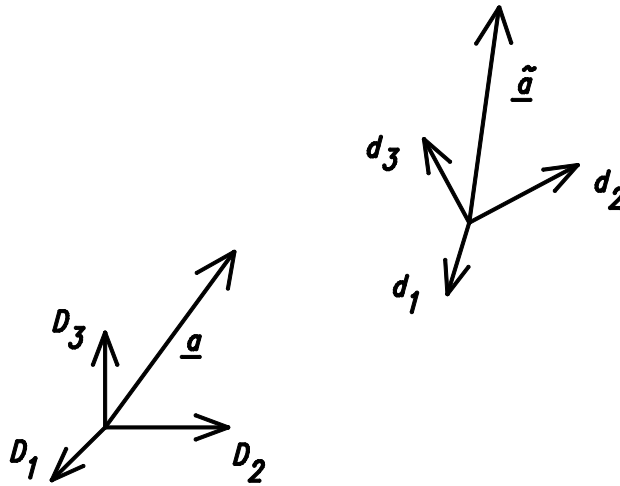


Рисунок 1.4 – Исходный вектор  $\mathbf{a}$  и повернутый вектор  $\tilde{\mathbf{a}}$

Вектор  $\mathbf{a}$  в исходных осях может быть записан в следующем виде:

$$\mathbf{a} = a_1 \mathbf{D}_1 + a_2 \mathbf{D}_2 + a_3 \mathbf{D}_3.$$

Проекция вектора  $\mathbf{a}$  на ось 1 имеет вид:

$$a_1 = \mathbf{a} \cdot \mathbf{D}_1.$$

Тензор поворота  $\mathbf{P}$ , задающий вращение от исходного репера к повернутому, согласно (1.1) может быть записан в виде:

$$\mathbf{P} = \mathbf{d}_1 \mathbf{D}_1 + \mathbf{d}_2 \mathbf{D}_2 + \mathbf{d}_3 \mathbf{D}_3.$$

Повернутый вектор  $\mathbf{\tilde{a}}$  связан с исходным вектором  $\mathbf{a}$  с помощью тензора поворота  $\mathbf{P}$  следующей формулой:

$$\mathbf{\tilde{a}} = \mathbf{P} \cdot \mathbf{a} = (\mathbf{d}_1 \mathbf{D}_1 + \mathbf{d}_2 \mathbf{D}_2 + \mathbf{d}_3 \mathbf{D}_3) \cdot (a_1 \mathbf{D}_1 + a_2 \mathbf{D}_2 + a_3 \mathbf{D}_3).$$

Раскрыв скобки и перемножив, повернутый вектор  $\mathbf{\tilde{a}}$  может быть записан в виде:

$$\mathbf{\tilde{a}} = a_1 \mathbf{d}_1 + a_2 \mathbf{d}_2 + a_3 \mathbf{d}_3.$$

Таким образом, проекция повернутого вектора  $\mathbf{\tilde{a}}$  на  $\mathbf{d}_1$  примет вид:

$$\tilde{a}_1 = (a_1 \mathbf{d}_1 + a_2 \mathbf{d}_2 + a_3 \mathbf{d}_3) \cdot \mathbf{d}_1 = a_1.$$

Таким образом, проекции повернутого вектора  $\mathbf{\tilde{a}}$  на повернутый репер  $\mathbf{d}_i$  совпадают с проекциями исходного вектора  $\mathbf{a}$  на исходный репер  $\mathbf{D}_i$ .

Покажем, что тензор поворота  $\mathbf{P}$  при записи в матричном виде содержит в себе проекции повернутого репера  $\mathbf{d}_i$  на векторы репера  $\mathbf{D}_i$ . Запишем матричное представление тензора поворота  $\mathbf{P}$  в исходной системе осей. Для этого разложим  $\mathbf{d}_i$  по исходным векторам репера  $\mathbf{D}_i$ :

$$\mathbf{d}_i = d_{i1} \mathbf{D}_1 + d_{i2} \mathbf{D}_2 + d_{i3} \mathbf{D}_3 = d_{ij} \mathbf{D}_j.$$

Согласно (1.1), выражение для тензора поворота может быть записано в виде:

$$\mathbf{P} = (\mathbf{d}_{i1} \mathbf{D}_1 + \mathbf{d}_{i2} \mathbf{D}_2 + \mathbf{d}_{i3} \mathbf{D}_3) \mathbf{D}_i = \sum_{i,j=1}^3 d_{ij} \mathbf{D}_j \mathbf{D}_i.$$

Следовательно, матрица для тензора поворота может быть записана в виде:

$$\mathbf{P} = \begin{pmatrix} d_{11} & d_{21} & d_{31} \\ d_{12} & d_{22} & d_{32} \\ d_{13} & d_{23} & d_{33} \end{pmatrix}. \quad (1.5)$$

Первый столбец матрицы (1.5) представляет собой проекции повернутого вектора  $\mathbf{d}_i$  на исходные оси 1, 2, 3. То есть матрица тензора поворота  $\mathbf{P}$  содержит в себе проекции повернутых векторов  $\mathbf{d}_i$  на векторы исходного репера. Так как повернутые векторы  $\mathbf{d}_i$  единичные, следовательно, тензор поворота в матричном виде – это косинусы соответствующих углов.

Введем определение деформации растяжения – сжатия и сдвига ( $\boldsymbol{\varepsilon}$ ) и деформации изгиба и кручения ( $\boldsymbol{\psi}$ ). К деформациям предъявляются два требования: деформация – величина, которая обращается в нуль, если тело движется как абсолютно твердое, и деформации должны быть «энергетически сопряжены» усилиям.

Выражения для рассматриваемых деформаций имеет вид [21, 36]:

$$\boldsymbol{\varepsilon} = \mathbf{r}' - \mathbf{P} \cdot \mathbf{R}', \quad (1.6)$$

$$\mathbf{P}' = \boldsymbol{\psi} \times \mathbf{P}, \quad (1.7)$$

где  $(\dots)' \equiv \frac{\partial}{\partial s}$  – обозначает частную производную по координате  $s$ .

В теории Коссера – Тимошенко в любом сечении стержня возникает два вида внутренних усилий  $\mathbf{q}$  и  $\mathbf{m}$  – традиционные векторы сил и моментов, соответственно.

Далее будет показано, что традиционные векторы усилий ( $\mathbf{q}$  и  $\mathbf{m}$ ) и деформаций ( $\boldsymbol{\varepsilon}$  и  $\boldsymbol{\psi}$ ) являются энергетически несопряженными. Для таких векторов невозможна классическая вариационная постановка в виде задачи поиска точки стационарности функционала. Поэтому необходимо использовать другие векторы усилий и деформаций, которые оказываются энергетически сопряженными [36]. С этой целью вводятся повернутые векторы усилий и деформаций.

Выражения для повернутых векторов деформаций имеют вид:

$$\mathbf{E} = \mathbf{P}^T \cdot \boldsymbol{\varepsilon} = \mathbf{P}^T \cdot \mathbf{r}' - \mathbf{R}', \quad (1.8)$$

$$\boldsymbol{\Psi} = \mathbf{P}^T \cdot \boldsymbol{\psi}, \quad (1.9)$$

где  $\mathbf{E}$  и  $\boldsymbol{\Psi}$  – повернутые векторы деформаций растяжения – сдвига и изгиба – кручения, соответственно.

Выражения для повернутых векторов усилий имеют следующий вид:

$$\mathbf{Q} = \mathbf{P}^T \cdot \mathbf{q}, \quad (1.10)$$

$$\mathbf{M} = \mathbf{P}^T \cdot \mathbf{m}. \quad (1.11)$$

где  $\mathbf{Q}$  и  $\mathbf{M}$  – повернутые векторы сил и моментов, соответственно.

Традиционные векторы  $\mathbf{q}$  и  $\mathbf{m}$  выражаются через повернутые векторы  $\mathbf{Q}$  и  $\mathbf{M}$  с помощью тензора поворота  $\mathbf{P}$  следующими формулами:

$$\mathbf{q} = \mathbf{P} \cdot \mathbf{Q}, \quad (1.12)$$

$$\mathbf{m} = \mathbf{P} \cdot \mathbf{M}. \quad (1.13)$$

Вектор угловой скорости  $\boldsymbol{\omega}$  определяется формулами:

$$\boldsymbol{\omega} = -\frac{1}{2} \left( \frac{\partial \mathbf{P}}{\partial t} \cdot \mathbf{P}^T \right)_x \Leftrightarrow \frac{\partial \mathbf{P}}{\partial t} = \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{P}, \quad (1.14)$$

где  $(\dots)_x$  - векторный инвариант тензора  $(\mathbf{A}_x = (\mathbf{A}_{ij} \mathbf{e}_i \mathbf{e}_j)_x = \mathbf{A}_{ij} \mathbf{e}_i \times \mathbf{e}_j)$  [21, 23, 102];  $\frac{\partial}{\partial t}$  - частная производная по времени.

Опишем процедуру вычисления угловой скорости тела через тензор поворота. Как было сказано ранее, тензор поворота  $\mathbf{P}$  является ортогональным тензором. То есть:

$$\mathbf{P} \cdot \mathbf{P}^T = \mathbf{I}. \quad (1.15)$$

Продифференцируем (1.15) по времени  $t$ :



$$\frac{\partial}{\partial t}(\mathbf{P} \cdot \mathbf{P}^T) = \frac{\partial \mathbf{I}}{\partial t}.$$

Или, раскрыв скобки:

$$\dot{\mathbf{P}} \cdot \mathbf{P}^T + \mathbf{P} \cdot (\mathbf{P}^T)^\cdot = \dot{\mathbf{I}}, \quad (1.16)$$

где величиной с точкой сверху обозначена частная производная по времени  $\dot{\mathbf{P}} = \frac{\partial \mathbf{P}}{\partial t}$ .

Поскольку  $\dot{\mathbf{I}} = 0$ , (1.16) примет вид:

$$\dot{\mathbf{P}} \cdot \mathbf{P}^T + \mathbf{P} \cdot (\mathbf{P}^T)^\cdot = 0. \quad (1.17)$$

Поскольку  $\left(\dot{\mathbf{P}} \cdot \mathbf{P}^T\right)^\cdot = \mathbf{P} \cdot (\mathbf{P}^T)^\cdot$ , (1.17) можно записать в виде:

$$\dot{\mathbf{P}} \cdot \mathbf{P}^T = -\left(\dot{\mathbf{P}} \cdot \mathbf{P}^T\right)^\cdot. \quad (1.18)$$

Из равенства (1.18) следует, что тензор  $\dot{\mathbf{P}} \cdot \mathbf{P}^T$  является антисимметричным. Так как для антисимметричного тензора справедливо его выражение через «присоединенный» или «ассоциированный» вектор [21, 22, 23, 25, 98, 113], для тензора  $\dot{\mathbf{P}} \cdot \mathbf{P}^T$  справедливо следующее выражение:

$$\dot{\mathbf{P}} \cdot \mathbf{P}^T = \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{I}. \quad (1.19)$$

Умножим выражение (1.19) скалярно на  $\mathbf{P}$  справа:

$$\dot{\mathbf{P}} \cdot \mathbf{P}^T \cdot \mathbf{P} = \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{I} \cdot \mathbf{P}.$$

Окончательно,

$$\dot{\mathbf{P}} = \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{P}. \quad (1.20)$$

Аналогичным образом, дифференцируя по координате  $s$ , можно получить выражение для повернутого вектора деформации изгиба – кручения  $\Psi$ .

$$\mathbf{P}^T \cdot \mathbf{P} = \mathbf{I}. \quad (1.21)$$

Продифференцируем (1.21) по координате  $s$ :

$$\left(\mathbf{P}^T\right)^\cdot \cdot \mathbf{P} + \mathbf{P}^T \cdot \mathbf{P}' = 0. \quad (1.22)$$

Поскольку  $\left(\mathbf{P}^T \cdot \mathbf{P}'\right)^\cdot = \mathbf{P}'^T \cdot \mathbf{P}$ , (1.22) можно записать в виде:

$$\mathbf{P}^T \cdot \mathbf{P}' = -\left(\mathbf{P}^T \cdot \mathbf{P}'\right)^\cdot. \quad (1.23)$$

Из равенства (1.23) следует, что тензор  $\dot{\mathbf{P}} \cdot \mathbf{P}^T$  является антисимметричным. Так как для антисимметричного тензора справедливо его выражение через «присоединенный» или «ассоциированный» вектор, для тензора  $\dot{\mathbf{P}} \cdot \mathbf{P}^T$  справедливо следующее выражение:

$$\mathbf{P}^T \cdot \mathbf{P}' = \mathbf{I} \times \Psi. \quad (1.24)$$

Умножим выражение (1.24) скалярно на  $\mathbf{P}$  слева:

$$\mathbf{P} \cdot \mathbf{P}^T \cdot \mathbf{P}' = \mathbf{P} \cdot \mathbf{I} \times \Psi. \quad (1.25)$$

Окончательно,

$$\mathbf{P}' = \mathbf{P} \times \Psi. \quad (1.26)$$

Инерционные свойства стержня в отсчетной конфигурации описываются с помощью тензора инерции  $\mathbf{J}$ :

$$\int_{s_1}^{s_2} \mathbf{J} \rho ds, \quad (1.27)$$

где  $\mathbf{J} \rho$  – линейная плотность тензора инерции;  $\rho$  – массовая плотность, приходящаяся на единицу длины в отсчетной конфигурации;  $s_1 - s_2$  – произвольный участок стержня в ОК.

Согласно закону сохранения массы:

$$\tilde{\rho} d\tilde{s} = \rho ds, \quad (1.28)$$

где  $\tilde{\rho}$  – массовая плотность, приходящаяся на единицу длины в АК. Величины с волной соответствуют характеристикам в актуальной конфигурации.

Выражение для тензора инерции в АК имеет следующий вид [21 - 23, 25, 113]:

$$\tilde{\mathbf{J}} = \mathbf{P} \cdot \mathbf{J} \cdot \mathbf{P}^T. \quad (1.29)$$

Вычислим частную производную по времени от выражения (1.29):

$$\dot{\tilde{\mathbf{J}}} = \dot{\mathbf{P}} \cdot \mathbf{J} \cdot \mathbf{P}^T + \mathbf{P} \cdot \dot{\mathbf{J}} \cdot \mathbf{P}^T + \mathbf{P} \cdot \mathbf{J} \cdot (\dot{\mathbf{P}}^T). \quad (1.30)$$

Тензор инерции в отсчетной конфигурации не зависит от времени, следовательно, его производная будет равна нулю. Таким образом:

$$\dot{\tilde{\mathbf{J}}} = \dot{\mathbf{P}} \cdot \mathbf{J} \cdot \mathbf{P}^T + \mathbf{P} \cdot \mathbf{J} \cdot (\dot{\mathbf{P}}^T). \quad (1.31)$$

Поскольку  $(\dot{\mathbf{P}}^T) = \left( \dot{\mathbf{P}} \right)^T$ , используя выражение (1.20), (1.31) может быть записано в виде:

$$\dot{\tilde{\mathbf{J}}} = (\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{P}) \cdot \mathbf{J} \cdot \mathbf{P}^T + \mathbf{P} \cdot \mathbf{J} \cdot (\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{P})^T. \quad (1.32)$$

Для любого тензора справедливо равенство:

$$(\mathbf{a} \times \mathbf{A})^T = -\mathbf{A}^T \times \mathbf{a}.$$

Отсюда следует:

$$\dot{\mathbf{J}} = \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{P} \cdot \mathbf{J} \cdot \mathbf{P}^T - \mathbf{P} \cdot \mathbf{J} \cdot \mathbf{P}^T \times \boldsymbol{\omega}. \quad (1.33)$$

Подставив выражение (1.29), (1.33) окончательно можно записать в виде:

$$\dot{\mathbf{J}} = \boldsymbol{\omega} \times \tilde{\mathbf{J}} - \tilde{\mathbf{J}} \times \boldsymbol{\omega}. \quad (1.34)$$

Формула (1.34) представляет собой правило дифференцирования тензора инерции  $\mathbf{J}$  по времени  $t$ , которое потребуется нам в дальнейшем.

$$\text{Покажем, что справедливо равенство: } \frac{\partial(\mathbf{K})}{\partial s} ds = \frac{\partial(\mathbf{K})}{\partial \xi} d\xi.$$

Выразим производную  $\frac{\partial(\mathbf{K})}{\partial \xi}$  через  $s$ :

$$\frac{\partial(\mathbf{K})}{\partial \xi} = \frac{\partial(\mathbf{K})}{\partial s} \frac{\partial s}{\partial \xi}. \quad (1.35)$$

Введем следующее обозначение:

$$\frac{\partial \xi}{\partial s} \equiv \lambda, \quad (1.36)$$

где  $\lambda$  – кратность удлинения, то есть отношение длины бесконечно малого отрезка стержня  $\xi_1 - \xi_2$  в АК к длине бесконечно малого отрезка  $s_1 - s_2$  в ОК.

Таким образом, используя обозначение (1.36), выражение (1.35) может быть записано в виде:

$$\frac{\partial(\mathbf{K})}{\partial \xi} = \frac{1}{\lambda} \frac{\partial(\mathbf{K})}{\partial s} \quad (1.37)$$

Согласно правилу замены переменной:

$$\frac{\partial \xi}{\partial s} ds = \lambda ds \quad (1.38)$$

Таким образом, используя (1.37) и (1.38), равенство  $\frac{\partial(\mathbf{K})}{\partial s} ds = \frac{\partial(\mathbf{K})}{\partial \xi} d\xi$  может быть записано

в виде:

$$\frac{\partial(\mathbf{K})}{\partial s} ds = \frac{1}{\lambda} \frac{\partial(\mathbf{K})}{\partial s} \lambda ds. \quad (1.39)$$

Равенство очевидно. Поскольку все преобразования обратимы, формула (1.35) доказана.

## 1.2 Основные уравнения нелинейной теории стержней

Уравнения движения стержня получены из законов динамики Эйлера [23, 25] - уравнений баланса импульса и кинетического момента (момента импульса).

Запишем уравнение баланса импульса, согласно которому скорость изменения импульса равна сумме сил, действующих на тело.

Выражение для импульса имеет вид:

$$\mathbf{K}_1 = \int_{\xi_1}^{\xi_2} \rho \mathbf{v} d\xi, \quad (1.40)$$

где  $\mathbf{K}_1$  – импульс;  $\mathbf{v}$  – скорость движения точек стержня;  $\xi_1 - \xi_2$  – произвольный участок стержня в АК. Величины с волной соответствуют характеристикам в актуальной конфигурации.

Исходя из равенства скорости изменения импульса сумме сил, действующих на рассматриваемый участок, уравнение баланса импульса может быть записано в виде:

$$\frac{d}{dt} \mathbf{K}_1 = \int_{\xi_1}^{\xi_2} \rho \mathbf{f} d\xi + \mathbf{q}_2 - \mathbf{q}_1,$$

где  $\rho \mathbf{f}$  – распределенная сила, действующая на стержень;  $\mathbf{q}_1$  и  $\mathbf{q}_2$  – силы, приложенные на границах участка  $\xi_1 - \xi_2$ , с которыми отброшенные части стержня действуют на рассматриваемый участок стержня.

Внесем  $\mathbf{q}_1$  и  $\mathbf{q}_2$  по формуле Ньютона - Лейбница под знак интеграла:

$$\frac{d}{dt} \mathbf{K}_1 = \int_{\xi_1}^{\xi_2} \left( \rho \mathbf{f} + \frac{\partial \mathbf{q}}{\partial \xi} \right) d\xi. \quad (1.41)$$

Используя выражение (1.40), уравнение (1.41) можно записать в виде:

$$\frac{d}{dt} \int_{\xi_1}^{\xi_2} \rho \mathbf{v} d\xi = \int_{\xi_1}^{\xi_2} \left( \rho \mathbf{f} + \frac{\partial \mathbf{q}}{\partial \xi} \right) d\xi. \quad (1.42)$$

Перейдем от АК к ОК, используя выражение (1.28). Тогда уравнение (1.42) примет вид:

$$\frac{d}{dt} \int_{s_1}^{s_2} \rho \mathbf{v} ds = \int_{s_1}^{s_2} \left( \rho \mathbf{f} + \frac{\partial \mathbf{q}}{\partial s} \right) ds, \quad (1.43)$$

где  $\rho$  – массовая плотность, приходящаяся на единицу длины в ОК;  $s_1 - s_2$  – произвольный участок стержня в ОК, который в момент времени  $t$  переходит в участок  $\xi_1 - \xi_2$ .

Поскольку  $s_1$  и  $s_2$  не зависят от времени, внесем производную  $d/dt$  под знак интеграла и перенесем правую часть выражения (1.43) влево. Таким образом:

$$\int_{s_1}^{s_2} \dot{\rho} \mathbf{v} ds - \int_{s_1}^{s_2} \left( \rho \mathbf{f} + \frac{\partial \mathbf{q}}{\partial s} \right) ds = 0,$$

где величиной с точкой сверху обозначена частная производная по времени  $\dot{\mathbf{v}} = \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t}$ .

Или:

$$\int_{s_1}^{s_2} \left[ \rho \dot{\mathbf{v}} - \left( \rho \mathbf{f} + \frac{\partial \mathbf{q}}{\partial s} \right) \right] ds = 0. \quad (1.44)$$

Поскольку участок  $s_1$ - $s_2$  был выбран произвольно, интеграл (1.44) будет равен нулю на любом участке, что возможно только при равенстве нулю подынтегрального выражения.

Отсюда:

$$\rho \dot{\mathbf{v}} - \left( \rho \mathbf{f} + \frac{\partial \mathbf{q}}{\partial s} \right) = 0. \quad (1.45)$$

Окончательно:

$$\rho \dot{\mathbf{v}} = \rho \mathbf{f} + \mathbf{q}', \quad (1.46)$$

где  $(\dots)' \equiv \frac{\partial}{\partial s}$  – обозначает частную производную по координате  $s$ .

Уравнение (1.46) представляет собой общепринятое в литературе первое уравнение движения [17, 21, 25].

Запишем уравнение баланса кинетического момента, согласно которому скорость изменения кинетического момента равна моменту всех сил, действующих на тело.

Выражение для кинетического момента имеет вид:

$$\mathbf{K}_2 = \int_{\xi_1}^{\xi_2} (\mathbf{r} \times \rho \mathbf{v} + \rho \mathbf{J} \cdot \boldsymbol{\omega}) d\xi, \quad (1.47)$$

где  $\mathbf{K}_2$  – кинетический момент;  $\mathbf{J}$  – массовая плотность тензора инерции в актуальной конфигурации;  $\boldsymbol{\omega}$  – угловая скорость точек стержня.

Исходя из равенства скорости изменения кинетического момента моменту всех сил, действующих на рассматриваемый участок, уравнение баланса момента импульса может быть записано в виде:

$$\frac{d}{dt} \mathbf{K}_2 = \int_{\xi_1}^{\xi_2} (\mathbf{r} \times \rho \mathbf{f}) d\xi + \mathbf{r}_2 \times \mathbf{q}_2 - \mathbf{r}_1 \times \mathbf{q}_1 + \int_{\xi_1}^{\xi_2} \rho \boldsymbol{\mu} d\xi + \mathbf{m}_2 - \mathbf{m}_1,$$

где  $\mathbf{r}_1 \times \mathbf{q}_1, \mathbf{r}_2 \times \mathbf{q}_2$  – моменты сил;  $\boldsymbol{\mu}$  – распределенный момент;  $\mathbf{m}_1, \mathbf{m}_2$  – моменты, приложенные на границах участка  $\xi_1 - \xi_2$ , с которыми отброшенные части стержня действуют на рассматриваемый участок стержня;  $\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2$  – радиус векторы границ выбранного отрезка.

Внесем слагаемые с  $\mathbf{q}_1, \mathbf{q}_2, \mathbf{m}_1$  и  $\mathbf{m}_2$  под знак интеграла:

$$\frac{d}{dt} \mathbf{K}_2 = \int_{\xi_1}^{\xi_2} \left[ \mathbf{r} \times \rho \mathbf{f} + \rho \boldsymbol{\mu} + \frac{\partial (\mathbf{r} \times \mathbf{q})}{\partial \xi} + \frac{\partial \mathbf{m}}{\partial \xi} \right] d\xi. \quad (1.48)$$

Используя выражение (1.47), уравнение (1.48) можно записать в следующем виде:

$$\frac{d}{dt} \int_{s_1}^{s_2} (\mathbf{r} \times \rho \mathbf{v} + \rho \mathbf{J} \cdot \boldsymbol{\omega}) d\zeta = \int_{s_1}^{s_2} \left[ \mathbf{r} \times \rho \mathbf{f} + \rho \boldsymbol{\mu} + \frac{\partial(\mathbf{r} \times \mathbf{q})}{\partial \zeta} + \frac{\partial \mathbf{m}}{\partial \zeta} \right] d\zeta. \quad (1.49)$$

Перейдем от АК к ОК, используя выражение (1.28). Тогда уравнение (1.49) примет вид:

$$\frac{d}{dt} \int_{s_1}^{s_2} (\mathbf{r} \times \rho \mathbf{v} + \rho \mathbf{J} \cdot \boldsymbol{\omega}) ds = \int_{s_1}^{s_2} \left[ \mathbf{r} \times \rho \mathbf{f} + \rho \boldsymbol{\mu} + (\mathbf{r} \times \mathbf{q})' + \mathbf{m}' \right] ds. \quad (1.50)$$

Поскольку  $s_1$  и  $s_2$  не зависят от времени, внесем производную по времени  $d/dt$  под знак интеграла и вынесем  $\rho$  в левой части за скобки. Таким образом:

$$\int_{s_1}^{s_2} \frac{\partial}{\partial t} (\rho \cdot (\mathbf{r} \times \mathbf{v} + \mathbf{J} \cdot \boldsymbol{\omega})) ds = \int_{s_1}^{s_2} \left[ \mathbf{r} \times \rho \mathbf{f} + \rho \boldsymbol{\mu} + (\mathbf{r} \times \mathbf{q})' + \mathbf{m}' \right] ds.$$

Дифференцируя по времени и учитывая, что  $\rho$  от времени не зависит, получим:

$$\int_{s_1}^{s_2} \rho \left[ \dot{\mathbf{r}} \times \mathbf{v} + \mathbf{r} \times \dot{\mathbf{v}} + (\mathbf{J} \cdot \dot{\boldsymbol{\omega}}) \right] ds = \int_{s_1}^{s_2} \left[ \mathbf{r} \times \rho \mathbf{f} + \rho \boldsymbol{\mu} + (\mathbf{r} \times \mathbf{q})' + \mathbf{m}' \right] ds.$$

Так как  $\dot{\mathbf{r}} = \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial t} = \mathbf{v}$ , первое слагаемое  $\dot{\mathbf{r}} \times \mathbf{v}$  может быть записано в виде  $\mathbf{v} \times \mathbf{v}$  и равно нулю.

Таким образом, перенеся правую часть выражения влево:

$$\int_{s_1}^{s_2} \left[ \mathbf{r} \times \rho \dot{\mathbf{v}} + \rho (\mathbf{J} \cdot \dot{\boldsymbol{\omega}}) \right] ds - \int_{s_1}^{s_2} \left[ \mathbf{r} \times \rho \mathbf{f} + \rho \boldsymbol{\mu} + (\mathbf{r} \times \mathbf{q})' + \mathbf{m}' \right] ds = 0.$$

Или:

$$\int_{s_1}^{s_2} \left[ \mathbf{r} \times \rho \dot{\mathbf{v}} + \rho (\mathbf{J} \cdot \dot{\boldsymbol{\omega}}) - \left( \mathbf{r} \times \rho \mathbf{f} + \rho \boldsymbol{\mu} + (\mathbf{r} \times \mathbf{q})' + \mathbf{m}' \right) \right] ds = 0. \quad (1.51)$$

Поскольку участок  $s_1$ - $s_2$  был выбран произвольно, интеграл (1.51) будет равен нулю на любом участке, что возможно только при равенстве нулю подынтегрального выражения.

Отсюда:

$$\mathbf{r} \times \rho \dot{\mathbf{v}} + \rho (\mathbf{J} \cdot \dot{\boldsymbol{\omega}}) - \left( \mathbf{r} \times \rho \mathbf{f} + \rho \boldsymbol{\mu} + (\mathbf{r} \times \mathbf{q})' + \mathbf{m}' \right) = 0.$$

Или:

$$\mathbf{r} \times \rho \dot{\mathbf{v}} + \rho (\mathbf{J} \cdot \dot{\boldsymbol{\omega}}) - \left( \mathbf{r} \times \rho \mathbf{f} + \rho \boldsymbol{\mu} + \mathbf{r} \times \mathbf{q}' + \mathbf{r}' \times \mathbf{q} + \mathbf{m}' \right) = 0. \quad (1.52)$$

Используя уравнение (1.46), векторно умноженное слева на радиус вектор, окончательно (1.52) можно записать в виде:

$$\rho(\mathbf{J} \cdot \boldsymbol{\omega}) = \rho \boldsymbol{\mu} + \mathbf{r}' \times \mathbf{q} + \mathbf{m}'. \quad (1.53)$$

Уравнение (1.53) представляет собой общепринятое в литературе второе уравнение движения [17, 21, 25].

Получим уравнения совместности традиционных векторов деформаций и скоростей. Для этого воспользуемся выражением (1.6) для деформации  $\boldsymbol{\varepsilon}$ , дифференцируя его по времени. Тогда:

$$\dot{\boldsymbol{\varepsilon}} = \frac{\partial(\mathbf{r}')}{\partial t} - \frac{\partial(\mathbf{P} \cdot \mathbf{R}')}{\partial t}. \quad (1.54)$$

Поскольку радиус – вектор точек стержня в отсчетной конфигурации зависит только от координаты точек  $s$  и не зависит от времени  $t$ , выражение (1.54) можно записать в виде:

$$\dot{\boldsymbol{\varepsilon}} = \frac{\partial(\mathbf{r}')}{\partial t} - \frac{\partial \mathbf{P}}{\partial t} \cdot \mathbf{R}'.$$

Поскольку  $\frac{\partial(\mathbf{r}')}{\partial t} = \left( \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial t} \right)'$ , используя выражение для скорости движения точек стержня как производной по времени  $t$  радиус – вектора в актуальной конфигурации, полученное выражение можно преобразовать:

$$\dot{\boldsymbol{\varepsilon}} = \mathbf{v}' - \frac{\partial \mathbf{P}}{\partial t} \cdot \mathbf{R}'.$$

Окончательно,

$$\dot{\boldsymbol{\varepsilon}} = \mathbf{v}' - \dot{\mathbf{P}} \cdot \mathbf{R}'. \quad (1.55)$$

Используя выражение (1.20), (1.55) можно записать в виде:

$$\dot{\boldsymbol{\varepsilon}} = \mathbf{v}' - \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{P} \cdot \mathbf{R}'. \quad (1.56)$$

Выразив  $\mathbf{P} \cdot \mathbf{R}'$  из выражения (1.6) и подставив в (1.56), получим:

$$\dot{\boldsymbol{\varepsilon}} = \mathbf{v}' - \boldsymbol{\omega} \times (\mathbf{r}' - \boldsymbol{\varepsilon}).$$

Раскрыв скобки и перенеся слагаемые с  $\boldsymbol{\varepsilon}$  в одну сторону, выражение (1.56) можно записать в следующем виде:

$$\dot{\boldsymbol{\varepsilon}} - \boldsymbol{\omega} \times \boldsymbol{\varepsilon} = \mathbf{v}' - \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}'. \quad (1.57)$$

Окончательно:

$$\dot{\boldsymbol{\varepsilon}} - \boldsymbol{\omega} \times \boldsymbol{\varepsilon} = \mathbf{v}' + \mathbf{r}' \times \boldsymbol{\omega}. \quad (1.58)$$

Полученное уравнение (1.58) является уравнением совместности деформаций и скоростей.

Для получения второго уравнения совместности воспользуемся выражением (1.7) для деформации  $\psi$ , дифференцируя его по времени. Тогда:

$$\frac{\partial(\mathbf{P}')}{\partial t} = \frac{\partial(\psi \times \mathbf{P})}{\partial t}. \quad (1.59)$$

Или:

$$(\mathbf{P}') \dot{=} (\psi \times \mathbf{P}) \dot{.}. \quad (1.60)$$

Поскольку  $(\mathbf{P}') \dot{=} \left( \dot{\mathbf{P}} \right) \dot{.}$ , используя выражение (1.20), (1.60) может быть записано в виде:

$$(\omega \times \mathbf{P}) \dot{.} = (\psi \times \mathbf{P}) \dot{.}. \quad (1.61)$$

Раскроем скобки:

$$\omega \dot{.} \times \mathbf{P} + \omega \times \mathbf{P} \dot{.} = \psi \dot{.} \times \mathbf{P} + \psi \times \mathbf{P} \dot{.}. \quad (1.62)$$

Используя выражения (1.7) и (1.20), (1.62) может быть записано в виде:

$$\omega \dot{.} \times \mathbf{P} + \omega \times (\psi \times \mathbf{P}) \dot{.} = \psi \dot{.} \times \mathbf{P} + \psi \times (\omega \times \mathbf{P}) \dot{.}. \quad (1.63)$$

Умножим скалярно полученное уравнение справа на  $\mathbf{P}^T$ . Тогда:

$$\omega \dot{.} \times \mathbf{P} \cdot \mathbf{P}^T + \omega \times (\psi \times \mathbf{P}) \dot{.} \cdot \mathbf{P}^T = \psi \dot{.} \times \mathbf{P} \cdot \mathbf{P}^T + \psi \times (\omega \times \mathbf{P}) \dot{.} \cdot \mathbf{P}^T. \quad (1.64)$$

Поскольку  $\mathbf{P} \cdot \mathbf{P}^T = \mathbf{I}$ , уравнение (1.64) примет вид:

$$\omega \dot{.} \times \mathbf{I} + \omega \times (\psi \times \mathbf{I}) \dot{.} = \psi \dot{.} \times \mathbf{I} + \psi \times (\omega \times \mathbf{I}) \dot{.}. \quad (1.65)$$

Поскольку для любого вектора  $\mathbf{a}$  справедливо равенство  $\mathbf{a} \times \mathbf{I} = \mathbf{I} \times \mathbf{a}$ , (1.65) может быть записано в виде:

$$\omega \dot{.} \times \mathbf{I} + \omega \times (\mathbf{I} \times \psi) \dot{.} = \psi \dot{.} \times \mathbf{I} + \psi \times (\mathbf{I} \times \omega) \dot{.}. \quad (1.66)$$

Несложно показать, что  $\psi \times (\mathbf{I} \times \omega) \dot{.} - \omega \times (\mathbf{I} \times \psi) \dot{.} = (\psi \times \omega) \times \mathbf{I}$ . Таким образом, уравнение (1.66) может быть записано в виде:

$$\omega \dot{.} \times \mathbf{I} = \psi \dot{.} \times \mathbf{I} + (\psi \times \omega) \times \mathbf{I}. \quad (1.67)$$

Или, сгруппировав слагаемые:

$$\left( \dot{\psi} + \psi \times \omega - \omega \dot{.} \right) \times \mathbf{I} = \mathbf{0}. \quad (1.68)$$

Окончательно:

$$\dot{\psi} + \psi \times \omega = \omega \dot{.}. \quad (1.69)$$



Полученное уравнение (1.69) является вторым уравнением совместности традиционных векторов деформаций и скоростей.

Получим уравнения совместности повернутых векторов деформаций и скоростей. Для этого воспользуемся выражением (1.8) для повернутого вектора деформации  $\epsilon$ , дифференцируя его по времени. Тогда:

$$\dot{\mathbf{E}} = \frac{\partial(\mathbf{P}^T \cdot \mathbf{r}')}{\partial t} - \frac{\partial(\mathbf{R}')}{\partial t}.$$

Или:

$$\dot{\mathbf{E}} = (\mathbf{P}^T) \cdot \dot{\mathbf{r}}' + \mathbf{P}^T \cdot (\mathbf{r}') \cdot - (\mathbf{R}') \cdot. \quad (1.70)$$

Поскольку, согласно выражению (1.20),  $\dot{\mathbf{P}} = \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{P}$ , выражение для  $(\mathbf{P}^T) \cdot$  примет вид:

$$(\mathbf{P}^T) \cdot = -\mathbf{P}^T \times \boldsymbol{\omega}. \quad (1.71)$$

Так как  $(\mathbf{r}') \cdot = \left( \dot{\mathbf{r}} \right) \cdot$ , используя выражение для скорости движения точек стержня как производной по времени  $t$  радиус – вектора в актуальной конфигурации и выражение (1.71), (1.70) может быть записано в виде:

$$\dot{\mathbf{E}} = -(\mathbf{P}^T \times \boldsymbol{\omega}) \cdot \mathbf{r}' + \mathbf{P}^T \cdot \dot{\mathbf{v}}' - (\mathbf{R}') \cdot. \quad (1.72)$$

Поскольку радиус – вектор точек стержня в отсчетной конфигурации зависит только от координаты точек  $s$  и не зависит от времени  $t$ , выражение (1.72) окончательно можно записать в виде:

$$\dot{\mathbf{E}} = \mathbf{P}^T \cdot (\dot{\mathbf{v}}' + \mathbf{r}' \times \boldsymbol{\omega}). \quad (1.73)$$

Полученное уравнение (1.73) является уравнением совместности повернутых векторов деформаций и скоростей.

Для получения второго уравнения совместности воспользуемся выражением (1.9) для повернутого вектора деформации  $\Psi$ , дифференцируя его по времени. Тогда:

$$\frac{\partial(\psi)}{\partial t} = \frac{\partial(\mathbf{P} \cdot \Psi)}{\partial t}. \quad (1.74)$$

Или:

$$\dot{\psi} = \dot{\mathbf{P}} \cdot \Psi + \mathbf{P} \cdot \dot{\Psi}. \quad (1.75)$$

Выразив  $\dot{\psi}$  из уравнения совместности (1.69) и используя выражение (1.20) для  $\dot{\mathbf{P}}$ , выражение (1.75) может быть записано в виде:

$$\dot{\boldsymbol{\omega}}' - \boldsymbol{\Psi} \times \boldsymbol{\omega} = \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{P} \cdot \boldsymbol{\Psi} + \mathbf{P} \cdot \dot{\boldsymbol{\Psi}}. \quad (1.76)$$

Подставив выражение (1.9) в (1.76), получим:

$$\dot{\boldsymbol{\omega}}' = \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{P} \cdot \boldsymbol{\Psi} + \mathbf{P} \cdot \boldsymbol{\Psi} \times \boldsymbol{\omega} + \mathbf{P} \cdot \dot{\boldsymbol{\Psi}}. \quad (1.77)$$

Или:

$$\dot{\boldsymbol{\omega}}' = \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{P} \cdot \boldsymbol{\Psi} - \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{P} \cdot \boldsymbol{\Psi} + \mathbf{P} \cdot \dot{\boldsymbol{\Psi}}. \quad (1.78)$$

Умножим слева на  $\mathbf{P}^T$ :

$$\mathbf{P}^T \cdot \dot{\boldsymbol{\omega}}' = \mathbf{P}^T \cdot \mathbf{P} \cdot \dot{\boldsymbol{\Psi}}. \quad (1.79)$$

Окончательно, уравнение (1.79) может быть записано в виде:

$$\dot{\boldsymbol{\Psi}} = \mathbf{P}^T \cdot \dot{\boldsymbol{\omega}}'. \quad (1.80)$$

Полученное уравнение (1.80) является вторым уравнением совместности повернутых векторов деформаций и скоростей.

### 1.3 Энергетическая сопряженность векторов усилий и деформаций

Проверим энергетическую сопряженность традиционных векторов усилий и деформаций. Для этого воспользуемся законом баланса энергии [21 - 23, 25, 113], согласно которому скорость изменения полной энергии равна мощности всех внешних нагрузок (силовых и моментных), действующих на тело.

Выражение для полной энергии имеет вид  $\mathbf{K} + \mathbf{P}^*$ , где  $\mathbf{P}^*$  – потенциальная энергия (энергия деформации). Будем рассматривать только упругие тела, энергия деформации которых зависит только от самих деформаций.  $\mathbf{K}$  – кинетическая энергия, выражение для которой в актуальной конфигурации имеет вид:

$$\mathbf{K} = \frac{1}{2} \int_{\tilde{s}_1}^{\tilde{s}_2} (\tilde{\rho} v^2 + \boldsymbol{\omega} \cdot \tilde{\rho} \mathbf{J} \cdot \boldsymbol{\omega}) d\tilde{s}, \quad (1.81)$$

Исходя из равенства скорости изменения полной энергии мощности всех сил, действующих на рассматриваемый участок, закон баланса энергии может быть записан в виде:

$$\frac{d}{dt} (\mathbf{K} + \mathbf{P}^*) = \int_{\tilde{s}_1}^{\tilde{s}_2} (\tilde{\rho} \mathbf{f} \cdot \mathbf{v} + \tilde{\rho} \boldsymbol{\mu} \cdot \boldsymbol{\omega}) d\tilde{s} + \mathbf{q}_2 \cdot \mathbf{v}_2 - \mathbf{q}_1 \cdot \mathbf{v}_1 + \mathbf{m}_2 \cdot \boldsymbol{\omega}_2 - \mathbf{m}_1 \cdot \boldsymbol{\omega}_1, \quad (1.82)$$

где  $\mathbf{q}_1 \cdot \mathbf{v}_1$ ,  $\mathbf{q}_2 \cdot \mathbf{v}_2$  – мощности сил на границах отрезка;  $\mathbf{m}_1 \cdot \boldsymbol{\omega}_1$ ,  $\mathbf{m}_2 \cdot \boldsymbol{\omega}_2$  – мощности моментов на границах отрезка.

Используя выражение (1.81), уравнение (1.82) примет вид:

$$\frac{d}{dt} \left[ \int_{\xi_1}^{\xi_2} \left[ \frac{1}{2} (\rho \mathbf{v}^2 + \boldsymbol{\omega} \cdot \rho \mathbf{J} \cdot \boldsymbol{\omega}) + \Pi \right] d\xi \right] = \int_{\xi_1}^{\xi_2} (\rho \mathbf{f} \cdot \mathbf{v} + \rho \boldsymbol{\mu} \cdot \boldsymbol{\omega}) d\xi + \mathbf{q}_2 \cdot \mathbf{v}_2 - \mathbf{q}_1 \cdot \mathbf{v}_1 + \mathbf{m}_2 \cdot \boldsymbol{\omega}_2 - \mathbf{m}_1 \cdot \boldsymbol{\omega}_1, \quad (1.83)$$

где  $\Pi$  – линейная плотность энергии деформации.

Перейдем от АК к ОК, используя выражение (1.28). Тогда уравнение (1.83) примет вид:

$$\frac{d}{dt} \left[ \int_{s_1}^{s_2} \left[ \frac{1}{2} (\rho \mathbf{v}^2 + \boldsymbol{\omega} \cdot \rho \mathbf{J} \cdot \boldsymbol{\omega}) + \Pi \right] ds \right] = \int_{s_1}^{s_2} (\rho \mathbf{f} \cdot \mathbf{v} + \rho \boldsymbol{\mu} \cdot \boldsymbol{\omega}) ds + \mathbf{q}_2 \cdot \mathbf{v}_2 - \mathbf{q}_1 \cdot \mathbf{v}_1 + \mathbf{m}_2 \cdot \boldsymbol{\omega}_2 - \mathbf{m}_1 \cdot \boldsymbol{\omega}_1. \quad (1.84)$$

Внеся слагаемые с  $\mathbf{q}$  и  $\mathbf{m}$  под знак интеграла, уравнение (1.84) можно записать в виде:

$$\frac{d}{dt} \left[ \int_{s_1}^{s_2} \left[ \frac{1}{2} (\rho \mathbf{v}^2 + \boldsymbol{\omega} \cdot \rho \mathbf{J} \cdot \boldsymbol{\omega}) + \Pi \right] ds \right] = \int_{s_1}^{s_2} \left( \rho \mathbf{f} \cdot \mathbf{v} + \rho \boldsymbol{\mu} \cdot \boldsymbol{\omega} + (\mathbf{q} \cdot \mathbf{v})' + (\mathbf{m} \cdot \boldsymbol{\omega})' \right) ds. \quad (1.85)$$

Поскольку  $s_1$  и  $s_2$  не зависят от времени, внесем производную по времени  $d/dt$  под знак интеграла, таким образом:

$$\int_{s_1}^{s_2} \left[ \rho \mathbf{v} \cdot \dot{\mathbf{v}} + \frac{1}{2} \rho \boldsymbol{\omega} \cdot \dot{\mathbf{J}} \cdot \boldsymbol{\omega} + \frac{1}{2} \rho \boldsymbol{\omega} \cdot \dot{\mathbf{J}} \cdot \boldsymbol{\omega} + \frac{1}{2} \rho \boldsymbol{\omega} \cdot \dot{\mathbf{J}} \cdot \boldsymbol{\omega} + \dot{\Pi} \right] ds = \int_{s_1}^{s_2} \left( \rho \mathbf{f} \cdot \mathbf{v} + \rho \boldsymbol{\mu} \cdot \boldsymbol{\omega} + (\mathbf{q} \cdot \mathbf{v})' + (\mathbf{m} \cdot \boldsymbol{\omega})' \right) ds. \quad (1.86)$$

Покажем, что слагаемое  $\rho \boldsymbol{\omega} \cdot \dot{\mathbf{J}} \cdot \boldsymbol{\omega}$  обращается в ноль. Подставив выражение (1.34) для  $\dot{\mathbf{J}}$ , получим  $\rho \boldsymbol{\omega} \cdot (\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{J} - \mathbf{J} \times \boldsymbol{\omega}) \cdot \boldsymbol{\omega}$ . Поскольку  $\boldsymbol{\omega} \cdot (\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{J}) \cdot \boldsymbol{\omega} = \boldsymbol{\omega} \cdot (\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{I} \cdot \mathbf{J}) \cdot \boldsymbol{\omega} = (\boldsymbol{\omega} \cdot (\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{I})) \cdot \mathbf{J} \cdot \boldsymbol{\omega}$ . Используя свойства единичного тензора, получаем  $(\boldsymbol{\omega} \cdot (\mathbf{I} \times \boldsymbol{\omega})) \cdot \mathbf{J} \cdot \boldsymbol{\omega}$ , или  $(\boldsymbol{\omega} \times \boldsymbol{\omega}) \cdot \mathbf{J} \cdot \boldsymbol{\omega} = 0$ , так как  $\boldsymbol{\omega} \times \boldsymbol{\omega} = 0$ . Аналогично доказывается равенство нулю слагаемого  $\rho \boldsymbol{\omega} \cdot (-\mathbf{J} \times \boldsymbol{\omega}) \cdot \boldsymbol{\omega}$ .

Тензор  $\mathbf{J}$  по определению является симметричным, отсюда следует:

$$\rho \boldsymbol{\omega} \cdot \dot{\mathbf{J}} \cdot \boldsymbol{\omega} = \rho \boldsymbol{\omega} \cdot \dot{\mathbf{J}} \cdot \boldsymbol{\omega}. \quad (1.87)$$

Таким образом, уравнение (1.86) может быть записано в виде:

$$\int_{s_1}^{s_2} \left( \rho \mathbf{v} \cdot \dot{\mathbf{v}} + \rho \boldsymbol{\omega} \cdot \dot{\mathbf{J}} \cdot \boldsymbol{\omega} + \dot{\Pi} \right) ds = \int_{s_1}^{s_2} \left( \rho \mathbf{f} \cdot \mathbf{v} + \rho \boldsymbol{\mu} \cdot \boldsymbol{\omega} + (\mathbf{q} \cdot \mathbf{v})' + (\mathbf{m} \cdot \boldsymbol{\omega})' \right) ds.$$

Или:

$$\int_{s_1}^{s_2} \left( \rho \mathbf{v} \cdot \dot{\mathbf{v}} + \rho \boldsymbol{\omega} \cdot \dot{\mathbf{J}} \cdot \boldsymbol{\omega} + \dot{\Pi} - \rho \mathbf{f} \cdot \mathbf{v} - \rho \boldsymbol{\mu} \cdot \boldsymbol{\omega} - (\mathbf{q} \cdot \mathbf{v})' - (\mathbf{m} \cdot \boldsymbol{\omega})' \right) ds = 0. \quad (1.88)$$

Поскольку участок  $s_1$ - $s_2$  был выбран произвольно, интеграл (1.88) будет равен нулю на любом участке, что возможно только при равенстве нулю подинтегрального выражения. Отсюда:

$$\rho \mathbf{v} \cdot \dot{\mathbf{v}} + \rho \boldsymbol{\omega} \cdot \dot{\mathbf{J}} \cdot \boldsymbol{\omega} + \dot{\mathbf{P}} - \rho \mathbf{f} \cdot \mathbf{v} - \rho \boldsymbol{\mu} \cdot \boldsymbol{\omega} - (\mathbf{q} \cdot \mathbf{v})' - (\mathbf{m} \cdot \boldsymbol{\omega})' = 0. \quad (1.89)$$

Раскрыв скобки и сгруппировав слагаемые при  $\mathbf{v}$  и  $\boldsymbol{\omega}$ , уравнение (1.89) может быть записано в виде:

$$\mathbf{v} \cdot \left( \rho \dot{\mathbf{v}} - \rho \mathbf{f} - \mathbf{q}' \right) - \mathbf{q} \cdot \mathbf{v}' + \boldsymbol{\omega} \cdot \left( \rho \dot{\mathbf{J}} \cdot \boldsymbol{\omega} - \rho \boldsymbol{\mu} - \mathbf{m}' \right) - \mathbf{m} \cdot \boldsymbol{\omega}' + \dot{\mathbf{P}} = 0. \quad (1.90)$$

Вследствие уравнения (1.46), первая скобка в уравнении (1.90) обращается в ноль. Таким образом, (1.90) примет вид:

$$\boldsymbol{\omega} \cdot \left( \rho \dot{\mathbf{J}} \cdot \boldsymbol{\omega} - \rho \boldsymbol{\mu} - \mathbf{m}' \right) - \mathbf{m} \cdot \boldsymbol{\omega}' - \mathbf{q} \cdot \mathbf{v}' + \dot{\mathbf{P}} = 0. \quad (1.91)$$

Выразив  $(\rho \boldsymbol{\mu} + \mathbf{m}')$  из (1.53), уравнение (1.91) может быть записано в виде:

$$\boldsymbol{\omega} \cdot \left( \rho \dot{\mathbf{J}} \cdot \boldsymbol{\omega} - \rho (\mathbf{J} \cdot \boldsymbol{\omega}) + \mathbf{r}' \times \mathbf{q} \right) - \mathbf{m} \cdot \boldsymbol{\omega}' - \mathbf{q} \cdot \mathbf{v}' + \dot{\mathbf{P}} = 0. \quad (1.92)$$

Или:

$$\boldsymbol{\omega} \cdot \left( \rho \dot{\mathbf{J}} \cdot \boldsymbol{\omega} - \rho \mathbf{J} \cdot \dot{\boldsymbol{\omega}} - \rho \dot{\mathbf{J}} \cdot \boldsymbol{\omega} \right) + \boldsymbol{\omega} \cdot (\mathbf{r}' \times \mathbf{q}) - \mathbf{m} \cdot \boldsymbol{\omega}' - \mathbf{q} \cdot \mathbf{v}' + \dot{\mathbf{P}} = 0. \quad (1.93)$$

Раскрыв первую скобку, (1.93) можно записать в виде:

$$\rho \boldsymbol{\omega} \cdot \dot{\mathbf{J}} \cdot \boldsymbol{\omega} + \boldsymbol{\omega} \cdot (\mathbf{r}' \times \mathbf{q}) - \mathbf{m} \cdot \boldsymbol{\omega}' - \mathbf{q} \cdot \mathbf{v}' + \dot{\mathbf{P}} = 0.$$

Как было показано выше, слагаемое  $\rho \boldsymbol{\omega} \cdot \dot{\mathbf{J}} \cdot \boldsymbol{\omega}$  обращается в ноль, таким образом:

$$(\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}') \cdot \mathbf{q} - \mathbf{m} \cdot \boldsymbol{\omega}' - \mathbf{q} \cdot \mathbf{v}' + \dot{\mathbf{P}} = 0. \quad (1.94)$$

Или:

$$-(\mathbf{r}' \times \boldsymbol{\omega}) \cdot \mathbf{q} - \mathbf{m} \cdot \boldsymbol{\omega}' - \mathbf{q} \cdot \mathbf{v}' + \dot{\mathbf{P}} = 0. \quad (1.95)$$

Из уравнения (1.95) можем получить выражение для  $\dot{\mathbf{P}}$ :

$$\dot{\mathbf{P}} = \mathbf{m} \cdot \boldsymbol{\omega}' + \mathbf{q} \cdot (\mathbf{v}' + \mathbf{r}' \times \boldsymbol{\omega}). \quad (1.96)$$

Используя уравнения совместности для традиционных векторов деформаций (1.58) и (1.69), полученные ранее, выражение (1.96) может быть записано в виде:

$$\dot{\mathbf{P}} = \mathbf{m} \cdot \left( \dot{\boldsymbol{\psi}} + (\boldsymbol{\psi} \times \boldsymbol{\omega}) \right) + \mathbf{q} \cdot \left( \dot{\boldsymbol{\varepsilon}} - \boldsymbol{\omega} \times \boldsymbol{\varepsilon} \right). \quad (1.97)$$

Окончательно:

$$\dot{\mathbf{P}} = \mathbf{m} \cdot \dot{\boldsymbol{\psi}} + \mathbf{q} \cdot \dot{\boldsymbol{\varepsilon}} + \boldsymbol{\omega} \cdot (\mathbf{m} \times \boldsymbol{\psi} + \mathbf{q} \times \boldsymbol{\varepsilon}). \quad (1.98)$$

Третье слагаемое в выражении (1.98) свидетельствует о том, что общепринятые традиционные векторы усилий и деформаций не являются энергетически сопряженными, поскольку:

$$\dot{\mathbf{P}} \neq \mathbf{m} \cdot \dot{\boldsymbol{\psi}} + \mathbf{q} \cdot \dot{\boldsymbol{\varepsilon}}. \quad (1.99)$$

Для энергетически несопряженных векторов невозможна классическая вариационная постановка в виде задачи поиска точки стационарности функционала. Перейдем к повернутым векторам деформаций, которые являются энергетически сопряженными [35].

Подставим в выражение (1.96) повернутые векторы деформаций, используя уравнения совместности (1.73) и (1.80), полученные ранее. Тогда, выражение (1.96) может быть записано в виде:

$$\dot{\mathbf{P}} = \mathbf{m} \cdot \mathbf{P} \cdot \dot{\boldsymbol{\Psi}} + \mathbf{q} \cdot \mathbf{P} \cdot \dot{\mathbf{E}}. \quad (1.100)$$

Поскольку для любого вектора справедливо равенство  $\mathbf{A} \cdot \mathbf{a} = \mathbf{a} \cdot \mathbf{A}^T$ , выражение (1.100) примет вид:

$$\dot{\mathbf{P}} = (\mathbf{P}^T \cdot \mathbf{m}) \cdot \dot{\boldsymbol{\Psi}} + (\mathbf{P}^T \cdot \mathbf{q}) \cdot \dot{\mathbf{E}}. \quad (1.101)$$

Подставив выражения для повернутых векторов усилий (1.10), (1.11) в (1.101), окончательно получим:

$$\dot{\mathbf{P}} = \mathbf{M} \cdot \dot{\boldsymbol{\Psi}} + \mathbf{Q} \cdot \dot{\mathbf{E}}. \quad (1.102)$$

Таким образом, можно сделать вывод, что повернутые векторы деформаций и усилий являются энергетически сопряженными.

Получим физические уравнения. Поскольку в упругом теле энергия деформации  $\mathbf{P}(\mathbf{E}, \boldsymbol{\Psi})$  зависит только от векторов деформаций, производная по времени от энергии деформации может быть записана в виде:

$$\dot{\mathbf{P}} = \frac{\partial \mathbf{P}}{\partial \mathbf{E}} \cdot \dot{\mathbf{E}} + \frac{\partial \mathbf{P}}{\partial \boldsymbol{\Psi}} \cdot \dot{\boldsymbol{\Psi}}. \quad (1.103)$$

Приравнивая левые части выражений (1.102) и (1.103), можем получить:

$$\frac{\partial \mathbf{P}}{\partial \mathbf{E}} \cdot \dot{\mathbf{E}} + \frac{\partial \mathbf{P}}{\partial \boldsymbol{\Psi}} \cdot \dot{\boldsymbol{\Psi}} = \mathbf{M} \cdot \dot{\boldsymbol{\Psi}} + \mathbf{Q} \cdot \dot{\mathbf{E}}. \quad (1.104)$$

Окончательно, из (1.104) мы можем получить физические уравнения:

$$\begin{cases} \mathbf{Q} = \frac{\partial \Pi}{\partial \mathbf{E}}, \\ \mathbf{M} = \frac{\partial \Pi}{\partial \Psi}. \end{cases} \quad (1.105)$$

Рассмотрим физически линейный материал. В этом случае энергия деформации должна квадратично зависеть от векторов деформаций  $\mathbf{E}$ ,  $\Psi$ . Таким образом:

$$\Pi(\mathbf{E}, \Psi) = \frac{1}{2} \mathbf{E} \cdot \mathbf{C}_1 \cdot \mathbf{E} + \frac{1}{2} \Psi \cdot \mathbf{C}_2 \cdot \Psi, \quad (1.106)$$

Тензоры  $\mathbf{C}_1$  и  $\mathbf{C}_2$  в главных осях инерции сечения имеют следующий вид:

$$\begin{aligned} \mathbf{C}_1 &= k_1 \mathbf{e}_1 \mathbf{e}_1 + k_2 (\mathbf{e}_2 \mathbf{e}_2 + \mathbf{e}_3 \mathbf{e}_3), \\ \mathbf{C}_2 &= k_{\text{кр}} \mathbf{e}_1 \mathbf{e}_1 + k_{\text{изг}2} \mathbf{e}_2 \mathbf{e}_2 + k_{\text{изг}3} \mathbf{e}_3 \mathbf{e}_3. \end{aligned} \quad (1.107)$$

где  $\mathbf{e}_1$  – единичный вектор, направленный вдоль оси стержня;  $\mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3$  – единичные векторы главных осей поперечного сечения стержня.

Или в матричном виде:

$$\begin{aligned} \mathbf{C}_1 &= \begin{pmatrix} k_1 & 0 & 0 \\ 0 & k_2 & 0 \\ 0 & 0 & k_2 \end{pmatrix}, \\ \mathbf{C}_2 &= \begin{pmatrix} k_{\text{кр}} & 0 & 0 \\ 0 & k_{\text{изг}2} & 0 \\ 0 & 0 & k_{\text{изг}3} \end{pmatrix}, \end{aligned} \quad (1.108)$$

где  $k_1$  – жесткость на растяжение – сжатие,  $k_2$  – жесткость на сдвиг  $k_{\text{кр}}$  – жесткость на кручение,  $k_{\text{изг}}$  – жесткость на изгиб.

Для физически линейного материала жесткости имеют следующий вид [46, 49]:

$$\begin{aligned} k_1 &= EA, \\ k_2 &= GAk, \\ k_{\text{кр}} &= GJ_p, \\ k_{\text{изг}2} &= EJ_2, \\ k_{\text{изг}3} &= EJ_3. \end{aligned} \quad (1.109)$$

где  $E$  – модуль Юнга;  $A$  – площадь поперечного сечения;  $J$  – момент инерции сечения;  $J_p$  – полярный момент инерции площади поперечного сечения;  $G$  – модуль сдвига;  $k$  – коэффициент формы сечения.

Из выражений (1.105) и (1.106) вытекают следующие уравнения:

$$\begin{cases} \mathbf{Q} = \frac{\partial \Pi}{\partial \mathbf{E}} = \mathbf{C}_1 \cdot \mathbf{E}, \\ \mathbf{M} = \frac{\partial \Pi}{\partial \Psi} = \mathbf{C}_2 \cdot \Psi. \end{cases} \quad (1.110)$$

Уравнения (1.110) являются физическими уравнениями для упругого физически линейного материала.

#### 1.4 Вычисление вариаций векторов деформаций

В следующем параграфе будет представлена вариационная постановка нелинейной задачи статики упругих стержней. Для доказательства эквивалентности дифференциальной и вариационной постановок задачи необходимо вычислить вариации. Поскольку в литературе отсутствуют выражения для вариаций деформаций, настоящий параграф посвящен вычислению вариаций с использованием тензора Жилина  $\mathbf{Z}$  [23, 113], который определяется по следующей формуле:

$$\mathbf{Z} = \mathbf{Z}(\varphi) = \mathbf{I} \frac{\sin \Phi}{\Phi} + \frac{1 - \cos \Phi}{\Phi^2} \mathbf{I} \times \varphi + \frac{\Phi - \sin \Phi}{\Phi^3} \varphi \varphi. \quad (1.111)$$

Хотя выражение (1.111) было известно ранее, однако именно Павел Андреевич Жилин систематизировал и исследовал свойства данного тензора, поэтому далее выражение (1.111) мы будем обозначать как тензор Жилина  $\mathbf{Z}$ . Тензор  $\mathbf{Z}$  был введен П.А. Жилиным в задачах о движении абсолютно твердого тела. Повороты в абсолютно твердом теле описываются с помощью тензора поворота  $\mathbf{P}(t)$ , который является функцией времени  $t$ .

Тензор Жилина связывает угловую скорость  $\boldsymbol{\omega}$  с производной по времени от вектора поворота [104]:

$$\boldsymbol{\omega} = \mathbf{Z} \cdot \frac{\partial \varphi}{\partial t} \quad (1.112)$$

Вектор угловой скорости тела  $\boldsymbol{\omega}$ , как было показано ранее, определяется формулами:

$$\boldsymbol{\omega} = -\frac{1}{2} \left( \frac{\partial \mathbf{P}}{\partial t} \cdot \mathbf{P}^T \right)_x \Leftrightarrow \frac{\partial \mathbf{P}}{\partial t} = \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{P}, \quad (1.113)$$

где  $(\dots)_x$  - векторный инвариант тензора [21, 23, 113].

Несложно показать, что формулы (1.113) аналогичны формулам для определения вектора деформаций  $\Psi$ :

$$\Psi = -\frac{1}{2} \left( \frac{\partial \mathbf{P}}{\partial s} \cdot \mathbf{P}^T \right)_x \Leftrightarrow \mathbf{P}' = \Psi \times \mathbf{P}. \quad (1.114)$$

Используя указанную аналогию, получаем связь вектора деформации  $\boldsymbol{\psi}$  с производной по координате  $s$  от вектора поворота:

$$\boldsymbol{\psi} = \mathbf{Z} \cdot \frac{\partial \boldsymbol{\varphi}}{\partial s}. \quad (1.115)$$

Умножим скалярно левую и правую части выражения (1.115) слева на  $\mathbf{P}^T$ :

$$\mathbf{P}^T \cdot \boldsymbol{\psi} = \mathbf{P}^T \cdot \mathbf{Z} \cdot \frac{\partial \boldsymbol{\varphi}}{\partial s}. \quad (1.116)$$

Исходя из выражения (1.9), выражение (1.116) примет вид:

$$\boldsymbol{\Psi} = \mathbf{P}^T \cdot \mathbf{Z} \cdot \frac{\partial \boldsymbol{\varphi}}{\partial s}. \quad (1.117)$$

Несложно показать, что  $\mathbf{P}^T \cdot \mathbf{Z} = \mathbf{Z}^T$ . Таким образом, соотношение между производной вектора поворота  $\boldsymbol{\varphi}$  и деформацией  $\boldsymbol{\Psi}$  имеет следующий вид:

$$\boldsymbol{\Psi} = \mathbf{Z}^T \cdot \frac{\partial \boldsymbol{\varphi}}{\partial s}. \quad (1.118)$$

Согласно выражению (1.4), будем рассматривать тензор поворота  $\mathbf{P}$  как функцию трех параметров  $\varphi_i$ , где  $\boldsymbol{\varphi} = \varphi_i \mathbf{e}_i$ ,  $\mathbf{e}_i$  - орты ортогональной декартовой системы координат. Здесь и в дальнейшем все индексы имеют значения от 1 до 3.

По аналогии с формулой (1.26), введем три вектора  $\mathbf{H}_i$ :

$$\frac{\partial \mathbf{P}}{\partial \varphi_i} = \mathbf{P} \times \mathbf{H}_i. \quad (1.119)$$

Или, используя выражение (1.118):

$$\mathbf{H}_i = \mathbf{Z}^T \cdot \frac{\partial \boldsymbol{\varphi}}{\partial \varphi_i}. \quad (1.120)$$

Так как  $\frac{\partial \boldsymbol{\varphi}}{\partial \varphi_i} = \mathbf{e}_i$ , выражение (1.120) примет вид:

$$\mathbf{H}_i = \mathbf{Z}^T \cdot \mathbf{e}_i. \quad (1.121)$$

Поскольку  $\mathbf{e}_i$  - линейно независимые единичные векторы, то (1.121) равносильно следующему выражению:

$$\mathbf{Z}^T = \mathbf{H}_i \mathbf{e}_i. \quad (1.122)$$

Так как  $\frac{\partial \mathbf{e}_i}{\partial s} \equiv 0$ , выражение (1.118) примет вид:

$$\boldsymbol{\Psi} = \mathbf{H}_i \frac{\partial \varphi_i}{\partial s}. \quad (1.123)$$

Получим вариацию тензора поворота  $\delta \mathbf{P}$ . Давая приращение функции  $\boldsymbol{\varphi}$ , вычисляем производную по  $\alpha$ , далее полагая  $\alpha = 0$ . Таким образом:



$$\mathbf{P}(\varphi) \rightarrow \left. \frac{d}{d\alpha} \mathbf{P}(\varphi + \alpha \delta\varphi) \right|_{\alpha=0} = \left[ \frac{\partial(\mathbf{P}(\varphi + \alpha \delta\varphi))}{\partial(\varphi_i + \alpha \delta\varphi_i)} \cdot \frac{d(\varphi_i + \alpha \delta\varphi_i)}{d\alpha} \right] \Big|_{\alpha=0} = \frac{\partial \mathbf{P}}{\partial \varphi_i} \cdot \delta\varphi_i, \quad (1.124)$$

где  $\delta\varphi \equiv \mathbf{e}_i \delta\varphi_i$  - вариация вектора поворота  $\varphi$ .

Используя выражение (1.119), выражение для вариации тензора поворота  $\delta\mathbf{P}$  может быть записано в виде:

$$\delta\mathbf{P} = \mathbf{P} \times \mathbf{H}_i \delta\varphi_i. \quad (1.125)$$

Поскольку  $\mathbf{e}_i \cdot \mathbf{e}_k = \delta_{ik}$ , подстановка  $\mathbf{e}_i \cdot \mathbf{e}_k$  в (1.125) не изменит вид выражения:

$$\delta\mathbf{P} = \mathbf{P} \times \mathbf{H}_i \mathbf{e}_i \cdot \mathbf{e}_k \delta\varphi_k. \quad (1.126)$$

Используя выражение (1.122), (1.126) может быть записано в виде:

$$\delta\mathbf{P} = \mathbf{P} \times \mathbf{Z}^T \cdot \mathbf{e}_k \delta\varphi_k. \quad (1.127)$$

Согласно определению вариации вектора поворота, приведенному выше, (1.127) окончательно примет вид:

$$\delta\mathbf{P} = \mathbf{P} \times \mathbf{Z}^T \cdot \delta\varphi. \quad (1.128)$$

Формула (1.128) представляет собой инвариантную запись вариации тензора поворота  $\delta\mathbf{P}$ .

Для вычисления вариаций деформаций воспользуемся явным выражением для вектора деформации  $\Psi$  через вектор поворота  $\varphi$ . Поскольку, исходя из выражения (1.118), вектор деформации  $\Psi$  зависит не только не только от самого вектора поворота  $\varphi$ , но и от производной вектора поворота по координате  $s$ , вариация  $\Psi$  будет иметь вид:

$$\delta\Psi = \frac{\partial\Psi}{\partial\varphi_i} \delta\varphi_i + \frac{\partial\Psi}{\partial\left(\frac{\partial\varphi_i}{\partial s}\right)} \delta\left(\frac{\partial\varphi_i}{\partial s}\right). \quad (1.129)$$

Так как векторы  $\mathbf{H}_i$  не зависят от  $\frac{\partial\varphi_i}{\partial s}$ , то согласно (1.123):

$$\frac{\partial\Psi}{\partial\left(\frac{\partial\varphi_i}{\partial s}\right)} = \mathbf{H}_i. \quad (1.130)$$

Используя равенство  $\delta\left(\frac{\partial\varphi_i}{\partial s}\right) = \frac{\partial(\delta\varphi_i)}{\partial s}$  и подставляя (1.130) в (1.129), получим:

$$\delta\Psi = \frac{\partial\Psi}{\partial\varphi_i} \delta\varphi_i + \mathbf{H}_i \frac{\partial(\delta\varphi_i)}{\partial s}. \quad (1.131)$$

Для вычисления первого слагаемого в (1.131), воспользуемся равенством вторых смешанных производных тензора поворота  $\mathbf{P}$ . Вычислим вторые смешанные производные, используя (1.26) и (1.119):

$$\frac{\partial^2 \mathbf{P}}{\partial \varphi_i \partial s} = \frac{\partial}{\partial \varphi_i} (\mathbf{P} \times \boldsymbol{\Psi}) = (\mathbf{P} \times \mathbf{H}_i) \times \boldsymbol{\Psi} + \mathbf{P} \times \frac{\partial \boldsymbol{\Psi}}{\partial \varphi_i}, \quad (1.132)$$

$$\frac{\partial^2 \mathbf{P}}{\partial s \partial \varphi_i} = \frac{\partial}{\partial s} (\mathbf{P} \times \mathbf{H}_i) = (\mathbf{P} \times \boldsymbol{\Psi}) \times \mathbf{H}_i + \mathbf{P} \times \frac{\partial \mathbf{H}_i}{\partial s}. \quad (1.133)$$

Приравнявая выражения (1.132) и (1.133), получим:

$$(\mathbf{P} \times \mathbf{H}_i) \times \boldsymbol{\Psi} + \mathbf{P} \times \frac{\partial \boldsymbol{\Psi}}{\partial \varphi_i} = (\mathbf{P} \times \boldsymbol{\Psi}) \times \mathbf{H}_i + \mathbf{P} \times \frac{\partial \mathbf{H}_i}{\partial s}. \quad (1.134)$$

Несложно показать, что для любых векторов  $\mathbf{a}$ ,  $\mathbf{b}$  и тензора  $\mathbf{A}$  справедливо равенство:

$$(\mathbf{A} \times \mathbf{a}) \times \mathbf{b} - (\mathbf{A} \times \mathbf{b}) \times \mathbf{a} = \mathbf{A} \times (\mathbf{a} \times \mathbf{b}). \quad (1.135)$$

Используя (1.135), (1.134) может быть записано в виде:

$$\mathbf{P} \times (\mathbf{H}_i \times \boldsymbol{\Psi}) + \mathbf{P} \times \frac{\partial \boldsymbol{\Psi}}{\partial \varphi_i} - \mathbf{P} \times \frac{\partial \mathbf{H}_i}{\partial s} = 0. \quad (1.136)$$

Или, сгруппировав слагаемые, получим:

$$\mathbf{P} \times \left( \mathbf{H}_i \times \boldsymbol{\Psi} + \frac{\partial \boldsymbol{\Psi}}{\partial \varphi_i} - \frac{\partial \mathbf{H}_i}{\partial s} \right) = 0. \quad (1.137)$$

Из (1.137) следует:

$$\frac{\partial \boldsymbol{\Psi}}{\partial \varphi_i} = \frac{\partial \mathbf{H}_i}{\partial s} + \boldsymbol{\Psi} \times \mathbf{H}_i. \quad (1.138)$$

Подставив (1.138) в (1.131), окончательно получим выражение вариации вектора деформации:

$$\delta \boldsymbol{\Psi} = \left( \frac{\partial \mathbf{H}_i}{\partial s} + \boldsymbol{\Psi} \times \mathbf{H}_i \right) \delta \varphi_i + \mathbf{H}_i \frac{\partial (\delta \varphi_i)}{\partial s}. \quad (1.139)$$

Или:

$$\delta \boldsymbol{\Psi} = \frac{\partial}{\partial s} (\mathbf{H}_i \delta \varphi_i) + \boldsymbol{\Psi} \times \mathbf{H}_i \delta \varphi_i. \quad (1.140)$$

Так как  $\frac{\partial \mathbf{e}_i}{\partial s} \equiv 0$ , то, используя (1.122), выражение (1.140) может быть записано в следующем

инвариантном виде:

$$\delta \boldsymbol{\Psi} = \frac{\partial}{\partial s} (\mathbf{Z}^T \cdot \delta \boldsymbol{\varphi}) + \boldsymbol{\Psi} \times \mathbf{Z}^T \cdot \delta \boldsymbol{\varphi}. \quad (1.141)$$

Однако удобнее использовать преобразованную формулу (1.141). Для этого воспользуемся следующими тождествами [23]:

$$\mathbf{Z}^T = \mathbf{P}^T \cdot \mathbf{Z}; \quad (1.142)$$

$$(\mathbf{P} \times \boldsymbol{\Psi})^T = -\boldsymbol{\Psi} \times \mathbf{P}^T. \quad (1.143)$$

Согласно (1.143), выражение (1.26) примет вид:

$$\frac{\partial \mathbf{P}^T}{\partial s} = -\Psi \times \mathbf{P}^T. \quad (1.144)$$

Используя (1.144), выражение для вариации  $\delta\Psi$  (1.141) может быть записано в виде:

$$\begin{aligned} \delta\Psi &= \frac{\partial}{\partial s} (\mathbf{Z}^T \cdot \delta\varphi) + \Psi \times \mathbf{Z}^T \cdot \delta\varphi = \frac{\partial}{\partial s} (\mathbf{P}^T \cdot \mathbf{Z} \cdot \delta\varphi) + \Psi \times \mathbf{Z}^T \cdot \delta\varphi = \frac{\partial \mathbf{P}^T}{\partial s} \cdot \mathbf{Z} \cdot \delta\varphi + \mathbf{P}^T \cdot \frac{\partial}{\partial s} (\mathbf{Z} \cdot \delta\varphi) + \\ &+ \Psi \times \mathbf{Z}^T \cdot \delta\varphi = -\Psi \times \mathbf{P}^T \cdot \mathbf{Z} \cdot \delta\varphi + \mathbf{P}^T \cdot \frac{\partial}{\partial s} (\mathbf{Z} \cdot \delta\varphi) + \Psi \times \mathbf{Z}^T \cdot \delta\varphi = -\Psi \times \mathbf{Z}^T \cdot \delta\varphi + \mathbf{P}^T \cdot \frac{\partial}{\partial s} (\mathbf{Z} \cdot \delta\varphi) + \\ &+ \Psi \times \mathbf{Z}^T \cdot \delta\varphi. \end{aligned}$$

Окончательно, вариация вектора деформации  $\Psi$  будет иметь вид:

$$\delta\Psi = \mathbf{P}^T \cdot \frac{\partial}{\partial s} (\mathbf{Z} \cdot \delta\varphi). \quad (1.145)$$

Вычислим первую вариацию деформации  $\mathbf{E}$ , давая приращение каждому слагаемому выражения (1.8). Вычисляем производную по  $\alpha$ , далее полагая  $\alpha = 0$ . Таким образом:

$$\begin{aligned} \mathbf{E} \rightarrow \frac{d}{d\alpha} (\mathbf{E} + \alpha \delta\mathbf{E}) \Big|_{\alpha=0} &= \frac{d}{d\alpha} \left( (\mathbf{P}^T + \alpha \delta\mathbf{P}^T) \cdot (\mathbf{r} + \alpha \delta\mathbf{r})' + (\mathbf{R} + \alpha \delta\mathbf{R})' \right) \Big|_{\alpha=0} = \\ &= \left( \delta\mathbf{P}^T \cdot (\mathbf{r} + \alpha \delta\mathbf{r})' + (\mathbf{P}^T + \alpha \delta\mathbf{P}^T) \cdot \delta\mathbf{r}' + \delta\mathbf{R}' \right) \Big|_{\alpha=0} = \delta\mathbf{P}^T \cdot \mathbf{r}' + \mathbf{P}^T \cdot \delta\mathbf{r}' + \delta\mathbf{R}'; \end{aligned} \quad (1.146)$$

Поскольку координаты начального положения не варьируются, а  $\mathbf{R}'$  является постоянной величиной, его вариация равна 0. Таким образом, вариация деформации  $\mathbf{E}$  примет вид:

$$\delta\mathbf{E} = \delta\mathbf{P}^T \cdot \mathbf{r}' + \mathbf{P}^T \cdot \delta\mathbf{r}'. \quad (1.147)$$

Используя выражения (1.128) и (1.143), выражение для  $\delta\mathbf{E}$  может быть записано в виде:

$$\delta\mathbf{E} = -(\mathbf{Z}^T \cdot \delta\varphi) \times \mathbf{P}^T \cdot \mathbf{r}' + \mathbf{P}^T \cdot \delta\mathbf{r}'.$$

Или:

$$\delta\mathbf{E} = (\mathbf{P}^T \cdot \mathbf{r}') \times \mathbf{Z}^T \cdot \delta\varphi + \mathbf{P}^T \cdot \delta\mathbf{r}'. \quad (1.148)$$

Согласно выражению (1.142), выражение (1.148) может быть записано в виде:

$$\delta\mathbf{E} = (\mathbf{P}^T \cdot \mathbf{r}') \times \mathbf{P}^T \cdot \mathbf{Z} \cdot \delta\varphi + \mathbf{P}^T \cdot \delta\mathbf{r}'. \quad (1.149)$$

После вынесения общего множителя, выражение для вариации вектора деформации  $\mathbf{E}$  окончательно примет вид:

$$\delta\mathbf{E} = \mathbf{P}^T \cdot (\delta\mathbf{r}' + \mathbf{r}' \times \mathbf{Z} \cdot \delta\varphi) \quad (1.150)$$

## 1.5 Вариационная постановка нелинейных задач статики упругих стержней

Как было показано в параграфе 1.3, традиционные векторы усилий и деформаций не являются энергетически сопряженными и не могут быть использованы в классической вариационной постановке. Далее будут использованы «повернутые» из актуальной в отсчетную конфигурацию векторы усилий  $(\mathbf{M}, \mathbf{Q})$  и деформаций  $(\mathbf{E}, \mathbf{\Psi})$ , которые, в свою очередь, являются энергетически сопряженными. Заменим в полученных в параграфе 1.2 уравнениях движения стержня, выведенных из уравнений баланса импульса (1.46) и кинетического момента (1.53), традиционные векторы усилий на «повернутые». Таким образом, используя выражения (1.12), (1.13), уравнения движения могут быть записаны в виде:

$$\begin{cases} \rho \dot{\mathbf{v}} = (\mathbf{P} \cdot \mathbf{Q})' + \rho \mathbf{f}, \\ \rho (\mathbf{J} \cdot \boldsymbol{\omega})' = (\mathbf{P} \cdot \mathbf{M})' + \mathbf{r}' \times (\mathbf{P} \cdot \mathbf{Q}) + \rho \boldsymbol{\mu}. \end{cases} \quad (1.151)$$

Поскольку в задачах статики инерционные составляющие равны нулю, из уравнений движения (1.151) вытекают статические уравнения (уравнения равновесия):

$$\begin{cases} (\mathbf{P} \cdot \mathbf{Q})' + \rho \mathbf{f} = 0, \\ (\mathbf{P} \cdot \mathbf{M})' + \mathbf{r}' \times (\mathbf{P} \cdot \mathbf{Q}) + \rho \boldsymbol{\mu} = 0. \end{cases} \quad (1.152)$$

Постановка геометрически нелинейной задачи для физически нелинейного стержня состоит из трех групп уравнений: уравнений равновесия (1.152), геометрических уравнений (1.8), (1.26), связывающих между собой перемещения и деформации, и физических уравнений (1.105), связывающих между собой напряжения и деформации.

Уравнения (1.8), (1.26), (1.105) и (1.152) дают полную постановку нелинейной задачи в дифференциальной форме.  $\mathbf{P}, \mathbf{r}, \mathbf{Q}, \mathbf{M}, \mathbf{E}, \mathbf{\Psi}$  – представляют собой восемнадцать неизвестных в восемнадцати уравнениях (1.8), (1.26), (1.105) и (1.152).

Введем функционал Лагранжа:

$$L(\mathbf{r}, \varphi) = \int_0^1 [\Pi(\mathbf{E}, \mathbf{\Psi}) - U_1(\mathbf{r}) - U_2(\varphi)] ds, \quad (1.153)$$

где  $U_1(\mathbf{r})$  – потенциал силовой нагрузки,  $U_2(\varphi)$  – потенциал моментной нагрузки,  $l$  – длина стержня в отсчетной конфигурации.

Функционал (1.153) записан для «незагруженного» на концах стержня. В случае если на концах стержня приложена нагрузка, в функционал (1.153) необходимо включить внеинтегральные слагаемые, как будет показано в главе 2.

Докажем эквивалентность уравнений равновесия (1.152) уравнениям Эйлера вариационной задачи поиска точки стационарности функционала Лагранжа для случая потенциальной нагрузки. Вычислим первую вариацию функционала Лагранжа, давая приращение каждому слагаемому функционала (1.153). Вычисляем производную по  $\alpha$ , далее полагая  $\alpha = 0$ . Таким образом:

$$\begin{aligned} \Pi(\mathbf{E}, \Psi) \rightarrow \frac{d}{d\alpha} \Pi((\mathbf{E} + \alpha\delta\mathbf{E}), (\Psi + \alpha\delta\Psi)) \Big|_{\alpha=0} &= \left( \frac{\partial(\Pi((\mathbf{E} + \alpha\delta\mathbf{E}), (\Psi + \alpha\delta\Psi)))}{\partial(\mathbf{E} + \alpha\delta\mathbf{E})} \cdot \frac{d(\mathbf{E} + \alpha\delta\mathbf{E})}{d\alpha} \right) + \\ &+ \frac{\partial(\Pi((\mathbf{E} + \alpha\delta\mathbf{E}), (\Psi + \alpha\delta\Psi)))}{\partial(\Psi + \alpha\delta\Psi)} \cdot \frac{d(\Psi + \alpha\delta\Psi)}{d\alpha} \Big|_{\alpha=0} = \frac{\partial\Pi}{\partial\mathbf{E}} \cdot \delta\mathbf{E} + \frac{\partial\Pi}{\partial\Psi} \cdot \delta\Psi; \end{aligned}$$

$$U_1(\mathbf{r}) \rightarrow \frac{d}{d\alpha} U_1(\mathbf{r} + \alpha\delta\mathbf{r}) \Big|_{\alpha=0} = \frac{\partial(U_1(\mathbf{r} + \alpha\delta\mathbf{r}))}{\partial(\mathbf{r} + \alpha\delta\mathbf{r})} \cdot \frac{d(\mathbf{r} + \alpha\delta\mathbf{r})}{d\alpha} \Big|_{\alpha=0} = \frac{\partial U_1}{\partial\mathbf{r}} \cdot \delta\mathbf{r};$$

$$U_2(\varphi) \rightarrow \frac{d}{d\alpha} U_2(\varphi + \alpha\delta\varphi) \Big|_{\alpha=0} = \frac{\partial(U_2(\varphi + \alpha\delta\varphi))}{\partial(\varphi + \alpha\delta\varphi)} \cdot \frac{d(\varphi + \alpha\delta\varphi)}{d\alpha} \Big|_{\alpha=0} = \frac{\partial U_2}{\partial\varphi} \cdot \delta\varphi,$$

где  $\delta\mathbf{E}$ ,  $\delta\Psi$ ,  $\delta\mathbf{r}$ ,  $\delta\varphi$  – вариации функций  $\mathbf{E}$ ,  $\Psi$ , радиус – вектора  $\mathbf{r}$  и угла поворота  $\varphi$ , соответственно;  $\alpha$  – числовой параметр.

Таким образом, первая вариация функционала Лагранжа примет вид:

$$\delta L = \int_0^1 \left[ \frac{\partial\Pi}{\partial\mathbf{E}} \cdot \delta\mathbf{E} + \frac{\partial\Pi}{\partial\Psi} \cdot \delta\Psi - \frac{\partial U_1}{\partial\mathbf{r}} \cdot \delta\mathbf{r} - \frac{\partial U_2}{\partial\varphi} \cdot \delta\varphi \right] ds. \quad (1.154)$$

Подставив физические уравнения (1.105) и полученные в параграфе 1.4 выражения для вариаций деформаций (1.145), (1.150), первая вариация может быть записана в виде:

$$\delta L = \int_0^1 \left[ \mathbf{Q} \cdot \mathbf{P}^T \cdot (\delta\mathbf{r}' + \mathbf{r}' \times \mathbf{Z} \cdot \delta\varphi) + \mathbf{M} \cdot \mathbf{P}^T \cdot (\mathbf{Z} \cdot \delta\varphi)' - \frac{\partial U_1}{\partial\mathbf{r}} \cdot \delta\mathbf{r} - \frac{\partial U_2}{\partial\varphi} \cdot \delta\varphi \right] ds. \quad (1.155)$$

Интегрируем по частям, чтобы избавиться от производных от вариаций:

$$\begin{aligned} \int_0^1 (\mathbf{Q} \cdot \mathbf{P}^T \cdot \delta\mathbf{r}') ds &= - \int_0^1 \left( (\mathbf{Q} \cdot \mathbf{P}^T)' \cdot \delta\mathbf{r} \right) ds + (\mathbf{Q} \cdot \mathbf{P}^T \cdot \delta\mathbf{r}) \Big|_0^1 = - \int_0^1 \left( (\mathbf{P} \cdot \mathbf{Q})' \cdot \delta\mathbf{r} \right) ds + ((\mathbf{P} \cdot \mathbf{Q}) \cdot \delta\mathbf{r}) \Big|_0^1; \\ \int_0^1 (\mathbf{M} \cdot \mathbf{P}^T \cdot (\mathbf{Z} \cdot \delta\varphi)') ds &= - \int_0^1 \left( (\mathbf{M} \cdot \mathbf{P}^T)' \cdot \mathbf{Z} \cdot \delta\varphi \right) ds + (\mathbf{M} \cdot \mathbf{P}^T \cdot \mathbf{Z} \cdot \delta\varphi) \Big|_0^1 = \\ &= - \int_0^1 \left( (\mathbf{P} \cdot \mathbf{M})' \cdot \mathbf{Z} \cdot \delta\varphi \right) ds + ((\mathbf{P} \cdot \mathbf{M}) \cdot \mathbf{Z} \cdot \delta\varphi) \Big|_0^1. \end{aligned}$$

Таким образом, после интегрирования по частям первая вариация функционала Лагранжа принимает вид:

$$\delta L = -\int_0^1 \left[ (\mathbf{P} \cdot \mathbf{Q})' \cdot \delta \mathbf{r} - \mathbf{Q} \cdot \mathbf{P}^T \cdot (\mathbf{r}' \times \mathbf{Z} \cdot \delta \varphi) + (\mathbf{P} \cdot \mathbf{M})' \cdot \mathbf{Z} \cdot \delta \varphi + \frac{\partial U_1}{\partial \mathbf{r}} \cdot \delta \mathbf{r} + \frac{\partial U_2}{\partial \varphi} \cdot \delta \varphi \right] ds +$$

$$+ [(\mathbf{P} \cdot \mathbf{Q}) \cdot \delta \mathbf{r} + ((\mathbf{P} \cdot \mathbf{M}) \cdot \mathbf{Z} \cdot \delta \varphi)]_0^1. \quad (1.156)$$

Так как  $\mathbf{Q} \cdot \mathbf{P}^T \cdot (\mathbf{r}' \times \mathbf{Z} \cdot \delta \varphi) = (\mathbf{Q} \cdot \mathbf{P}^T \times \mathbf{r}') \cdot \mathbf{Z} \cdot \delta \varphi = -(\mathbf{r}' \times \mathbf{P} \cdot \mathbf{Q}) \cdot \mathbf{Z} \cdot \delta \varphi$ , первая вариация функционала Лагранжа может быть записана в следующем виде:

$$\delta L = -\int_0^1 \left[ (\mathbf{P} \cdot \mathbf{Q})' \cdot \delta \mathbf{r} + (\mathbf{r}' \times (\mathbf{P} \cdot \mathbf{Q})) \cdot \mathbf{Z} \cdot \delta \varphi + (\mathbf{P} \cdot \mathbf{M})' \cdot \mathbf{Z} \cdot \delta \varphi + \frac{\partial U_1}{\partial \mathbf{r}} \cdot \delta \mathbf{r} + \frac{\partial U_2}{\partial \varphi} \cdot \delta \varphi \right] ds +$$

$$+ [(\mathbf{P} \cdot \mathbf{Q}) \cdot \delta \mathbf{r} + ((\mathbf{P} \cdot \mathbf{M}) \cdot \mathbf{Z} \cdot \delta \varphi)]_0^1. \quad (1.157)$$

Перегруппировывая слагаемые (1.157), получим:

$$\delta L = -\int_0^1 \left[ \left( (\mathbf{P} \cdot \mathbf{Q})' + \frac{\partial U_1}{\partial \mathbf{r}} \right) \cdot \delta \mathbf{r} + \left( (\mathbf{P} \cdot \mathbf{M})' + \mathbf{r}' \times (\mathbf{P} \cdot \mathbf{Q}) \right) \cdot \mathbf{Z} + \frac{\partial U_2}{\partial \varphi} \right] \cdot \delta \varphi ds +$$

$$+ [(\mathbf{P} \cdot \mathbf{Q}) \cdot \delta \mathbf{r} + ((\mathbf{P} \cdot \mathbf{M}) \cdot \mathbf{Z} \cdot \delta \varphi)]_0^1. \quad (1.158)$$

Решением вариационной задачи являются функции  $\mathbf{r}$  и  $\varphi$ , такие, что  $\delta L = 0$  при любых вариациях  $\delta \mathbf{r}$ ,  $\delta \varphi$ , удовлетворяющих главным граничным условиям исходной задачи. Таким образом, из выражения (1.158) следует, что уравнениями Эйлера вариационной задачи  $L \rightarrow \text{СТАЦ}$  являются следующие уравнения:

$$\begin{cases} (\mathbf{P} \cdot \mathbf{Q})' + \frac{\partial U_1}{\partial \mathbf{r}} = 0; \\ \left( (\mathbf{P} \cdot \mathbf{M})' + \mathbf{r}' \times (\mathbf{P} \cdot \mathbf{Q}) \right) \cdot \mathbf{Z} + \frac{\partial U_2}{\partial \varphi} = 0. \end{cases} \quad (1.159)$$

Первое уравнение Эйлера совпадает с первым уравнением (1.152) для случая потенциальной силовой нагрузки:  $\rho \mathbf{f} = \frac{\partial U_1}{\partial \mathbf{r}}$ . Второе уравнение Эйлера будет равносильно второму уравнению (1.152) при условии  $\frac{\partial U_2}{\partial \varphi} = \rho \boldsymbol{\mu} \cdot \mathbf{Z}$ . Последнее выражение, как показано в работах [29, 47], действительно представляет собой правильное выражение для потенциальной моментной нагрузки.

Таким образом, доказана эквивалентность дифференциальной постановки задачи (1.8), (1.26), (1.105) и (1.152) и вариационной постановки  $\delta L = 0$ , где  $L$  – функционал Лагранжа (1.153). Внеинтегральные слагаемые из первой вариации функционала Лагранжа (1.158) позволяют получить естественные граничные условия, что будет показано во второй главе на конкретных задачах.

## 1.6 Основные уравнения и вариационные постановки для плоской задачи нелинейной теории стержней

Перейдем от пространственной задачи к плоской. Рассмотрим первоначально прямолинейный стержень. Выберем в качестве ОК этого стержня его положение вдоль оси  $X$  правой декартовой системы координат  $X, Y, Z$  с ортами  $i, j, k$ , соответственно, как показано на рисунке 1.5. Вектор  $\mathbf{D}_1$  направлен по оси стержня,  $\mathbf{D}_2, \mathbf{D}_3$  – по главным центральным осям инерции сечения, причем  $\mathbf{D}_1 = \text{const}(s)$ ,  $\mathbf{D}_1 = \mathbf{i}$ ,  $\mathbf{D}_2 = \mathbf{j}$ . Деформирование стержня происходит в плоскости  $XU$ . В ОК положение каждой точки стержня задается материальной координатой  $s$ , а стержень занимает отрезок  $0 \leq s \leq L$ , где  $L$  – длина недеформированного стержня.

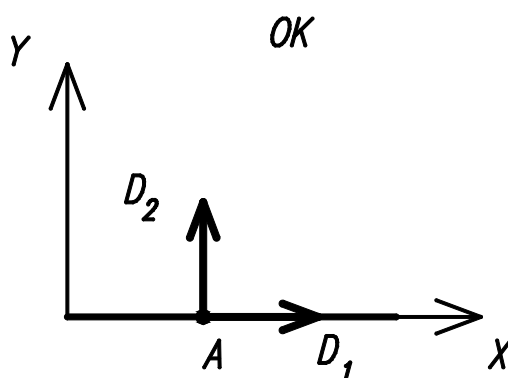


Рисунок 1.5 – Отсчетная ненапряженная конфигурация стержня в плоской задаче

Положение каждой точки в отсчетной конфигурации задается радиус – вектором  $\mathbf{R}(s)$ :

$$\mathbf{R}(s) = s\mathbf{i}. \quad (1.160)$$

В плоской задаче геометрически нелинейного деформирования упругого стержня  $x(s)$ ,  $y(s)$  и  $\varphi(s)$  представляют собой три степени свободы, где  $\varphi(s)$  – угол поворота вокруг оси  $Z$ . В актуальной конфигурации, как показано на рисунке 1.6 положение каждой точки стержня задается радиус – вектором  $\mathbf{r}(s)$ :

$$\mathbf{r}(s) = x(s)\mathbf{i} + y(s)\mathbf{j}. \quad (1.161)$$

Или в матричном виде:

$$\mathbf{r}(s) = \begin{pmatrix} x(s) \\ y(s) \\ 0 \end{pmatrix}. \quad (1.162)$$

Векторы репера в повернутом положении, согласно рисунку 1.6, обозначены  $\mathbf{d}_i = \mathbf{d}_i(s)$ , причем вектор  $\mathbf{d}_1$  не обязан совпадать с вектором  $\mathbf{t}$  – единичным вектором, касательным к оси стержня в АК.

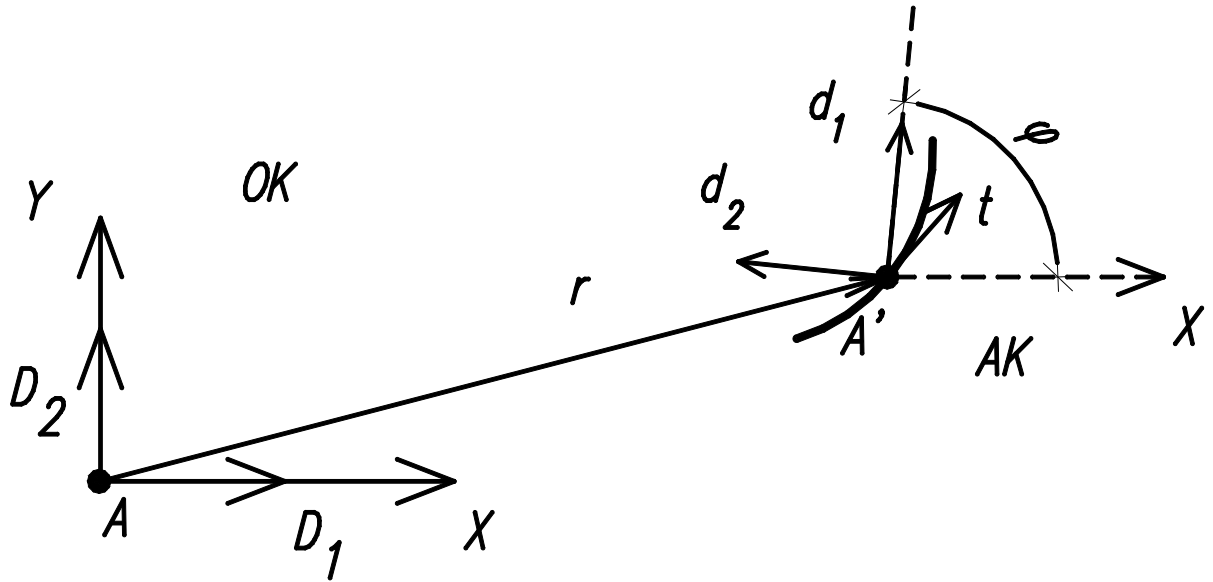


Рисунок 1.6 – Отсчетная и актуальная конфигурации стержня в плоской задаче

Выражения для векторов репера в повернутом положении для плоской задачи имеют следующий вид:

$$\begin{cases} \mathbf{d}_1 = \mathbf{D}_1 \cos \varphi + \mathbf{D}_2 \sin \varphi, \\ \mathbf{d}_2 = -\mathbf{D}_1 \sin \varphi + \mathbf{D}_2 \cos \varphi. \end{cases} \quad (1.163)$$

Тензор поворота  $\mathbf{P} = \mathbf{d}_i \mathbf{D}_i$ , описывающий независимые повороты, в плоской задаче примет вид:

$$\mathbf{P} = \mathbf{D}_1 \mathbf{D}_1 \cos \varphi + \mathbf{D}_2 \mathbf{D}_1 \sin \varphi - \mathbf{D}_1 \mathbf{D}_2 \sin \varphi + \mathbf{D}_2 \mathbf{D}_2 \cos \varphi + \mathbf{k} \mathbf{k}. \quad (1.164)$$

где  $\mathbf{k}$  – единичный вектор, направленный вдоль оси Z.

Или в матричном виде:

$$\mathbf{P} = \begin{pmatrix} \cos \varphi & -\sin \varphi & 0 \\ \sin \varphi & \cos \varphi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}. \quad (1.165)$$

Истинные векторы усилий в актуальной конфигурации в плоской задаче, как показано на рисунке 1.7, имеют следующий вид:

$$\begin{cases} \mathbf{q} = N \mathbf{d}_1 + Q \mathbf{d}_2, \\ \mathbf{m} = M \mathbf{k}. \end{cases} \quad (1.166)$$

где N – продольная сила; Q – перерезывающая сила; M – изгибающий момент. Или в матричном виде:



$$\left\{ \begin{array}{l} \mathbf{Q} = \begin{pmatrix} N \\ Q \\ 0 \end{pmatrix}, \\ \mathbf{M} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ M \end{pmatrix}. \end{array} \right. \quad (1.167)$$

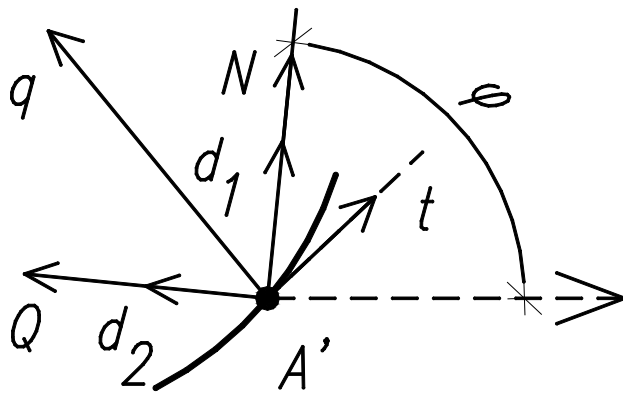


Рисунок 1.7 – Истинные векторы усилий в актуальной конфигурации в плоской задаче

«Повернутые» векторы усилий в плоской задаче, как показано на рисунке 1.8, имеют следующий вид:

$$\left\{ \begin{array}{l} \mathbf{Q} = N\mathbf{D}_1 + Q\mathbf{D}_2, \\ \mathbf{M} = M\mathbf{k}. \end{array} \right. \quad (1.168)$$

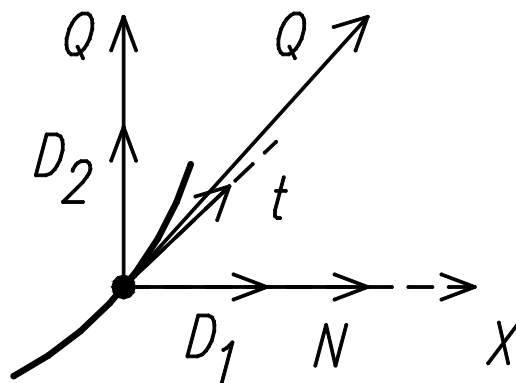


Рисунок 1.8 – Повернутые векторы усилий в плоской задаче

Векторы распределенных сил  $\rho\mathbf{f}$  и моментов  $\rho\mathbf{m}$ , действующих на стержень, в плоской задаче примут вид:

$$\left\{ \begin{array}{l} \rho \mathbf{f} = \begin{pmatrix} q_x \\ q_y \\ 0 \end{pmatrix}, \\ \rho \boldsymbol{\mu} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ m \end{pmatrix}, \end{array} \right. \quad (1.169)$$

где  $q_x$ ,  $q_y$  - проекции распределенных сил на координатные оси  $X$ ,  $Y$ , соответственно;  $m$  - распределенная моментная нагрузка.

Запишем постановку плоской геометрически нелинейной задачи для физически линейного стержня.

Уравнения равновесия (1.152) для пространственной задачи, полученные в параграфе 1.5, после подстановки выражений (1.162), (1.165), (1.167), (1.169) для плоской задачи могут быть записаны в виде:

$$\left\{ \begin{array}{l} \left( \begin{pmatrix} \cos \varphi & -\sin \varphi & 0 \\ \sin \varphi & \cos \varphi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} N \\ Q \\ 0 \end{pmatrix} \right)' + \begin{pmatrix} q_x \\ q_y \\ 0 \end{pmatrix} = 0, \\ \left( \begin{pmatrix} \cos \varphi & -\sin \varphi & 0 \\ \sin \varphi & \cos \varphi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ M \end{pmatrix} \right)' + \begin{pmatrix} x \\ y \\ 0 \end{pmatrix} \times \left( \begin{pmatrix} \cos \varphi & -\sin \varphi & 0 \\ \sin \varphi & \cos \varphi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} N \\ Q \\ 0 \end{pmatrix} \right) + \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ m \end{pmatrix} = 0. \end{array} \right. \quad (1.170)$$

В итоге остаются три уравнения равновесия для плоской задачи геометрически нелинейного деформирования стержня:

$$\left\{ \begin{array}{l} (N \cos \varphi - Q \sin \varphi)' + q_x = 0; \\ (N \sin \varphi + Q \cos \varphi)' + q_y = 0; \\ M' + x'(N \sin \varphi + Q \cos \varphi) + y'(Q \sin \varphi - N \cos \varphi) + m = 0. \end{array} \right. \quad (1.171)$$

Геометрические уравнения (1.8), (1.26) для плоской задачи примут вид:

$$\left\{ \begin{array}{l} \mathbf{E} = \begin{pmatrix} \cos \varphi & -\sin \varphi & 0 \\ \sin \varphi & \cos \varphi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}^T \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \\ 0 \end{pmatrix}' - \begin{pmatrix} s \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}', \\ \mathbf{P}' = \begin{pmatrix} \cos \varphi & -\sin \varphi & 0 \\ \sin \varphi & \cos \varphi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \times \Psi. \end{array} \right. \quad (1.172)$$

Поскольку  $(\ )' \equiv \frac{\partial}{\partial s}$ ,  $(s)' = \frac{\partial s}{\partial s} = 1$ . Таким образом, первое уравнение системы может быть

записано в виде:

$$\left\{ \begin{array}{l} \varepsilon = x' \cos \varphi + y' \sin \varphi - 1, \\ \gamma = -x' \sin \varphi + y' \cos \varphi, \end{array} \right. \quad (1.173)$$

где  $\varepsilon$ ,  $\gamma$  – компоненты деформации растяжения – сжатия и сдвига, соответственно, выраженные через функции  $x(s)$ ,  $y(s)$  и  $\varphi(s)$ .

Для получения выражения для вектора деформаций  $\Psi$  для плоской задачи воспользуемся выражениями (1.9) и (1.114).

$$\begin{aligned} \mathbf{P}' \cdot \mathbf{P}^T &= \begin{pmatrix} \cos \varphi & -\sin \varphi & 0 \\ \sin \varphi & \cos \varphi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}' \cdot \begin{pmatrix} \cos \varphi & \sin \varphi & 0 \\ -\sin \varphi & \cos \varphi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \\ &= \begin{pmatrix} -\sin \varphi & -\cos \varphi & 0 \\ \cos \varphi & -\sin \varphi & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \varphi' \cdot \begin{pmatrix} \cos \varphi & \sin \varphi & 0 \\ -\sin \varphi & \cos \varphi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \varphi'. \end{aligned} \quad (1.174)$$

Или, записав (1.174) через векторы репера в отсчетной конфигурации ( $\mathbf{D}_1$ ,  $\mathbf{D}_2$  и  $\mathbf{k}$ ):

$$\mathbf{P}' \cdot \mathbf{P}^T = (\mathbf{D}_2 \mathbf{D}_1 - \mathbf{D}_1 \mathbf{D}_2) \varphi'. \quad (1.175)$$

Подставив (1.175) в выражение (1.114), получим:

$$\Psi = -\frac{1}{2}((\mathbf{D}_2 \mathbf{D}_1 - \mathbf{D}_1 \mathbf{D}_2) \varphi')_{\mathbf{x}} = -\frac{1}{2}((\mathbf{D}_2 \times \mathbf{D}_1 - \mathbf{D}_1 \times \mathbf{D}_2) \varphi') = -\frac{1}{2}((-\mathbf{k} - \mathbf{k}) \cdot \varphi') = \varphi' \mathbf{k}. \quad (1.176)$$

Или в матричном виде:

$$\Psi = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \varphi' \end{pmatrix}. \quad (1.177)$$

Перейдем от традиционного к повернутому вектору деформаций, используя выражение (1.9):

$$\Psi = \mathbf{P}^T \cdot \psi. \quad (1.178)$$

Или, в матричном виде:

$$\Psi = \begin{pmatrix} \cos \varphi & \sin \varphi & 0 \\ -\sin \varphi & \cos \varphi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \varphi' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \varphi' \end{pmatrix}. \quad (1.179)$$

Из выражений (1.177) и (1.179) можно сделать вывод, что для плоской задачи традиционный  $\psi$  и повернутый  $\Psi$  векторы деформаций совпадают.

Окончательно геометрические уравнения для плоской задачи геометрически нелинейного деформирования стержня примут вид:

$$\begin{cases} \varepsilon = x' \cos \varphi + y' \sin \varphi - 1, \\ \gamma = -x' \sin \varphi + y' \cos \varphi, \\ \psi = \varphi'. \end{cases} \quad (1.180)$$

где  $\psi$  – компоненты деформации изгиба, выраженные через функции  $\varphi(s)$ .

Физические уравнения (1.110) для физически линейного стержня, как было показано в параграфе 1.3, имеют вид:

$$\begin{cases} \mathbf{Q} = \frac{\partial \Pi}{\partial \mathbf{E}} = \mathbf{C}_1 \cdot \mathbf{E}, \\ \mathbf{M} = \frac{\partial \Pi}{\partial \Psi} = \mathbf{C}_2 \cdot \Psi. \end{cases} \quad (1.181)$$

Используя выражения (1.108) для  $\mathbf{C}_1$  и  $\mathbf{C}_2$  и выражения (1.173), (1.179), для плоской задачи (1.181) можно записать в следующем виде:

$$\begin{cases} \mathbf{Q} = \begin{pmatrix} k_1 & 0 & 0 \\ 0 & k_2 & 0 \\ 0 & 0 & k_2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x' \cos \varphi + y' \sin \varphi - 1 \\ -x' \sin \varphi + y' \cos \varphi \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} k_1(x' \cos \varphi + y' \sin \varphi - 1) \\ k_2(-x' \sin \varphi + y' \cos \varphi) \\ 0 \end{pmatrix}, \\ \mathbf{M} = \begin{pmatrix} k_{кр} & 0 & 0 \\ 0 & k_{изг2} & 0 \\ 0 & 0 & k_{изг3} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \varphi' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ k_{изг3} \cdot \varphi' \end{pmatrix}. \end{cases} \quad (1.182)$$

Окончательно, физические уравнения для физически линейного материала, используя выражения (1.167), (1.180) и (1.182), можно записать в следующем виде:

$$\begin{cases} N = k_1 \varepsilon, \\ Q = k_2 \gamma, \\ M = k_{\text{изгз}} \Psi. \end{cases} \quad (1.183)$$

Физические уравнения для физически нелинейного стержня (1.105) для плоской задачи, используя выражения (1.167), могут быть записаны в виде:

$$N = \frac{\partial \Pi}{\partial \varepsilon}, \quad Q = \frac{\partial \Pi}{\partial \gamma}, \quad M = \frac{\partial \Pi}{\partial \Psi}, \quad (1.184)$$

где  $\Pi(\varepsilon, \gamma, \Psi)$  – энергия деформации для физически нелинейного материала.

## 1.7 Пример физически нелинейной модели для упругих стержней

В качестве примера физически нелинейной модели упругого стержня рассмотрим модель стержня, выполненного из бетона, исследованную в работе В.В. Елисеева [30]. При использовании прямого подхода к физической нелинейности в теории стержней ее определение сводится к определению энергии деформации. Для такой модели характерны более высокая, чем квадратичная степень энергии деформации и нелинейная зависимость между напряжениями и деформациями. Таким образом, постановка геометрически нелинейной задачи для физически нелинейного стержня для рассматриваемой модели состоит из трех групп уравнений: уравнений равновесия (1.152) и геометрических уравнений (1.8), (1.26), которые неизменны как для физически линейных, так и нелинейных моделей стержней, а также физических уравнений, которые зависят непосредственно от характеристик материала (1.105).

Исходя из уравнений (1.105) можно сделать вывод, что для получения физических уравнений необходимо конкретно задать энергию деформации  $\Pi(\mathbf{E}, \Psi)$ .

Существует несколько моделей стержней, выполненных из бетона [2, 11, 32, 39], в том числе и наследственная модель Арутюняна. В данной работе учет физической нелинейности выполнен на основе диаграммы деформирования бетона, приведенной в работе [32]. Для удобства, диаграмма деформирования показана на рисунке 1.9.

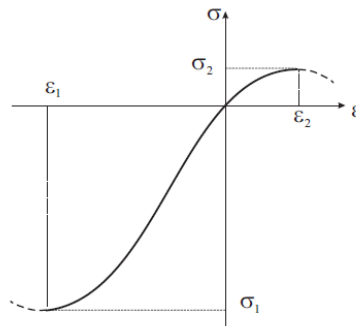


Рисунок 1.9 – Диаграмма деформирования бетона

Для рассматриваемой задачи будем исходить из кубической аппроксимации:

$$\sigma = E\varepsilon + E_1\varepsilon^2 + E_2\varepsilon^3, \quad (1.185)$$

где  $\varepsilon$  – компоненты деформации растяжения – сжатия (относительное удлинение);  $E$  – обычный модуль Юнга;  $E_1 = -\frac{E}{2}\left(\frac{1}{\varepsilon_1} + \frac{1}{\varepsilon_2}\right) < 0$ ;  $E_2 = \frac{E}{3\varepsilon_1\varepsilon_2} < 0$ ;  $\varepsilon_1$  – деформация растяжения – сжатия, соответствующая разрушающему напряжению при сжатии (предельная сжимаемость);  $\varepsilon_2$  – деформация растяжения – сжатия, соответствующая разрушающему напряжению при растяжении (предельная растяжимость), как показано на диаграмме деформирования бетона, приведенной на рисунке 1.9.

Несложно показать, что выражения для  $E_1$  и  $E_2$ , являющиеся критическими точками, согласно рисунку 1.9, могут быть получены из условия равенства нулю первой производной выражения (1.185) в точках  $\varepsilon_1$  и  $\varepsilon_2$ .

Первая производная выражения (1.185) в точках  $\varepsilon_1$  и  $\varepsilon_2$  имеет следующий вид:

$$\begin{cases} \frac{\partial \sigma}{\partial \varepsilon}(\varepsilon_1) = E + 2E_1\varepsilon_1 + 3E_2\varepsilon_1^2; \\ \frac{\partial \sigma}{\partial \varepsilon}(\varepsilon_2) = E + 2E_1\varepsilon_2 + 3E_2\varepsilon_2^2. \end{cases} \quad (1.186)$$

Из условия равенства нулю производной (1.185) в точках  $\varepsilon_1$  и  $\varepsilon_2$  вытекает следующая система уравнений:

$$\begin{cases} E + 2E_1\varepsilon_1 + 3E_2\varepsilon_1^2 = 0; \\ E + 2E_1\varepsilon_2 + 3E_2\varepsilon_2^2 = 0. \end{cases} \quad (1.187)$$

Решение системы (1.187) может быть записано в следующем виде:

$$\begin{cases} E_1 = -\frac{E}{2}\left(\frac{1}{\varepsilon_1} + \frac{1}{\varepsilon_2}\right); \\ E_2 = \frac{E}{3\varepsilon_1\varepsilon_2}. \end{cases} \quad (1.188)$$

Покажем, что точки  $\varepsilon_1$  и  $\varepsilon_2$  являются точками минимума и максимума, соответственно. Для этого запишем выражение для второй производной выражения (1.185) и определим знак производной в указанных точках. Таким образом, выражение для второй производной в точках  $\varepsilon_1$  и  $\varepsilon_2$  может быть записано в виде:

$$\begin{cases} \frac{\partial^2 \sigma}{\partial \varepsilon^2}(\varepsilon_1) = 2E_1 + 6E_2\varepsilon_1; \\ \frac{\partial^2 \sigma}{\partial \varepsilon^2}(\varepsilon_2) = 2E_1 + 6E_2\varepsilon_2. \end{cases} \quad (1.189)$$

Подставим выражения  $E_1$  и  $E_2$  в (1.189):

$$\begin{cases} \frac{\partial^2 \sigma}{\partial \varepsilon^2}(\varepsilon_1) = -E \left( \frac{1}{\varepsilon_1} + \frac{1}{\varepsilon_2} \right) + \frac{2E}{\varepsilon_2}; \\ \frac{\partial^2 \sigma}{\partial \varepsilon^2}(\varepsilon_2) = -E \left( \frac{1}{\varepsilon_1} + \frac{1}{\varepsilon_2} \right) + \frac{2E}{\varepsilon_1}. \end{cases} \quad (1.190)$$

Раскрывая скобки и перегруппировывая слагаемые, окончательно (1.190) может быть записано в виде:

$$\begin{cases} \frac{\partial^2 \sigma}{\partial \varepsilon^2}(\varepsilon_1) = E \left( \frac{1}{\varepsilon_2} - \frac{1}{\varepsilon_1} \right); \\ \frac{\partial^2 \sigma}{\partial \varepsilon^2}(\varepsilon_2) = E \left( \frac{1}{\varepsilon_1} - \frac{1}{\varepsilon_2} \right). \end{cases} \quad (1.191)$$

Так как  $E > 0$ ,  $\varepsilon_1 < 0$ ,  $\varepsilon_2 > 0$ , и  $|\varepsilon_1| > \varepsilon_2$ , следовательно  $\left( \frac{1}{\varepsilon_2} - \frac{1}{\varepsilon_1} \right) > 0$ ,  $\left( \frac{1}{\varepsilon_1} - \frac{1}{\varepsilon_2} \right) < 0$ .

Отсюда:

$$\begin{cases} \frac{\partial^2 \sigma}{\partial \varepsilon^2}(\varepsilon_1) > 0; \\ \frac{\partial^2 \sigma}{\partial \varepsilon^2}(\varepsilon_2) < 0. \end{cases}$$

Таким образом, точка  $\varepsilon_1$  является точкой минимума, а  $\varepsilon_2$  является точкой максимума, что соответствует диаграмме, приведенной на рисунке 1.9.

В дальнейшем при рассмотрении задач необходимо решать нелинейное уравнение (1.185) относительно  $\varepsilon$  при заданном  $\sigma$ . Покажем, что для всех значений  $\sigma$  ( $\sigma_1 < \sigma < \sigma_2$ ) уравнение (1.185) имеет единственное решение на всем участке от  $\varepsilon_1$  до  $\varepsilon_2$ . Для этого достаточно показать, что производная функции  $f(\varepsilon) = E\varepsilon + E_1\varepsilon^2 + E_2\varepsilon^3$  на участке  $(\varepsilon_1; \varepsilon_2)$  строго возрастает, то есть достаточно доказать, что  $f'(\varepsilon) > 0$  на указанном участке.

Вычислим первую производную (1.185) в точке  $\varepsilon$  и подставим выражения (1.188):

$$\frac{\partial \sigma}{\partial \varepsilon} = E - E\varepsilon \left( \frac{1}{\varepsilon_1} + \frac{1}{\varepsilon_2} \right) + \frac{E\varepsilon^2}{\varepsilon_1\varepsilon_2}.$$

Или, раскрывая скобки и перегруппировывая слагаемые:

$$\frac{\partial \sigma}{\partial \varepsilon} = \frac{E}{\varepsilon_1\varepsilon_2} \left( \varepsilon^2 - \varepsilon(\varepsilon_1 + \varepsilon_2) + \varepsilon_1\varepsilon_2 \right) \quad (1.192)$$

Воспользуемся методом интервалов. Согласно (1.187), (1.188), корнями квадратного уравнения  $(\varepsilon^2 - \varepsilon(\varepsilon_1 + \varepsilon_2) + \varepsilon_1\varepsilon_2)$  являются точки  $\varepsilon_1$  и  $\varepsilon_2$ . Таким образом, (1.192) примет вид:

$$\frac{\partial \sigma}{\partial \varepsilon} = \frac{E}{\varepsilon_1\varepsilon_2} ((\varepsilon - \varepsilon_1)(\varepsilon - \varepsilon_2)). \quad (1.193)$$

Определим промежуток, на котором первая производная выражения (1.185) будет больше нуля. Таким образом, необходимо найти промежуток, на котором будет выполняться неравенство:

$$\frac{E}{\varepsilon_1\varepsilon_2} ((\varepsilon - \varepsilon_1)(\varepsilon - \varepsilon_2)) > 0. \quad (1.194)$$

Рассмотрим интервал  $(\varepsilon_1; \varepsilon_2)$ . Подставим в (1.194) любое  $\varepsilon \in (\varepsilon_1; \varepsilon_2)$ :

Как было сказано ранее,  $\varepsilon_1 < 0$ ,  $\varepsilon_2 > 0$ , следовательно,  $\frac{E}{\varepsilon_1\varepsilon_2} < 0$ ;  $(\varepsilon - \varepsilon_1) > 0$ ;  $(\varepsilon - \varepsilon_2) < 0$ .

Таким образом, неравенство (1.194) выполняется в любой точке  $\varepsilon$ , принадлежащей промежутку  $(\varepsilon_1; \varepsilon_2)$ .

Следовательно, первая производная (1.192) имеет положительное значение при любом  $\varepsilon \in (\varepsilon_1; \varepsilon_2)$ . Таким образом, уравнение (1.185) имеет единственное решение, что потребуется нам в дальнейшем.

Согласно [30], выражение для напряжения  $\sigma_x$  имеет следующий вид:

$$\begin{aligned} \sigma_x = & E(\varepsilon + \psi_y z - \psi_z y) + E_1(\varepsilon^2 + \psi_y^2 z^2 + \psi_z^2 y^2 + 2\varepsilon(\psi_y z - \psi_z y) - 2\psi_y \psi_z yz) + \\ & + E_2(\varepsilon^3 + 3\varepsilon^2(\psi_y z - \psi_z y) + 3\varepsilon(\psi_y^2 z^2 + \psi_z^2 y^2 - 2\psi_y \psi_z yz) + \psi_y^3 z^3 - 3\psi_y^2 \psi_z yz^2 + \\ & + 3\psi_y \psi_z^2 y^2 z - \psi_z^3 y^3), \end{aligned} \quad (1.195)$$

где  $\sigma_x$  – нормальное напряжение;  $\psi_y, \psi_z$  – компоненты деформации изгиба относительно осей Y и Z, соответственно;  $y$  и  $z$  – координаты точек сечения относительно осей Y и Z. Модель стержня расположена вдоль оси X, оси Y и Z расположены в плоскости сечения стержня.

Касательные напряжения, согласно [30] имеют вид:

$$\tau_y = (\gamma_y - \psi_x z) \cdot \left[ G + G_2(\gamma_y^2 + \gamma_z^2 + \psi_x^2(y^2 + z^2) + 2\psi_x(y\gamma_z - z\gamma_y)) \right]; \quad (1.196)$$

$$\tau_z = (\gamma_z + \psi_x y) \cdot \left[ G + G_2(\gamma_y^2 + \gamma_z^2 + \psi_x^2(y^2 + z^2) + 2\psi_x(y\gamma_z - z\gamma_y)) \right], \quad (1.197)$$

где  $\tau_y, \tau_z$  – касательные напряжения относительно осей Y и Z, соответственно;  $\gamma_y, \gamma_z$  – компоненты деформации сдвига относительно осей Y и Z, соответственно;  $\psi_x$  – компоненты деформации кручения относительно оси X;  $G$  — модуль сдвига;  $G_2 = -\frac{G}{4\varepsilon_2^2}$ .

Продольная сила N вычисляется по формуле [30]:



$$N = \int_A \sigma_x dA, \quad (1.198)$$

где  $A$  – площадь поперечного сечения стержня.

Ход дальнейшего получения физических уравнений для модели стержня продемонстрирован на примере модели стержня прямоугольного сечения. Для прямоугольного сечения координаты точек сечения  $y$  и  $z$  находятся в пределах:  $-\frac{h_y}{2} \leq y \leq \frac{h_y}{2}$ ;  $-\frac{h_z}{2} \leq z \leq \frac{h_z}{2}$ , где  $h_y$  – высота сечения,  $h_z$  – ширина сечения, как показано на рисунке 1.10.

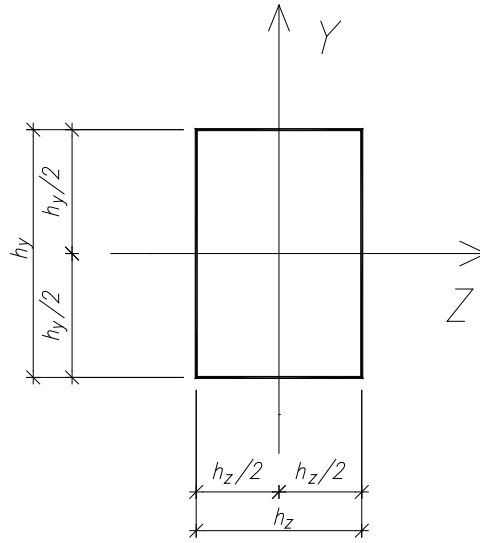


Рисунок 1.10 – Параметры сечения стержня

Подставив в (1.198) соответствующее выражение (1.195) для нормального напряжения и проинтегрировав, получим следующее выражение для  $N$ :

$$\begin{aligned} N = & \int_{-\frac{h_y}{2}}^{\frac{h_y}{2}} \int_{-\frac{h_z}{2}}^{\frac{h_z}{2}} \left[ E(\varepsilon + \psi_y z - \psi_z y) + E_1(\varepsilon^2 + \psi_y^2 z^2 + \psi_z^2 y^2 + 2\varepsilon(\psi_y z - \psi_z y) - 2\psi_y \psi_z yz) + \right. \\ & + E_2(\varepsilon^3 + 3\varepsilon^2(\psi_y z - \psi_z y) + 3\varepsilon(\psi_y^2 z^2 + \psi_z^2 y^2 - 2\psi_y \psi_z yz) + \psi_y^3 z^3 - 3\psi_y^2 \psi_z yz^2 + \\ & \left. + 3\psi_y \psi_z^2 y^2 z - \psi_z^3 y^3) \right] d(yz) = E\varepsilon h_y h_z + E_1 \left( \varepsilon^2 h_y h_z + \frac{\psi_y^2 h_y h_z^3}{12} + \frac{\psi_z^2 h_y^3 h_z}{12} \right) + \\ & + E_2 \left( \varepsilon^3 h_y h_z + \varepsilon \left( \frac{\psi_y^2 h_y h_z^3}{4} + \frac{\psi_z^2 h_y^3 h_z}{4} \right) \right). \end{aligned}$$

Введем обозначения:

$$A = h_y h_z \quad J_y = \frac{h_y h_z^3}{12}; \quad J_z = \frac{h_y^3 h_z}{12}, \quad (1.199)$$

где  $A$  – площадь поперечного сечения;  $J_y, J_z$  – моменты инерции сечения относительно осей  $Y$  и  $Z$ , соответственно.

Используя обозначения (1.199), окончательно, выражение для продольной силы  $N$  может быть записано в виде:

$$N = (E\varepsilon + E_1\varepsilon^2 + E_2\varepsilon^3)A + (E_1 + 3E_2\varepsilon)(\psi_y^2 J_y + \psi_z^2 J_z) \quad (1.200)$$

Перерезывающая сила  $Q_y$  для рассматриваемой задачи будет определяться по формуле [30]:

$$Q_y = \int_A \tau_y dA; \quad (1.201)$$

Подставив в (1.201) соответствующее выражение (1.196) для касательного напряжения относительно оси  $Y$  и проинтегрировав, получим:

$$\begin{aligned} Q_y &= \int_{-\frac{h_y}{2}}^{\frac{h_y}{2}} \int_{-\frac{h_z}{2}}^{\frac{h_z}{2}} \left[ (\gamma_y - \psi_x z) \cdot \left( G + G_2(\gamma_y^2 + \gamma_z^2 + \psi_x^2(y^2 + z^2)) + 2\psi_x(y\gamma_z - z\gamma_y) \right) \right] d(yz) = \\ &= \gamma_y \cdot \left( G + G_2(\gamma_y^2 + \gamma_z^2) \right) h_y h_z + \gamma_y G_2 \psi_x^2 \left( \frac{h_y^3}{12} h_z + h_y \frac{h_z^3}{12} \right) + 2\gamma_y G_2 \psi_x^2 h_y \frac{h_z^3}{12}. \end{aligned}$$

Окончательно, подставив обозначения (1.199), выражение для перерезывающей силы  $Q_y$  может быть записано в виде:

$$Q_y = \gamma_y \cdot \left( G + G_2(\gamma_y^2 + \gamma_z^2) \right) A + \gamma_y G_2 \psi_x^2 (J_z + 3J_y) \quad (1.202)$$

Перерезывающая сила  $Q_z$  для рассматриваемой задачи будет определяться по формуле [30]:

$$Q_z = \int_A \tau_z dA; \quad (1.203)$$

Подставив в (1.203) соответствующее выражение (1.197) для касательного напряжения относительно оси  $Z$  и проинтегрировав, получим:

$$\begin{aligned} Q_z &= \int_{-\frac{h_y}{2}}^{\frac{h_y}{2}} \int_{-\frac{h_z}{2}}^{\frac{h_z}{2}} \left[ (\gamma_z + \psi_x y) \cdot \left( G + G_2(\gamma_y^2 + \gamma_z^2 + \psi_x^2(y^2 + z^2)) + 2\psi_x(y\gamma_z - z\gamma_y) \right) \right] d(yz) = \\ &= \gamma_z \cdot \left( G + G_2(\gamma_y^2 + \gamma_z^2) \right) h_y h_z + \gamma_z G_2 \psi_x^2 \left( \frac{h_y^3}{12} h_z + h_y \frac{h_z^3}{12} \right) + 2\gamma_z G_2 \psi_x^2 \frac{h_y^3}{12} h_z. \end{aligned}$$

Окончательно, используя (1.199), выражение для перерезывающей силы  $Q_z$  может быть записано в виде:

$$Q_z = \gamma_z \cdot \left( G + G_2(\gamma_y^2 + \gamma_z^2) \right) A + \gamma_z G_2 \psi_x^2 (3J_z + J_y) \quad (1.204)$$

Изгибающий момент  $M_y$  для рассматриваемой задачи будет определяться по формуле [30]:

$$M_y = \int_A \sigma_x z dA; \quad (1.205)$$

Подставив в (1.205) соответствующее выражение (1.195) и проинтегрировав, получим:

$$\begin{aligned} M_y = & \int_{-\frac{h_y}{2}}^{\frac{h_y}{2}} \int_{-\frac{h_z}{2}}^{\frac{h_z}{2}} \left[ E(\varepsilon + \psi_y z - \psi_z y) + E_1(\varepsilon^2 + \psi_y^2 z^2 + \psi_z^2 y^2 + 2\varepsilon(\psi_y z - \psi_z y) - 2\psi_y \psi_z yz) + \right. \\ & + E_2(\varepsilon^3 + 3\varepsilon^2(\psi_y z - \psi_z y) + 3\varepsilon(\psi_y^2 z^2 + \psi_z^2 y^2 - 2\psi_y \psi_z yz) + \psi_y^3 z^3 - 3\psi_y^2 \psi_z yz^3 + \\ & \left. + 3\psi_y \psi_z^2 y^2 z - \psi_z^3 y^3) \right] \cdot z \cdot d(yz) = 2E\psi_y \frac{h_y}{2} \frac{h_z^3}{12} + 2E_1 \varepsilon \psi_y h_y \frac{h_z^3}{12} + E_2 \left( 3\varepsilon^2 \psi_y h_y \frac{h_z^3}{12} + \right. \\ & \left. + \psi_y^3 h_y \frac{h_z^5}{80} + 3\psi_y \psi_z^2 \frac{h_y^3}{12} \frac{h_z^3}{12} \right). \end{aligned}$$

Подставив обозначения (1.199), окончательно, выражение для изгибающего момента  $M_y$  может быть записано в виде:

$$M_y = (E + 2E_1 \varepsilon + 3E_2 \varepsilon^2) \psi_y J_y + E_2 \left( \psi_y^2 \frac{h_z^2}{5} + \psi_z^2 \frac{h_y^2}{3} \right) \psi_y \frac{3}{4} J_y. \quad (1.206)$$

Изгибающий момент  $M_z$  для рассматриваемой задачи будет определяться по формуле [30]:

$$M_z = - \int_A \sigma_x y dA; \quad (1.207)$$

Подставив в (1.207) соответствующее выражение (1.195) и проинтегрировав, получим:

$$\begin{aligned} M_z = & - \int_{-\frac{h_y}{2}}^{\frac{h_y}{2}} \int_{-\frac{h_z}{2}}^{\frac{h_z}{2}} \left[ E(\varepsilon + \psi_y z - \psi_z y) + E_1(\varepsilon^2 + \psi_y^2 z^2 + \psi_z^2 y^2 + 2\varepsilon(\psi_y z - \psi_z y) - 2\psi_y \psi_z yz) + \right. \\ & + E_2(\varepsilon^3 + 3\varepsilon^2(\psi_y z - \psi_z y) + 3\varepsilon(\psi_y^2 z^2 + \psi_z^2 y^2 - 2\psi_y \psi_z yz) + \psi_y^3 z^3 - 3\psi_y^2 \psi_z yz^3 + \\ & \left. + 3\psi_y \psi_z^2 y^2 z - \psi_z^3 y^3) \right] \cdot y \cdot d(yz) = 2E\psi_z \frac{h_y^3}{12} \frac{h_z}{2} + 2E_1 \varepsilon \psi_z \frac{h_y^3}{12} h_z + E_2 \left( 3\varepsilon^2 \psi_z \frac{h_y^3}{12} h_z + \right. \\ & \left. + 3\psi_y^2 \psi_z \frac{h_y^3}{12} \frac{h_z^3}{12} + \psi_z^3 \frac{h_y^5}{80} h_z \right). \end{aligned}$$

Используя обозначения (1.199), окончательно, выражение для изгибающего момента  $M_z$  может быть записано в виде:

$$M_z = \left( E + 2E_1\varepsilon + 3E_2\varepsilon^2 \right) \psi_z J_z + E_2 \left( \psi_y^2 \frac{h_z^2}{3} + \psi_z^2 \frac{h_y^2}{5} \right) \psi_z \frac{3}{4} J_z. \quad (1.208)$$

Крутящий момент  $M_x$  для рассматриваемой задачи будет определяться по формуле [30]:

$$M_x = \int_A (y\tau_z - z\tau_y) dA; \quad (1.209)$$

Подставив в (1.209) соответствующие выражения (1.196) и (1.197) и проинтегрировав, окончательно получим:

$$M_x = \left[ G(J_z + J_y) + G_2(\gamma_y^2(J_z + 3J_y) + \gamma_z^2(3J_z + J_y)) + G_2\psi_x^2 \left( \frac{J_z h_y^2 + J_y h_z^2}{8} + \frac{h_y^3 h_z^3}{72} \right) \right] \psi_x. \quad (1.210)$$

Поскольку, исходя из выражений (1.105) и (1.167),  $N$ ,  $Q_y$ ,  $Q_z$ ,  $M_y$ ,  $M_z$ ,  $M_x$  являются частными производными энергии деформации  $W$  по деформациям  $\varepsilon$ ,  $\gamma_y$ ,  $\gamma_z$ ,  $\psi_y$ ,  $\psi_z$ ,  $\psi_x$ , соответственно, то выражение для энергии деформации примет вид:

$$\begin{aligned} W = & \frac{1}{2} \left[ \left( E\varepsilon^2 + \frac{2E_1\varepsilon^3}{3} + \frac{E_2\varepsilon^4}{2} \right) A + GA(\gamma_y^2 + \gamma_z^2) + \frac{1}{2} G_2 A (\gamma_y^2 + \gamma_z^2)^2 + \right. \\ & + \left( E + 2E_1\varepsilon + 3E_2\varepsilon^2 \right) (\psi_y^2 J_y + \psi_z^2 J_z) + G_2 \psi_x^2 [\gamma_y^2 (J_z + 3J_y) + \gamma_z^2 (3J_z + J_y)] + \\ & \left. + \frac{3E_2}{40} (\psi_y^4 J_y h_z^2 + \psi_z^4 J_z h_y^2) + \frac{E_2 \psi_y^2 \psi_z^2 h_y^3 h_z^3}{48} + \frac{G_2 \psi_x^4}{2} \left( \frac{h_y^4 + h_z^4}{8} + \frac{h_y^2 h_z^2}{6} \right) \frac{h_y h_z}{12} \right]. \end{aligned} \quad (1.211)$$

В плоской задаче геометрически нелинейного деформирования упругого стержня перерезывающая сила  $Q_z$  относительно оси  $Z$ , изгибающий момент  $M_y$  относительно оси  $Y$ , а также крутящий момент  $M_x$ , деформация сдвига  $\gamma_z$  относительно оси  $Z$ , компоненты деформации кручения  $\psi_x$  относительно оси  $Z$ , компоненты деформации изгиба  $\psi_y$  относительно оси  $Y$  равны нулю. Таким образом, выражения (1.200), (1.202) и (1.208) в плоской задаче могут быть записаны в следующем виде:

$$N = (E\varepsilon + E_1\varepsilon^2 + E_2\varepsilon^3) A + (E_1 + 3E_2\varepsilon) \psi_z^2 J_z. \quad (1.212)$$

$$Q_y = \gamma_y \cdot (G + G_2\gamma_y^2) A. \quad (1.213)$$

$$M_z = (E + 2E_1\varepsilon + 3E_2\varepsilon^2) \psi_z J_z + E_2 \psi_z^3 J_z \frac{3h_y^2}{20}. \quad (1.214)$$

Полагая в выражении для энергии деформации для пространственной задачи (1.211)  $\gamma_z$ ,  $\psi_x$ ,  $\psi_y$  равными нулю, выражение для энергии деформации для плоской задачи примет вид:

$$W = \frac{1}{2} \left[ \left( E\varepsilon^2 + \frac{2E_1\varepsilon^3}{3} + \frac{E_2\varepsilon^4}{2} \right) A + \left( G\gamma_y^2 + \frac{G_2\gamma_y^4}{2} \right) A + (E + 2E_1\varepsilon + 3E_2\varepsilon^2) \Psi_z^2 J_z + E_2 \Psi_z^4 J_z \frac{3h_y^2}{40} \right]. \quad (1.215)$$

В случае, когда материал, из которого выполнен стержень, является физически линейным,  $E_1$ ,  $E_2$  и  $G_2$  становятся равными нулю. Таким образом, выражение для энергии деформации для плоской задачи геометрически нелинейного деформирования физически линейного стержня можно записать в виде:

$$W = \frac{1}{2} \left[ EA\varepsilon^2 + GA\gamma_y^2 + EJ_z\Psi_z^2 \right] \quad (1.216)$$

Или, используя обозначения (1.109):

$$W = \frac{1}{2} \left[ k_1\varepsilon^2 + k_2\gamma_y^2 + k_3\Psi_z^2 \right] \quad (1.217)$$

## Выводы по главе 1

Приведены основные понятия, определения и уравнения задачи нелинейного деформирования стержней. Показана энергетическая несопряженность традиционных векторов усилий и деформаций. Для энергетически несопряженных векторов невозможна классическая вариационная постановка в виде задачи поиска точки стационарности функционала. В данной главе введены энергетически сопряженные векторы усилий и деформаций.

1. В данной главе приведена вариационная постановка пространственных нелинейных задач упругих стержней. Получено выражение функционала типа Лагранжа вариационной постановки статических задач нелинейного деформирования пространственных стержней. Для гладких решений доказана эквивалентность вариационной и дифференциальной постановок задач.

2. Из общих уравнений для пространственной задачи выведены основные уравнения и для плоской задачи нелинейной теории стержней. Приведен пример физически нелинейной модели для упругих стержней.

3. Основные результаты, полученные в данной главе, были опубликованы в статьях [33 - 35].

## 2 ЗАДАЧИ УСТОЙЧИВОСТИ ПЛОСКИХ УПРУГИХ СТЕРЖНЕЙ С УЧЕТОМ ЖЕСТКОСТЕЙ НА РАСТЯЖЕНИЕ – СЖАТИЕ, СДВИГ И ИЗГИБ. СТАТИЧЕСКИЙ ПОДХОД

### 2.1 Вариационная формулировка статической задачи геометрически нелинейного деформирования физически нелинейного упругого стержня

Рассмотрим первоначально прямолинейный стержень, описанный в параграфе 1.6. На стержень действуют «мертвые» осевая сила  $F_{1вн}$ , параллельная оси  $X$ , перерезывающая сила  $F_{2вн}$ , параллельная оси  $Y$ , и изгибающий момент  $M_{вн}$ .

Постановка геометрически нелинейной задачи для физически нелинейного стержня состоит из трех групп уравнений (1.171), (1.180) и (1.184).

Согласно [16, 49], функционал Лагранжа  $\Pi$  может быть записан в виде:

$$\Pi(x, y, \varphi) = \int_0^L [W(\varepsilon, \gamma, \psi) - q_x(x-s) - q_y y - m\varphi] ds - F_{1вн}(x(L)-L) - F_{2вн}y(L) - M_{вн}\varphi(L). \quad (2.1)$$

Здесь и далее  $W(\varepsilon, \gamma, \psi)$  - энергия деформации.

Докажем, что вариационная задача поиска точки стационарности функционала Лагранжа  $\Pi \rightarrow \text{СТАЦ}$  на гладких решениях равносильна задаче (1.171), (1.180) и (1.184). Вычислим первую вариацию функционала Лагранжа. Для этого сначала дадим приращения функциям  $x, y, \varphi$ :

$$\begin{cases} x \rightarrow x + \alpha \delta x; \\ y \rightarrow y + \alpha \delta y; \\ \varphi \rightarrow \varphi + \alpha \delta \varphi, \end{cases} \quad (2.2)$$

где  $\delta x(s), \delta y(s), \delta \varphi(s)$  – вариации координат  $x, y$  и угла поворота  $\varphi$  соответственно;  $\alpha$  – числовой параметр.

Вычисляем производную по  $\alpha$ , далее полагая  $\alpha = 0$ . Таким образом,

$$\begin{aligned} W \rightarrow \frac{d}{d\alpha} (W((\varepsilon + \alpha \delta \varepsilon), (\gamma + \alpha \delta \gamma), (\psi + \alpha \delta \psi))) \Big|_{\alpha=0} &= \left( \frac{d(W((\varepsilon + \alpha \delta \varepsilon), (\gamma + \alpha \delta \gamma), (\psi + \alpha \delta \psi)))}{d(\varepsilon + \alpha \delta \varepsilon)} \frac{d(\varepsilon + \alpha \delta \varepsilon)}{d\alpha} + \right. \\ &+ \frac{d(W((\varepsilon + \alpha \delta \varepsilon), (\gamma + \alpha \delta \gamma), (\psi + \alpha \delta \psi)))}{d(\gamma + \alpha \delta \gamma)} \frac{d(\gamma + \alpha \delta \gamma)}{d\alpha} + \left. \frac{d(W((\varepsilon + \alpha \delta \varepsilon), (\gamma + \alpha \delta \gamma), (\psi + \alpha \delta \psi)))}{d(\psi + \alpha \delta \psi)} \frac{d(\psi + \alpha \delta \psi)}{d\alpha} \right) \Big|_{\alpha=0} = \\ &= \frac{\partial W}{\partial \varepsilon} \delta \varepsilon + \frac{\partial W}{\partial \gamma} \delta \gamma + \frac{\partial W}{\partial \psi} \delta \psi; \end{aligned}$$

$$q_x(x-s) \rightarrow \frac{d}{d\alpha} (q_x(x + \alpha \delta x - s)) \Big|_{\alpha=0} = q_x \delta x;$$

$$q_y y \rightarrow \frac{d}{d\alpha} (q_y (y + \alpha \delta y)) \Big|_{\alpha=0} = q_y \delta y;$$

$$m\varphi \rightarrow \frac{d}{d\alpha} (m(\varphi + \alpha \delta \varphi)) \Big|_{\alpha=0} = m \delta \varphi;$$

$$F_{1BH} (x(L) - L) \rightarrow \frac{d}{d\alpha} (F_{1BH} (x(L) + \alpha \delta x(L) - L)) \Big|_{\alpha=0} = F_{1BH} \delta x(L);$$

$$F_{2BH} y(L) \rightarrow \frac{d}{d\alpha} (F_{2BH} (y(L) + \alpha \delta y(L))) \Big|_{\alpha=0} = F_{2BH} \delta y(L);$$

$$M_{BH} \varphi(L) \rightarrow \frac{d}{d\alpha} (M_{BH} (\varphi(L) + \alpha \delta \varphi(L))) \Big|_{\alpha=0} = M_{BH} \delta \varphi(L).$$

Таким образом, первая вариация функционала Лагранжа примет вид:

$$\delta \Pi (x, y, \varphi, \delta x, \delta y, \delta \varphi) = \int_0^L \left[ \frac{\partial W}{\partial \varepsilon} \delta \varepsilon + \frac{\partial W}{\partial \gamma} \delta \gamma + \frac{\partial W}{\partial \psi} \delta \psi - q_x \delta x - q_y \delta y - m \delta \varphi \right] ds - F_{1BH} \delta x(L) - F_{2BH} \delta y(L) - M_{BH} \delta \varphi(L). \quad (2.3)$$

Вычислим вариации деформаций, используя геометрические уравнения (1.180):

$$\begin{aligned} \delta \varepsilon &= \frac{d}{d\alpha} ((x + \alpha \delta x)' \cos(\varphi + \alpha \delta \varphi) + (y + \alpha \delta y)' \sin(\varphi + \alpha \delta \varphi) - 1) \Big|_{\alpha=0} = (\delta x' \cos(\varphi + \alpha \delta \varphi) - \\ &- (x + \alpha \delta x)' \delta \varphi \sin(\varphi + \alpha \delta \varphi) + \delta y' \sin(\varphi + \alpha \delta \varphi) + (y + \alpha \delta y)' \delta \varphi \cos(\varphi + \alpha \delta \varphi)) \Big|_{\alpha=0} = \\ &= \delta x' \cos \varphi - x' \delta \varphi \sin \varphi + \delta y' \sin \varphi + y' \delta \varphi \cos \varphi; \\ \delta \gamma &= \frac{d}{d\alpha} (-(x + \alpha \delta x)' \sin(\varphi + \alpha \delta \varphi) + (y + \alpha \delta y)' \cos(\varphi + \alpha \delta \varphi)) \Big|_{\alpha=0} = (-\delta x' \sin(\varphi + \alpha \delta \varphi) - \\ &- (x + \alpha \delta x)' \delta \varphi \cos(\varphi + \alpha \delta \varphi) + \delta y' \cos(\varphi + \alpha \delta \varphi) - (y + \alpha \delta y)' \delta \varphi \sin(\varphi + \alpha \delta \varphi)) \Big|_{\alpha=0} = \\ &= -\delta x' \sin \varphi - x' \delta \varphi \cos \varphi + \delta y' \cos \varphi - y' \delta \varphi \sin \varphi; \\ \delta \psi &= \frac{d}{d\alpha} ((\varphi + \alpha \delta \varphi)') \Big|_{\alpha=0} = \delta \varphi'. \end{aligned} \quad (2.4)$$

Для удобства применим стандартные обозначения для вариаций [47]:

$$\delta x = u, \quad \delta y = v, \quad \delta \varphi = \theta. \quad (2.5)$$

Введем новые обозначения для вариации деформаций:

$$\delta \varepsilon = \varepsilon_B; \quad \delta \gamma = \gamma_B; \quad \delta \psi = \psi_B. \quad (2.6)$$

Подставив (2.5) и (2.6) в выражения (2.4), получим выражения для вариаций деформаций:

$$\begin{aligned} \varepsilon_B &= u' \cos \varphi - x' \theta \sin \varphi + v' \sin \varphi + y' \theta \cos \varphi; \\ \gamma_B &= -u' \sin \varphi - x' \theta \cos \varphi + v' \cos \varphi - y' \theta \sin \varphi; \\ \psi_B &= \theta'. \end{aligned} \quad (2.7)$$

Используя выражения (2.6) и (2.7), первую вариацию функционала (2.3) можно записать в виде:

$$\begin{aligned} \delta\Pi(x, y, \varphi, u, v, \theta) = \int_0^L \left[ \frac{\partial W}{\partial \varepsilon} (u' \cos \varphi - x' \theta \sin \varphi + v' \sin \varphi + y' \theta \cos \varphi) + \frac{\partial W}{\partial \gamma} (-u' \sin \varphi - \right. \\ \left. - x' \theta \cos \varphi + v' \cos \varphi - y' \theta \sin \varphi) + \frac{\partial W}{\partial \psi} \theta' - q_x u - q_y v - m \theta \right] ds - F_{1BH} u(L) - \\ - F_{2BH} v(L) - M_{BH} \theta(L). \end{aligned} \quad (2.8)$$

Перегруппировывая слагаемые относительно  $u$ ,  $v$ ,  $\theta$ , первую вариацию функционала Лагранжа можно записать в виде:

$$\begin{aligned} \delta\Pi(x, y, \varphi, u, v, \theta) = \int_0^L \left[ u' \left( \frac{\partial W}{\partial \varepsilon} \cos \varphi - \frac{\partial W}{\partial \gamma} \sin \varphi \right) - q_x u + v' \left( \frac{\partial W}{\partial \varepsilon} \sin \varphi + \frac{\partial W}{\partial \gamma} \cos \varphi \right) - \right. \\ \left. - q_y v + \frac{\partial W}{\partial \psi} \theta' - \theta \left( x' \left( \frac{\partial W}{\partial \varepsilon} \sin \varphi + \frac{\partial W}{\partial \gamma} \cos \varphi \right) - y' \left( \frac{\partial W}{\partial \varepsilon} \cos \varphi - \frac{\partial W}{\partial \gamma} \sin \varphi \right) + m \right) \right] ds - \\ - F_{1BH} u(L) - F_{2BH} v(L) - M_{BH} \theta(L). \end{aligned}$$

Интегрируем по частям, чтобы избавиться от производных от вариаций:

$$\begin{aligned} \int_0^L u' \left( \frac{\partial W}{\partial \varepsilon} \cos \varphi - \frac{\partial W}{\partial \gamma} \sin \varphi \right) ds &= - \int_0^L u \left( \frac{\partial W}{\partial \varepsilon} \cos \varphi - \frac{\partial W}{\partial \gamma} \sin \varphi \right)' ds + u \left( \frac{\partial W}{\partial \varepsilon} \cos \varphi - \frac{\partial W}{\partial \gamma} \sin \varphi \right) \Big|_0^L; \\ \int_0^L v' \left( \frac{\partial W}{\partial \varepsilon} \sin \varphi + \frac{\partial W}{\partial \gamma} \cos \varphi \right) ds &= - \int_0^L v \left( \frac{\partial W}{\partial \varepsilon} \sin \varphi + \frac{\partial W}{\partial \gamma} \cos \varphi \right)' ds + v \left( \frac{\partial W}{\partial \varepsilon} \sin \varphi + \frac{\partial W}{\partial \gamma} \cos \varphi \right) \Big|_0^L; \\ \int_0^L \theta' \frac{\partial W}{\partial \psi} ds &= - \int_0^L \theta \frac{\partial W}{\partial \psi}' ds + \frac{\partial W}{\partial \psi} \theta \Big|_0^L. \end{aligned}$$

Таким образом, после интегрирования по частям первая вариация функционала Лагранжа принимает вид:

$$\begin{aligned} \delta\Pi(x, y, \varphi, u, v, \theta) = - \int_0^L \left[ u \left( \left( \frac{\partial W}{\partial \varepsilon} \cos \varphi - \frac{\partial W}{\partial \gamma} \sin \varphi \right)' + q_x \right) + v \left( \left( \frac{\partial W}{\partial \varepsilon} \sin \varphi + \frac{\partial W}{\partial \gamma} \cos \varphi \right)' + \right. \right. \\ \left. \left. + q_y \right) + \theta \left( \frac{\partial W}{\partial \psi}' + x' \left( \frac{\partial W}{\partial \varepsilon} \sin \varphi + \frac{\partial W}{\partial \gamma} \cos \varphi \right) - y' \left( \frac{\partial W}{\partial \varepsilon} \cos \varphi - \frac{\partial W}{\partial \gamma} \sin \varphi \right) + m \right) \right] ds - \\ - F_{1BH} u(L) - F_{2BH} v(L) - M_{BH} \theta(L) + \left( u \left( \frac{\partial W}{\partial \varepsilon} \cos \varphi - \frac{\partial W}{\partial \gamma} \sin \varphi \right) + v \left( \frac{\partial W}{\partial \varepsilon} \sin \varphi + \right. \right. \\ \left. \left. + \frac{\partial W}{\partial \gamma} \cos \varphi \right) + \frac{\partial W}{\partial \psi} \theta \right) \Big|_0^L. \end{aligned}$$

Используя физические уравнения (1.184), первую вариацию функционала Лагранжа можно записать в виде:



$$\begin{aligned} \delta\Pi(x, y, \varphi, u, v, \theta) = & -\int_0^L \left[ u \left( (N \cos \varphi - Q \sin \varphi)' + q_x \right) + v \left( (N \sin \varphi + Q \cos \varphi)' + q_y \right) + \right. \\ & \left. \theta \left( M' + x'(N \sin \varphi + Q \cos \varphi) - y'(N \cos \varphi - Q \sin \varphi) + m \right) \right] ds - F_{1вн} u(L) - \\ & - F_{2вн} v(L) - M_{вн} \theta(L) + (u(N \cos \varphi - Q \sin \varphi) + v(N \sin \varphi + Q \cos \varphi) + M\theta)'_0^L. \end{aligned} \quad (2.9)$$

Решением вариационной задачи являются функции  $x$ ,  $y$  и  $\varphi$ , такие, что  $\delta\Pi = 0$  при любых вариациях  $u$ ,  $v$ ,  $\theta$ , удовлетворяющих главным граничным условиям исходной задачи. Из выражения (2.9) следует, что уравнениями Эйлера вариационной задачи  $\Pi \rightarrow \text{СТАЦ}$  являются уравнения равновесия (1.171). Таким образом, доказана требуемая равносильность.

## 2.2 Граничные условия для нелинейных задач статики физически нелинейного стержня

Граничные условия для конкретной задачи могут быть получены из внеинтегральных слагаемых первой вариации функционала Лагранжа (2.9). В качестве примера рассмотрим несколько конкретных задач.

### Классическая задача Эйлера – шарнирно опертый стержень (рисунок 2.1)

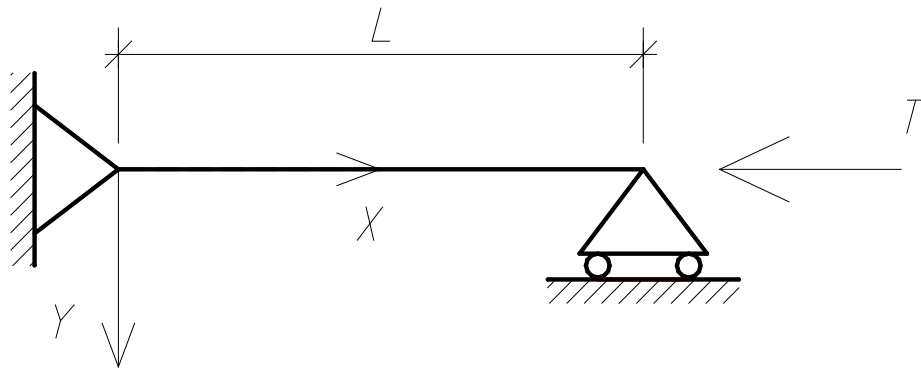


Рисунок 2.1 – Расчетная схема стержня

Рассмотрим классическую задачу Эйлера – шарнирно опертый стержень, сжимаемый мертвой осевой силой  $T$ , как показано на рисунке 2.1.

Главные граничные условия для рассматриваемой задачи:  $x(0) = y(0) = y(L) = 0$ . Найдем вариацию приведенных граничных условий. Для этого даем приращения функциям  $x$ ,  $y$  и  $\varphi$  согласно формулам (2.2), вычисляем производную по  $\alpha$  и полагаем  $\alpha=0$ .

$$x(0) \rightarrow (x(0) + \alpha \delta x(0))'_{\alpha=0} = \delta x(0);$$

$$y(0) \rightarrow (y(0) + \alpha \delta y(0))'_{\alpha=0} = \delta y(0);$$

$$y(L) \rightarrow (y(L) + \alpha \delta y(L))'_{\alpha=0} = \delta y(L).$$

Используя обозначения (2.5), окончательно получаем главные граничные условия для функций  $u$ ,  $v$ ,  $\theta$ :  $u(0) = v(0) = v(L) = 0$ .

Таким образом, из внеинтегральных слагаемых первой вариации функционала (2.9) слагаемые с  $u(0)$ ,  $v(0)$ ,  $v(L)$  пропадают, и остаются только слагаемые с  $u(L)$ ,  $\theta(0)$  и  $\theta(L)$ . Окончательно, внеинтегральные слагаемые для рассматриваемой задачи примут вид:

$$\left( (N \cos \varphi - Q \sin \varphi) \Big|_{s=L} - F_{\text{вн}} \right) \cdot u(L) - M(0) \cdot \theta(0) + (M(L) - M_{\text{вн}}) \cdot \theta(L),$$

где для рассматриваемой задачи  $F_{\text{вн}} = -T$ ;  $M_{\text{вн}} = 0$ .

Из условия  $\delta\Pi = 0$  при любых вариациях  $u$ ,  $v$ ,  $\theta$  следует равенство нулю множителей при  $u(L)$ ,  $\theta(0)$  и  $\theta(L)$ . Таким образом, получаем следующие естественные граничные условия:

$$(N \cos \varphi - Q \sin \varphi) \Big|_{s=L} + T = 0; \quad M(0) = 0; \quad M(L) = 0.$$

Окончательно, граничные условия для поставленной задачи могут быть записаны в виде:

$$\begin{array}{ll} s = 0: & s = L: \\ x(0) = 0; & (N \cos \varphi - Q \sin \varphi) \Big|_{s=L} + T = 0; \\ y(0) = 0; & y(L) = 0; \\ M(0) = 0; & M(L) = 0. \end{array} \quad (2.10)$$

### Консольный стержень (рисунок 2.2)

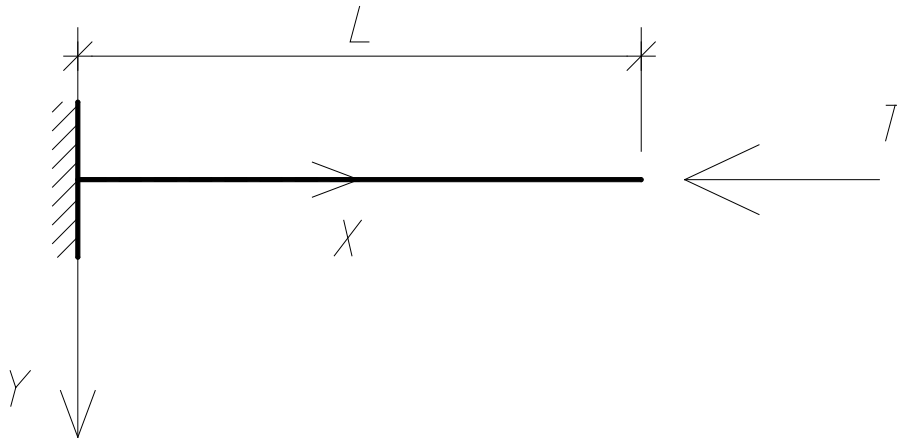


Рисунок 2.2 – Расчетная схема стержня

Рассмотрим консольный стержень, сжимаемый мертвой осевой силой  $T$ , как показано на рисунке 2.2.

Главные граничные условия для рассматриваемой задачи:  $x(0) = y(0) = 0$ ;  $\varphi(0) = 0$ . Найдем вариацию приведенных граничных условий. Для этого даем приращения функциям  $x$ ,  $y$  и  $\varphi$  согласно формулам (2.2), вычисляем производную по  $\alpha$  и полагаем  $\alpha=0$ .

$$x(0) \rightarrow (x(0) + \alpha \delta x(0))'_{\alpha=0} = \delta x(0);$$

$$y(0) \rightarrow (y(0) + \alpha \delta y(0))'_{\alpha=0} = \delta y(0);$$

$$\varphi(0) \rightarrow (\varphi(0) + \alpha \delta \varphi(0))'_{\alpha=0} = \delta \varphi(0).$$

Используя обозначения (2.5), окончательно получаем главные граничные условия для функций  $u$ ,  $v$ ,  $\theta$ :  $u(0) = v(0) = 0$ ;  $\theta(0) = 0$ .

Таким образом, из внеинтегральных слагаемых первой вариации функционала (2.9) слагаемые с  $u(0)$ ,  $v(0)$ ,  $\theta(0)$  пропадают, и остаются только слагаемые с  $u(L)$ ,  $v(L)$  и  $\theta(L)$ .

Окончательно, внеинтегральные слагаемые для рассматриваемой задачи примут вид:

$$\begin{aligned} & \left( (N \cos \varphi - Q \sin \varphi) \Big|_{s=L} - F_{1\text{ВН}} \right) \cdot u(L) + \left( (N \sin \varphi + Q \cos \varphi) \Big|_{s=L} - F_{2\text{ВН}} \right) \cdot v(L) + \\ & + (M(L) - M_{\text{ВН}}) \cdot \theta(L), \end{aligned}$$

где для рассматриваемой задачи  $F_{1\text{ВН}} = -T$ ;  $F_{2\text{ВН}} = 0$ ;  $M_{\text{ВН}} = 0$ .

Из условия  $\delta \Pi = 0$  при любых вариациях  $u$ ,  $v$ ,  $\theta$  следует равенство нулю множителей при  $u(L)$ ,  $v(L)$  и  $\theta(L)$ . Таким образом, получаем следующие естественные граничные условия:

$$(N \cos \varphi - Q \sin \varphi) \Big|_{s=L} + T = 0; \quad (N \sin \varphi + Q \cos \varphi) \Big|_{s=L} = 0; \quad M(L) = 0.$$

Окончательно, граничные условия для поставленной задачи могут быть записаны в виде:

$$\begin{array}{ll} s = 0: & s = L: \\ x(0) = 0; & (N \cos \varphi - Q \sin \varphi) \Big|_{s=L} + T = 0; \\ y(0) = 0; & (N \sin \varphi + Q \cos \varphi) \Big|_{s=L} = 0; \\ \varphi(0) = 0; & M(L) = 0. \end{array} \quad (2.11)$$

**Стержень с заделкой с одной стороны и скользящей заделкой, допускающей перемещения вдоль оси стержня, с другой (рисунок 2.3)**

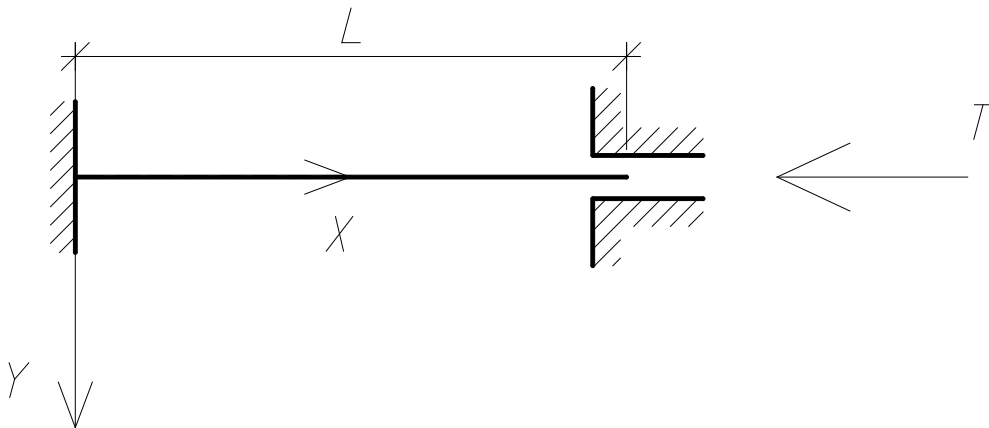


Рисунок 2.3 – Расчетная схема стержня

Рассмотрим стержень с заделкой с одной стороны и скользящей заделкой, допускающей перемещения вдоль оси стержня, с другой, сжимаемый мертвой осевой силой  $T$ , как показано на рисунке 2.3.

Главные граничные условия для рассматриваемой задачи:  $x(0) = y(0) = y(L) = 0$ ;  $\varphi(0) = \varphi(L) = 0$ . Найдем вариацию приведенных граничных условий. Для этого даем приращения функциям  $x$ ,  $y$  и  $\varphi$  согласно формулам (2.2), вычисляем производную по  $\alpha$  и полагаем  $\alpha=0$ .

$$x(0) \rightarrow (x(0) + \alpha \delta x(0))'_{\alpha=0} = \delta x(0);$$

$$y(0) \rightarrow (y(0) + \alpha \delta y(0))'_{\alpha=0} = \delta y(0);$$

$$\varphi(0) \rightarrow (\varphi(0) + \alpha \delta \varphi(0))'_{\alpha=0} = \delta \varphi(0);$$

$$y(L) \rightarrow (y(L) + \alpha \delta y(L))'_{\alpha=0} = \delta y(L);$$

$$\varphi(L) \rightarrow (\varphi(L) + \alpha \delta \varphi(L))'_{\alpha=0} = \delta \varphi(L).$$

Используя обозначения (2.5), окончательно получаем главные граничные условия для функций  $u$ ,  $v$ ,  $\theta$ :  $u(0) = v(0) = v(L) = 0$ ;  $\theta(0) = \theta(L) = 0$ .

Таким образом, из внеинтегральных слагаемых первой вариации функционала (2.9) слагаемые с  $u(0)$ ,  $v(0)$ ,  $\theta(0)$ ,  $v(L)$ ,  $\theta(L)$  пропадают, и остается только слагаемое с  $u(L)$ . Окончательно, внеинтегральные слагаемые для рассматриваемой задачи примут вид:

$$\left( (N \cos \varphi - Q \sin \varphi) \Big|_{s=L} - F_{I_{BH}} \right) \cdot u(L),$$

где для рассматриваемой задачи  $F_{I_{BH}} = -T$ .

Из условия  $\delta \Pi = 0$  при любых вариациях  $u$ ,  $v$ ,  $\theta$  следует равенство нулю множителя при  $u(L)$ . Таким образом, получаем следующее естественное граничное условие:

$$(N \cos \varphi - Q \sin \varphi) \Big|_{s=L} + T = 0.$$

Окончательно, граничные условия для поставленной задачи могут быть записаны в виде:

$$\begin{array}{ll} s = 0 : & s = L : \\ x(0) = 0; & (N \cos \varphi - Q \sin \varphi) \Big|_{s=L} + T = 0; \\ y(0) = 0; & y(L) = 0; \\ \varphi(0) = 0; & \varphi(L) = 0. \end{array} \quad (2.12)$$

**Стержень с заделкой с одной стороны и скользящей заделкой, допускающей перемещения перпендикулярно оси стержня, с другой (рисунок 2.4)**

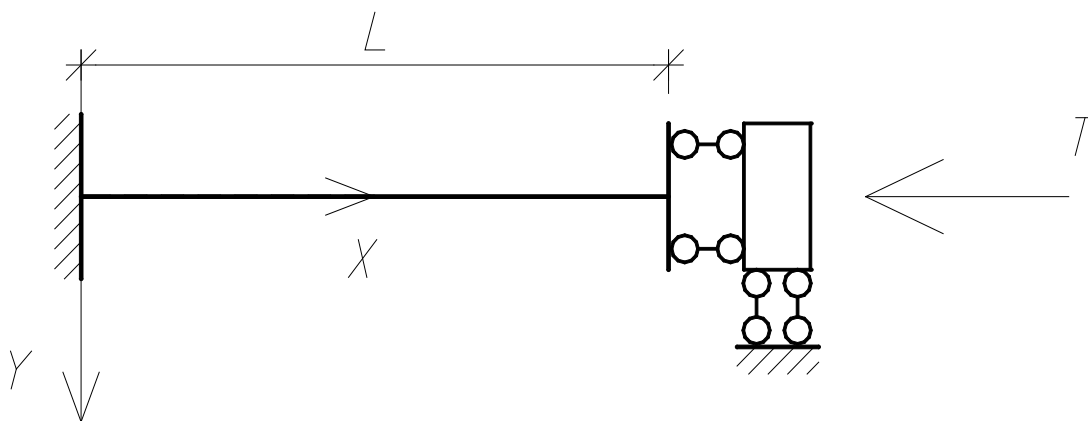


Рисунок 2.4 – Расчетная схема стержня

Рассмотрим стержень с заделкой с одной стороны и скользящей заделкой, допускающей перемещения перпендикулярно оси стержня, сжимаемый мертвой осевой силой  $T$ , как показано на рисунке 2.4.

Главные граничные условия для рассматриваемой задачи:  $x(0) = y(0) = 0$ ;  $\varphi(0) = \varphi(L) = 0$ . Найдем вариацию приведенных граничных условий. Для этого даем приращения функциям  $x$ ,  $y$  и  $\varphi$  согласно формулам (2.2), вычисляем производную по  $\alpha$  и полагаем  $\alpha=0$ .

$$x(0) \rightarrow (x(0) + \alpha \delta x(0))'_{\alpha=0} = \delta x(0);$$

$$y(0) \rightarrow (y(0) + \alpha \delta y(0))'_{\alpha=0} = \delta y(0);$$

$$\varphi(0) \rightarrow (\varphi(0) + \alpha \delta \varphi(0))'_{\alpha=0} = \delta \varphi(0);$$

$$\varphi(L) \rightarrow (\varphi(L) + \alpha \delta \varphi(L))'_{\alpha=0} = \delta \varphi(L).$$

Используя обозначения (2.5), окончательно получаем главные граничные условия для функций  $u$ ,  $v$ ,  $\theta$ :  $u(0) = v(0) = 0$ ;  $\theta(0) = \theta(L) = 0$ .

Таким образом, из внеинтегральных слагаемых первой вариации функционала (2.9) слагаемые с  $u(0)$ ,  $v(0)$ ,  $\theta(0)$ ,  $\theta(L)$  пропадают, и остаются только слагаемые с  $u(L)$  и  $v(L)$ .

Окончательно, внеинтегральные слагаемые для рассматриваемой задачи примут вид:

$$\left( (N \cos \varphi - Q \sin \varphi) \Big|_{s=L} - F_{1\text{вн}} \right) \cdot u(L) + \left( (N \sin \varphi + Q \cos \varphi) \Big|_{s=L} - F_{2\text{вн}} \right) \cdot v(L),$$

$$\text{где для рассматриваемой задачи } F_{1\text{вн}} = -T; \quad F_{2\text{вн}} = 0.$$

Из условия  $\delta \Pi = 0$  при любых вариациях  $u$ ,  $v$ ,  $\theta$  следует равенство нулю множителей при  $u(L)$  и  $v(L)$ . Таким образом, получаем следующие естественные граничные условия:

$$(N \cos \varphi - Q \sin \varphi) \Big|_{s=L} + T = 0; \quad (N \sin \varphi + Q \cos \varphi) \Big|_{s=L} = 0.$$

Окончательно, граничные условия для поставленной задачи могут быть записаны в виде:

$$\begin{aligned}
 s = 0: & & s = L: \\
 x(0) = 0; & & (N \cos \varphi - Q \sin \varphi)_{s=L} + T = 0; \\
 y(0) = 0; & & (N \sin \varphi + Q \cos \varphi)_{s=L} = 0; \\
 \varphi(0) = 0; & & \varphi(L) = 0.
 \end{aligned}
 \tag{2.13}$$

**Шарнирно опертый стержень со скользящей заделкой, допускающей перемещения перпендикулярно оси стержня (рисунок 2.5)**

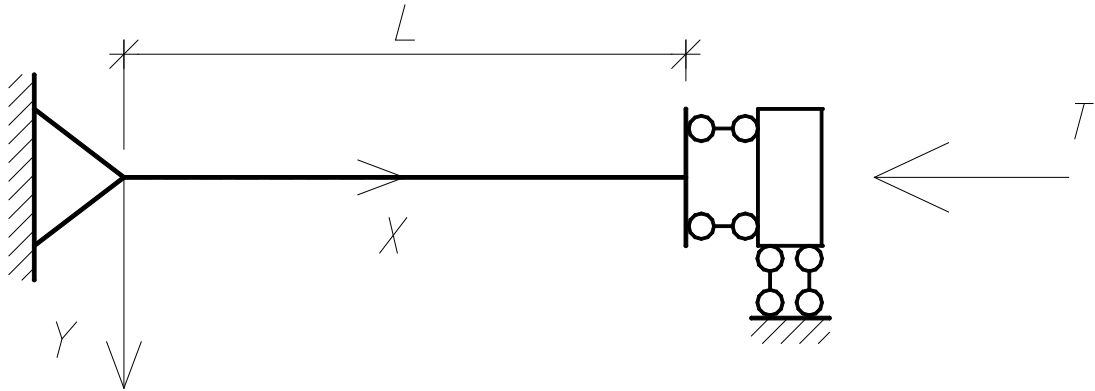


Рисунок 2.5 – Расчетная схема стержня

Рассмотрим шарнирно опертый стержень со скользящей заделкой, допускающей перемещения перпендикулярно оси стержня, сжимаемый мертвой осевой силой  $T$ , как показано на рисунке 2.5.

Главные граничные условия для рассматриваемой задачи:  $x(0) = y(0) = 0$ ;  $\varphi(L) = 0$ . Найдем вариацию приведенных граничных условий. Для этого даем приращения функциям  $x$ ,  $y$  и  $\varphi$  согласно формулам (2.2), вычисляем производную по  $\alpha$  и полагаем  $\alpha=0$ .

$$x(0) \rightarrow (x(0) + \alpha \delta x(0))'_{\alpha=0} = \delta x(0);$$

$$y(0) \rightarrow (y(0) + \alpha \delta y(0))'_{\alpha=0} = \delta y(0);$$

$$\varphi(L) \rightarrow (\varphi(L) + \alpha \delta \varphi(L))'_{\alpha=0} = \delta \varphi(L).$$

Используя обозначения (2.5), окончательно получаем главные граничные условия для функций  $u$ ,  $v$ ,  $\theta$ :  $u(0) = v(0) = 0$ ;  $\theta(L) = 0$ .

Таким образом, из внеинтегральных слагаемых первой вариации функционала (2.9) слагаемые с  $u(0)$ ,  $v(0)$ ,  $\theta(L)$  пропадают, и остаются только слагаемые с  $u(L)$ ,  $v(L)$ ,  $\theta(0)$ .

Окончательно, внеинтегральные слагаемые для рассматриваемой задачи примут вид:

$$\left( (N \cos \varphi - Q \sin \varphi)_{s=L} - F_{1BH} \right) \cdot u(L) + \left( (N \sin \varphi + Q \cos \varphi)_{s=L} - F_{2BH} \right) \cdot v(L) - M(0) \cdot \theta(0),$$

где для рассматриваемой задачи  $F_{1BH} = -T$ ;  $F_{2BH} = 0$ .

Из условия  $\delta\Pi = 0$  при любых вариациях  $u$ ,  $v$ ,  $\theta$  следует равенство нулю множителей при  $u(L)$ ,  $v(L)$  и  $\theta(0)$ . Таким образом, получаем следующие естественные граничные условия:

$$(N \cos \varphi - Q \sin \varphi)|_{s=L} + T = 0; \quad (N \sin \varphi + Q \cos \varphi)|_{s=L} = 0; \quad M(0) = 0.$$

Окончательно, граничные условия для поставленной задачи могут быть записаны в виде:

$$\begin{aligned} s = 0: & & s = L: \\ x(0) = 0; & & (N \cos \varphi - Q \sin \varphi)|_{s=L} + T = 0; \\ y(0) = 0; & & (N \sin \varphi + Q \cos \varphi)|_{s=L} = 0; \\ M(0) = 0; & & \varphi(L) = 0. \end{aligned} \quad (2.14)$$

### Стержень с заделкой с одной стороны и шарниром с другой (рисунок 2.6)

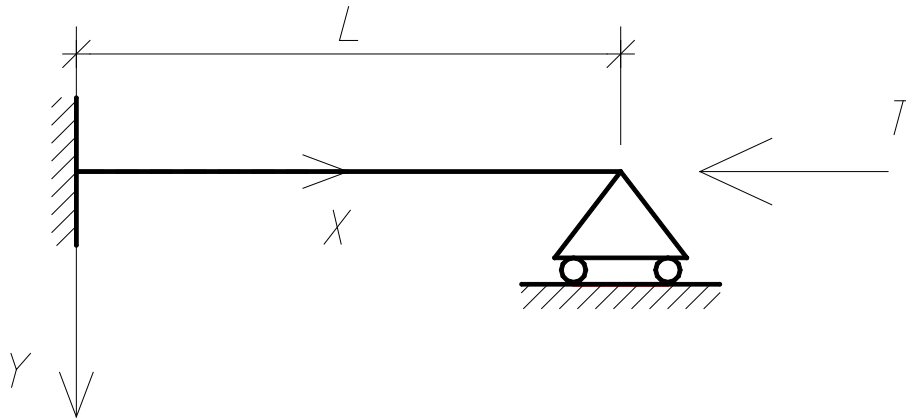


Рисунок 2.6 – Расчетная схема стержня

Рассмотрим шарнирно опертый стержень с заделкой, сжимаемый мертвой осевой силой  $T$ , как показано на рисунке 2.6.

Главные граничные условия для рассматриваемой задачи:  $x(0) = y(0) = y(L) = 0$ ;  $\varphi(0) = 0$ . Найдем вариацию приведенных граничных условий. Для этого даем приращения функциям  $x$ ,  $y$  и  $\varphi$  согласно формулам (2.2), вычисляем производную по  $\alpha$  и полагаем  $\alpha=0$ .

$$x(0) \rightarrow (x(0) + \alpha \delta x(0))'_{\alpha=0} = \delta x(0);$$

$$y(0) \rightarrow (y(0) + \alpha \delta y(0))'_{\alpha=0} = \delta y(0);$$

$$y(L) \rightarrow (y(L) + \alpha \delta y(L))'_{\alpha=0} = \delta y(L);$$

$$\varphi(L) \rightarrow (\varphi(L) + \alpha \delta \varphi(L))'_{\alpha=0} = \delta \varphi(L).$$

Используя обозначения (2.5), окончательно получаем главные граничные условия для функций  $u$ ,  $v$ ,  $\theta$ :  $u(0) = v(0) = v(L) = 0$ ;  $\theta(0) = 0$ .

Таким образом, из внеинтегральных слагаемых первой вариации функционала (2.9) слагаемые с  $u(0)$ ,  $v(0)$ ,  $\theta(0)$ ,  $v(L)$ , пропадают, и остаются только слагаемые с  $u(L)$ ,  $\theta(L)$ .

Окончательно, внеинтегральные слагаемые для рассматриваемой задачи примут вид:

$$\left( (N \cos \varphi - Q \sin \varphi) \Big|_{s=L} - F_{\text{вн}} \right) \cdot u(L) + (M(L) - M_{\text{вн}}) \cdot \theta(L),$$

где для рассматриваемой задачи  $F_{\text{вн}} = -T$ ;  $M_{\text{вн}} = 0$ .

Из условия  $\delta\Pi = 0$  при любых вариациях  $u$ ,  $v$ ,  $\theta$  следует равенство нулю множителей при  $u(L)$  и  $\theta(L)$ . Таким образом, получаем следующие естественные граничные условия:

$$(N \cos \varphi - Q \sin \varphi) \Big|_{s=L} + T = 0; \quad M(L) = 0.$$

Окончательно, граничные условия для поставленной задачи могут быть записаны в виде:

$$\begin{array}{ll} s = 0: & s = L: \\ x(0) = 0; & (N \cos \varphi - Q \sin \varphi) \Big|_{s=L} + T = 0; \\ y(0) = 0; & y(L) = 0; \\ \varphi(0) = 0; & M(L) = 0. \end{array} \quad (2.15)$$

### Консольный стержень под действием момента (рисунок 2.7)

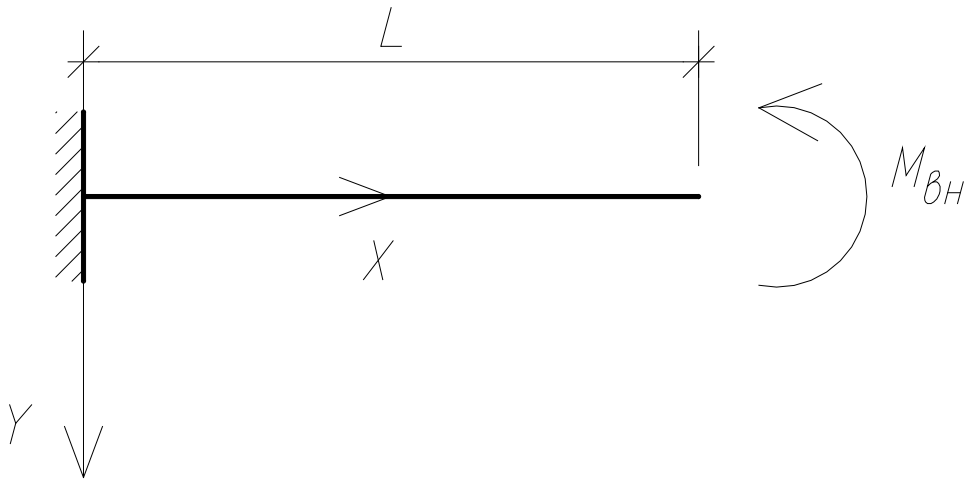


Рисунок 2.7 – Расчетная схема стержня

Рассмотрим консольный стержень под действием внешнего момента, как показано на рисунке 2.7.

Главные граничные условия для рассматриваемой задачи:  $x(0) = y(0) = 0$ ;  $\varphi(0) = 0$ . Найдем вариацию приведенных граничных условий. Для этого даем приращения функциям  $x$ ,  $y$  и  $\varphi$  согласно формулам (2.2), вычисляем производную по  $\alpha$  и полагаем  $\alpha=0$ .

$$x(0) \rightarrow (x(0) + \alpha \delta x(0))'_{\alpha=0} = \delta x(0);$$

$$y(0) \rightarrow (y(0) + \alpha \delta y(0))'_{\alpha=0} = \delta y(0);$$

$$\varphi(0) \rightarrow (\varphi(0) + \alpha \delta \varphi(0))'_{\alpha=0} = \delta \varphi(0).$$



Используя обозначения (2.5), окончательно получаем главные граничные условия для функций  $u$ ,  $v$ ,  $\theta$ :  $u(0) = v(0) = 0$ ;  $\theta(0) = 0$ .

Таким образом, из внеинтегральных слагаемых первой вариации функционала (2.9) слагаемые с  $u(0)$ ,  $v(0)$ ,  $\theta(0)$  пропадают, и остаются только слагаемые с  $u(L)$ ,  $v(L)$  и  $\theta(L)$ .

Окончательно, внеинтегральные слагаемые для рассматриваемой задачи примут вид:

$$\begin{aligned} & \left( (N \cos \varphi - Q \sin \varphi) \Big|_{s=L} - F_{1BH} \right) \cdot u(L) + \left( (N \sin \varphi + Q \cos \varphi) \Big|_{s=L} - F_{2BH} \right) \cdot v(L) + \\ & + (M(L) - M_{BH}) \cdot \theta(L), \end{aligned}$$

где для рассматриваемой задачи  $F_{1BH} = 0$ ;  $F_{2BH} = 0$ .

Из условия  $\delta\Pi = 0$  при любых вариациях  $u$ ,  $v$ ,  $\theta$  следует равенство нулю множителей при  $u(L)$ ,  $v(L)$  и  $\theta(L)$ . Таким образом, получаем следующие естественные граничные условия:

$$(N \cos \varphi - Q \sin \varphi) \Big|_{s=L} = 0; \quad (N \sin \varphi + Q \cos \varphi) \Big|_{s=L} = 0; \quad M(L) - M_{BH} = 0.$$

Окончательно, граничные условия для поставленной задачи могут быть записаны в виде:

$$\begin{aligned} s = 0: & & s = L: \\ x(0) = 0; & & (N \cos \varphi - Q \sin \varphi) \Big|_{s=L} = 0; \\ y(0) = 0; & & (N \sin \varphi + Q \cos \varphi) \Big|_{s=L} = 0; \\ \varphi(0) = 0; & & M(L) - M_{BH} = 0. \end{aligned} \tag{2.16}$$

### 2.3 Вариационная формулировка задачи устойчивости физически нелинейного упругого стержня

Уравнения устойчивости являются уравнениями Эйлера вариационной задачи  $\Phi_{ст} \rightarrow \text{СТАЦ}$  [16, 27, 47], где  $\Phi_{ст}$  – вторая вариация функционала Лагранжа.

Для вычисления второй вариации функционала Лагранжа найдем вариацию каждого слагаемого формулы (2.6), используя выражения (2.9). Для этого даем приращения функциям  $x$ ,  $y$  и  $\varphi$  согласно формулам (2.5) и (2.8), вычисляем производную по  $\alpha$  и полагаем  $\alpha=0$ :

$$\begin{aligned} & \frac{\partial W(\varepsilon, \gamma, \psi)}{\partial \varepsilon} \Big|_{\varepsilon_B} \rightarrow \frac{d}{d\alpha} \left( \frac{\partial W(\varepsilon + \alpha \delta \varepsilon, \gamma + \alpha \delta \gamma, \psi + \alpha \delta \psi)}{\partial \varepsilon} (\varepsilon_B + \alpha \delta \varepsilon_B) \right) \Big|_{\alpha=0} = \\ & = \frac{d}{d\alpha} \left( \frac{\partial W(\varepsilon + \alpha \varepsilon_B, \gamma + \alpha \gamma_B, \psi + \alpha \psi_B)}{\partial \varepsilon} (\varepsilon_B + \alpha \delta \varepsilon_B) \right) \Big|_{\alpha=0} = \\ & = \left( \frac{d}{d\alpha} \left( \frac{\partial W(\varepsilon + \alpha \varepsilon_B, \gamma + \alpha \gamma_B, \psi + \alpha \psi_B)}{\partial \varepsilon} (\varepsilon_B + \alpha \delta \varepsilon_B) \right) \right) \Big|_{\alpha=0} + \frac{\partial W(\varepsilon, \gamma, \psi)}{\partial \varepsilon} \delta \varepsilon_B, \end{aligned}$$

где

$$\begin{aligned}
& \left( \frac{d}{d\alpha} \left( \frac{\partial W(\varepsilon + \alpha\varepsilon_B, \gamma + \alpha\gamma_B, \psi + \alpha\psi_B)}{\partial \varepsilon} \right) (\varepsilon_B + \alpha\delta\varepsilon_B) \right) \Big|_{\alpha=0} = \left( \left( \frac{\partial^2 W(\varepsilon + \alpha\varepsilon_B, \gamma + \alpha\gamma_B, \psi + \alpha\psi_B)}{\partial \varepsilon \partial (\varepsilon + \alpha\varepsilon_B)} \frac{\partial (\varepsilon + \alpha\varepsilon_B)}{\partial \alpha} \right. \right. \\
& + \frac{\partial^2 W(\varepsilon + \alpha\varepsilon_B, \gamma + \alpha\gamma_B, \psi + \alpha\psi_B)}{\partial \varepsilon \partial (\gamma + \alpha\gamma_B)} \frac{\partial (\gamma + \alpha\gamma_B)}{\partial \alpha} + \\
& \left. \left. + \frac{\partial^2 W(\varepsilon + \alpha\varepsilon_B, \gamma + \alpha\gamma_B, \psi + \alpha\psi_B)}{\partial \varepsilon \partial (\psi + \alpha\psi_B)} \frac{\partial (\psi + \alpha\psi_B)}{\partial \alpha} \right) (\varepsilon_B + \alpha\delta\varepsilon_B) \right) \Big|_{\alpha=0} = \left( \frac{\partial^2 W(\varepsilon, \gamma, \psi)}{\partial \varepsilon^2} \varepsilon_B + \frac{\partial^2 W(\varepsilon, \gamma, \psi)}{\partial \varepsilon \partial \gamma} \gamma_B + \right. \\
& \left. + \frac{\partial^2 W(\varepsilon, \gamma, \psi)}{\partial \varepsilon \partial \psi} \psi_B \right) \varepsilon_B = \frac{\partial^2 W(\varepsilon, \gamma, \psi)}{\partial \varepsilon^2} \varepsilon_B^2 + \frac{\partial^2 W(\varepsilon, \gamma, \psi)}{\partial \varepsilon \partial \gamma} \varepsilon_B \gamma_B + \frac{\partial^2 W(\varepsilon, \gamma, \psi)}{\partial \varepsilon \partial \psi} \varepsilon_B \psi_B. \\
& \frac{\partial W(\varepsilon, \gamma, \psi)}{\partial \gamma} \gamma_B \rightarrow \frac{d}{d\alpha} \left( \frac{\partial W(\varepsilon + \alpha\delta\varepsilon, \gamma + \alpha\delta\gamma, \psi + \alpha\delta\psi)}{\partial \gamma} (\gamma_B + \alpha\delta\gamma_B) \right) \Big|_{\alpha=0} = \\
& = \frac{d}{d\alpha} \left( \frac{\partial W(\varepsilon + \alpha\varepsilon_B, \gamma + \alpha\gamma_B, \psi + \alpha\psi_B)}{\partial \gamma} (\gamma_B + \alpha\delta\gamma_B) \right) \Big|_{\alpha=0} = \\
& = \left( \frac{d}{d\alpha} \left( \frac{\partial W(\varepsilon + \alpha\varepsilon_B, \gamma + \alpha\gamma_B, \psi + \alpha\psi_B)}{\partial \gamma} \right) (\gamma_B + \alpha\delta\gamma_B) \right) \Big|_{\alpha=0} + \frac{\partial W(\varepsilon, \gamma, \psi)}{\partial \gamma} \delta\gamma_B,
\end{aligned}$$

где

$$\begin{aligned}
& \left( \frac{d}{d\alpha} \left( \frac{\partial W(\varepsilon + \alpha\varepsilon_B, \gamma + \alpha\gamma_B, \psi + \alpha\psi_B)}{\partial \gamma} \right) (\gamma_B + \alpha\delta\gamma_B) \right) \Big|_{\alpha=0} = \\
& = \left( \left( \frac{\partial^2 W(\varepsilon + \alpha\varepsilon_B, \gamma + \alpha\gamma_B, \psi + \alpha\psi_B)}{\partial \gamma \partial (\varepsilon + \alpha\varepsilon_B)} \frac{\partial (\varepsilon + \alpha\varepsilon_B)}{\partial \alpha} + \frac{\partial^2 W(\varepsilon + \alpha\varepsilon_B, \gamma + \alpha\gamma_B, \psi + \alpha\psi_B)}{\partial \gamma \partial (\gamma + \alpha\gamma_B)} \frac{\partial (\gamma + \alpha\gamma_B)}{\partial \alpha} + \right. \right. \\
& \left. \left. + \frac{\partial^2 W(\varepsilon + \alpha\varepsilon_B, \gamma + \alpha\gamma_B, \psi + \alpha\psi_B)}{\partial \gamma \partial (\psi + \alpha\psi_B)} \frac{\partial (\psi + \alpha\psi_B)}{\partial \alpha} \right) (\gamma_B + \alpha\delta\gamma_B) \right) \Big|_{\alpha=0} = \left( \frac{\partial^2 W(\varepsilon, \gamma, \psi)}{\partial \varepsilon \partial \gamma} \varepsilon_B + \right. \\
& \left. + \frac{\partial^2 W(\varepsilon, \gamma, \psi)}{\partial \gamma^2} \gamma_B + \frac{\partial^2 W(\varepsilon, \gamma, \psi)}{\partial \gamma \partial \psi} \psi_B \right) \gamma_B = \frac{\partial^2 W(\varepsilon, \gamma, \psi)}{\partial \varepsilon \partial \gamma} \varepsilon_B \gamma_B + \frac{\partial^2 W(\varepsilon, \gamma, \psi)}{\partial \gamma^2} \gamma_B^2 + \frac{\partial^2 W(\varepsilon, \gamma, \psi)}{\partial \gamma \partial \psi} \gamma_B \psi_B. \\
& \frac{\partial W(\varepsilon, \gamma, \psi)}{\partial \psi} \psi_B \rightarrow \frac{d}{d\alpha} \left( \frac{\partial W(\varepsilon + \alpha\delta\varepsilon, \gamma + \alpha\delta\gamma, \psi + \alpha\delta\psi)}{\partial \psi} (\psi_B + \alpha\delta\psi_B) \right) \Big|_{\alpha=0} = \\
& = \frac{d}{d\alpha} \left( \frac{\partial W(\varepsilon + \alpha\varepsilon_B, \gamma + \alpha\gamma_B, \psi + \alpha\psi_B)}{\partial \psi} (\psi_B + \alpha\delta\psi_B) \right) \Big|_{\alpha=0} = \\
& = \left( \frac{d}{d\alpha} \left( \frac{\partial W(\varepsilon + \alpha\varepsilon_B, \gamma + \alpha\gamma_B, \psi + \alpha\psi_B)}{\partial \psi} \right) (\psi_B + \alpha\delta\psi_B) \right) \Big|_{\alpha=0} + \frac{\partial W(\varepsilon, \gamma, \psi)}{\partial \psi} \delta\psi_B,
\end{aligned}$$

где

$$\begin{aligned}
& \left( \frac{d}{d\alpha} \left( \frac{\partial W(\varepsilon + \alpha\varepsilon_B, \gamma + \alpha\gamma_B, \psi + \alpha\psi_B)}{\partial \psi} \right) (\psi_B + \alpha\delta\psi_B) \right) \Big|_{\alpha=0} = \\
& = \left( \left( \frac{\partial^2 W(\varepsilon + \alpha\varepsilon_B, \gamma + \alpha\gamma_B, \psi + \alpha\psi_B)}{\partial \psi \partial (\varepsilon + \alpha\varepsilon_B)} \frac{\partial (\varepsilon + \alpha\varepsilon_B)}{\partial \alpha} + \frac{\partial^2 W(\varepsilon + \alpha\varepsilon_B, \gamma + \alpha\gamma_B, \psi + \alpha\psi_B)}{\partial \psi \partial (\gamma + \alpha\gamma_B)} \frac{\partial (\gamma + \alpha\gamma_B)}{\partial \alpha} + \right. \right. \\
& \left. \left. + \frac{\partial^2 W(\varepsilon + \alpha\varepsilon_B, \gamma + \alpha\gamma_B, \psi + \alpha\psi_B)}{\partial \psi \partial (\psi + \alpha\psi_B)} \frac{\partial (\psi + \alpha\psi_B)}{\partial \alpha} \right) (\psi_B + \alpha\delta\psi_B) \right) \Big|_{\alpha=0} = \\
& \left( \frac{\partial^2 W(\varepsilon, \gamma, \psi)}{\partial \varepsilon \partial \psi} \varepsilon_B + \frac{\partial^2 W(\varepsilon, \gamma, \psi)}{\partial \gamma \partial \psi} \gamma_B + \frac{\partial^2 W(\varepsilon, \gamma, \psi)}{\partial \psi^2} \psi_B \right) \gamma_B = \frac{\partial^2 W(\varepsilon, \gamma, \psi)}{\partial \varepsilon \partial \psi} \varepsilon_B \psi_B + \frac{\partial^2 W(\varepsilon, \gamma, \psi)}{\partial \gamma \partial \psi} \gamma_B \psi_B + \\
& + \frac{\partial^2 W(\varepsilon, \gamma, \psi)}{\partial \psi^2} \psi_B^2.
\end{aligned}$$

$$q_x u \rightarrow \frac{d}{d\alpha} (q_x u) \Big|_{\alpha=0} = 0; \quad q_y v \rightarrow \frac{d}{d\alpha} (q_y v) \Big|_{\alpha=0} = 0; \quad m\theta \rightarrow \frac{d}{d\alpha} (m\theta) \Big|_{\alpha=0} = 0;$$

$$F_{1BH} u(L) \rightarrow \frac{d}{d\alpha} (F_{1BH} u) \Big|_{\alpha=0} = 0; \quad F_{2BH} v(L) \rightarrow \frac{d}{d\alpha} (F_{2BH} v) \Big|_{\alpha=0} = 0;$$

$$M_{BH} \theta(L) \rightarrow \frac{d}{d\alpha} (M_{BH} \theta) \Big|_{\alpha=0} = 0.$$

Вычислим вторые вариации деформаций, используя уравнения (2.7):

$$\begin{aligned}
\delta\varepsilon_B = \delta^2\varepsilon = \frac{d}{d\alpha} & (u' \cos(\varphi + \alpha\theta) - (x + \alpha u)' \theta \sin(\varphi + \alpha\theta) + (y + \alpha v)' \theta \cos(\varphi + \alpha\theta) + \\
& + v' \sin(\varphi + \alpha\theta)) \Big|_{\alpha=0} = (-u' \theta \sin(\varphi + \alpha\theta) - u' \theta \sin(\varphi + \alpha\theta) - (x + \alpha u)' \theta^2 \cos(\varphi + \alpha\theta) + \\
& + v' \theta \cos(\varphi + \alpha\theta) - (y + \alpha v)' \theta^2 \sin(\varphi + \alpha\theta) + v' \theta \cos(\varphi + \alpha\theta)) \Big|_{\alpha=0} = -2u' \theta \sin \varphi + \\
& + 2v' \theta \cos \varphi - x' \theta^2 \cos \varphi - y' \theta^2 \sin \varphi;
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\delta\gamma_B = \delta^2\gamma = \frac{d}{d\alpha} & (-u' \sin(\varphi + \alpha\theta) - (x + \alpha u)' \theta \cos(\varphi + \alpha\theta) - (y + \alpha v)' \theta \sin(\varphi + \alpha\theta) + \\
& + v' \cos(\varphi + \alpha\theta)) \Big|_{\alpha=0} = (-u' \theta \cos(\varphi + \alpha\theta) - u' \theta \cos(\varphi + \alpha\theta) + (x + \alpha u)' \theta^2 \sin(\varphi + \alpha\theta) - \\
& - v' \theta \sin(\varphi + \alpha\theta) - (y + \alpha v)' \theta^2 \cos(\varphi + \alpha\theta) - v' \theta \sin(\varphi + \alpha\theta)) \Big|_{\alpha=0} = -2u' \theta \cos \varphi - \\
& - 2v' \theta \sin \varphi + x' \theta^2 \sin \varphi - y' \theta^2 \cos \varphi;
\end{aligned}$$

$$\delta\psi_B = \delta^2\psi = \frac{d}{d\alpha} \theta' = 0.$$

Таким образом, вторая вариация функционала Лагранжа примет вид:

$$\begin{aligned}
\delta^2 \Pi(x, y, \varphi, u, v, \theta) = & \int_0^L \left[ \frac{\partial^2 W}{\partial \varepsilon^2} (u' \cos \varphi - x' \theta \sin \varphi + v' \sin \varphi + y' \theta \cos \varphi)^2 + 2 \frac{\partial^2 W}{\partial \varepsilon \partial \gamma} (u' \cos \varphi - x' \theta \sin \varphi + \right. \\
& + v' \sin \varphi + y' \theta \cos \varphi)(v' \cos \varphi - u' \sin \varphi - x' \theta \cos \varphi - y' \theta \sin \varphi) + 2 \frac{\partial^2 W}{\partial \varepsilon \partial \psi} (u' \cos \varphi - x' \theta \sin \varphi + v' \sin \varphi + \\
& + y' \theta \cos \varphi) \theta' + \frac{\partial W}{\partial \varepsilon} (-2u' \theta \sin \varphi + 2v' \theta \cos \varphi - x' \theta^2 \cos \varphi - y' \theta^2 \sin \varphi) + \frac{\partial^2 W}{\partial \gamma^2} (v' \cos \varphi - u' \sin \varphi - \\
& - x' \theta \cos \varphi - y' \theta \sin \varphi)^2 + 2 \frac{\partial^2 W}{\partial \gamma \partial \psi} (v' \cos \varphi - u' \sin \varphi - x' \theta \cos \varphi - y' \theta \sin \varphi) \theta' + \frac{\partial W}{\partial \gamma} (-2u' \theta \cos \varphi - \\
& \left. - 2v' \theta \sin \varphi + x' \theta^2 \sin \varphi - y' \theta^2 \cos \varphi) + \frac{\partial^2 W}{\partial \psi^2} \theta'^2 \right] ds.
\end{aligned}$$

В этом функционале функции  $x, y, \varphi$  фиксированы и являются решениями задачи (1.171), (1.180) и (1.184). Обозначим  $\frac{1}{2} \delta^2 \Pi \equiv \Phi_{\text{ст}}^*(u, v, \theta)$ , где  $\Phi_{\text{ст}}^*$  – статический функционал устойчивости.

Тогда,

$$\begin{aligned}
\Phi_{\text{ст}}^*(u, v, \theta) = & \frac{1}{2} \int_0^L \left[ \frac{\partial^2 W}{\partial \varepsilon^2} (u' \cos \varphi - x' \theta \sin \varphi + v' \sin \varphi + y' \theta \cos \varphi)^2 + 2 \frac{\partial^2 W}{\partial \varepsilon \partial \gamma} (u' \cos \varphi - x' \theta \sin \varphi + \right. \\
& + v' \sin \varphi + y' \theta \cos \varphi)(v' \cos \varphi - u' \sin \varphi - x' \theta \cos \varphi - y' \theta \sin \varphi) + 2 \frac{\partial^2 W}{\partial \varepsilon \partial \psi} (u' \cos \varphi - x' \theta \sin \varphi + \\
& + v' \sin \varphi + y' \theta \cos \varphi) \theta' + \frac{\partial W}{\partial \varepsilon} (-2u' \theta \sin \varphi + 2v' \theta \cos \varphi - x' \theta^2 \cos \varphi - y' \theta^2 \sin \varphi) + \frac{\partial^2 W}{\partial \gamma^2} (v' \cos \varphi - \\
& - u' \sin \varphi - x' \theta \cos \varphi - y' \theta \sin \varphi)^2 + 2 \frac{\partial^2 W}{\partial \gamma \partial \psi} (v' \cos \varphi - u' \sin \varphi - x' \theta \cos \varphi - y' \theta \sin \varphi) \theta' + \\
& \left. + \frac{\partial W}{\partial \gamma} (-2u' \theta \cos \varphi - 2v' \theta \sin \varphi + x' \theta^2 \sin \varphi - y' \theta^2 \cos \varphi) + \frac{\partial^2 W}{\partial \psi^2} \theta'^2 \right] ds.
\end{aligned} \quad (2.17)$$

Или в матричном виде:

$$\Phi_{\text{ст}}^*(u, v, \theta) = \frac{1}{2} \int_0^L (h'^T A h' + h^T B h + h^T C h') ds, \quad (2.18)$$

где  $h = \begin{pmatrix} u \\ v \\ \theta \end{pmatrix}$ ;  $( )^T$  – операция транспонирования,

$$A = \begin{pmatrix} \frac{\partial^2 W}{\partial \varepsilon^2} \cos^2 \varphi - 2 \frac{\partial^2 W}{\partial \varepsilon \partial \gamma} \sin \varphi \cos \varphi + \frac{\partial^2 W}{\partial \gamma^2} \sin^2 \varphi & \frac{\partial^2 W}{\partial \varepsilon \partial \gamma} (\cos^2 \varphi - \sin^2 \varphi) + \left( \frac{\partial^2 W}{\partial \varepsilon^2} - \frac{\partial^2 W}{\partial \gamma^2} \right) \sin \varphi \cos \varphi & \frac{\partial^2 W}{\partial \varepsilon \partial \psi} \cos \varphi - \frac{\partial^2 W}{\partial \gamma \partial \psi} \sin \varphi \\ \frac{\partial^2 W}{\partial \varepsilon \partial \gamma} (\cos^2 \varphi - \sin^2 \varphi) + \left( \frac{\partial^2 W}{\partial \varepsilon^2} - \frac{\partial^2 W}{\partial \gamma^2} \right) \sin \varphi \cos \varphi & \frac{\partial^2 W}{\partial \varepsilon^2} \sin^2 \varphi + 2 \frac{\partial^2 W}{\partial \varepsilon \partial \gamma} \sin \varphi \cos \varphi + \frac{\partial^2 W}{\partial \gamma^2} \cos^2 \varphi & \frac{\partial^2 W}{\partial \varepsilon \partial \psi} \sin \varphi + \frac{\partial^2 W}{\partial \gamma \partial \psi} \cos \varphi \\ \frac{\partial^2 W}{\partial \varepsilon \partial \psi} \cos \varphi - \frac{\partial^2 W}{\partial \gamma \partial \psi} \sin \varphi & \frac{\partial^2 W}{\partial \varepsilon \partial \psi} \sin \varphi + \frac{\partial^2 W}{\partial \gamma \partial \psi} \cos \varphi & \frac{\partial^2 W}{\partial \psi^2} \end{pmatrix},$$

$$B = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & B_{33} \end{pmatrix},$$

$$B_{33} = \begin{pmatrix} \frac{\partial^2 W}{\partial \varepsilon^2} (x' \sin \varphi - y' \cos \varphi)^2 + 2 \frac{\partial^2 W}{\partial \varepsilon \partial \gamma} ((x'^2 - y'^2) \sin \varphi \cos \varphi - x' y' (\sin^2 \varphi - \cos^2 \varphi)) - \\ - \frac{\partial W}{\partial \varepsilon} (x' \cos \varphi + y' \sin \varphi) + \frac{\partial^2 W}{\partial \gamma^2} (x' \cos \varphi + y' \sin \varphi)^2 + \frac{\partial W}{\partial \gamma} (x' \sin \varphi - y' \cos \varphi) \end{pmatrix},$$

$$C = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ C_{31} & C_{32} & C_{33} \end{pmatrix},$$

$$C_{31} = \begin{pmatrix} 2 \frac{\partial^2 W}{\partial \varepsilon^2} (y' \cos^2 \varphi - x' \sin \varphi \cos \varphi) + 2 \frac{\partial^2 W}{\partial \varepsilon \partial \gamma} (x' (\sin^2 \varphi - \cos^2 \varphi) - 2y' \sin \varphi \cos \varphi) + \\ + 2 \frac{\partial^2 W}{\partial \gamma^2} (x' \sin \varphi \cos \varphi + y' \sin^2 \varphi) - 2 \frac{\partial W}{\partial \varepsilon} \sin \varphi - 2 \frac{\partial W}{\partial \gamma} \cos \varphi \end{pmatrix},$$

$$C_{32} = \begin{pmatrix} 2 \frac{\partial^2 W}{\partial \varepsilon^2} (y' \sin \varphi \cos \varphi - x' \sin^2 \varphi) + 2 \frac{\partial^2 W}{\partial \varepsilon \partial \gamma} (y' (\cos^2 \varphi - \sin^2 \varphi) - 2x' \sin \varphi \cos \varphi) - \\ - 2 \frac{\partial^2 W}{\partial \gamma^2} (x' \cos^2 \varphi + y' \sin \varphi \cos \varphi) + 2 \frac{\partial W}{\partial \varepsilon} \cos \varphi - 2 \frac{\partial W}{\partial \gamma} \sin \varphi \end{pmatrix},$$

$$C_{33} = \left( 2 \frac{\partial^2 W}{\partial \varepsilon \partial \psi} (y' \cos \varphi - x' \sin \varphi) - 2 \frac{\partial^2 W}{\partial \gamma \partial \psi} (y' \sin \varphi + x' \cos \varphi) \right).$$

Получим уравнения Эйлера для задачи  $\Phi_{\text{ст}}^*(u, v, \theta) \rightarrow \text{СТАЦ}$ . Для этого вычислим первую вариацию функционала устойчивости (2.18), определяя вариацию каждого слагаемого функционала. Сначала дадим приращения функциям  $u, v, \theta$ :

$$\begin{cases} u \rightarrow u + \alpha \delta u; \\ v \rightarrow v + \alpha \delta v; \\ \theta \rightarrow \theta + \alpha \delta \theta. \end{cases} \quad (2.19)$$

Вычисляем производную по  $\alpha$ , далее полагая  $\alpha = 0$ . Таким образом,

$$\begin{aligned} h'^T A h' &\rightarrow \frac{d}{d\alpha} \left( (h + \alpha \delta h)^T A (h + \alpha \delta h)' \right) \Big|_{\alpha=0} = \left( \delta h'^T A (h + \alpha \delta h)' + (h + \alpha \delta h)^T A \delta h' \right) \Big|_{\alpha=0} = \\ &= \delta h'^T A h' + h'^T A \delta h'; \\ h^T B h &\rightarrow \frac{d}{d\alpha} \left( (h + \alpha \delta h)^T B (h + \alpha \delta h) \right) \Big|_{\alpha=0} = \left( \delta h^T B (h + \alpha \delta h) + (h + \alpha \delta h)^T B \delta h \right) \Big|_{\alpha=0} = \delta h^T B h + h^T B \delta h; \\ h^T C h' &\rightarrow \frac{d}{d\alpha} \left( (h + \alpha \delta h)^T C (h + \alpha \delta h)' \right) \Big|_{\alpha=0} = \left( \delta h^T C (h + \alpha \delta h)' + (h + \alpha \delta h)^T C \delta h' \right) \Big|_{\alpha=0} = \delta h^T C h' + h^T C \delta h', \end{aligned}$$

где  $\delta h = (\delta u \quad \delta v \quad \delta \theta)^T$ .

Таким образом, первую вариацию функционала устойчивости можно записать в следующем виде:

$$\delta \Phi_{\text{ст}}^*(u, v, \theta) = \frac{1}{2} \int_0^L \left( \delta h'^T A h' + h'^T A \delta h' + \delta h^T B h + h^T B \delta h + \delta h^T C h' + h^T C \delta h' \right) ds.$$

Поскольку матрицы «А» и «В» являются симметричными, первая вариация функционала в матричном виде будет записана:

$$\delta \Phi_{\text{ст}}^*(u, v, \theta) = \int_0^L \left( \delta h'^T A h' + \delta h^T B h + \frac{1}{2} \delta h^T C h' + \frac{1}{2} h^T C \delta h' \right) ds.$$

Интегрируем по частям, чтобы избавиться от производных от вариаций:

$$\int_0^L \delta h'^T A h' ds = - \int_0^L \delta h^T (A h')' ds + \delta h^T A h' \Big|_0^L;$$

$$\int_0^L h^T C \delta h' ds = - \int_0^L (h^T C)' \delta h ds + h^T C \delta h \Big|_0^L.$$

Таким образом, после интегрирования по частям первая вариация статического функционала устойчивости принимает вид:

$$\delta \Phi_{\text{ст}}^*(u, v, \theta) = - \int_0^L \left[ \delta h^T \left( (A h')' - B h - \frac{1}{2} C h' + \frac{1}{2} (C^T h)' \right) \right] ds + \left( \delta h^T \left( A h' + \frac{1}{2} C^T h \right) \right) \Big|_0^L. \quad (2.20)$$

Уравнениями Эйлера, вытекающими из условия  $\delta\Phi_{\text{ст}}^* = 0$ , являются следующие уравнения:

$$\left( Ah' + \frac{1}{2} C^T h \right)' - Bh - \frac{1}{2} Ch' = 0. \quad (2.21)$$

Или в развернутом виде, перегруппировывая слагаемые и используя выражения (2.7) и физические уравнения (1.184):

$$\left\{ \begin{aligned} & \left( \frac{\partial N}{\partial \varepsilon} \varepsilon_B \cos \varphi - \frac{\partial Q}{\partial \gamma} \gamma_B \sin \varphi \right)' - \theta'(N \sin \varphi + Q \cos \varphi) - \theta(N \sin \varphi + Q \cos \varphi)' + \\ & + \left( \frac{\partial^2 W}{\partial \varepsilon \partial \gamma} (\gamma_B \cos \varphi - \varepsilon_B \sin \varphi) + \frac{\partial^2 W}{\partial \varepsilon \partial \psi} \psi_B \cos \varphi - \frac{\partial^2 W}{\partial \gamma \partial \psi} \psi_B \sin \varphi \right)' = 0; \\ & \left( \frac{\partial N}{\partial \varepsilon} \varepsilon_B \sin \varphi + \frac{\partial Q}{\partial \gamma} \gamma_B \cos \varphi \right)' + \theta'(N \cos \varphi - Q \sin \varphi) + \theta(N \cos \varphi - Q \sin \varphi)' + \\ & + \left( \frac{\partial^2 W}{\partial \varepsilon \partial \gamma} (\gamma_B \sin \varphi + \varepsilon_B \cos \varphi) + \frac{\partial^2 W}{\partial \varepsilon \partial \psi} \psi_B \sin \varphi + \frac{\partial^2 W}{\partial \gamma \partial \psi} \psi_B \cos \varphi \right)' = 0; \\ & \left( \frac{\partial M}{\partial \psi} \psi_B \right)' + u'(N \sin \varphi + Q \cos \varphi) + v'(Q \sin \varphi - N \cos \varphi) + x' \left( \frac{\partial N}{\partial \varepsilon} \varepsilon_B \sin \varphi + \frac{\partial Q}{\partial \gamma} \gamma_B \cos \varphi + \right. \\ & + N\theta \cos \varphi - Q\theta \sin \varphi) + y' \left( N\theta \sin \varphi - \frac{\partial N}{\partial \varepsilon} \varepsilon_B \cos \varphi + \frac{\partial Q}{\partial \gamma} \gamma_B \sin \varphi + Q\theta \cos \varphi \right) + \\ & + \left( \frac{\partial^2 W}{\partial \varepsilon \partial \psi} \varepsilon_B + \frac{\partial^2 W}{\partial \gamma \partial \psi} \gamma_B \right)' - \frac{\partial^2 W}{\partial \varepsilon \partial \gamma} (\gamma_B (y' \cos \varphi - x' \sin \varphi) - \varepsilon_B (x' \cos \varphi + y' \sin \varphi)) - \\ & - \frac{\partial^2 W}{\partial \varepsilon \partial \psi} \psi_B (y' \cos \varphi - x' \sin \varphi) + \frac{\partial^2 W}{\partial \gamma \partial \psi} \psi_B (x' \cos \varphi + y' \sin \varphi) = 0. \end{aligned} \right. \quad (2.22)$$

Система (2.22) является системой уравнений относительно функций  $u$ ,  $v$  и  $\theta$ . Функции  $x$ ,  $y$  и  $\varphi$ , а также  $N$ ,  $Q$ ,  $M$  фиксированы и являются решениями задачи (1.171), (1.180) и (1.184).

Уравнения (2.22) являются точными уравнениями устойчивости физически нелинейного упругого стержня для плоской задачи при действии потенциальной нагрузки. При их выводе не делалось никаких упрощающих предположений о величинах перемещений и углов поворота, а также о характере напряженно-деформированного состояния стержня.

Также следует подчеркнуть, что полученные функционал и уравнения устойчивости применимы для любого вида физической нелинейности упругих стержней.

## 2.4 Граничные условия для задач устойчивости физически нелинейного стержня

Граничные условия для конкретной задачи могут быть получены из внеинтегральных слагаемых первой вариации функционала устойчивости (2.20). Перейдем от матричного вида внеинтегральных слагаемых к развернутому виду, используя выражения 2.7:

$$\begin{aligned}
 & \left[ \delta u \cdot \left( \frac{\partial N}{\partial \varepsilon} \varepsilon_B \cos \varphi - \frac{\partial Q}{\partial \gamma} \gamma_B \sin \varphi + \frac{\partial^2 W}{\partial \varepsilon \partial \gamma} (\gamma_B \cos \varphi - \varepsilon_B \sin \varphi) + \frac{\partial^2 W}{\partial \varepsilon \partial \psi} \psi_B \cos \varphi - \right. \right. \\
 & \left. \left. - \frac{\partial^2 W}{\partial \gamma \partial \psi} \psi_B \sin \varphi - \theta (N \sin \varphi + Q \cos \varphi) \right) + \delta v \cdot \left( \frac{\partial N}{\partial \varepsilon} \varepsilon_B \sin \varphi + \frac{\partial Q}{\partial \gamma} \gamma_B \cos \varphi + \right. \right. \\
 & \left. \left. + \frac{\partial^2 W}{\partial \varepsilon \partial \gamma} (\gamma_B \sin \varphi + \varepsilon_B \cos \varphi) + \frac{\partial^2 W}{\partial \varepsilon \partial \psi} \psi_B \sin \varphi + \frac{\partial^2 W}{\partial \gamma \partial \psi} \psi_B \cos \varphi + \theta (N \cos \varphi - Q \sin \varphi) \right) + \right. \\
 & \left. + \delta \theta \cdot \left( \frac{\partial^2 W}{\partial \varepsilon \partial \psi} \varepsilon_B + \frac{\partial^2 W}{\partial \gamma \partial \psi} \gamma_B + \frac{\partial M}{\partial \psi} \psi_B \right) \right] \Bigg|_0^L.
 \end{aligned} \tag{2.23}$$

В качестве примера рассмотрим несколько конкретных задач.

### Классическая задача Эйлера – шарнирно опертый стержень (рисунок 2.1)

Главные граничные условия для рассматриваемой задачи для функций  $u$ ,  $v$ ,  $\theta$  были получены в пункте (2.2.1):  $u(0) = v(0) = v(L) = 0$ . Найдем вариацию приведенных граничных условий. Для этого даем приращения функциям согласно формулам (2.19), вычисляем производную по  $\alpha$  и полагаем  $\alpha=0$ .

$$\begin{aligned}
 u(0) & \rightarrow (u(0) + \alpha \delta u(0))'_{\alpha=0} = \delta u(0); & v(0) & \rightarrow (v(0) + \alpha \delta v(0))'_{\alpha=0} = \delta v(0); \\
 v(L) & \rightarrow (v(L) + \alpha \delta v(L))'_{\alpha=0} = \delta v(L).
 \end{aligned}$$

Отсюда следует, что из внеинтегральных слагаемых первой вариации функционала устойчивости (2.23) слагаемые с  $\delta u(0)$ ,  $\delta v(0)$ ,  $\delta v(L)$  пропадают, и остаются только слагаемые с  $\delta u(L)$ ,  $\delta \theta(0)$  и  $\delta \theta(L)$ .

Окончательно, внеинтегральные слагаемые для рассматриваемой задачи примут вид:

$$\begin{aligned}
 & \delta u(L) \cdot \left( \frac{\partial N}{\partial \varepsilon} \varepsilon_B \cos \varphi - \frac{\partial Q}{\partial \gamma} \gamma_B \sin \varphi + \frac{\partial^2 W}{\partial \varepsilon \partial \gamma} (\gamma_B \cos \varphi - \varepsilon_B \sin \varphi) + \frac{\partial^2 W}{\partial \varepsilon \partial \psi} \psi_B \cos \varphi - \right. \\
 & \left. - \frac{\partial^2 W}{\partial \gamma \partial \psi} \psi_B \sin \varphi - \theta (N \sin \varphi + Q \cos \varphi) \right) \Bigg|_{s=L} - \delta \theta(0) \cdot \left( \frac{\partial^2 W}{\partial \varepsilon \partial \psi} \varepsilon_B + \frac{\partial^2 W}{\partial \gamma \partial \psi} \gamma_B + \frac{\partial M}{\partial \psi} \psi_B \right) \Bigg|_{s=0} + \\
 & + \delta \theta(L) \cdot \left( \frac{\partial^2 W}{\partial \varepsilon \partial \psi} \varepsilon_B + \frac{\partial^2 W}{\partial \gamma \partial \psi} \gamma_B + \frac{\partial M}{\partial \psi} \psi_B \right) \Bigg|_{s=L}.
 \end{aligned}$$



Из условия  $\delta\Phi_{cr}=0$  при любых вариациях  $\delta u$ ,  $\delta v$ ,  $\delta\theta$  следует равенство нулю множителей при  $\delta u(L)$ ,  $\delta\theta(0)$  и  $\delta\theta(L)$ . Таким образом, получаем следующие естественные граничные условия:

$$\left( \frac{\partial N}{\partial \varepsilon} \varepsilon_B \cos \varphi - \frac{\partial Q}{\partial \gamma} \gamma_B \sin \varphi + \frac{\partial^2 W}{\partial \varepsilon \partial \gamma} (\gamma_B \cos \varphi - \varepsilon_B \sin \varphi) + \frac{\partial^2 W}{\partial \varepsilon \partial \psi} \psi_B \cos \varphi - \frac{\partial^2 W}{\partial \gamma \partial \psi} \psi_B \sin \varphi - \theta(N \sin \varphi + Q \cos \varphi) \right) \Big|_{s=L} = 0;$$

$$\left( \frac{\partial^2 W}{\partial \varepsilon \partial \psi} \varepsilon_B + \frac{\partial^2 W}{\partial \gamma \partial \psi} \gamma_B + \frac{\partial M}{\partial \psi} \psi_B \right) \Big|_{s=0} = 0; \quad \left( \frac{\partial^2 W}{\partial \varepsilon \partial \psi} \varepsilon_B + \frac{\partial^2 W}{\partial \gamma \partial \psi} \gamma_B + \frac{\partial M}{\partial \psi} \psi_B \right) \Big|_{s=L} = 0.$$

Окончательно, граничные условия для поставленной задачи могут быть записаны в виде:  
 $s = 0$ :

$$u(0) = 0; \quad v(0) = 0; \quad \left( \frac{\partial^2 W}{\partial \varepsilon \partial \psi} \varepsilon_B + \frac{\partial^2 W}{\partial \gamma \partial \psi} \gamma_B + \frac{\partial M}{\partial \psi} \psi_B \right) \Big|_{s=0} = 0;$$

$s = L$ :

$$\left( \frac{\partial N}{\partial \varepsilon} \varepsilon_B \cos \varphi - \frac{\partial Q}{\partial \gamma} \gamma_B \sin \varphi + \frac{\partial^2 W}{\partial \varepsilon \partial \gamma} (\gamma_B \cos \varphi - \varepsilon_B \sin \varphi) + \frac{\partial^2 W}{\partial \varepsilon \partial \psi} \psi_B \cos \varphi - \frac{\partial^2 W}{\partial \gamma \partial \psi} \psi_B \sin \varphi - \theta(N \sin \varphi + Q \cos \varphi) \right) \Big|_{s=L} = 0; \quad (2.24)$$

$$v(L) = 0; \quad \left( \frac{\partial^2 W}{\partial \varepsilon \partial \psi} \varepsilon_B + \frac{\partial^2 W}{\partial \gamma \partial \psi} \gamma_B + \frac{\partial M}{\partial \psi} \psi_B \right) \Big|_{s=L} = 0;$$

### Консольный стержень (рисунок 2.2)

Главные граничные условия для рассматриваемой задачи для функций  $u$ ,  $v$ ,  $\theta$  были получены в пункте (2.2.2):  $u(0) = v(0) = 0$ ;  $\theta(0) = 0$ . Найдем вариацию приведенных граничных условий. Для этого даем приращения функциям согласно формулам (2.19), вычисляем производную по  $\alpha$  и полагаем  $\alpha=0$ .

$$u(0) \rightarrow (u(0) + \alpha \delta u(0))'_{\alpha=0} = \delta u(0); \quad v(0) \rightarrow (v(0) + \alpha \delta v(0))'_{\alpha=0} = \delta v(0);$$

$$\theta(0) \rightarrow (\theta(0) + \alpha \delta \theta(0))'_{\alpha=0} = \delta \theta(0).$$

Отсюда следует, что из внеинтегральных слагаемых первой вариации функционала устойчивости (2.23) слагаемые с  $\delta u(0)$ ,  $\delta v(0)$ ,  $\delta \theta(0)$  пропадают, и остаются только слагаемые с  $\delta u(L)$ ,  $\delta v(L)$  и  $\delta \theta(L)$ .

Окончательно, внеинтегральные слагаемые для рассматриваемой задачи примут вид:

$$\begin{aligned}
& \delta u \cdot \left( \frac{\partial N}{\partial \varepsilon} \varepsilon_B \cos \varphi - \frac{\partial Q}{\partial \gamma} \gamma_B \sin \varphi + \frac{\partial^2 W}{\partial \varepsilon \partial \gamma} (\gamma_B \cos \varphi - \varepsilon_B \sin \varphi) + \frac{\partial^2 W}{\partial \varepsilon \partial \psi} \psi_B \cos \varphi - \right. \\
& \left. - \frac{\partial^2 W}{\partial \gamma \partial \psi} \psi_B \sin \varphi - \theta (N \sin \varphi + Q \cos \varphi) \right) \Big|_{s=L} + \delta v \cdot \left( \frac{\partial N}{\partial \varepsilon} \varepsilon_B \sin \varphi + \frac{\partial Q}{\partial \gamma} \gamma_B \cos \varphi + \right. \\
& \left. + \frac{\partial^2 W}{\partial \varepsilon \partial \gamma} (\gamma_B \sin \varphi + \varepsilon_B \cos \varphi) + \frac{\partial^2 W}{\partial \varepsilon \partial \psi} \psi_B \sin \varphi + \frac{\partial^2 W}{\partial \gamma \partial \psi} \psi_B \cos \varphi + \theta (N \cos \varphi - Q \sin \varphi) \right) \Big|_{s=L} + \\
& + \delta \theta \cdot \left( \frac{\partial^2 W}{\partial \varepsilon \partial \psi} \varepsilon_B + \frac{\partial^2 W}{\partial \gamma \partial \psi} \gamma_B + \frac{\partial M}{\partial \psi} \psi_B \right) \Big|_{s=L}.
\end{aligned}$$

Из условия  $\delta \Phi_{\text{ст}}=0$  при любых вариациях  $\delta u$ ,  $\delta v$ ,  $\delta \theta$  следует равенство нулю множителей при  $\delta u(L)$ ,  $\delta v(L)$  и  $\delta \theta(L)$ . Таким образом, получаем следующие естественные граничные условия:

$$\left( \frac{\partial N}{\partial \varepsilon} \varepsilon_B \cos \varphi - \frac{\partial Q}{\partial \gamma} \gamma_B \sin \varphi + \frac{\partial^2 W}{\partial \varepsilon \partial \gamma} (\gamma_B \cos \varphi - \varepsilon_B \sin \varphi) + \frac{\partial^2 W}{\partial \varepsilon \partial \psi} \psi_B \cos \varphi - \right. \\
\left. - \frac{\partial^2 W}{\partial \gamma \partial \psi} \psi_B \sin \varphi - \theta (N \sin \varphi + Q \cos \varphi) \right) \Big|_{s=L} = 0;$$

$$\left( \frac{\partial N}{\partial \varepsilon} \varepsilon_B \sin \varphi + \frac{\partial Q}{\partial \gamma} \gamma_B \cos \varphi + \frac{\partial^2 W}{\partial \varepsilon \partial \gamma} (\gamma_B \sin \varphi + \varepsilon_B \cos \varphi) + \frac{\partial^2 W}{\partial \varepsilon \partial \psi} \psi_B \sin \varphi + \right. \\
\left. + \frac{\partial^2 W}{\partial \gamma \partial \psi} \psi_B \cos \varphi + \theta (N \cos \varphi - Q \sin \varphi) \right) \Big|_{s=L} = 0;$$

$$\left( \frac{\partial^2 W}{\partial \varepsilon \partial \psi} \varepsilon_B + \frac{\partial^2 W}{\partial \gamma \partial \psi} \gamma_B + \frac{\partial M}{\partial \psi} \psi_B \right) \Big|_{s=L} = 0.$$

Окончательно, граничные условия для поставленной задачи могут быть записаны в виде:

$s = 0$  :

$$u(0) = 0; \quad v(0) = 0; \quad \theta(0) = 0;$$

$s = L$  :

$$\left( \frac{\partial N}{\partial \varepsilon} \varepsilon_B \cos \varphi - \frac{\partial Q}{\partial \gamma} \gamma_B \sin \varphi + \frac{\partial^2 W}{\partial \varepsilon \partial \gamma} (\gamma_B \cos \varphi - \varepsilon_B \sin \varphi) + \frac{\partial^2 W}{\partial \varepsilon \partial \psi} \psi_B \cos \varphi - \right. \\
\left. - \frac{\partial^2 W}{\partial \gamma \partial \psi} \psi_B \sin \varphi - \theta (N \sin \varphi + Q \cos \varphi) \right) \Big|_{s=L} = 0;$$

$$\left( \frac{\partial N}{\partial \varepsilon} \varepsilon_B \sin \varphi + \frac{\partial Q}{\partial \gamma} \gamma_B \cos \varphi + \frac{\partial^2 W}{\partial \varepsilon \partial \gamma} (\gamma_B \sin \varphi + \varepsilon_B \cos \varphi) + \frac{\partial^2 W}{\partial \varepsilon \partial \psi} \psi_B \sin \varphi + \right. \\
\left. + \frac{\partial^2 W}{\partial \gamma \partial \psi} \psi_B \cos \varphi + \theta (N \cos \varphi - Q \sin \varphi) \right) \Big|_{s=L} = 0;$$

$$\left( \frac{\partial^2 W}{\partial \varepsilon \partial \psi} \varepsilon_B + \frac{\partial^2 W}{\partial \gamma \partial \psi} \gamma_B + \frac{\partial M}{\partial \psi} \psi_B \right) \Big|_{s=L} = 0;$$

(2.25)

**Стержень с заделкой с одной стороны и скользящей заделкой, допускающей перемещения вдоль оси стержня, с другой (рисунок 2.3)**

Главные граничные условия для рассматриваемой задачи для функций  $u$ ,  $v$ ,  $\theta$  были получены в пункте (2.2.3):  $u(0) = v(0) = v(L) = 0$ ;  $\theta(0) = \theta(L) = 0$ . Найдем вариацию приведенных граничных условий. Для этого даем приращения функциям согласно формулам (2.19), вычисляем производную по  $\alpha$  и полагаем  $\alpha=0$ .

$$u(0) \rightarrow (u(0) + \alpha \delta u(0))'_{\alpha=0} = \delta u(0);$$

$$v(0) \rightarrow (v(0) + \alpha \delta v(0))'_{\alpha=0} = \delta v(0); \quad v(L) \rightarrow (v(L) + \alpha \delta v(L))'_{\alpha=0} = \delta v(L);$$

$$\theta(0) \rightarrow (\theta(0) + \alpha \delta \theta(0))'_{\alpha=0} = \delta \theta(0); \quad \theta(L) \rightarrow (\theta(L) + \alpha \delta \theta(L))'_{\alpha=0} = \delta \theta(L);$$

Отсюда следует, что из внеинтегральных слагаемых первой вариации функционала устойчивости (2.23) слагаемые с  $\delta u(0)$ ,  $\delta v(0)$ ,  $\delta v(L)$ ,  $\delta \theta(0)$ ,  $\delta \theta(L)$  пропадают, и остается только слагаемое с  $\delta u(L)$ .

Окончательно, внеинтегральное слагаемое для рассматриваемой задачи примет вид:

$$\delta u(L) \cdot \left( \frac{\partial N}{\partial \varepsilon} \varepsilon_B \cos \varphi - \frac{\partial Q}{\partial \gamma} \gamma_B \sin \varphi + \frac{\partial^2 W}{\partial \varepsilon \partial \gamma} (\gamma_B \cos \varphi - \varepsilon_B \sin \varphi) + \frac{\partial^2 W}{\partial \varepsilon \partial \psi} \psi_B \cos \varphi - \frac{\partial^2 W}{\partial \gamma \partial \psi} \psi_B \sin \varphi - \theta(N \sin \varphi + Q \cos \varphi) \right) \Bigg|_{s=L}.$$

Из условия  $\delta \Phi_{ct} = 0$  при любых вариациях  $\delta u$ ,  $\delta v$ ,  $\delta \theta$  следует равенство нулю множителя при  $\delta u(L)$ . Таким образом, получаем следующее естественное граничное условие:

$$\left( \frac{\partial N}{\partial \varepsilon} \varepsilon_B \cos \varphi - \frac{\partial Q}{\partial \gamma} \gamma_B \sin \varphi + \frac{\partial^2 W}{\partial \varepsilon \partial \gamma} (\gamma_B \cos \varphi - \varepsilon_B \sin \varphi) + \frac{\partial^2 W}{\partial \varepsilon \partial \psi} \psi_B \cos \varphi - \frac{\partial^2 W}{\partial \gamma \partial \psi} \psi_B \sin \varphi - \theta(N \sin \varphi + Q \cos \varphi) \right) \Bigg|_{s=L} = 0.$$

Окончательно, граничные условия для поставленной задачи могут быть записаны в виде:

$$s = 0:$$

$$u(0) = 0; \quad v(0) = 0; \quad \theta(0) = 0;$$

$$s = L:$$

$$\left( \frac{\partial N}{\partial \varepsilon} \varepsilon_B \cos \varphi - \frac{\partial Q}{\partial \gamma} \gamma_B \sin \varphi + \frac{\partial^2 W}{\partial \varepsilon \partial \gamma} (\gamma_B \cos \varphi - \varepsilon_B \sin \varphi) + \frac{\partial^2 W}{\partial \varepsilon \partial \psi} \psi_B \cos \varphi - \right. \quad (2.26)$$

$$\left. - \frac{\partial^2 W}{\partial \gamma \partial \psi} \psi_B \sin \varphi - \theta(N \sin \varphi + Q \cos \varphi) \right) \Bigg|_{s=L} = 0;$$

$$v(L) = 0; \quad \theta(L) = 0.$$

**Стержень с заделкой с одной стороны и скользящей заделкой, допускающей перемещения перпендикулярно оси стержня, с другой (рисунок 2.4)**

Главные граничные условия для рассматриваемой задачи для функций  $u$ ,  $v$ ,  $\theta$  были получены в пункте (2.2.4):  $u(0) = v(0) = 0$ ;  $\theta(0) = \theta(L) = 0$ . Найдем вариацию приведенных граничных условий. Для этого даем приращения функциям согласно формулам (2.19), вычисляем производную по  $\alpha$  и полагаем  $\alpha=0$ .

$$u(0) \rightarrow (u(0) + \alpha \delta u(0))'_{\alpha=0} = \delta u(0);$$

$$v(0) \rightarrow (v(0) + \alpha \delta v(0))'_{\alpha=0} = \delta v(0);$$

$$\theta(0) \rightarrow (\theta(0) + \alpha \delta \theta(0))'_{\alpha=0} = \delta \theta(0);$$

$$\theta(L) \rightarrow (\theta(L) + \alpha \delta \theta(L))'_{\alpha=0} = \delta \theta(L).$$

Отсюда следует, что из внеинтегральных слагаемых первой вариации функционала устойчивости (2.23) слагаемые с  $\delta u(0)$ ,  $\delta v(0)$ ,  $\delta \theta(0)$ ,  $\delta \theta(L)$  пропадают, и остаются только слагаемые с  $\delta u(L)$  и  $\delta v(L)$ .

Окончательно, внеинтегральные слагаемые для рассматриваемой задачи примут вид:

$$\begin{aligned} & \delta u \cdot \left( \frac{\partial N}{\partial \varepsilon} \varepsilon_B \cos \varphi - \frac{\partial Q}{\partial \gamma} \gamma_B \sin \varphi + \frac{\partial^2 W}{\partial \varepsilon \partial \gamma} (\gamma_B \cos \varphi - \varepsilon_B \sin \varphi) + \frac{\partial^2 W}{\partial \varepsilon \partial \psi} \psi_B \cos \varphi - \right. \\ & \left. - \frac{\partial^2 W}{\partial \gamma \partial \psi} \psi_B \sin \varphi - \theta(N \sin \varphi + Q \cos \varphi) \right) \Bigg|_{s=L} + \delta v \cdot \left( \frac{\partial N}{\partial \varepsilon} \varepsilon_B \sin \varphi + \frac{\partial Q}{\partial \gamma} \gamma_B \cos \varphi + \right. \\ & \left. + \frac{\partial^2 W}{\partial \varepsilon \partial \gamma} (\gamma_B \sin \varphi + \varepsilon_B \cos \varphi) + \frac{\partial^2 W}{\partial \varepsilon \partial \psi} \psi_B \sin \varphi + \frac{\partial^2 W}{\partial \gamma \partial \psi} \psi_B \cos \varphi + \theta(N \cos \varphi - Q \sin \varphi) \right) \Bigg|_{s=L}. \end{aligned}$$

Из условия  $\delta \Phi_{ст} = 0$  при любых вариациях  $\delta u$ ,  $\delta v$ ,  $\delta \theta$  следует равенство нулю множителей при  $\delta u(L)$  и  $\delta v(L)$ . Таким образом, получаем следующие естественные граничные условия:

$$\left( \frac{\partial N}{\partial \varepsilon} \varepsilon_B \cos \varphi - \frac{\partial Q}{\partial \gamma} \gamma_B \sin \varphi + \frac{\partial^2 W}{\partial \varepsilon \partial \gamma} (\gamma_B \cos \varphi - \varepsilon_B \sin \varphi) + \frac{\partial^2 W}{\partial \varepsilon \partial \psi} \psi_B \cos \varphi - \right. \\ \left. - \frac{\partial^2 W}{\partial \gamma \partial \psi} \psi_B \sin \varphi - \theta(N \sin \varphi + Q \cos \varphi) \right) \Bigg|_{s=L} = 0;$$

$$\left( \frac{\partial N}{\partial \varepsilon} \varepsilon_B \sin \varphi + \frac{\partial Q}{\partial \gamma} \gamma_B \cos \varphi + \frac{\partial^2 W}{\partial \varepsilon \partial \gamma} (\gamma_B \sin \varphi + \varepsilon_B \cos \varphi) + \frac{\partial^2 W}{\partial \varepsilon \partial \psi} \psi_B \sin \varphi + \right. \\ \left. + \frac{\partial^2 W}{\partial \gamma \partial \psi} \psi_B \cos \varphi + \theta(N \cos \varphi - Q \sin \varphi) \right) \Bigg|_{s=L} = 0.$$

Окончательно, граничные условия для поставленной задачи могут быть записаны в виде:

$s = 0 :$

$$u(0) = 0; \quad v(0) = 0; \quad \theta(0) = 0;$$

$s = L :$

$$\left( \frac{\partial N}{\partial \varepsilon} \varepsilon_B \cos \varphi - \frac{\partial Q}{\partial \gamma} \gamma_B \sin \varphi + \frac{\partial^2 W}{\partial \varepsilon \partial \gamma} (\gamma_B \cos \varphi - \varepsilon_B \sin \varphi) + \frac{\partial^2 W}{\partial \varepsilon \partial \psi} \psi_B \cos \varphi - \right. \\ \left. - \frac{\partial^2 W}{\partial \gamma \partial \psi} \psi_B \sin \varphi - \theta(N \sin \varphi + Q \cos \varphi) \right) \Big|_{s=L} = 0;$$

$$\left( \frac{\partial N}{\partial \varepsilon} \varepsilon_B \sin \varphi + \frac{\partial Q}{\partial \gamma} \gamma_B \cos \varphi + \frac{\partial^2 W}{\partial \varepsilon \partial \gamma} (\gamma_B \sin \varphi + \varepsilon_B \cos \varphi) + \frac{\partial^2 W}{\partial \varepsilon \partial \psi} \psi_B \sin \varphi + \right. \\ \left. + \frac{\partial^2 W}{\partial \gamma \partial \psi} \psi_B \cos \varphi + \theta(N \cos \varphi - Q \sin \varphi) \right) \Big|_{s=L} = 0;$$

$$\theta(L) = 0; \tag{2.27}$$

**Шарнирно опертый стержень со скользящей заделкой, допускающей перемещения перпендикулярно оси стержня (рисунок 2.5)**

Главные граничные условия для рассматриваемой задачи для функций  $u$ ,  $v$ ,  $\theta$  были получены в пункте (2.2.5):  $u(0) = v(0) = 0$ ;  $\theta(L) = 0$ . Найдем вариацию приведенных граничных условий. Для этого даем приращения функциям согласно формулам (2.19), вычисляем производную по  $\alpha$  и полагаем  $\alpha=0$ .

$$u(0) \rightarrow (u(0) + \alpha \delta u(0))'_{\alpha=0} = \delta u(0);$$

$$v(0) \rightarrow (v(0) + \alpha \delta v(0))'_{\alpha=0} = \delta v(0); \quad \theta(L) \rightarrow (\theta(L) + \alpha \delta \theta(L))'_{\alpha=0} = \delta \theta(L).$$

Отсюда следует, что из внеинтегральных слагаемых первой вариации функционала устойчивости (2.23) слагаемые с  $\delta u(0)$ ,  $\delta v(0)$ ,  $\delta \theta(L)$  пропадают, и остаются только слагаемые с  $\delta u(L)$ ,  $\delta v(L)$  и  $\delta \theta(0)$ .

Окончательно, внеинтегральные слагаемые для рассматриваемой задачи примут вид:

$$\delta u \cdot \left( \frac{\partial N}{\partial \varepsilon} \varepsilon_B \cos \varphi - \frac{\partial Q}{\partial \gamma} \gamma_B \sin \varphi + \frac{\partial^2 W}{\partial \varepsilon \partial \gamma} (\gamma_B \cos \varphi - \varepsilon_B \sin \varphi) + \frac{\partial^2 W}{\partial \varepsilon \partial \psi} \psi_B \cos \varphi - \right. \\ \left. - \frac{\partial^2 W}{\partial \gamma \partial \psi} \psi_B \sin \varphi - \theta(N \sin \varphi + Q \cos \varphi) \right) \Big|_{s=L} + \delta v \cdot \left( \frac{\partial N}{\partial \varepsilon} \varepsilon_B \sin \varphi + \frac{\partial Q}{\partial \gamma} \gamma_B \cos \varphi + \right. \\ \left. + \frac{\partial^2 W}{\partial \varepsilon \partial \gamma} (\gamma_B \sin \varphi + \varepsilon_B \cos \varphi) + \frac{\partial^2 W}{\partial \varepsilon \partial \psi} \psi_B \sin \varphi + \frac{\partial^2 W}{\partial \gamma \partial \psi} \psi_B \cos \varphi + \theta(N \cos \varphi - Q \sin \varphi) \right) \Big|_{s=L} - \\ - \delta \theta \cdot \left( \frac{\partial^2 W}{\partial \varepsilon \partial \psi} \varepsilon_B + \frac{\partial^2 W}{\partial \gamma \partial \psi} \gamma_B + \frac{\partial M}{\partial \psi} \psi_B \right) \Big|_{s=0}.$$

Из условия  $\delta\Phi_{ст}=0$  при любых вариациях  $\delta u$ ,  $\delta v$ ,  $\delta\theta$  следует равенство нулю множителей при  $\delta u(L)$ ,  $\delta v(L)$  и  $\delta\theta(0)$ . Таким образом, получаем следующие естественные граничные условия:

$$\left( \frac{\partial N}{\partial \varepsilon} \varepsilon_B \cos \varphi - \frac{\partial Q}{\partial \gamma} \gamma_B \sin \varphi + \frac{\partial^2 W}{\partial \varepsilon \partial \gamma} (\gamma_B \cos \varphi - \varepsilon_B \sin \varphi) + \frac{\partial^2 W}{\partial \varepsilon \partial \psi} \psi_B \cos \varphi - \frac{\partial^2 W}{\partial \gamma \partial \psi} \psi_B \sin \varphi - \theta(N \sin \varphi + Q \cos \varphi) \right) \Bigg|_{s=L} = 0;$$

$$\left( \frac{\partial N}{\partial \varepsilon} \varepsilon_B \sin \varphi + \frac{\partial Q}{\partial \gamma} \gamma_B \cos \varphi + \frac{\partial^2 W}{\partial \varepsilon \partial \gamma} (\gamma_B \sin \varphi + \varepsilon_B \cos \varphi) + \frac{\partial^2 W}{\partial \varepsilon \partial \psi} \psi_B \sin \varphi + \frac{\partial^2 W}{\partial \gamma \partial \psi} \psi_B \cos \varphi + \theta(N \cos \varphi - Q \sin \varphi) \right) \Bigg|_{s=L} = 0;$$

$$\left( \frac{\partial^2 W}{\partial \varepsilon \partial \psi} \varepsilon_B + \frac{\partial^2 W}{\partial \gamma \partial \psi} \gamma_B + \frac{\partial M}{\partial \psi} \psi_B \right) \Bigg|_{s=0} = 0.$$

Окончательно, граничные условия для поставленной задачи могут быть записаны в виде:

$$s = 0:$$

$$u(0) = 0; \quad v(0) = 0; \quad \left( \frac{\partial^2 W}{\partial \varepsilon \partial \psi} \varepsilon_B + \frac{\partial^2 W}{\partial \gamma \partial \psi} \gamma_B + \frac{\partial M}{\partial \psi} \psi_B \right) \Bigg|_{s=L} = 0;$$

$$s = L:$$

$$\left( \frac{\partial N}{\partial \varepsilon} \varepsilon_B \cos \varphi - \frac{\partial Q}{\partial \gamma} \gamma_B \sin \varphi + \frac{\partial^2 W}{\partial \varepsilon \partial \gamma} (\gamma_B \cos \varphi - \varepsilon_B \sin \varphi) + \frac{\partial^2 W}{\partial \varepsilon \partial \psi} \psi_B \cos \varphi - \frac{\partial^2 W}{\partial \gamma \partial \psi} \psi_B \sin \varphi - \theta(N \sin \varphi + Q \cos \varphi) \right) \Bigg|_{s=L} = 0;$$

$$\left( \frac{\partial N}{\partial \varepsilon} \varepsilon_B \sin \varphi + \frac{\partial Q}{\partial \gamma} \gamma_B \cos \varphi + \frac{\partial^2 W}{\partial \varepsilon \partial \gamma} (\gamma_B \sin \varphi + \varepsilon_B \cos \varphi) + \frac{\partial^2 W}{\partial \varepsilon \partial \psi} \psi_B \sin \varphi + \frac{\partial^2 W}{\partial \gamma \partial \psi} \psi_B \cos \varphi + \theta(N \cos \varphi - Q \sin \varphi) \right) \Bigg|_{s=L} = 0;$$

(2.28)

$$\theta(L) = 0;$$

### Стержень с заделкой с одной стороны и шарниром с другой (рисунок 2.6)

Главные граничные условия для рассматриваемой задачи для функций  $u$ ,  $v$ ,  $\theta$  были получены в пункте (2.2.6):  $u(0) = v(0) = v(L) = 0$ ;  $\theta(0) = 0$ . Найдем вариацию приведенных граничных условий. Для этого даем приращения функциям согласно формулам (2.19), вычисляем производную по  $\alpha$  и полагаем  $\alpha=0$ .

$$u(0) \rightarrow (u(0) + \alpha \delta u(0))'_{\alpha=0} = \delta u(0);$$

$$v(0) \rightarrow (v(0) + \alpha \delta v(0))'_{\alpha=0} = \delta v(0);$$

$$v(L) \rightarrow (v(L) + \alpha \delta v(L))'_{\alpha=0} = \delta v(L);$$

$$\theta(0) \rightarrow (\theta(0) + \alpha \delta \theta(0))'_{\alpha=0} = \delta \theta(0).$$

Отсюда следует, что из внеинтегральных слагаемых первой вариации функционала устойчивости (2.23) слагаемые с  $\delta u(0)$ ,  $\delta v(0)$ ,  $\delta v(L)$ ,  $\delta \theta(0)$  пропадают, и остаются только слагаемые с  $\delta u(L)$  и  $\delta \theta(L)$ .

Окончательно, внеинтегральные слагаемые для рассматриваемой задачи примут вид:

$$\delta u \cdot \left( \frac{\partial N}{\partial \varepsilon} \varepsilon_B \cos \varphi - \frac{\partial Q}{\partial \gamma} \gamma_B \sin \varphi + \frac{\partial^2 W}{\partial \varepsilon \partial \gamma} (\gamma_B \cos \varphi - \varepsilon_B \sin \varphi) + \frac{\partial^2 W}{\partial \varepsilon \partial \psi} \psi_B \cos \varphi - \right. \\ \left. - \frac{\partial^2 W}{\partial \gamma \partial \psi} \psi_B \sin \varphi - \theta(N \sin \varphi + Q \cos \varphi) \right) \Bigg|_{s=L} + \delta \theta \cdot \left( \frac{\partial^2 W}{\partial \varepsilon \partial \psi} \varepsilon_B + \frac{\partial^2 W}{\partial \gamma \partial \psi} \gamma_B + \frac{\partial M}{\partial \psi} \psi_B \right) \Bigg|_{s=L}.$$

Из условия  $\delta \Phi_{\text{ст}}=0$  при любых вариациях  $\delta u$ ,  $\delta v$ ,  $\delta \theta$  следует равенство нулю множителей при  $\delta u(L)$  и  $\delta \theta(L)$ . Таким образом, получаем следующие естественные граничные условия:

$$\left( \frac{\partial N}{\partial \varepsilon} \varepsilon_B \cos \varphi - \frac{\partial Q}{\partial \gamma} \gamma_B \sin \varphi + \frac{\partial^2 W}{\partial \varepsilon \partial \gamma} (\gamma_B \cos \varphi - \varepsilon_B \sin \varphi) + \frac{\partial^2 W}{\partial \varepsilon \partial \psi} \psi_B \cos \varphi - \right. \\ \left. - \frac{\partial^2 W}{\partial \gamma \partial \psi} \psi_B \sin \varphi - \theta(N \sin \varphi + Q \cos \varphi) \right) \Bigg|_{s=L} = 0;$$

$$\left( \frac{\partial^2 W}{\partial \varepsilon \partial \psi} \varepsilon_B + \frac{\partial^2 W}{\partial \gamma \partial \psi} \gamma_B + \frac{\partial M}{\partial \psi} \psi_B \right) \Bigg|_{s=L} = 0.$$

Окончательно, граничные условия для поставленной задачи могут быть записаны в виде:

$$s = 0:$$

$$u(0) = 0; \quad v(0) = 0; \quad \theta(0) = 0;$$

$$s = L:$$

$$\left( \frac{\partial N}{\partial \varepsilon} \varepsilon_B \cos \varphi - \frac{\partial Q}{\partial \gamma} \gamma_B \sin \varphi + \frac{\partial^2 W}{\partial \varepsilon \partial \gamma} (\gamma_B \cos \varphi - \varepsilon_B \sin \varphi) + \frac{\partial^2 W}{\partial \varepsilon \partial \psi} \psi_B \cos \varphi - \right. \\ \left. - \frac{\partial^2 W}{\partial \gamma \partial \psi} \psi_B \sin \varphi - \theta(N \sin \varphi + Q \cos \varphi) \right) \Bigg|_{s=L} = 0; \tag{2.29}$$

$$v(L) = 0; \quad \left( \frac{\partial^2 W}{\partial \varepsilon \partial \psi} \varepsilon_B + \frac{\partial^2 W}{\partial \gamma \partial \psi} \gamma_B + \frac{\partial M}{\partial \psi} \psi_B \right) \Bigg|_{s=L} = 0;$$

### Консольный стержень под действием момента (рисунок 2.7)

Главные граничные условия для рассматриваемой задачи для функций  $u$ ,  $v$ ,  $\theta$  были получены в пункте (2.2.7):  $u(0) = v(0) = 0$ ;  $\theta(0) = 0$ . Найдем вариацию приведенных граничных условий. Для этого даем приращения функциям согласно формулам (2.19), вычисляем производную по  $\alpha$  и полагаем  $\alpha=0$ .

$$u(0) \rightarrow (u(0) + \alpha \delta u(0))'_{\alpha=0} = \delta u(0);$$

$$v(0) \rightarrow (v(0) + \alpha \delta v(0))'_{\alpha=0} = \delta v(0);$$

$$\theta(0) \rightarrow (\theta(0) + \alpha \delta \theta(0))'_{\alpha=0} = \delta \theta(0).$$

Отсюда следует, что из внеинтегральных слагаемых первой вариации функционала устойчивости (2.23) слагаемые с  $\delta u(0)$ ,  $\delta v(0)$ ,  $\delta \theta(0)$  пропадают, и остаются только слагаемые с  $\delta u(L)$ ,  $\delta v(L)$  и  $\delta \theta(L)$ .

Окончательно, внеинтегральные слагаемые для рассматриваемой задачи примут вид:

$$\begin{aligned} & \delta u \cdot \left( \frac{\partial N}{\partial \varepsilon} \varepsilon_B \cos \varphi - \frac{\partial Q}{\partial \gamma} \gamma_B \sin \varphi + \frac{\partial^2 W}{\partial \varepsilon \partial \gamma} (\gamma_B \cos \varphi - \varepsilon_B \sin \varphi) + \frac{\partial^2 W}{\partial \varepsilon \partial \psi} \psi_B \cos \varphi - \right. \\ & \left. - \frac{\partial^2 W}{\partial \gamma \partial \psi} \psi_B \sin \varphi - \theta (N \sin \varphi + Q \cos \varphi) \right) \Bigg|_{s=L} + \delta v \cdot \left( \frac{\partial N}{\partial \varepsilon} \varepsilon_B \sin \varphi + \frac{\partial Q}{\partial \gamma} \gamma_B \cos \varphi + \right. \\ & \left. + \frac{\partial^2 W}{\partial \varepsilon \partial \gamma} (\gamma_B \sin \varphi + \varepsilon_B \cos \varphi) + \frac{\partial^2 W}{\partial \varepsilon \partial \psi} \psi_B \sin \varphi + \frac{\partial^2 W}{\partial \gamma \partial \psi} \psi_B \cos \varphi + \theta (N \cos \varphi - Q \sin \varphi) \right) \Bigg|_{s=L} + \\ & + \delta \theta \cdot \left( \frac{\partial^2 W}{\partial \varepsilon \partial \psi} \varepsilon_B + \frac{\partial^2 W}{\partial \gamma \partial \psi} \gamma_B + \frac{\partial M}{\partial \psi} \psi_B \right) \Bigg|_{s=L}. \end{aligned}$$

Из условия  $\delta \Phi_{ст} = 0$  при любых вариациях  $\delta u$ ,  $\delta v$ ,  $\delta \theta$  следует равенство нулю множителей при  $\delta u(L)$ ,  $\delta v(L)$  и  $\delta \theta(L)$ . Таким образом, получаем следующие естественные граничные условия:

$$\left( \frac{\partial N}{\partial \varepsilon} \varepsilon_B \cos \varphi - \frac{\partial Q}{\partial \gamma} \gamma_B \sin \varphi + \frac{\partial^2 W}{\partial \varepsilon \partial \gamma} (\gamma_B \cos \varphi - \varepsilon_B \sin \varphi) + \frac{\partial^2 W}{\partial \varepsilon \partial \psi} \psi_B \cos \varphi - \right. \\ \left. - \frac{\partial^2 W}{\partial \gamma \partial \psi} \psi_B \sin \varphi - \theta (N \sin \varphi + Q \cos \varphi) \right) \Bigg|_{s=L} = 0;$$

$$\left( \frac{\partial N}{\partial \varepsilon} \varepsilon_B \sin \varphi + \frac{\partial Q}{\partial \gamma} \gamma_B \cos \varphi + \frac{\partial^2 W}{\partial \varepsilon \partial \gamma} (\gamma_B \sin \varphi + \varepsilon_B \cos \varphi) + \frac{\partial^2 W}{\partial \varepsilon \partial \psi} \psi_B \sin \varphi + \right. \\ \left. + \frac{\partial^2 W}{\partial \gamma \partial \psi} \psi_B \cos \varphi + \theta (N \cos \varphi - Q \sin \varphi) \right) \Bigg|_{s=L} = 0;$$

$$\left( \frac{\partial^2 W}{\partial \varepsilon \partial \psi} \varepsilon_B + \frac{\partial^2 W}{\partial \gamma \partial \psi} \gamma_B + \frac{\partial M}{\partial \psi} \psi_B \right) \Bigg|_{s=L} = 0.$$



Окончательно, граничные условия для поставленной задачи могут быть записаны в виде:

$$s = 0 :$$

$$u(0) = 0; \quad v(0) = 0; \quad \theta(0) = 0;$$

$$s = L :$$

$$\left( \frac{\partial N}{\partial \varepsilon} \varepsilon_B \cos \varphi - \frac{\partial Q}{\partial \gamma} \gamma_B \sin \varphi + \frac{\partial^2 W}{\partial \varepsilon \partial \gamma} (\gamma_B \cos \varphi - \varepsilon_B \sin \varphi) + \frac{\partial^2 W}{\partial \varepsilon \partial \psi} \psi_B \cos \varphi - \right. \\ \left. - \frac{\partial^2 W}{\partial \gamma \partial \psi} \psi_B \sin \varphi - \theta(N \sin \varphi + Q \cos \varphi) \right) \Big|_{s=L} = 0;$$

$$\left( \frac{\partial N}{\partial \varepsilon} \varepsilon_B \sin \varphi + \frac{\partial Q}{\partial \gamma} \gamma_B \cos \varphi + \frac{\partial^2 W}{\partial \varepsilon \partial \gamma} (\gamma_B \sin \varphi + \varepsilon_B \cos \varphi) + \frac{\partial^2 W}{\partial \varepsilon \partial \psi} \psi_B \sin \varphi + \right. \\ \left. + \frac{\partial^2 W}{\partial \gamma \partial \psi} \psi_B \cos \varphi + \theta(N \cos \varphi - Q \sin \varphi) \right) \Big|_{s=L} = 0;$$

$$\left( \frac{\partial^2 W}{\partial \varepsilon \partial \psi} \varepsilon_B + \frac{\partial^2 W}{\partial \gamma \partial \psi} \gamma_B + \frac{\partial M}{\partial \psi} \psi_B \right) \Big|_{s=L} = 0; \quad (2.30)$$

## 2.5 Уравнения устойчивости физически нелинейного упругого стержня как уравнения равновесия в вариациях

Получим уравнения устойчивости вторым способом, как уравнения в вариациях уравнений равновесия (1.171), которые далее записаны с использованием физических уравнений (1.184):

$$\left\{ \begin{array}{l} \left( \frac{\partial W}{\partial \varepsilon} \cos \varphi - \frac{\partial W}{\partial \gamma} \sin \varphi \right)' + q_x = 0; \\ \left( \frac{\partial W}{\partial \varepsilon} \sin \varphi + \frac{\partial W}{\partial \gamma} \cos \varphi \right)' + q_y = 0; \\ \left( \frac{\partial W}{\partial \psi} \right)' + x' \left( \frac{\partial W}{\partial \varepsilon} \sin \varphi + \frac{\partial W}{\partial \gamma} \cos \varphi \right) + y' \left( \frac{\partial W}{\partial \gamma} \sin \varphi - \frac{\partial W}{\partial \varepsilon} \cos \varphi \right) + m = 0, \end{array} \right. \quad (2.31)$$

где  $W(\varepsilon, \gamma, \psi)$  – энергия деформации.

Для этого в исходных уравнениях равновесия искомым функциям, согласно выражениям (2.2), дается приращение, зависящее от параметра  $\alpha$ , и затем вычисляется значение производной по  $\alpha$  в точке  $\alpha=0$ , используя выражения (1.184), (2.5) и (2.6).

$$\begin{aligned}
& \left( \frac{\partial W}{\partial \varepsilon} \cos \varphi - \frac{\partial W}{\partial \gamma} \sin \varphi \right)' \rightarrow \frac{d}{d\alpha} \left( \left( \frac{\partial W(\varepsilon + \alpha \delta \varepsilon, \gamma + \alpha \delta \gamma, \psi + \alpha \delta \psi)}{\partial \varepsilon} \cos(\varphi + \alpha \delta \varphi) - \right. \right. \\
& \left. \left. - \frac{\partial W(\varepsilon + \alpha \delta \varepsilon, \gamma + \alpha \delta \gamma, \psi + \alpha \delta \psi)}{\partial \gamma} \sin(\varphi + \alpha \delta \varphi) \right) \right) \Bigg|_{\alpha=0} = \\
& = \left( \left( \frac{\partial^2 W(\varepsilon + \alpha \delta \varepsilon, \gamma + \alpha \delta \gamma, \psi + \alpha \delta \psi)}{\partial \varepsilon \partial (\varepsilon + \alpha \delta \varepsilon)} \frac{\partial (\varepsilon + \alpha \delta \varepsilon)}{\partial \alpha} + \frac{\partial^2 W(\varepsilon + \alpha \delta \varepsilon, \gamma + \alpha \delta \gamma, \psi + \alpha \delta \psi)}{\partial \varepsilon \partial (\gamma + \alpha \delta \gamma)} \frac{\partial (\gamma + \alpha \delta \gamma)}{\partial \alpha} + \right. \right. \\
& \left. \left. + \frac{\partial^2 W(\varepsilon + \alpha \delta \varepsilon, \gamma + \alpha \delta \gamma, \psi + \alpha \delta \psi)}{\partial \varepsilon \partial (\psi + \alpha \delta \psi)} \frac{\partial (\psi + \alpha \delta \psi)}{\partial \alpha} \right) \cos(\varphi + \alpha \delta \varphi) - \right. \\
& \left. - \frac{\partial W(\varepsilon + \alpha \delta \varepsilon, \gamma + \alpha \delta \gamma, \psi + \alpha \delta \psi)}{\partial \varepsilon} \delta \varphi \sin(\varphi + \alpha \delta \varphi) - \right. \\
& \left. - \left( \frac{\partial^2 W(\varepsilon + \alpha \delta \varepsilon, \gamma + \alpha \delta \gamma, \psi + \alpha \delta \psi)}{\partial (\varepsilon + \alpha \delta \varepsilon) \partial \gamma} \frac{\partial (\varepsilon + \alpha \delta \varepsilon)}{\partial \alpha} + \frac{\partial^2 W(\varepsilon + \alpha \delta \varepsilon, \gamma + \alpha \delta \gamma, \psi + \alpha \delta \psi)}{\partial (\gamma + \alpha \delta \gamma) \partial \gamma} \frac{\partial (\gamma + \alpha \delta \gamma)}{\partial \alpha} + \right. \right. \\
& \left. \left. + \frac{\partial^2 W(\varepsilon + \alpha \delta \varepsilon, \gamma + \alpha \delta \gamma, \psi + \alpha \delta \psi)}{\partial \gamma \partial (\psi + \alpha \delta \psi)} \frac{\partial (\psi + \alpha \delta \psi)}{\partial \alpha} \right) \sin(\varphi + \alpha \delta \varphi) - \right. \\
& \left. - \frac{\partial W(\varepsilon + \alpha \delta \varepsilon, \gamma + \alpha \delta \gamma, \psi + \alpha \delta \psi)}{\partial \gamma} \delta \varphi \cos(\varphi + \alpha \delta \varphi) \right) \Bigg|_{\alpha=0} = \left( \left( \frac{\partial^2 W}{\partial \varepsilon^2} \delta \varepsilon + \frac{\partial^2 W}{\partial \varepsilon \partial \gamma} \delta \gamma + \right. \right. \\
& \left. \left. + \frac{\partial^2 W}{\partial \varepsilon \partial \psi} \delta \psi \right) \cos \varphi - \frac{\partial W}{\partial \varepsilon} \delta \varphi \sin \varphi - \left( \frac{\partial^2 W}{\partial \varepsilon \partial \gamma} \delta \varepsilon + \frac{\partial^2 W}{\partial \gamma^2} \delta \gamma + \frac{\partial^2 W}{\partial \gamma \partial \psi} \delta \psi \right) \sin \varphi - \frac{\partial W}{\partial \gamma} \delta \varphi \cos \varphi \right)' = \\
& = \left( \left( \frac{\partial N}{\partial \varepsilon} \varepsilon_B + \frac{\partial^2 W}{\partial \varepsilon \partial \gamma} \gamma_B + \frac{\partial^2 W}{\partial \varepsilon \partial \psi} \psi_B \right) \cos \varphi - N \theta \sin \varphi - \left( \frac{\partial^2 W}{\partial \varepsilon \partial \gamma} \varepsilon_B + \frac{\partial Q}{\partial \gamma} \gamma_B + \frac{\partial^2 W}{\partial \gamma \partial \psi} \psi_B \right) \sin \varphi - \right. \\
& \left. - Q \theta \cos \varphi \right)';
\end{aligned}$$

$$q_x \rightarrow \frac{d}{d\alpha} q_x \Big|_{\alpha=0} = 0;$$

$$q_y \rightarrow \frac{d}{d\alpha} q_y \Big|_{\alpha=0} = 0;$$

$$\begin{aligned}
& \left( \frac{\partial W}{\partial \varepsilon} \sin \varphi + \frac{\partial W}{\partial \gamma} \cos \varphi \right)' \rightarrow \frac{d}{d\alpha} \left( \left( \frac{\partial W(\varepsilon + \alpha \delta \varepsilon, \gamma + \alpha \delta \gamma, \psi + \alpha \delta \psi)}{\partial \varepsilon} \sin(\varphi + \alpha \delta \varphi) + \right. \right. \\
& \left. \left. + \frac{\partial W(\varepsilon + \alpha \delta \varepsilon, \gamma + \alpha \delta \gamma, \psi + \alpha \delta \psi)}{\partial \gamma} \cos(\varphi + \alpha \delta \varphi) \right) \right) \Bigg|_{\alpha=0} = \\
& = \left( \left( \frac{\partial^2 W(\varepsilon + \alpha \delta \varepsilon, \gamma + \alpha \delta \gamma, \psi + \alpha \delta \psi)}{\partial \varepsilon \partial (\varepsilon + \alpha \delta \varepsilon)} \frac{\partial (\varepsilon + \alpha \delta \varepsilon)}{\partial \alpha} + \frac{\partial^2 W(\varepsilon + \alpha \delta \varepsilon, \gamma + \alpha \delta \gamma, \psi + \alpha \delta \psi)}{\partial \varepsilon \partial (\gamma + \alpha \delta \gamma)} \frac{\partial (\gamma + \alpha \delta \gamma)}{\partial \alpha} + \right. \right. \\
& \left. \left. + \frac{\partial^2 W(\varepsilon + \alpha \delta \varepsilon, \gamma + \alpha \delta \gamma, \psi + \alpha \delta \psi)}{\partial \varepsilon \partial (\psi + \alpha \delta \psi)} \frac{\partial (\psi + \alpha \delta \psi)}{\partial \alpha} \right) \sin(\varphi + \alpha \delta \varphi) + \right. \\
& \left. + \frac{\partial W(\varepsilon + \alpha \delta \varepsilon, \gamma + \alpha \delta \gamma, \psi + \alpha \delta \psi)}{\partial \varepsilon} \delta \varphi \cos(\varphi + \alpha \delta \varphi) + \right. \\
& \left. + \left( \frac{\partial^2 W(\varepsilon + \alpha \delta \varepsilon, \gamma + \alpha \delta \gamma, \psi + \alpha \delta \psi)}{\partial (\varepsilon + \alpha \delta \varepsilon) \partial \gamma} \frac{\partial (\varepsilon + \alpha \delta \varepsilon)}{\partial \alpha} + \frac{\partial^2 W(\varepsilon + \alpha \delta \varepsilon, \gamma + \alpha \delta \gamma, \psi + \alpha \delta \psi)}{\partial (\gamma + \alpha \delta \gamma) \partial \gamma} \frac{\partial (\gamma + \alpha \delta \gamma)}{\partial \alpha} + \right. \right. \\
& \left. \left. + \frac{\partial^2 W(\varepsilon + \alpha \delta \varepsilon, \gamma + \alpha \delta \gamma, \psi + \alpha \delta \psi)}{\partial \gamma \partial (\psi + \alpha \delta \psi)} \frac{\partial (\psi + \alpha \delta \psi)}{\partial \alpha} \right) \cos(\varphi + \alpha \delta \varphi) - \right. \\
& \left. - \frac{\partial W(\varepsilon + \alpha \delta \varepsilon, \gamma + \alpha \delta \gamma, \psi + \alpha \delta \psi)}{\partial \gamma} \delta \varphi \sin(\varphi + \alpha \delta \varphi) \right) \Bigg|_{\alpha=0} = \left( \left( \frac{\partial^2 W}{\partial \varepsilon^2} \delta \varepsilon + \frac{\partial^2 W}{\partial \varepsilon \partial \gamma} \delta \gamma + \right. \right. \\
& \left. \left. + \frac{\partial^2 W}{\partial \varepsilon \partial \psi} \delta \psi \right) \sin \varphi + \frac{\partial W}{\partial \varepsilon} \delta \varphi \cos \varphi + \left( \frac{\partial^2 W}{\partial \varepsilon \partial \gamma} \delta \varepsilon + \frac{\partial^2 W}{\partial \gamma^2} \delta \gamma + \frac{\partial^2 W}{\partial \gamma \partial \psi} \delta \psi \right) \cos \varphi - \frac{\partial W}{\partial \gamma} \delta \varphi \sin \varphi \right)' = \\
& = \left( \left( \frac{\partial N}{\partial \varepsilon} \varepsilon_B + \frac{\partial^2 W}{\partial \varepsilon \partial \gamma} \gamma_B + \frac{\partial^2 W}{\partial \varepsilon \partial \psi} \psi_B \right) \sin \varphi + N \theta \cos \varphi + \left( \frac{\partial^2 W}{\partial \varepsilon \partial \gamma} \varepsilon_B + \frac{\partial Q}{\partial \gamma} \gamma_B + \frac{\partial^2 W}{\partial \gamma \partial \psi} \psi_B \right) \cos \varphi - \right. \\
& \left. - Q \theta \sin \varphi \right)';
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& \left( \frac{\partial W}{\partial \psi} \right)' \rightarrow \frac{d}{d\alpha} \left( \frac{\partial W(\varepsilon + \alpha \delta \varepsilon, \gamma + \alpha \delta \gamma, \psi + \alpha \delta \psi)}{\partial \psi} \right) \Bigg|_{\alpha=0} = \\
& = \left( \frac{\partial W(\varepsilon + \alpha \delta \varepsilon, \gamma + \alpha \delta \gamma, \psi + \alpha \delta \psi)}{\partial (\varepsilon + \alpha \delta \varepsilon) \partial \psi} \frac{\partial (\varepsilon + \alpha \delta \varepsilon)}{\partial \alpha} + \frac{\partial W(\varepsilon + \alpha \delta \varepsilon, \gamma + \alpha \delta \gamma, \psi + \alpha \delta \psi)}{\partial (\gamma + \alpha \delta \gamma) \partial \psi} \frac{\partial (\gamma + \alpha \delta \gamma)}{\partial \alpha} + \right. \\
& \left. + \frac{\partial W(\varepsilon + \alpha \delta \varepsilon, \gamma + \alpha \delta \gamma, \psi + \alpha \delta \psi)}{\partial \psi \partial (\psi + \alpha \delta \psi)} \frac{\partial (\psi + \alpha \delta \psi)}{\partial \alpha} \right) \Bigg|_{\alpha=0} = \left( \frac{\partial^2 W}{\partial \varepsilon \partial \psi} \delta \varepsilon + \frac{\partial^2 W}{\partial \gamma \partial \psi} \delta \gamma + \frac{\partial^2 W}{\partial \psi^2} \delta \psi \right)' = \\
& = \left( \frac{\partial^2 W}{\partial \varepsilon \partial \psi} \varepsilon_B + \frac{\partial^2 W}{\partial \gamma \partial \psi} \gamma_B + \frac{\partial M}{\partial \psi} \psi_B \right)';
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& x' \left( \frac{\partial W}{\partial \varepsilon} \sin \varphi + \frac{\partial W}{\partial \gamma} \cos \varphi \right) \rightarrow \frac{d}{d\alpha} \left( (x + \alpha \delta x)' \left( \frac{\partial W(\varepsilon + \alpha \delta \varepsilon, \gamma + \alpha \delta \gamma, \psi + \alpha \delta \psi)}{\partial \varepsilon} \sin(\varphi + \alpha \delta \varphi) + \right. \right. \\
& \left. \left. + \frac{\partial W(\varepsilon + \alpha \delta \varepsilon, \gamma + \alpha \delta \gamma, \psi + \alpha \delta \psi)}{\partial \gamma} \cos(\varphi + \alpha \delta \varphi) \right) \right) \Bigg|_{\alpha=0} = \\
& = \left( \delta x' \left( \frac{\partial W(\varepsilon + \alpha \delta \varepsilon, \gamma + \alpha \delta \gamma, \psi + \alpha \delta \psi)}{\partial \varepsilon} \sin(\varphi + \alpha \delta \varphi) + \frac{\partial W(\varepsilon + \alpha \delta \varepsilon, \gamma + \alpha \delta \gamma, \psi + \alpha \delta \psi)}{\partial \gamma} \cos(\varphi + \right. \right. \\
& \left. \left. + \alpha \delta \varphi) \right) + (x + \alpha \delta x)' \left( \left( \frac{\partial^2 W(\varepsilon + \alpha \delta \varepsilon, \gamma + \alpha \delta \gamma, \psi + \alpha \delta \psi)}{\partial \varepsilon \partial (\varepsilon + \alpha \delta \varepsilon)} \frac{\partial (\varepsilon + \alpha \delta \varepsilon)}{\partial \alpha} + \right. \right. \right. \\
& \left. \left. + \frac{\partial^2 W(\varepsilon + \alpha \delta \varepsilon, \gamma + \alpha \delta \gamma, \psi + \alpha \delta \psi)}{\partial \varepsilon \partial (\gamma + \alpha \delta \gamma)} \frac{\partial (\gamma + \alpha \delta \gamma)}{\partial \alpha} + \right. \right. \\
& \left. \left. + \frac{\partial^2 W(\varepsilon + \alpha \delta \varepsilon, \gamma + \alpha \delta \gamma, \psi + \alpha \delta \psi)}{\partial \varepsilon \partial (\psi + \alpha \delta \psi)} \frac{\partial (\psi + \alpha \delta \psi)}{\partial \alpha} \right) \sin(\varphi + \alpha \delta \varphi) + \right. \\
& \left. + \frac{\partial W(\varepsilon + \alpha \delta \varepsilon, \gamma + \alpha \delta \gamma, \psi + \alpha \delta \psi)}{\partial \varepsilon} \delta \varphi \cos(\varphi + \alpha \delta \varphi) + \right. \\
& \left. + \left( \frac{\partial^2 W(\varepsilon + \alpha \delta \varepsilon, \gamma + \alpha \delta \gamma, \psi + \alpha \delta \psi)}{\partial (\varepsilon + \alpha \delta \varepsilon) \partial \gamma} \frac{\partial (\varepsilon + \alpha \delta \varepsilon)}{\partial \alpha} + \frac{\partial^2 W(\varepsilon + \alpha \delta \varepsilon, \gamma + \alpha \delta \gamma, \psi + \alpha \delta \psi)}{\partial (\gamma + \alpha \delta \gamma) \partial \gamma} \frac{\partial (\gamma + \alpha \delta \gamma)}{\partial \alpha} + \right. \right. \\
& \left. \left. + \frac{\partial^2 W(\varepsilon + \alpha \delta \varepsilon, \gamma + \alpha \delta \gamma, \psi + \alpha \delta \psi)}{\partial \gamma \partial (\psi + \alpha \delta \psi)} \frac{\partial (\psi + \alpha \delta \psi)}{\partial \alpha} \right) \cos(\varphi + \alpha \delta \varphi) - \right. \\
& \left. - \frac{\partial W(\varepsilon + \alpha \delta \varepsilon, \gamma + \alpha \delta \gamma, \psi + \alpha \delta \psi)}{\partial \gamma} \delta \varphi \sin(\varphi + \alpha \delta \varphi) \right) \Bigg|_{\alpha=0} = \delta x' \left( \frac{\partial W}{\partial \varepsilon} \sin \varphi + \frac{\partial W}{\partial \gamma} \cos \varphi \right) + \\
& + x' \left( \left( \frac{\partial^2 W}{\partial \varepsilon^2} \delta \varepsilon + \frac{\partial^2 W}{\partial \varepsilon \partial \gamma} \delta \gamma + \frac{\partial^2 W}{\partial \varepsilon \partial \psi} \delta \psi \right) \sin \varphi + \frac{\partial W}{\partial \varepsilon} \delta \varphi \cos \varphi + \left( \frac{\partial^2 W}{\partial \varepsilon \partial \gamma} \delta \varepsilon + \frac{\partial^2 W}{\partial \gamma^2} \delta \gamma + \right. \right. \\
& \left. \left. + \frac{\partial^2 W}{\partial \gamma \partial \psi} \delta \psi \right) \cos \varphi - \frac{\partial W}{\partial \gamma} \delta \varphi \sin \varphi \right) = u' (N \sin \varphi + Q \cos \varphi) + x' \left( \left( \frac{\partial N}{\partial \varepsilon} \varepsilon_B + \frac{\partial^2 W}{\partial \varepsilon \partial \gamma} \gamma_B + \right. \right. \\
& \left. \left. + \frac{\partial^2 W}{\partial \varepsilon \partial \psi} \psi_B \right) \sin \varphi + N \theta \cos \varphi + \left( \frac{\partial^2 W}{\partial \varepsilon \partial \gamma} \varepsilon_B + \frac{\partial Q}{\partial \gamma} \gamma_B + \frac{\partial^2 W}{\partial \gamma \partial \psi} \psi_B \right) \cos \varphi - Q \theta \sin \varphi \right);
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& y' \left( \frac{\partial W}{\partial \varepsilon} \cos \varphi - \frac{\partial W}{\partial \gamma} \sin \varphi \right) \rightarrow \frac{d}{d\alpha} \left( (y + \alpha \delta y)' \left( \frac{\partial W(\varepsilon + \alpha \delta \varepsilon, \gamma + \alpha \delta \gamma, \psi + \alpha \delta \psi)}{\partial \varepsilon} \cos(\varphi + \alpha \delta \varphi) - \right. \right. \\
& \left. \left. - \frac{\partial W(\varepsilon + \alpha \delta \varepsilon, \gamma + \alpha \delta \gamma, \psi + \alpha \delta \psi)}{\partial \gamma} \sin(\varphi + \alpha \delta \varphi) \right) \right) \Bigg|_{\alpha=0} = \\
& = \left( \delta y' \left( \frac{\partial W(\varepsilon + \alpha \delta \varepsilon, \gamma + \alpha \delta \gamma, \psi + \alpha \delta \psi)}{\partial \varepsilon} \cos(\varphi + \alpha \delta \varphi) - \frac{\partial W(\varepsilon + \alpha \delta \varepsilon, \gamma + \alpha \delta \gamma, \psi + \alpha \delta \psi)}{\partial \gamma} \sin(\varphi + \right. \right. \\
& \left. \left. + \alpha \delta \varphi) \right) + (y + \alpha \delta y)' \left( \left( \frac{\partial^2 W(\varepsilon + \alpha \delta \varepsilon, \gamma + \alpha \delta \gamma, \psi + \alpha \delta \psi)}{\partial \varepsilon \partial (\varepsilon + \alpha \delta \varepsilon)} \frac{\partial (\varepsilon + \alpha \delta \varepsilon)}{\partial \alpha} + \right. \right. \right. \\
& \left. \left. + \frac{\partial^2 W(\varepsilon + \alpha \delta \varepsilon, \gamma + \alpha \delta \gamma, \psi + \alpha \delta \psi)}{\partial \varepsilon \partial (\gamma + \alpha \delta \gamma)} \frac{\partial (\gamma + \alpha \delta \gamma)}{\partial \alpha} + \right. \right. \\
& \left. \left. + \frac{\partial^2 W(\varepsilon + \alpha \delta \varepsilon, \gamma + \alpha \delta \gamma, \psi + \alpha \delta \psi)}{\partial \varepsilon \partial (\psi + \alpha \delta \psi)} \frac{\partial (\psi + \alpha \delta \psi)}{\partial \alpha} \right) \cos(\varphi + \alpha \delta \varphi) - \right. \\
& \left. - \frac{\partial W(\varepsilon + \alpha \delta \varepsilon, \gamma + \alpha \delta \gamma, \psi + \alpha \delta \psi)}{\partial \varepsilon} \delta \varphi \sin(\varphi + \alpha \delta \varphi) - \right. \\
& \left. - \left( \frac{\partial^2 W(\varepsilon + \alpha \delta \varepsilon, \gamma + \alpha \delta \gamma, \psi + \alpha \delta \psi)}{\partial (\varepsilon + \alpha \delta \varepsilon) \partial \gamma} \frac{\partial (\varepsilon + \alpha \delta \varepsilon)}{\partial \alpha} + \frac{\partial^2 W(\varepsilon + \alpha \delta \varepsilon, \gamma + \alpha \delta \gamma, \psi + \alpha \delta \psi)}{\partial (\gamma + \alpha \delta \gamma) \partial \gamma} \frac{\partial (\gamma + \alpha \delta \gamma)}{\partial \alpha} + \right. \right. \\
& \left. \left. + \frac{\partial^2 W(\varepsilon + \alpha \delta \varepsilon, \gamma + \alpha \delta \gamma, \psi + \alpha \delta \psi)}{\partial \gamma \partial (\psi + \alpha \delta \psi)} \frac{\partial (\psi + \alpha \delta \psi)}{\partial \alpha} \right) \sin(\varphi + \alpha \delta \varphi) - \right. \\
& \left. - \frac{\partial W(\varepsilon + \alpha \delta \varepsilon, \gamma + \alpha \delta \gamma, \psi + \alpha \delta \psi)}{\partial \gamma} \delta \varphi \cos(\varphi + \alpha \delta \varphi) \right) \Bigg|_{\alpha=0} = \delta y' \left( \frac{\partial W}{\partial \varepsilon} \cos \varphi - \frac{\partial W}{\partial \gamma} \sin \varphi \right) + \\
& + y' \left( \left( \frac{\partial^2 W}{\partial \varepsilon^2} \delta \varepsilon + \frac{\partial^2 W}{\partial \varepsilon \partial \gamma} \delta \gamma + \frac{\partial^2 W}{\partial \varepsilon \partial \psi} \delta \psi \right) \cos \varphi - \frac{\partial W}{\partial \varepsilon} \delta \varphi \sin \varphi - \left( \frac{\partial^2 W}{\partial \varepsilon \partial \gamma} \delta \varepsilon + \frac{\partial^2 W}{\partial \gamma^2} \delta \gamma + \right. \right. \\
& \left. \left. + \frac{\partial^2 W}{\partial \gamma \partial \psi} \delta \psi \right) \sin \varphi - \frac{\partial W}{\partial \gamma} \delta \varphi \cos \varphi \right) = \nu' (N \cos \varphi - Q \sin \varphi) + y' \left( \left( \frac{\partial N}{\partial \varepsilon} \varepsilon_B + \frac{\partial^2 W}{\partial \varepsilon \partial \gamma} \gamma_B + \right. \right. \\
& \left. \left. + \frac{\partial^2 W}{\partial \varepsilon \partial \psi} \psi_B \right) \cos \varphi - N \theta \sin \varphi - \left( \frac{\partial^2 W}{\partial \varepsilon \partial \gamma} \varepsilon_B + \frac{\partial Q}{\partial \gamma} \gamma_B + \frac{\partial^2 W}{\partial \gamma \partial \psi} \psi_B \right) \sin \varphi - Q \theta \cos \varphi \right); \\
& m \rightarrow \frac{d}{d\alpha} m \Big|_{\alpha=0} = 0.
\end{aligned}$$

В вычисленных вариациях величины  $x$ ,  $y$ ,  $\varphi$ ,  $N$ ,  $Q$ ,  $M$  будут обозначать решение системы (2.31).

Отсюда получаем систему уравнений:

$$\left\{ \begin{aligned}
& \left( \frac{\partial N}{\partial \varepsilon} \varepsilon_B \cos \varphi - \frac{\partial Q}{\partial \gamma} \gamma_B \sin \varphi \right)' - \theta' (N \sin \varphi + Q \cos \varphi) - \theta (N \sin \varphi + Q \cos \varphi)' + \\
& + \left( \frac{\partial^2 W}{\partial \varepsilon \partial \gamma} (\gamma_B \cos \varphi - \varepsilon_B \sin \varphi) + \frac{\partial^2 W}{\partial \varepsilon \partial \psi} \psi_B \cos \varphi - \frac{\partial^2 W}{\partial \gamma \partial \psi} \psi_B \sin \varphi \right)' = 0; \\
& \left( \frac{\partial N}{\partial \varepsilon} \varepsilon_B \sin \varphi + \frac{\partial Q}{\partial \gamma} \gamma_B \cos \varphi \right)' + \theta' (N \cos \varphi - Q \sin \varphi) + \theta (N \cos \varphi - Q \sin \varphi)' + \\
& + \left( \frac{\partial^2 W}{\partial \varepsilon \partial \gamma} (\gamma_B \sin \varphi + \varepsilon_B \cos \varphi) + \frac{\partial^2 W}{\partial \varepsilon \partial \psi} \psi_B \sin \varphi + \frac{\partial^2 W}{\partial \gamma \partial \psi} \psi_B \cos \varphi \right)' = 0; \\
& \left( \frac{\partial M}{\partial \psi} \psi_B \right)' + u' (N \sin \varphi + Q \cos \varphi) + v' (Q \sin \varphi - N \cos \varphi) + x' \left( \frac{\partial N}{\partial \varepsilon} \varepsilon_B \sin \varphi + \frac{\partial Q}{\partial \gamma} \gamma_B \cos \varphi + \right. \\
& + N \theta \cos \varphi - Q \theta \sin \varphi) + y' \left( N \theta \sin \varphi - \frac{\partial N}{\partial \varepsilon} \varepsilon_B \cos \varphi + \frac{\partial Q}{\partial \gamma} \gamma_B \sin \varphi + Q \theta \cos \varphi \right) + \\
& + \left( \frac{\partial^2 W}{\partial \varepsilon \partial \psi} \varepsilon_B + \frac{\partial^2 W}{\partial \gamma \partial \psi} \gamma_B \right)' - \frac{\partial^2 W}{\partial \varepsilon \partial \gamma} (\gamma_B (y' \cos \varphi - x' \sin \varphi) - \varepsilon_B (x' \cos \varphi + y' \sin \varphi)) - \\
& - \frac{\partial^2 W}{\partial \varepsilon \partial \psi} \psi_B (y' \cos \varphi - x' \sin \varphi) + \frac{\partial^2 W}{\partial \gamma \partial \psi} \psi_B (x' \cos \varphi + y' \sin \varphi) = 0.
\end{aligned} \right. \quad (2.32)$$

Полученная система уравнений (2.32) является системой уравнений устойчивости физически нелинейного упругого стержня. Данная система уравнений совпадает с системой уравнений устойчивости (2.22), полученных из функционала устойчивости.

Таким образом, для физически нелинейного стержня двумя способами получены уравнения устойчивости равновесия: как уравнения в вариациях исходных уравнений равновесия и как уравнения Эйлера для функционала устойчивости.

## 2.6 Вариационная формулировка статической задачи геометрически нелинейного деформирования физически линейного стержня

Как и в параграфе 2.1 рассмотрим первоначально прямолинейный стержень. На стержень действует только «мертвая» осевая сжимающая сила  $T$  ( $F_{1вн} = -T$ , перерезывающая сила  $F_{2вн}$ , параллельная оси  $Y$ , и изгибающий момент  $M_{вн}$  для данной задачи равны нулю).

Постановка геометрически нелинейной задачи для физически линейного стержня состоит из трех групп уравнений: уравнения равновесия (1.171), геометрических уравнений (1.180) и физических уравнений (закон Гука для физически линейного материала) (1.183).

Энергия деформации  $W(\varepsilon, \gamma, \psi)$  для физически линейного упругого стержня, как было показано в параграфе 1.7 (1.216) имеет вид:

$$W(\varepsilon, \gamma, \psi) = \frac{1}{2} (k_1 \varepsilon^2 + k_2 \gamma^2 + k_3 \psi^2)$$

Таким образом, функционал Лагранжа (2.1), полученный в параграфе 2.1 может быть записан в следующем виде:

$$\Pi(x, y, \varphi) = \int_0^L \left[ \frac{1}{2} (k_1 \varepsilon^2 + k_2 \gamma^2 + k_3 \psi^2) - q_x(x-s) - q_y y - m\varphi \right] ds + T(x(L) - L). \quad (2.33)$$

Докажем, что вариационная задача поиска точки стационарности функционала Лагранжа  $\Pi \rightarrow \text{СТАЦ}$  на гладких решениях равносильна задаче (1.171), (1.180) и (1.183). Вычислим первую вариацию функционала Лагранжа, определяя вариацию каждого слагаемого функционала. Для этого сначала дадим приращения функциям  $x, y, \varphi$ , используя выражения (2.2). Вычисляем производную по  $\alpha$ , далее полагая  $\alpha=0$ . Определим вариации слагаемых энергии деформации и силы  $T$ .

$$\frac{1}{2} k_1 \varepsilon^2 \rightarrow \frac{d}{d\alpha} \left( \frac{1}{2} k_1 (\varepsilon + \alpha \delta \varepsilon)^2 \right) \Big|_{\alpha=0} = \frac{1}{2} \cdot 2k_1 (\varepsilon + \alpha \delta \varepsilon) \delta \varepsilon \Big|_{\alpha=0} = k_1 \varepsilon \delta \varepsilon;$$

$$\frac{1}{2} k_2 \gamma^2 \rightarrow \frac{d}{d\alpha} \left( \frac{1}{2} k_2 (\gamma + \alpha \delta \gamma)^2 \right) \Big|_{\alpha=0} = \frac{1}{2} \cdot 2k_2 (\gamma + \alpha \delta \gamma) \delta \gamma \Big|_{\alpha=0} = k_2 \gamma \delta \gamma;$$

$$\frac{1}{2} k_3 \psi^2 \rightarrow \frac{d}{d\alpha} \left( \frac{1}{2} k_3 (\psi + \alpha \delta \psi)^2 \right) \Big|_{\alpha=0} = \frac{1}{2} \cdot 2k_3 (\psi + \alpha \delta \psi) \delta \psi \Big|_{\alpha=0} = k_3 \psi \delta \psi;$$

$$T(x(L) - L) \rightarrow \frac{d}{d\alpha} (T(x(L) + \alpha \delta x(L) - L)) \Big|_{\alpha=0} = T \delta x(L) \Big|_{\alpha=0} = T \delta x(L).$$

Вычисление вариаций распределенных силовых и моментных нагрузок подробно описано в параграфе 2.1. Таким образом, первая вариация функционала Лагранжа имеет вид:

$$\delta \Pi(x, y, \varphi, \delta x, \delta y, \delta \varphi) = \int_0^L [k_1 \varepsilon \delta \varepsilon + k_2 \gamma \delta \gamma + k_3 \psi \delta \psi - q_x \delta x - q_y \delta y - m \delta \varphi] ds + T \delta x(L) \quad (2.34)$$

Используя выражения (2.5), (2.6) и (2.7), первую вариацию функционала (2.34) можно записать в виде:

$$\delta \Pi(x, y, \varphi, u, v, \theta) = \int_0^L [k_1 \varepsilon \cdot (u' \cos \varphi - x' \theta \sin \varphi + y' \theta \cos \varphi + v' \sin \varphi) + k_2 \gamma \cdot (-u' \sin \varphi - x' \theta \cos \varphi - y' \theta \sin \varphi + v' \cos \varphi) + k_3 \psi \theta' - q_x u - q_y v - m \theta] ds + Tu(L). \quad (2.35)$$

Используя физические уравнения (1.183) и группируя слагаемые относительно  $u', v', \theta$  и  $\theta'$ , первую вариацию функционала Лагранжа можно записать в виде:

$$\delta\Pi(x, y, \varphi, u, v, \theta) = \int_0^L [u'(N \cos \varphi - Q \sin \varphi) + v'(N \sin \varphi + Q \cos \varphi) - \theta(x'(N \sin \varphi + Q \cos \varphi) - y'(N \cos \varphi - Q \sin \varphi)) + M\theta' - q_x u - q_y v - m\theta] ds + Tu(L).$$

Интегрируем по частям, чтобы избавиться от производных от вариаций:

$$\int_0^L u'(N \cos \varphi - Q \sin \varphi) ds = -\int_0^L u(N \cos \varphi - Q \sin \varphi)' ds + u(N \cos \varphi - Q \sin \varphi)|_0^L;$$

$$\int_0^L v'(N \sin \varphi + Q \cos \varphi) ds = -\int_0^L v(N \sin \varphi + Q \cos \varphi)' ds + v(N \sin \varphi + Q \cos \varphi)|_0^L;$$

$$\int_0^L \theta' M ds = -\int_0^L \theta M' ds + \theta M|_0^L.$$

Таким образом, после интегрирования по частям первая вариация функционала Лагранжа принимает вид:

$$\delta\Pi(x, y, \varphi, u, v, \theta) = -\int_0^L [u(N \cos \varphi - Q \sin \varphi)' + v(N \sin \varphi + Q \cos \varphi)' + \theta(x'(N \sin \varphi + Q \cos \varphi) - y'(N \cos \varphi - Q \sin \varphi) + M') + q_x u + q_y v + m\theta] ds + Tu(L) + (u(N \cos \varphi - Q \sin \varphi) + v(N \sin \varphi + Q \cos \varphi) + \theta M)|_0^L.$$

Перегруппировывая слагаемые, первую вариацию функционала Лагранжа можно записать в виде:

$$\delta\Pi(x, y, \varphi, u, v, \theta) = -\int_0^L [u((N \cos \varphi - Q \sin \varphi)' + q_x) + v((N \sin \varphi + Q \cos \varphi)' + q_y) + \theta(x'(N \sin \varphi + Q \cos \varphi) - y'(N \cos \varphi - Q \sin \varphi) + M' + m)] ds + Tu(L) + (u(N \cos \varphi - Q \sin \varphi) + v(N \sin \varphi + Q \cos \varphi) + \theta M)|_0^L. \quad (2.36)$$

Решением вариационной задачи являются функции  $x$ ,  $y$  и  $\varphi$ , такие, что  $\delta\Pi = 0$  при любых вариациях  $u$ ,  $v$ ,  $\theta$ , удовлетворяющих главным граничным условиям исходной задачи. Из выражения (2.36) следует, что уравнениями Эйлера вариационной задачи  $\Pi \rightarrow \text{СТАЦ}$  являются уравнения равновесия (1.171). Таким образом, доказана требуемая равносильность.

## 2.7 Вариационная формулировка задачи устойчивости физически линейного упругого стержня

Уравнения устойчивости являются уравнениями Эйлера вариационной задачи  $\Phi_{\text{ст}} \rightarrow \text{СТАЦ}$  [16, 27], где  $\Phi_{\text{ст}}$  – вторая вариация функционала Лагранжа.



Для вычисления второй вариации функционала Лагранжа найдем вариацию каждого слагаемого формулы (2.34). Для этого даем приращения функциям  $x$ ,  $y$  и  $\varphi$  согласно формулам (2.2) и (2.5), вычисляем производную по  $\alpha$  и полагаем  $\alpha=0$ :

$$\begin{aligned} k_1 \varepsilon(u' \cos \varphi - x' \theta \sin \varphi + y' \theta \cos \varphi + v' \sin \varphi) &\rightarrow (k_1((x + \alpha u)' \cos(\varphi + \alpha \theta) + (y + \alpha v)' \sin(\varphi + \alpha \theta) - \\ &- 1)(u' \cos(\varphi + \alpha \theta) - (x + \alpha u)' \theta \sin(\varphi + \alpha \theta) + (y + \alpha v)' \theta \cos(\varphi + \alpha \theta) + v' \sin(\varphi + \alpha \theta)))'_{\alpha=0} = \\ &= (k_1((u' \cos(\varphi + \alpha \theta) - (x + \alpha u)' \theta \sin(\varphi + \alpha \theta) + v' \sin(\varphi + \alpha \theta) + (y + \alpha v)' \theta \cos(\varphi + \\ &+ \alpha \theta))(u' \cos(\varphi + \alpha \theta) - (x + \alpha u)' \theta \sin(\varphi + \alpha \theta) + v' \sin(\varphi + \alpha \theta) + (y + \alpha v)' \theta \cos(\varphi + \alpha \theta)) + \\ &+ ((x + \alpha u)' \cos(\varphi + \alpha \theta) + (y + \alpha v)' \sin(\varphi + \alpha \theta) - 1)(-u' \theta \sin(\varphi + \alpha \theta) - u' \theta \sin(\varphi + \alpha \theta) - \\ &- (x + \alpha u)' \theta^2 \cos(\varphi + \alpha \theta) + v' \theta \cos(\varphi + \alpha \theta) - (y + \alpha v)' \theta^2 \sin(\varphi + \alpha \theta) + v' \theta \cos(\varphi + \alpha \theta)))'_{\alpha=0} = \\ &= k_1((u' \cos \varphi - x' \theta \sin \varphi + y' \theta \cos \varphi + v' \sin \varphi)^2 + (x' \cos \varphi + y' \sin \varphi - 1)(-2u' \theta \sin \varphi + \\ &+ 2v' \theta \cos \varphi - x' \theta^2 \cos \varphi - y' \theta^2 \sin \varphi)); \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} k_2 \gamma(-u' \sin \varphi - x' \theta \cos \varphi - y' \theta \sin \varphi + v' \cos \varphi) &\rightarrow (k_2(-(x + \alpha u)' \sin(\varphi + \alpha \theta) + (y + \alpha v)' \cos(\varphi + \\ &+ \alpha \theta))(-u' \sin(\varphi + \alpha \theta) - (x + \alpha u)' \theta \cos(\varphi + \alpha \theta) - (y + \alpha v)' \theta \sin(\varphi + \alpha \theta) + v' \cos(\varphi + \alpha \theta)))'_{\alpha=0} = \\ &= k_2((-u' \sin(\varphi + \alpha \theta) - (x + \alpha u)' \theta \cos(\varphi + \alpha \theta) + v' \cos(\varphi + \alpha \theta) - (y + \alpha v)' \theta \sin(\varphi + \\ &+ \alpha \theta))(-u' \sin(\varphi + \alpha \theta) - (x + \alpha u)' \theta \cos(\varphi + \alpha \theta) + v' \cos(\varphi + \alpha \theta) - (y + \alpha v)' \theta \sin(\varphi + \alpha \theta)) + \\ &+ (-(x + \alpha u)' \sin(\varphi + \alpha \theta) + (y + \alpha v)' \cos(\varphi + \alpha \theta))(-u' \theta \cos(\varphi + \alpha \theta) - u' \theta \cos(\varphi + \alpha \theta) + \\ &+ (x + \alpha u)' \theta^2 \sin(\varphi + \alpha \theta) - v' \theta \sin(\varphi + \alpha \theta) - (y + \alpha v)' \theta^2 \cos(\varphi + \alpha \theta) - v' \theta \sin(\varphi + \alpha \theta)))'_{\alpha=0} = \\ &= k_2((-u' \sin \varphi - x' \theta \cos \varphi - y' \theta \sin \varphi + v' \cos \varphi)^2 + (-x' \sin \varphi + y' \cos \varphi)(-2u' \theta \cos \varphi - \\ &- 2v' \theta \sin \varphi + x' \theta^2 \sin \varphi - y' \theta^2 \cos \varphi)); \end{aligned}$$

$$k_3 \psi \theta' = k_3 ((\varphi + \alpha \theta)' \theta')'_{\alpha=0} = k_3 \theta'^2;$$

$$Tu(L) \rightarrow \left. \frac{d}{d\alpha} (Tu(L)) \right|_{\alpha=0} = 0.$$

Как было показано в параграфе 2.3, вариаций распределенных силовых и моментных нагрузок  $q_x u$ ,  $q_y v$ ,  $m \theta$  равны нулю. Таким образом, вторая вариация функционала Лагранжа примет вид:

$$\begin{aligned} \delta^2 \Pi(x, y, \varphi, u, v, \theta) &= \int_0^L \left[ k_1 \left( (u' \cos \varphi - x' \theta \sin \varphi + y' \theta \cos \varphi + v' \sin \varphi)^2 + (x' \cos \varphi + y' \sin \varphi - \right. \right. \\ &- 1)(-2u' \theta \sin \varphi + 2v' \theta \cos \varphi - x' \theta^2 \cos \varphi - y' \theta^2 \sin \varphi) \left. \right) + k_2 \left( (-u' \sin \varphi - x' \theta \cos \varphi - y' \theta \sin \varphi + \right. \\ &+ v' \cos \varphi)^2 + (-x' \sin \varphi + y' \cos \varphi)(-2u' \theta \cos \varphi - 2v' \theta \sin \varphi + x' \theta^2 \sin \varphi - y' \theta^2 \cos \varphi) \left. \right) + k_3 \theta ds \right]^2 ds. \end{aligned}$$

В этом функционале функции  $x, y, \varphi$  являются решениями задачи (1.171), (1.180) и (1.183).

Обозначим  $\frac{1}{2}\delta^2\Pi \equiv \Phi_{\text{ст}}^*(u, v, \theta)$ , где  $\Phi_{\text{ст}}^*$  - статический функционал устойчивости.

Тогда,

$$\begin{aligned} \Phi_{\text{ст}}^*(u, v, \theta) = \frac{1}{2} \int_0^L & \left[ k_1 \left( (u' \cos \varphi - x' \theta \sin \varphi + y' \theta \cos \varphi + v' \sin \varphi)^2 + (x' \cos \varphi + y' \sin \varphi - \right. \right. \\ & \left. \left. - 1) (-2u' \theta \sin \varphi + 2v' \theta \cos \varphi - x' \theta^2 \cos \varphi - y' \theta^2 \sin \varphi) \right) + k_2 \left( (-u' \sin \varphi - x' \theta \cos \varphi - \right. \right. \\ & \left. \left. - y' \theta \sin \varphi + v' \cos \varphi)^2 + (-x' \sin \varphi + y' \cos \varphi) (-2u' \theta \cos \varphi - 2v' \theta \sin \varphi + x' \theta^2 \sin \varphi - \right. \right. \\ & \left. \left. - y' \theta^2 \cos \varphi) \right) + k_3 \theta'^2 \right] ds. \end{aligned} \quad (2.37)$$

Или в матричном виде:

$$\Phi_{\text{ст}}^*(u, v, \theta) = \frac{1}{2} \int_0^L \left[ h'^T A h' + h^T B h + h^T C h' \right] ds, \quad (2.38)$$

где  $h = \begin{pmatrix} u \\ v \\ \theta \end{pmatrix}$ ;  $( )^T$  - операция транспонирования,

$$A = \begin{pmatrix} k_1 \cos^2 \varphi + k_2 \sin^2 \varphi & (k_1 - k_2) \sin \varphi \cos \varphi & 0 \\ (k_1 - k_2) \sin \varphi \cos \varphi & k_1 \sin^2 \varphi + k_2 \cos^2 \varphi & 0 \\ 0 & 0 & k_3 \end{pmatrix},$$

$$B = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & B_{33} \end{pmatrix},$$

$$B_{33} = \left( k_1 (x' \sin \varphi - y' \cos \varphi)^2 - N (x' \cos \varphi + y' \sin \varphi) + k_2 (x' \cos \varphi + y' \sin \varphi)^2 + Q (x' \sin \varphi - y' \cos \varphi) \right),$$

$$C = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ C_{31} & C_{32} & 0 \end{pmatrix},$$

$$C_{31} = \left( 2k_1 (y' \cos^2 \varphi - x' \sin \varphi \cos \varphi) + 2k_2 (x' \sin \varphi \cos \varphi + y' \sin^2 \varphi) - 2N \sin \varphi - 2Q \cos \varphi \right),$$

$$C_{32} = \left( 2k_1 (y' \sin \varphi \cos \varphi - x' \sin^2 \varphi) - 2k_2 (x' \cos^2 \varphi + y' \sin \varphi \cos \varphi) + 2N \cos \varphi - 2Q \sin \varphi \right),$$

Получим уравнения Эйлера для задачи  $\Phi_{\text{ст}}^* \rightarrow \text{СТАЦ}$ . Для этого вычислим первую вариацию функционала устойчивости (2.37), определяя вариацию каждого слагаемого функционала,

задавая приращения функциям  $u$ ,  $v$ ,  $\theta$ , согласно (2.19). Вычисляем производную по  $\alpha$ , далее полагая  $\alpha = 0$ . Таким образом,

$$\begin{aligned}
& \frac{1}{2} k_1 (u' \cos \varphi - x' \theta \sin \varphi + y' \theta \cos \varphi + v' \sin \varphi)^2 \rightarrow \frac{1}{2} k_1 ((u + \alpha \delta u)' \cos \varphi - x' (\theta + \alpha \delta \theta) \sin \varphi + \\
& + y' (\theta + \alpha \delta \theta) \cos \varphi + (v + \alpha \delta v)' \sin \varphi)^2 \Big|_{\alpha=0} = \left( \frac{1}{2} \cdot 2k_1 ((u + \alpha \delta u)' \cos \varphi - x' (\theta + \alpha \delta \theta) \sin \varphi + \right. \\
& + y' (\theta + \alpha \delta \theta) \cos \varphi + (v + \alpha \delta v)' \sin \varphi) (\delta u' \cos \varphi - x' \delta \theta \sin \varphi + y' \delta \theta \cos \varphi + \delta v' \sin \varphi) \Big|_{\alpha=0} = \\
& = k_1 (u' \cos \varphi - x' \theta \sin \varphi + y' \theta \cos \varphi + v' \sin \varphi) (\delta u' \cos \varphi - x' \delta \theta \sin \varphi + y' \delta \theta \cos \varphi + \delta v' \sin \varphi); \\
& \frac{1}{2} k_1 (x' \cos \varphi + y' \sin \varphi - 1) (-2u' \theta \sin \varphi + 2v' \theta \cos \varphi - x' \theta^2 \cos \varphi - y' \theta^2 \sin \varphi) \rightarrow \\
& \rightarrow \frac{1}{2} k_1 ((x' \cos \varphi + y' \sin \varphi - 1) (-2(u + \alpha \delta u)' (\theta + \alpha \delta \theta) \sin \varphi + 2(v + \alpha \delta v)' (\theta + \alpha \delta \theta) \cos \varphi + \\
& - x' (\theta + \alpha \delta \theta)^2 \cos \varphi - y' (\theta + \alpha \delta \theta)^2 \sin \varphi) \Big|_{\alpha=0} = \left( \frac{1}{2} \cdot 2k_1 (x' \cos \varphi + y' \sin \varphi - 1) (-\delta u' (\theta + \right. \\
& + \alpha \delta \theta) \sin \varphi - (u + \alpha \delta u)' \delta \theta \sin \varphi + \delta v' (\theta + \alpha \delta \theta) \cos \varphi + (v + \alpha \delta v)' \delta \theta \cos \varphi - x' (\theta + \\
& + \alpha \delta \theta) \delta \theta \cos \varphi - y' (\theta + \alpha \delta \theta) \delta \theta \sin \varphi) \Big|_{\alpha=0} = k_1 (x' \cos \varphi + y' \sin \varphi - 1) (-\delta u' \theta \sin \varphi - u' \delta \theta \sin \varphi + \\
& + \delta v' \theta \cos \varphi + v' \delta \theta \cos \varphi - x' \theta \delta \theta \cos \varphi - y' \theta \delta \theta \sin \varphi); \\
& \frac{1}{2} k_2 (-u' \sin \varphi - x' \theta \cos \varphi - y' \theta \sin \varphi + v' \cos \varphi)^2 \rightarrow \frac{1}{2} k_2 (-(u + \alpha \delta u)' \sin \varphi - x' (\theta + \alpha \delta \theta) \cos \varphi - \\
& - y' (\theta + \alpha \delta \theta) \sin \varphi + (v + \alpha \delta v)' \cos \varphi)^2 \Big|_{\alpha=0} = \left( \frac{1}{2} \cdot 2k_2 (-(u + \alpha \delta u)' \sin \varphi - x' (\theta + \alpha \delta \theta) \cos \varphi - \right. \\
& - y' (\theta + \alpha \delta \theta) \sin \varphi + (v + \alpha \delta v)' \cos \varphi) (-\delta u' \sin \varphi - x' \delta \theta \cos \varphi - y' \delta \theta \sin \varphi + \delta v' \cos \varphi) \Big|_{\alpha=0} = \\
& = k_2 (-u' \sin \varphi - x' \theta \cos \varphi - y' \theta \sin \varphi + v' \cos \varphi) (-\delta u' \sin \varphi - x' \delta \theta \cos \varphi - y' \delta \theta \sin \varphi + \delta v' \cos \varphi); \\
& \frac{1}{2} k_2 (-x' \sin \varphi + y' \cos \varphi) (-2u' \theta \cos \varphi - 2v' \theta \sin \varphi + x' \theta^2 \sin \varphi - y' \theta^2 \cos \varphi) \rightarrow \\
& \rightarrow \frac{1}{2} k_2 ((-x' \sin \varphi + y' \cos \varphi) (-2(u + \alpha \delta u)' (\theta + \alpha \delta \theta) \cos \varphi - 2(v + \alpha \delta v)' (\theta + \alpha \delta \theta) \sin \varphi + \\
& + x' (\theta + \alpha \delta \theta)^2 \sin \varphi - y' (\theta + \alpha \delta \theta)^2 \cos \varphi) \Big|_{\alpha=0} = \left( \frac{1}{2} \cdot 2k_2 (-x' \sin \varphi + y' \cos \varphi) (-\delta u' (\theta + \right. \\
& + \alpha \delta \theta) \cos \varphi - (u + \alpha \delta u)' \delta \theta \cos \varphi - \delta v' (\theta + \alpha \delta \theta) \sin \varphi - (v + \alpha \delta v)' \delta \theta \sin \varphi + x' (\theta + \alpha \delta \theta) \delta \theta \sin \varphi - \\
& - y' (\theta + \alpha \delta \theta) \delta \theta \cos \varphi) \Big|_{\alpha=0} = k_2 (-x' \sin \varphi + y' \cos \varphi) (-\delta u' \theta \cos \varphi - u' \delta \theta \cos \varphi - \delta v' \theta \sin \varphi - \\
& - v' \delta \theta \sin \varphi + x' \theta \delta \theta \sin \varphi - y' \theta \delta \theta \cos \varphi); \\
& \frac{1}{2} k_3 \theta^2 \rightarrow \frac{1}{2} k_3 ((\theta + \alpha \delta \theta)^2) \Big|_{\alpha=0} = \frac{1}{2} \cdot 2k_3 ((\theta + \alpha \delta \theta)' \delta \theta) \Big|_{\alpha=0} = k_3 \theta' \delta \theta'.
\end{aligned}$$

Таким образом, первая вариация статического функционала устойчивости примет вид:

$$\begin{aligned} \delta\Phi_{\text{ст}}^*(u, v, \theta) = & \int_0^L [k_1(u' \cos \varphi - x' \theta \sin \varphi + y' \theta \cos \varphi + v' \sin \varphi)(\delta u' \cos \varphi - x' \delta \theta \sin \varphi + \\ & + y' \delta \theta \cos \varphi + \delta v' \sin \varphi) + k_1(x' \cos \varphi + y' \sin \varphi - 1)(-\delta u' \theta \sin \varphi - u' \delta \theta \sin \varphi + \delta v' \theta \cos \varphi + \\ & + v' \delta \theta \cos \varphi - x' \theta \delta \theta \cos \varphi - y' \theta \delta \theta \sin \varphi) + k_2(-u' \sin \varphi - x' \theta \cos \varphi - y' \theta \sin \varphi + \\ & + v' \cos \varphi)(-\delta u' \sin \varphi - x' \delta \theta \cos \varphi - y' \delta \theta \sin \varphi + \delta v' \cos \varphi) + k_2(y' \cos \varphi - x' \sin \varphi)(x' \theta \delta \theta \sin \varphi - \\ & - \delta u' \theta \cos \varphi - u' \delta \theta \cos \varphi - \delta v' \theta \sin \varphi - v' \delta \theta \sin \varphi - y' \theta \delta \theta \cos \varphi) + k_3 \theta' \delta \theta'] ds. \end{aligned}$$

Используя уравнения (1.180), (2.7), преобразуем первую вариацию функционала устойчивости:

$$\begin{aligned} \delta\Phi_{\text{ст}}^*(u, v, \theta) = & \int_0^L [k_1 \varepsilon_B (\delta u' \cos \varphi - x' \delta \theta \sin \varphi + y' \delta \theta \cos \varphi + \delta v' \sin \varphi) + k_1 \varepsilon (-\delta u' \theta \sin \varphi - \\ & - u' \delta \theta \sin \varphi + \delta v' \theta \cos \varphi + v' \delta \theta \cos \varphi - x' \theta \delta \theta \cos \varphi - y' \theta \delta \theta \sin \varphi) + k_2 \gamma_B (-\delta u' \sin \varphi - \\ & - x' \delta \theta \cos \varphi - y' \delta \theta \sin \varphi + \delta v' \cos \varphi) + k_2 \gamma (-\delta u' \theta \cos \varphi - u' \delta \theta \cos \varphi - \delta v' \theta \sin \varphi - \\ & - v' \delta \theta \sin \varphi + x' \theta \delta \theta \sin \varphi - y' \theta \delta \theta \cos \varphi) + k_3 \psi_B \delta \theta'] ds. \end{aligned} \quad (2.39)$$

Введем обозначения:

$$\begin{aligned} N = k_1 \varepsilon; \quad Q = k_2 \gamma; \quad M = k_3 \psi; \\ N_B = k_1 \varepsilon_B; \quad Q_B = k_2 \gamma_B; \quad M_B = k_3 \psi_B, \end{aligned} \quad (2.40)$$

где:

$$\varepsilon = x' \cos \varphi + y' \sin \varphi - 1;$$

$$\gamma = -x' \sin \varphi + y' \cos \varphi;$$

$$\psi = \varphi';$$

$$\varepsilon_B = u' \cos \varphi - x' \theta \sin \varphi + y' \theta \cos \varphi + v' \sin \varphi;$$

$$\gamma_B = -u' \sin \varphi - x' \theta \cos \varphi - y' \theta \sin \varphi + v' \cos \varphi;$$

$$\psi_B = \theta'.$$

Величины  $x$ ,  $y$ ,  $\varphi$ ,  $\varepsilon$ ,  $\gamma$ ,  $\psi$ ,  $N$ ,  $Q$ ,  $M$  обозначают характеристики напряженно – деформированного состояния, удовлетворяющие системе уравнений (1.171), (1.180) и (1.183), а также граничным условиям. То есть это величины того напряженно – деформированного состояния, устойчивость которого исследуется. Величинами с нижним индексом «в» обозначаются вариации.

Таким образом, используя выражения (2.40), первую вариацию функционала устойчивости (2.39) можно записать в следующем виде:

$$\begin{aligned} \delta\Phi_{\text{CT}}^*(u, v, \theta) = & \int_0^L [N_B (\delta u' \cos \varphi - x' \delta \theta \sin \varphi + y' \delta \theta \cos \varphi + \delta v' \sin \varphi) + N(-\delta u' \theta \sin \varphi - \\ & - u' \delta \theta \sin \varphi + \delta v' \theta \cos \varphi + v' \delta \theta \cos \varphi - x' \theta \delta \theta \cos \varphi - y' \theta \delta \theta \sin \varphi) + Q_B (-\delta u' \sin \varphi - x' \delta \theta \cos \varphi - \\ & - y' \delta \theta \sin \varphi + \delta v' \cos \varphi) + Q(-\delta u' \theta \cos \varphi - u' \delta \theta \cos \varphi - \delta v' \theta \sin \varphi - v' \delta \theta \sin \varphi + x' \theta \delta \theta \sin \varphi - \\ & - y' \theta \delta \theta \cos \varphi) + M_B \delta \theta'] ds. \end{aligned}$$

Перегруппировывая слагаемые, первую вариацию функционала устойчивости окончательно можно записать в виде:

$$\begin{aligned} \delta\Phi_{\text{CT}}^*(u, v, \theta) = & \int_0^L [\delta u' (N_B \cos \varphi - N \theta \sin \varphi - Q_B \sin \varphi - Q \theta \cos \varphi) + \delta v' (N_B \sin \varphi + N \theta \cos \varphi + \\ & + Q_B \cos \varphi - Q \theta \sin \varphi) + M_B \delta \theta' + \delta \theta (-x' (N_B \sin \varphi + N \theta \cos \varphi + Q_B \cos \varphi - Q \theta \sin \varphi) + \\ & + y' (N_B \cos \varphi - N \theta \sin \varphi - Q_B \sin \varphi - Q \theta \cos \varphi) - u' (N \sin \varphi + Q \cos \varphi) - v' (Q \sin \varphi - N \cos \varphi))] ds. \end{aligned}$$

Интегрируем по частям, чтобы избавиться от производных вариаций:

$$\begin{aligned} \int_0^L \delta u' (N_B \cos \varphi - Q_B \sin \varphi) ds &= - \int_0^L \delta u (N_B \cos \varphi - Q_B \sin \varphi)' ds + \delta u (N_B \cos \varphi - Q_B \sin \varphi) \Big|_0^L; \\ \int_0^L \delta u' (-N \theta \sin \varphi - Q \theta \cos \varphi) ds &= \int_0^L \delta u (N \theta \sin \varphi + Q \theta \cos \varphi)' ds - \delta u (N \theta \sin \varphi + Q \theta \cos \varphi) \Big|_0^L; \\ \int_0^L \delta v' (N_B \sin \varphi + Q_B \cos \varphi) ds &= - \int_0^L \delta v (N_B \sin \varphi + Q_B \cos \varphi)' ds + \delta v (N_B \sin \varphi + Q_B \cos \varphi) \Big|_0^L; \\ \int_0^L \delta v' (N \theta \cos \varphi - Q \theta \sin \varphi) ds &= - \int_0^L \delta v (N \theta \cos \varphi - Q \theta \sin \varphi)' ds + \delta v (N \theta \cos \varphi - Q \theta \sin \varphi) \Big|_0^L; \\ \int_0^L \delta \theta' M_B ds &= - \int_0^L \delta \theta M_B' ds + \delta \theta M_B \Big|_0^L. \end{aligned}$$

Таким образом, после интегрирования по частям первая вариация статического функционала устойчивости принимает вид:

$$\begin{aligned} \delta\Phi_{\text{CT}}^*(u, v, \theta) = & - \int_0^L [\delta u ((N_B \cos \varphi - Q_B \sin \varphi)' - \theta (N \sin \varphi + Q \cos \varphi)' - \theta' (N \sin \varphi + Q \theta \cos \varphi)) + \\ & + \delta v ((N_B \sin \varphi + Q_B \cos \varphi)' + \theta (N \cos \varphi - Q \sin \varphi)' + \theta' (N \cos \varphi - Q \sin \varphi)) + \delta \theta (M_B' - \\ & - u' (N \sin \varphi + Q \cos \varphi) + v' (Q \sin \varphi - N \cos \varphi) + x' (N_B \sin \varphi - Q \theta \sin \varphi + N \cos \varphi + Q_B \cos \varphi) + \\ & + y' (-N_B \cos \varphi + N \theta \sin \varphi + Q_B \sin \varphi + Q \theta \cos \varphi))] ds + (\delta u ((N_B \cos \varphi - Q_B \sin \varphi) - \\ & - \theta (N \sin \varphi + Q \cos \varphi)) + \delta v ((N_B \sin \varphi + Q_B \cos \varphi) + \theta (N \cos \varphi - Q \sin \varphi)) + \delta \theta M_B) \Big|_0^L; \end{aligned} \quad (2.41)$$

Уравнениями Эйлера, вытекающими из условия  $\delta\Phi_{\text{ст}}^* = 0$ , являются следующие уравнения:

$$\begin{cases} (N_B \cos \varphi - Q_B \sin \varphi)' - \theta'(N \sin \varphi + Q \cos \varphi) - \theta(N \sin \varphi + Q \cos \varphi)' = 0; \\ (N_B \sin \varphi + Q_B \cos \varphi)' + \theta'(N \cos \varphi - Q \sin \varphi) + \theta(N \cos \varphi - Q \sin \varphi)' = 0; \\ M_B' + u'(N \sin \varphi + Q \cos \varphi) + v'(Q \sin \varphi - N \cos \varphi) + x'(N_B \sin \varphi + Q_B \cos \varphi + \\ + N \theta \cos \varphi - Q \theta \sin \varphi) + y'(N \theta \sin \varphi - N_B \cos \varphi + Q_B \sin \varphi + Q \theta \cos \varphi) = 0. \end{cases} \quad (2.42)$$

Система (2.42) является системой уравнений относительно функций  $u$ ,  $v$  и  $\theta$ . Функции  $x$ ,  $y$  и  $\varphi$ , а также  $N$ ,  $Q$ ,  $M$  фиксированы и являются решениями задачи (1.171), (1.180) и (1.183).

Уравнения (2.42) являются точными уравнениями устойчивости физически линейного стержня для плоской задачи при действии потенциальной нагрузки. При их выводе не делалось никаких упрощающих предположений о величинах перемещений и углов поворота, а также о характере напряженно-деформированного состояния стержня.

Несложно показать, что система уравнений (2.42) может быть выведена из системы уравнений устойчивости (2.22) в случае физической линейности стержня, когда смешанные производные  $\frac{\partial^2 W}{\partial \varepsilon \partial \gamma}$ ,  $\frac{\partial^2 W}{\partial \varepsilon \partial \psi}$ ,  $\frac{\partial^2 W}{\partial \gamma \partial \psi}$  равны нулю, а  $\frac{\partial N}{\partial \varepsilon} = k_1$ ,  $\frac{\partial Q}{\partial \gamma} = k_2$ ,  $\frac{\partial M}{\partial \psi} = k_3$ .

## 2.8 Уравнения устойчивости как уравнения равновесия в вариациях

Получим уравнения устойчивости вторым способом, как уравнения в вариациях уравнений равновесия (1.171). Для этого в исходных уравнениях равновесия, согласно 2.2, искомым функциям дается приращение, зависящее от параметра  $\alpha$ , и затем вычисляется значение производной по  $\alpha$  в точке  $\alpha=0$ . При вычислении вариаций используются выражения (1.183), (2.5), (2.6) и (2.40). При вычислении вариаций функции  $x$ ,  $y$  и  $\varphi$ , а также  $N$ ,  $Q$ ,  $M$  фиксированы и обозначают решение системы (1.171).

$$\begin{aligned} (N \cos \varphi - Q \sin \varphi)' &= (k_1 \varepsilon \cos \varphi - k_2 \gamma \sin \varphi)' \rightarrow \frac{d}{d\alpha} (k_1 (\varepsilon + \alpha \delta \varepsilon) \cos (\varphi + \alpha \theta) - \\ &- k_2 (\gamma + \alpha \delta \gamma) \sin (\varphi + \alpha \theta)) \Big|_{\alpha=0} = (k_1 \delta \varepsilon \cos (\varphi + \alpha \theta) - k_1 (\varepsilon + \alpha \delta \varepsilon) \theta \sin (\varphi + \alpha \theta) - \\ &- k_2 \delta \gamma \sin (\varphi + \alpha \theta) - k_2 (\gamma + \alpha \delta \gamma) \theta \cos (\varphi + \alpha \theta)) \Big|_{\alpha=0} = (k_1 \varepsilon_B \cos \varphi - k_1 \varepsilon \theta \sin \varphi - k_2 \gamma_B \sin \varphi - \\ &- k_2 \gamma \theta \cos \varphi)' = (N_B \cos \varphi - N \theta \sin \varphi - Q_B \sin \varphi - Q \theta \cos \varphi)' = (N_B \cos \varphi - Q_B \sin \varphi)' - \\ &- \theta (N \sin \varphi + Q \cos \varphi)' - \theta' (N \sin \varphi + Q \cos \varphi); \\ q_x &\rightarrow \frac{d}{d\alpha} (q_x) \Big|_{\alpha=0} = 0; \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
(N \sin \varphi + Q \cos \varphi)' &= (k_1 \varepsilon \sin \varphi + k_2 \gamma \cos \varphi)' \rightarrow \frac{d}{d\alpha} (k_1 (\varepsilon + \alpha \delta \varepsilon) \sin (\varphi + \alpha \theta) + \\
&+ k_2 (\gamma + \alpha \delta \gamma) \cos (\varphi + \alpha \theta)) \Big|_{\alpha=0} = (k_1 \delta \varepsilon \sin (\varphi + \alpha \theta) + k_1 (\varepsilon + \alpha \delta \varepsilon) \theta \cos (\varphi + \alpha \theta) + \\
&+ k_2 \delta \gamma \cos (\varphi + \alpha \theta) - k_2 (\gamma + \alpha \delta \gamma) \theta \sin (\varphi + \alpha \theta)) \Big|_{\alpha=0} = (k_1 \varepsilon_B \sin \varphi + k_1 \varepsilon \theta \cos \varphi + k_2 \gamma_B \cos \varphi - \\
&- k_2 \gamma \theta \sin \varphi)' = (N_B \sin \varphi + N \theta \cos \varphi + Q_B \cos \varphi - Q \theta \sin \varphi)' = (N_B \sin \varphi + Q_B \cos \varphi)' + \\
&- \theta (N \cos \varphi - Q \sin \varphi)' + \theta' (N \cos \varphi - Q \sin \varphi);
\end{aligned}$$

$$q_y \rightarrow \frac{d}{d\alpha} (q_y) \Big|_{\alpha=0} = 0;$$

$$\begin{aligned}
x'(N \sin \varphi + Q \cos \varphi) &= x'(k_1 \varepsilon \sin \varphi + k_2 \gamma \cos \varphi) \rightarrow \frac{d}{d\alpha} \left( (x + \alpha u)' (k_1 (\varepsilon + \alpha \delta \varepsilon) \sin (\varphi + \alpha \theta) + \right. \\
&+ k_2 (\gamma + \alpha \delta \gamma) \cos (\varphi + \alpha \theta)) \Big|_{\alpha=0} = (u'(k_1 (\varepsilon + \alpha \delta \varepsilon) \sin (\varphi + \alpha \theta) + k_2 (\gamma + \alpha \delta \gamma) \cos (\varphi + \alpha \theta)) + \\
&+ (x + \alpha u)' (k_1 \delta \varepsilon \sin (\varphi + \alpha \theta) + k_1 (\varepsilon + \alpha \delta \varepsilon) \theta \cos (\varphi + \alpha \theta) + k_2 \delta \gamma \cos (\varphi + \alpha \theta) + k_2 \delta \gamma \cos (\varphi + \alpha \theta) - \\
&- k_2 (\gamma + \alpha \delta \gamma) \theta \sin (\varphi + \alpha \theta)) \Big|_{\alpha=0} = u'(k_1 \varepsilon \sin \varphi + k_2 \gamma \cos \varphi) + x'(k_1 \varepsilon_B \sin \varphi + k_1 \varepsilon \theta \cos \varphi + \\
&+ k_2 \gamma_B \cos \varphi - k_2 \gamma \theta \sin \varphi) = u'(N \sin \varphi + Q \cos \varphi) + x'(N_B \sin \varphi + N \theta \cos \varphi + Q_B \cos \varphi - Q \theta \sin \varphi);
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
y'(N \cos \varphi - Q \sin \varphi) &= y'(k_1 \varepsilon \cos \varphi - k_2 \gamma \sin \varphi) \rightarrow \frac{d}{d\alpha} \left( (y + \alpha v)' (k_1 (\varepsilon + \alpha \delta \varepsilon) \cos (\varphi + \alpha \theta) - \right. \\
&- k_2 (\gamma + \alpha \delta \gamma) \sin (\varphi + \alpha \theta)) \Big|_{\alpha=0} = (v'(k_1 (\varepsilon + \alpha \delta \varepsilon) \cos (\varphi + \alpha \theta) - k_2 (\gamma + \alpha \delta \gamma) \sin (\varphi + \alpha \theta)) + \\
&+ (y + \alpha v)' (k_1 \delta \varepsilon \cos (\varphi + \alpha \theta) - k_1 (\varepsilon + \alpha \delta \varepsilon) \theta \sin (\varphi + \alpha \theta) - k_2 \delta \gamma \sin (\varphi + \alpha \theta) - \\
&- k_2 (\gamma + \alpha \delta \gamma) \theta \cos (\varphi + \alpha \theta)) \Big|_{\alpha=0} = v'(k_1 \varepsilon \cos \varphi - k_2 \gamma \sin \varphi) + y'(k_1 \varepsilon_B \cos \varphi - k_1 \varepsilon \theta \sin \varphi - \\
&- k_2 \gamma_B \sin \varphi - k_2 \gamma \theta \cos \varphi) = v'(N \cos \varphi - Q \sin \varphi) + y'(N_B \cos \varphi - N \theta \sin \varphi - Q_B \sin \varphi - Q \theta \cos \varphi);
\end{aligned}$$

$$M' = k_3 \psi' \rightarrow \frac{d}{d\alpha} \left( k_3 (\psi + \alpha \delta \psi)' \right) \Big|_{\alpha=0} = k_3 \delta \psi' \Big|_{\alpha=0} = k_3 \psi_B' = M_B';$$

$$m \rightarrow \frac{d}{d\alpha} (m) \Big|_{\alpha=0} = 0.$$

Отсюда получаем систему уравнений:

$$\begin{cases}
(N_B \cos \varphi - Q_B \sin \varphi)' - \theta' (N \sin \varphi + Q \cos \varphi) - \theta (N \sin \varphi + Q \cos \varphi)' = 0; \\
(N_B \sin \varphi + Q_B \cos \varphi)' + \theta' (N \cos \varphi - Q \sin \varphi) + \theta (N \cos \varphi - Q \sin \varphi)' = 0; \\
M_B' + u'(N \sin \varphi + Q \cos \varphi) + v'(Q \sin \varphi - N \cos \varphi) + x'(N_B \sin \varphi + Q_B \cos \varphi + \\
+ N \theta \cos \varphi - Q \theta \sin \varphi) + y'(N \theta \sin \varphi - N_B \cos \varphi + Q_B \sin \varphi + Q \theta \cos \varphi) = 0.
\end{cases} \quad (2.43)$$

Полученная система уравнений (2.43) является системой уравнений устойчивости физически линейного упругого стержня. Данная система уравнений полностью совпадает с системой уравнений устойчивости (2.42), полученных из функционала устойчивости.

Таким образом, для плоского случая двумя способами получены уравнения устойчивости равновесия: как уравнения в вариациях для исходных уравнений равновесия и как уравнения Эйлера для функционала устойчивости.

## 2.9 Примеры решения задачи устойчивости для физически линейного стержня статическим методом

### 2.9.1 Классическая задача Эйлера – шарнирно опертый стержень (рисунок 2.1)

Рассмотрим классическую задачу Эйлера - шарнирно закрепленный стержень, сжимаемый «мертвой» осевой силой  $T$ , как показано на рисунке 2.1. Исходная равновесная конфигурация - прямолинейная.

Граничные условия (2.10), соответствующие рассматриваемой задаче, были получены в пункте 2.2.1.

Точное решение нелинейной задачи (1.171), (1.180), (1.183) и (2.10) описывается формулами:

$$y = 0; \quad \varphi = 0; \quad \varepsilon = \frac{N}{k_1} = -\frac{T}{k_1}; \quad \gamma = 0; \quad \psi = 0;$$

$$N = -T; \quad Q = 0; \quad M = 0. \quad (2.44)$$

$$x' = \varepsilon + 1 = \frac{N}{k_1} + 1 = 1 - \frac{T}{k_1}.$$

Подставив (2.44) в функционал устойчивости (2.37), получим функционал устойчивости для рассматриваемой задачи:

$$\Phi_{\text{ст}}^*(u, v, \theta) = \frac{1}{2} \int_0^L \left[ k_1 u'^2 + k_2 \left( v' - \left( 1 - \frac{T}{k_1} \right) \theta \right)^2 + k_3 \theta'^2 + \theta^2 T \left( 1 - \frac{T}{k_1} \right) - 2T v' \theta \right] ds.$$

Компоненты функционала, содержащие  $u$ , описывают продольные деформации, не связанные с нагрузкой  $T$ , и могут быть опущены при исследовании устойчивости.

Окончательно, функционал устойчивости примет вид:

$$\Phi_{\text{ст}}(v, \theta) = \frac{1}{2} \int_0^L \left[ k_2 \left( v' - \left( 1 - \frac{T}{k_1} \right) \theta \right)^2 + k_3 \theta'^2 + \theta^2 T \left( 1 - \frac{T}{k_1} \right) - 2T v' \theta \right] ds. \quad (2.45)$$

Подставив (2.44) в (2.43), получим уравнения устойчивости:



$$\begin{cases} k_1 u'' = 0; \\ -T\theta' + k_2 \left( v' - \left( 1 - \frac{T}{k_1} \right) \theta \right)' = 0; \\ k_3 \theta'' + k_2 \left( v' - \left( 1 - \frac{T}{k_1} \right) \theta \right) \left( 1 + T \left( \frac{1}{k_2} - \frac{1}{k_1} \right) \right) = 0. \end{cases}$$

Первое уравнение системы, содержащее  $u$ , описывает продольные деформации, не связанные с нагрузкой  $T$ , и может быть опущено при исследовании устойчивости. Окончательно, система уравнений примет вид:

$$\begin{cases} -T\theta' + k_2 \left( v' - \left( 1 - \frac{T}{k_1} \right) \theta \right)' = 0; \\ k_3 \theta'' + k_2 \left( v' - \left( 1 - \frac{T}{k_1} \right) \theta \right) \left( 1 + T \left( \frac{1}{k_2} - \frac{1}{k_1} \right) \right) = 0. \end{cases} \quad (2.46)$$

Нетрудно проверить, что уравнения (2.46) являются уравнениями Эйлера для функционала (2.45).

Общее решение системы (2.46), содержащее четыре произвольных постоянных  $C_1 - C_4$ , можно записать в виде:

$$\begin{cases} v(s) = -C_1 \frac{B}{\lambda} \cos \lambda s + C_2 \frac{B}{\lambda} \sin \lambda s + C_3 \left( 1 - \frac{k_2 B}{T} \right) s + C_4 \\ \theta(s) = C_1 \sin \lambda s + C_2 \cos \lambda s - C_3 \frac{k_2}{T}, \end{cases} \quad (2.47)$$

где использованы следующие обозначения

$$B = 1 + T \left( \frac{1}{k_2} - \frac{1}{k_1} \right), \quad \lambda^2 = \frac{TB}{k_3}.$$

Граничные условия для задачи устойчивости шарнирно опертого стержня, полученные из внеинтегральных слагаемых первой вариации функционала устойчивости, описаны в пункте 2.4.1. В случае физической линейности стержня, когда смешанные производные  $\frac{\partial^2 W}{\partial \varepsilon \partial \gamma}$ ,  $\frac{\partial^2 W}{\partial \varepsilon \partial \psi}$ ,  $\frac{\partial^2 W}{\partial \gamma \partial \psi}$  равны нулю, а  $\frac{\partial N}{\partial \varepsilon} = k_1$ ,  $\frac{\partial Q}{\partial \gamma} = k_2$ ,  $\frac{\partial M}{\partial \psi} = k_3$ , используя обозначения (2.7) и (2.40), граничные условия для рассматриваемой задачи могут быть записаны в виде:

$$\begin{array}{ll}
s = 0 : & s = L : \\
u(0) = 0; & (N_B \cos \varphi - Q_B \sin \varphi - \theta(N \sin \varphi + Q \cos \varphi))|_{s=L} = 0; \\
v(0) = 0; & v(L) = 0; \\
M_B(0) = 0; & M_B(L) = 0;
\end{array} \quad (2.48)$$

Величины  $x$ ,  $y$ ,  $\varphi$ ,  $\varepsilon$ ,  $\gamma$ ,  $\psi$ ,  $N$ ,  $Q$ ,  $M$  обозначают характеристики напряженно – деформированного состояния, удовлетворяющие системе уравнений (1.171), (1.180) и (1.183), а также граничным условиям. Величинами с нижним индексом «в» обозначаются вариации.

Подставив точное решение (2.44) в граничные условия (2.48) и используя выражения (2.7) и (2.40), граничные условия для рассматриваемой задачи могут быть записаны в виде:

$$\begin{array}{ll}
s = 0 : & s = L : \\
u(0) = 0; & k_1 u'(L) = 0; \\
v(0) = 0; & v(L) = 0; \\
k_3 \theta'(0) = 0; & k_3 \theta'(L) = 0;
\end{array} \quad (2.49)$$

Условия  $u(0) = 0$ ,  $k_1 u'(L) = 0$  соответствуют продольным деформациям и далее могут быть опущены. Окончательно граничные условия (2.49) могут быть записаны в виде:

$$v(0) = v(L) = 0; \quad \theta'(0) = \theta'(L) = 0. \quad (2.50)$$

Подставляя общее решение системы (2.47) в граничные условия (2.50), получаем систему из четырех уравнений:

$$\begin{cases}
-C_1 \frac{B}{\lambda} + C_4 = 0; \\
-C_1 \frac{B}{\lambda} \cos \lambda L + C_2 \frac{B}{\lambda} \sin \lambda L + C_3 \left(1 - \frac{k_2 B}{T}\right) L + C_4 = 0; \\
C_1 \lambda = 0; \\
C_1 \lambda \cos \lambda L - C_2 \lambda \sin \lambda L = 0.
\end{cases} \quad (2.51)$$

Отсюда,

$$\begin{cases}
C_1 = 0; \\
C_3 = 0; \\
C_4 = 0; \\
C_2 \lambda \sin \lambda L = 0.
\end{cases}$$

Таким образом, нетривиальное решение уравнений (2.46) существует при  $\lambda L = \pi n$ , где  $n=1,2,3\dots$

Подставив выражение для  $\lambda$  и  $B$ , получаем:

$$\sqrt{\frac{TL^2}{k_3} \left( 1 + T \left( \frac{1}{k_2} - \frac{1}{k_1} \right) \right)} = \pi n.$$

Отсюда,

$$T \left( 1 + T \left( \frac{1}{k_2} - \frac{1}{k_1} \right) \right) = \frac{\pi^2 n^2 k_3}{L^2}.$$

Значение критической силы  $T$  находится из квадратного уравнения:

$$T^2 \left( \frac{1}{k_2} - \frac{1}{k_1} \right) + T - n^2 T_3 = 0, \quad (2.52)$$

где  $T_3 = \frac{\pi^2 k_3}{L^2}$  – сила Эйлера для шарнирно опертого стержня [47].

Корнями квадратного уравнения (2.52) являются следующие корни:

$$T_{1,2} = -\frac{T}{2} \pm \frac{\sqrt{T^2 + 4n^2 T_3 \left( \frac{1}{k_2} - \frac{1}{k_1} \right)}}{2 \left( \frac{1}{k_2} - \frac{1}{k_1} \right)}.$$

Поскольку  $k_1 > k_2$  всегда,  $4n^2 T_3 \left( \frac{1}{k_2} - \frac{1}{k_1} \right) > 0$ . Таким образом, несложно показать, что

наименьшее значение силы  $T$  достигается при  $n=1$ , и единственным положительным значением критической силы, вытекающим из уравнения (2.64) является:

$$T_{кр} = \frac{\sqrt{1 + 4T_3 \left( \frac{1}{k_2} - \frac{1}{k_1} \right)} - 1}{2 \left( \frac{1}{k_2} - \frac{1}{k_1} \right)}. \quad (2.53)$$

Решение (2.53) представляет собой точное решение задачи устойчивости шарнирно опертого стержня с учетом жесткостей на растяжение-сжатие, сдвиг и изгиб.

Определим форму потери устойчивости из системы (2.47), подставляя найденные константы  $C_1, C_3, C_4$  и полученное значение  $\lambda L = \pi n$ .

$$\begin{cases} v(s) = C_2 \frac{B}{\lambda} \sin \frac{\pi n}{L} s; \\ \theta(s) = C_2 \cos \frac{\pi n}{L} s, \end{cases} \quad (2.54)$$

где  $\lambda = \sqrt{\frac{T_{кр} B}{k_3}}$ .

Общий вид потребуется нам в дальнейшем в главе 3 для решения задач динамическим методом. В рассматриваемой задаче для определения критической силы соответствующая форма потери устойчивости получена для случая  $n=1$  ( $\lambda L = \pi$ ) и имеет следующий вид:

$$\begin{cases} v(s) = C_2 \frac{B}{\lambda} \sin \frac{\pi}{L} s; \\ \theta(s) = C_2 \cos \frac{\pi}{L} s. \end{cases}$$

### 2.9.2 Консольный стержень (рисунок 2.2)

Рассмотрим консольный стержень, сжимаемый мертвой осевой силой  $T$ , как показано на рисунке 2.2. Граничные условия (2.11), соответствующие рассматриваемой задаче, были получены в пункте 2.2.2. Точное решение нелинейной задачи (1.171), (1.180), (1.183) и (2.11) описывается формулами (2.44). Таким образом, система уравнений устойчивости совпадает с системой (2.46).

Граничные условия для задачи устойчивости консольного стержня, полученные из внеинтегральных слагаемых первой вариации функционала устойчивости, описаны в пункте 2.4.2. В случае физической линейности стержня граничные условия имеют вид:

$$\begin{array}{ll} s = 0: & s = L: \\ u(0) = 0; & (N_B \cos \varphi - Q_B \sin \varphi - \theta(N \sin \varphi + Q \cos \varphi))|_{s=L} = 0; \\ v(0) = 0; & (N_B \sin \varphi + Q_B \cos \varphi + \theta(N \cos \varphi - Q \sin \varphi))|_{s=L} = 0; \\ \theta(0) = 0; & M_B(L) = 0; \end{array} \quad (2.55)$$

где использованы обозначения (2.7) и (2.40).

Величины  $x$ ,  $y$ ,  $\varphi$ ,  $\varepsilon$ ,  $\gamma$ ,  $\psi$ ,  $N$ ,  $Q$ ,  $M$  обозначают характеристики напряженно – деформированного состояния, удовлетворяющие системе уравнений (1.171), (1.180), (1.183), а также граничным условиям. Величинами с нижним индексом «в» обозначаются вариации.

Подставив точное решение (2.44) в граничные условия (2.55) и используя выражения (2.7) и (2.40), граничные условия для рассматриваемой задачи могут быть записаны в виде:

$$\begin{array}{ll} s = 0: & s = L: \\ u(0) = 0; & k_1 u'(L) = 0; \\ v(0) = 0; & \left( k_2 \left[ v' - \theta \cdot \left( 1 - \frac{T}{k_1} \right) \right] - T\theta \right) \Big|_{s=L} = 0; \\ \theta(0) = 0; & k_3 \theta'(L) = 0; \end{array} \quad (2.56)$$

Условия  $u(0) = 0$ ,  $k_1 u'(L) = 0$  соответствуют продольным деформациям и далее могут быть опущены. Окончательно граничные условия (2.56) могут быть записаны в виде:

$$u(0) = 0; \quad \left. \left( k_2 \left[ u' - \theta \cdot \left( 1 - \frac{T}{k_1} \right) \right] - T\theta \right) \right|_{s=L} = 0; \quad \theta(0) = 0; \quad \theta'(L) = 0. \quad (2.57)$$

Подставляя общее решение системы (2.47) в граничные условия (2.57), получаем систему из четырех уравнений:

$$\begin{cases} -C_1 \frac{B}{\lambda} + C_4 = 0; \\ k_2 \left[ C_1 B \sin \lambda L + C_2 B \cos \lambda L + C_3 \left( 1 - \frac{k_2 B}{T} \right) - \left( C_1 \sin \lambda L + C_2 \cos \lambda L - \right. \right. \\ \left. \left. - C_3 \frac{k_2}{T} \right) \left( 1 - \frac{T}{k_1} \right) \right] - T \left( C_1 \sin \lambda L + C_2 \cos \lambda L - C_3 \frac{k_2}{T} \right) = 0; \\ C_2 - C_3 \frac{k_2}{T} = 0; \\ C_1 \lambda \cos \lambda L - C_2 \lambda \sin \lambda L = 0. \end{cases} \quad (2.58)$$

Таким образом, нетривиальное решение уравнений (2.46) существует при  $\cos \lambda L = 0$ , то есть  $\lambda L = \pi n - \frac{\pi}{2}$ , где  $n=1,2,3,\dots$

Подставив выражение для  $\lambda$  и  $B$ , получаем:

$$\sqrt{\frac{TL^2}{k_3} \left( 1 + T \left( \frac{1}{k_2} - \frac{1}{k_1} \right) \right)} = \frac{(2n-1)\pi}{2}.$$

Отсюда,

$$T \left( 1 + T \left( \frac{1}{k_2} - \frac{1}{k_1} \right) \right) = \frac{\pi^2 (2n-1)^2 k_3}{4L^2}.$$

Критическое (наименьшее) значение силы  $T$  достигается при  $n=1$  и находится из квадратного уравнения:

$$T^2 \left( \frac{1}{k_2} - \frac{1}{k_1} \right) + T - T_3 = 0, \quad (2.59)$$

где  $T_3 = \frac{\pi^2 k_3}{4L^2}$  – критическая сила Эйлера для консольного стержня [47].

Как и в параграфе 2.9.1 можно показать, что критическое (наименьшее положительное) значение силы  $T$  достигается при  $n=1$  и определяется из квадратного уравнения:

$$T^2 \left( \frac{1}{k_2} - \frac{1}{k_1} \right) + T - T_3 = 0, \quad (2.60)$$

Отсюда получим единственное положительное значение  $T$ :

$$T_{\text{кр}} = \frac{\sqrt{1 + 4T_3 \left( \frac{1}{k_2} - \frac{1}{k_1} \right)} - 1}{2 \left( \frac{1}{k_2} - \frac{1}{k_1} \right)}. \quad (2.61)$$

Определим форму потери устойчивости из системы (2.47), соответствующие выражения для констант из системы (2.58) и найденное значение  $\lambda L = \pi n - \frac{\pi}{2}$ .

$$\begin{cases} v(s) = -C_1 \frac{B}{\lambda} \cos \frac{\pi(2n-1)s}{2} + C_1 \frac{B}{\lambda} \operatorname{ctg} \frac{\pi(2n-1)}{2} \sin \frac{\pi(2n-1)s}{2} + \\ + C_1 \frac{T}{k_2} \left( 1 - \frac{k_2 B}{T} \right) \operatorname{sctg} \frac{\pi(2n-1)}{2} + C_1 \frac{B}{\lambda}; \\ \theta(s) = C_1 \sin \frac{\pi(2n-1)s}{2} + C_1 \operatorname{ctg} \frac{\pi(2n-1)}{2} \cos \frac{\pi(2n-1)s}{2} - C_1 \operatorname{ctg} \frac{\pi(2n-1)}{2}, \end{cases}$$

$$\text{где } \lambda = \sqrt{\frac{T_{\text{кр}} B}{k_3}}.$$

Окончательно, форма потери устойчивости может быть записана в виде:

$$\begin{cases} v(s) = C_1 \frac{B}{\lambda} \left( 1 - \cos \frac{(2n-1)\pi s}{2L} \right); \\ \theta(s) = C_1 \sin \frac{(2n-1)\pi s}{2}. \end{cases} \quad (2.62)$$

Общий вид потребуется нам в дальнейшем в главе 3 для решения задач динамическим методом. В рассматриваемой задаче для определения критической силы соответствующая форма потери устойчивости получена для случая  $n=1$  ( $\lambda L = \frac{\pi}{2}$ ) и имеет следующий вид:

$$\begin{cases} v(s) = C_1 \frac{B}{\lambda} \left( 1 - \cos \frac{\pi s}{2L} \right); \\ \theta(s) = C_1 \sin \frac{\pi s}{2}. \end{cases}$$

### 2.9.3 Стержень с заделкой с одной стороны и скользящей заделкой, допускающей перемещения вдоль оси стержня, с другой (рисунок 2.3)

Рассмотрим стержень с заделкой с одной стороны и скользящей заделкой, допускающей перемещения вдоль оси стержня, с другой, сжимаемый мертвой осевой силой  $T$ , как показано

на рисунке 2.3. Граничные условия (2.12), соответствующие рассматриваемой задаче, были получены в пункте 2.2.3. Точное решение нелинейной задачи (1.171), (1.180), (1.183) и (2.12) описывается формулами (2.44). Таким образом, система уравнений устойчивости совпадает с системой (2.46).

Граничные условия для задачи устойчивости рассматриваемого стержня, полученные из внеинтегральных слагаемых первой вариации функционала устойчивости, описаны в пункте 2.4.3. В случае физической линейности стержня граничные условия имеют вид:

$$\begin{array}{ll}
 s = 0 : & s = L : \\
 u(0) = 0; & (N_B \cos \varphi - Q_B \sin \varphi - \theta(N \sin \varphi + Q \cos \varphi))|_{s=L} = 0; \\
 v(0) = 0; & v(L) = 0; \\
 \theta(0) = 0; & \theta(L) = 0;
 \end{array} \quad (2.63)$$

где использованы обозначения (2.7) и (2.40).

Величины  $x$ ,  $y$ ,  $\varphi$ ,  $\varepsilon$ ,  $\gamma$ ,  $\psi$ ,  $N$ ,  $Q$ ,  $M$  обозначают характеристики напряженно – деформированного состояния, удовлетворяющие системе уравнений (1.171), (1.180), (1.183), а также граничным условиям. Величинами с нижним индексом «в» обозначаются вариации.

Подставив точное решение (2.44) в граничные условия (2.63) и используя выражения (2.7) и (2.40), граничные условия для рассматриваемой задачи могут быть записаны в виде:

$$\begin{array}{ll}
 s = 0 : & s = L : \\
 u(0) = 0; & k_1 u'(L) = 0; \\
 v(0) = 0; & v(L) = 0; \\
 \theta(0) = 0; & \theta(L) = 0;
 \end{array} \quad (2.64)$$

Условия  $u(0) = 0$ ,  $k_1 u'(L) = 0$  соответствуют продольным деформациям и далее могут быть опущены. Окончательно граничные условия (2.64) могут быть записаны в виде:

$$v(0) = v(L) = 0; \quad \theta(0) = \theta(L) = 0. \quad (2.65)$$

Подставляя общее решение системы (2.47) в граничные условия (2.65), получаем систему из четырех уравнений:

$$\begin{cases}
 -C_1 \frac{B}{\lambda} + C_4 = 0; \\
 -C_1 \frac{B}{\lambda} \cos \lambda L + C_2 \frac{B}{\lambda} \sin \lambda L + C_3 \left(1 - \frac{k_2 B}{T}\right) L + C_4 = 0; \\
 C_2 - C_3 \frac{k_2}{T} = 0; \\
 C_1 \sin \lambda L + C_2 \cos \lambda L - C_3 \frac{k_2}{T} = 0.
 \end{cases} \quad (2.66)$$

Для того чтобы однородная система (2.66) имела нетривиальное решение необходимо и достаточно, чтобы ее определитель был равен нулю:

$$\begin{vmatrix} -\frac{B}{\lambda} & 0 & 0 & 1 \\ -\frac{B}{\lambda} \cos \lambda L & \frac{B}{\lambda} \sin \lambda L & \left(1 - \frac{k_2 B}{T}\right) L & 1 \\ 0 & 1 & -\frac{k_2}{T} & 0 \\ \sin \lambda L & \cos \lambda L & -\frac{k_2}{T} & 0 \end{vmatrix} = 0.$$

Отсюда получаем:

$$2 \sin \frac{\lambda L}{2} \left( \left(1 - \frac{k_2 B}{T}\right) L \cos \frac{\lambda L}{2} + 2 \frac{k_2 B}{T} \frac{1}{\lambda} \sin \frac{\lambda L}{2} \right) = 0. \quad (2.67)$$

Несложно показать, что наименьшим корнем уравнения (2.67) будет являться корень  $2 \sin \frac{\lambda L}{2} = 0$ . Таким образом, нетривиальное решение уравнений (2.46) существует при  $\sin \frac{\lambda L}{2} = 0$ , то есть  $\lambda L = 2\pi n$ , где  $n=1,2,3\dots$

Подставив выражение для  $\lambda$  и  $B$ , получаем:

$$\sqrt{\frac{TL^2}{k_3} \left(1 + T \left(\frac{1}{k_2} - \frac{1}{k_1}\right)\right)} = 2\pi n.$$

Отсюда,

$$T \left(1 + T \left(\frac{1}{k_2} - \frac{1}{k_1}\right)\right) = \frac{4\pi^2 n^2 k_3}{L^2}.$$

Критическое (наименьшее) положительное значение силы  $T$  достигается при  $n=1$  и находится из квадратного уравнения:

$$T^2 \left(\frac{1}{k_2} - \frac{1}{k_1}\right) + T - T_3 = 0, \quad (2.68)$$

где  $T_3 = \frac{4\pi^2 k_3}{L^2}$  – критическая сила Эйлера для стержня с заделкой с одной стороны и

скользящей заделкой, допускающей перемещения вдоль оси стержня, с другой [47].

Как и в параграфе 2.9.1 можно показать, что критическое (наименьшее положительное) значение силы  $T$  достигается при  $n=1$  и определяется из квадратного уравнения:

$$T^2 \left(\frac{1}{k_2} - \frac{1}{k_1}\right) + T - T_3 = 0, \quad (2.69)$$

Отсюда получим единственное положительное значение  $T$ :



$$T_{кр} = \frac{\sqrt{1 + 4T_3 \left( \frac{1}{k_2} - \frac{1}{k_1} \right)} - 1}{2 \left( \frac{1}{k_2} - \frac{1}{k_1} \right)}. \quad (2.70)$$

Определим форму потери устойчивости из системы (2.47), соответствующие выражения для констант из системы (2.66) и найденное значение  $\lambda L = 2\pi n$ .

$$\begin{cases} v(s) = -C_1 \frac{B}{\lambda} \cos \frac{2\pi n}{L} s + C_1 \frac{B}{\lambda} \frac{\sin 2\pi n}{(1 - \cos 2\pi n)} \sin \frac{2\pi n}{L} s + C_1 \frac{\sin 2\pi n}{(1 - \cos 2\pi n)} \frac{T}{k_2} \left( 1 - \frac{k_2 B}{T} \right) s + \\ + C_1 \frac{B}{\lambda}; \\ \theta(s) = C_1 \sin \frac{2\pi n}{L} s + C_1 \frac{\sin 2\pi n}{(1 - \cos 2\pi n)} \cos \frac{2\pi n}{L} s - C_1 \frac{\sin 2\pi n}{(1 - \cos 2\pi n)}, \end{cases}$$

$$\text{где } \lambda = \sqrt{\frac{T_{кр} B}{k_3}}.$$

Окончательно, форма потери устойчивости может быть записана в виде:

$$\begin{cases} v(s) = C_1 \frac{B}{\lambda} \left( 1 - \cos \frac{2\pi n}{L} s \right); \\ \theta(s) = C_1 \sin \frac{2\pi n}{L} s. \end{cases} \quad (2.71)$$

Общий вид потребуется нам в дальнейшем в главе 3 для решения задач динамическим методом. В рассматриваемой задаче для определения критической силы соответствующая форма потери устойчивости получена для случая  $n=1$  ( $\lambda L = 2\pi$ ) и имеет следующий вид:

$$\begin{cases} v(s) = C_1 \frac{B}{\lambda} \left( 1 - \cos \frac{2\pi}{L} s \right); \\ \theta(s) = C_1 \sin \frac{2\pi}{L} s. \end{cases}$$

#### 2.9.4 Стержень с заделкой с одной стороны и скользящей заделкой, допускающей перемещения перпендикулярно оси стержня, с другой (рисунок 2.4)

Рассмотрим стержень с заделкой с одной стороны и скользящей заделкой, допускающей перемещения перпендикулярно оси стержня, сжимаемый мертвой осевой силой  $T$ , как показано на рисунке 2.4. Граничные условия (2.13), соответствующие рассматриваемой задаче, были получены в пункте 2.2.4. Точное решение нелинейной задачи (1.171), (1.180), (1.183) и (2.13) описывается формулами (2.44). Таким образом, система уравнений устойчивости совпадает с системой (2.46).

Граничные условия для задачи устойчивости рассматриваемого стержня, полученные из вейнтегральных слагаемых первой вариации функционала устойчивости, описаны в пункте 2.4.4. В случае физической линейности стержня граничные условия имеют вид:

$$\begin{aligned}
 s = 0: & & s = L: \\
 u(0) = 0; & & (N_B \cos \varphi - Q_B \sin \varphi - \theta(N \sin \varphi + Q \cos \varphi))|_{s=L} = 0; \\
 v(0) = 0; & & (N_B \sin \varphi + Q_B \cos \varphi + \theta(N \cos \varphi - Q \sin \varphi))|_{s=L} = 0; \\
 \theta(0) = 0; & & \theta(L) = 0;
 \end{aligned} \tag{2.72}$$

где использованы обозначения (2.7) и (2.40).

Величины  $x$ ,  $y$ ,  $\varphi$ ,  $\varepsilon$ ,  $\gamma$ ,  $\psi$ ,  $N$ ,  $Q$ ,  $M$  обозначают характеристики напряженно – деформированного состояния, удовлетворяющие системе уравнений (1.171), (1.180), (1.183), а также граничным условиям. Величинами с нижним индексом «в» обозначаются вариации.

Подставив точное решение (2.44) в граничные условия (2.72) и используя выражения (2.7) и (2.40), граничные условия для рассматриваемой задачи могут быть записаны в виде:

$$\begin{aligned}
 s = 0: & & s = L: \\
 u(0) = 0; & & k_1 u'(L) = 0; \\
 v(0) = 0; & & \left( k_2 \left[ v' - \theta \cdot \left( 1 - \frac{T}{k_1} \right) \right] - T\theta \right) \Big|_{s=L} = 0; \\
 \theta(0) = 0; & & \theta(L) = 0;
 \end{aligned} \tag{2.73}$$

Условия  $u(0) = 0$ ,  $k_1 u'(L) = 0$  соответствуют продольным деформациям и далее могут быть опущены. Окончательно граничные условия (2.73) могут быть записаны в виде:

$$v(0) = 0; \quad \left( k_2 \left[ v' - \theta \cdot \left( 1 - \frac{T}{k_1} \right) \right] - T\theta \right) \Big|_{s=L} = 0; \quad \theta(0) = \theta(L) = 0. \tag{2.74}$$

Подставляя общее решение системы (2.47) в (2.74), получаем систему из четырех уравнений:

$$\begin{cases}
 -C_1 \frac{B}{\lambda} + C_4 = 0; \\
 k_2 \left[ C_1 B \sin \lambda L + C_2 B \cos \lambda L + C_3 \left( 1 - \frac{k_2 B}{T} \right) \right] - \left( C_1 \sin \lambda L + C_2 \cos \lambda L - \right. \\
 \left. - C_3 \frac{k_2}{T} \right) \left( 1 - \frac{T}{k_1} \right) - T \left( C_1 \sin \lambda L + C_2 \cos \lambda L - C_3 \frac{k_2}{T} \right) = 0; \\
 C_2 - C_3 \frac{k_2}{T} = 0; \\
 C_1 \sin \lambda L + C_2 \cos \lambda L - C_3 \frac{k_2}{T} = 0.
 \end{cases} \tag{2.75}$$

Для того чтобы однородная система (2.75) имела нетривиальное решение необходимо и достаточно, чтобы ее определитель был равен нулю:

$$\begin{vmatrix} -\frac{B}{\lambda} & 0 & 0 & 1 \\ k_2 \sin \lambda L \left( B - \left( 1 - \frac{T}{k_1} \right) - \frac{T}{k_2} \right) & k_2 \cos \lambda L \left( B - \left( 1 - \frac{T}{k_1} \right) - \frac{T}{k_2} \right) & k_2 \left( \left( 1 - \frac{k_2 B}{T} \right) + \frac{k_2}{T} \left( 1 - \frac{T}{k_1} \right) + 1 \right) & 0 \\ 0 & 1 & -\frac{k_2}{T} & 0 \\ \sin \lambda L & \cos \lambda L & -\frac{k_2}{T} & 0 \end{vmatrix} = 0.$$

Отсюда получаем:

$$\sin \lambda L = 0. \quad (2.76)$$

Таким образом, нетривиальное решение уравнений (2.46) существует при  $\sin \lambda L = 0$ , то есть  $\lambda L = \pi n$ , где  $n=1,2,3\dots$

Подставив выражение для  $\lambda$  и  $B$ , получаем:

$$\sqrt{\frac{TL^2}{k_3} \left( 1 + T \left( \frac{1}{k_2} - \frac{1}{k_1} \right) \right)} = \pi n.$$

Отсюда,

$$T \left( 1 + T \left( \frac{1}{k_2} - \frac{1}{k_1} \right) \right) = \frac{\pi^2 n^2 k_3}{L^2}.$$

Критическое (наименьшее) значение силы  $T$  достигается при  $n=1$  и находится из квадратного уравнения:

$$T^2 \left( \frac{1}{k_2} - \frac{1}{k_1} \right) + T - T_3 = 0, \quad (2.77)$$

где  $T_3 = \frac{\pi^2 k_3}{L^2}$  – критическая сила Эйлера для стержня с заделкой с одной стороны и скользящей заделкой, допускающей перемещения перпендикулярно оси стержня, с другой [47].

Как и в параграфе 2.9.1 можно показать, что критическое (наименьшее положительное) значение силы  $T$  достигается при  $n=1$  и определяется из квадратного уравнения:

$$T^2 \left( \frac{1}{k_2} - \frac{1}{k_1} \right) + T - T_3 = 0, \quad (2.78)$$

Отсюда получим единственное положительное значение  $T$ :

$$T_{\text{кр}} = \frac{\sqrt{1 + 4T_3 \left( \frac{1}{k_2} - \frac{1}{k_1} \right)} - 1}{2 \left( \frac{1}{k_2} - \frac{1}{k_1} \right)}. \quad (2.79)$$

Определим форму потери устойчивости из системы (2.47), соответствующие выражения для констант из системы (2.75) и найденное значение  $\lambda L = \pi n$ .

$$\begin{cases} v(s) = -C_1 \frac{B}{\lambda} \cos \frac{\pi n}{L} s + C_1 \frac{B}{\lambda} \frac{\sin \pi n}{(1 - \cos \pi n)} \sin \frac{\pi n}{L} s + C_1 \frac{\sin \pi n}{(1 - \cos \pi n)} \frac{T}{k_2} \left(1 - \frac{k_2 B}{T}\right) s + C_1 \frac{B}{\lambda}; \\ \theta(s) = C_1 \sin \frac{\pi n}{L} s + C_1 \frac{\sin \pi n}{(1 - \cos \pi n)} \cos \frac{\pi n}{L} s - C_1 \frac{\sin \pi n}{(1 - \cos \pi n)}, \end{cases}$$

где  $\lambda = \sqrt{\frac{T_{кр} B}{k_3}}$ .

Окончательно, форма потери устойчивости может быть записана в виде:

$$\begin{cases} v(s) = C_1 \frac{B}{\lambda} \left(1 - \cos \frac{\pi n}{L} s\right); \\ \theta(s) = C_1 \sin \frac{\pi n}{L} s. \end{cases} \quad (2.80)$$

Общий вид потребуется нам в дальнейшем в главе 3 для решения задач динамическим методом. В рассматриваемой задаче для определения критической силы соответствующая форма потери устойчивости получена для случая  $n=1$  ( $\lambda L = \pi$ ) и имеет следующий вид:

$$\begin{cases} v(s) = C_1 \frac{B}{\lambda} \left(1 - \cos \frac{\pi}{L} s\right); \\ \theta(s) = C_1 \sin \frac{\pi}{L} s. \end{cases}$$

### 2.9.5 Шарнирно опертый стержень со скользящей заделкой, допускающей перемещения перпендикулярно оси стержня (рисунок 2.5)

Рассмотрим шарнирно опертый стержень со скользящей заделкой, допускающей перемещения перпендикулярно оси стержня, сжимаемый мертвой осевой силой  $T$ , как показано на рисунке 2.5. Граничные условия (2.14), соответствующие рассматриваемой задаче, были получены в пункте 2.2.5. Точное решение нелинейной задачи (1.171), (1.180), (1.183) и (2.14) описывается формулами (2.44). Таким образом, система уравнений устойчивости совпадает с системой (2.46).

Граничные условия для задачи устойчивости рассматриваемого стержня, полученные из внеинтегральных слагаемых первой вариации функционала устойчивости, описаны в пункте 2.4.5. В случае физической линейности стержня, когда смешанные производные

$$\frac{\partial^2 W}{\partial \varepsilon \partial \gamma}, \quad \frac{\partial^2 W}{\partial \varepsilon \partial \psi}, \quad \frac{\partial^2 W}{\partial \gamma \partial \psi} \text{ равны нулю, а } \frac{\partial N}{\partial \varepsilon} = k_1, \quad \frac{\partial Q}{\partial \gamma} = k_2, \quad \frac{\partial M}{\partial \psi} = k_3, \text{ граничные условия имеют}$$

вид:

$$\begin{array}{ll}
s = 0 : & s = L : \\
u(0) = 0; & (N_B \cos \varphi - Q_B \sin \varphi - \theta(N \sin \varphi + Q \cos \varphi))|_{s=L} = 0; \\
v(0) = 0; & (N_B \sin \varphi + Q_B \cos \varphi + \theta(N \cos \varphi - Q \sin \varphi))|_{s=L} = 0; \\
k_3 \theta'(0) = 0; & \theta(L) = 0;
\end{array} \tag{2.81}$$

где использованы обозначения (2.7) и (2.40).

Величины  $x$ ,  $y$ ,  $\varphi$ ,  $\varepsilon$ ,  $\gamma$ ,  $\psi$ ,  $N$ ,  $Q$ ,  $M$  обозначают характеристики напряженно – деформированного состояния, удовлетворяющие системе уравнений (1.171), (1.180), (1.183), а также граничным условиям. Величинами с нижним индексом «в» обозначаются вариации.

Подставив точное решение (2.44) в граничные условия (2.81) и используя выражения (2.7) и (2.40), граничные условия для рассматриваемой задачи могут быть записаны в виде:

$$\begin{array}{ll}
s = 0 : & s = L : \\
u(0) = 0; & k_1 u'(L) = 0; \\
v(0) = 0; & \left( k_2 \left[ v' - \theta \cdot \left( 1 - \frac{T}{k_1} \right) \right] - T\theta \right) \Big|_{s=L} = 0; \\
k_3 \theta'(0) = 0; & \theta(L) = 0;
\end{array} \tag{2.82}$$

Условия  $u(0) = 0$ ,  $k_1 u'(L) = 0$  соответствуют продольным деформациям и далее могут быть опущены. Окончательно граничные условия (2.82) могут быть записаны в виде:

$$v(0) = 0; \quad \left( k_2 \left[ v' - \theta \cdot \left( 1 - \frac{T}{k_1} \right) \right] - T\theta \right) \Big|_{s=L} = 0; \quad \theta'(0) = 0; \quad \theta(L) = 0. \tag{2.83}$$

Подставляя общее решение системы (2.47) в граничные условия (2.83), получаем систему из четырех уравнений:

$$\begin{cases}
-C_1 \frac{B}{\lambda} + C_4 = 0; \\
k_2 \left[ C_1 B \sin \lambda L + C_2 B \cos \lambda L + C_3 \left( 1 - \frac{k_2 B}{T} \right) - \left( C_1 \sin \lambda L + C_2 \cos \lambda L - \right. \right. \\
\left. \left. - C_3 \frac{k_2}{T} \right) \left( 1 - \frac{T}{k_1} \right) \right] - T \left( C_1 \sin \lambda L + C_2 \cos \lambda L - C_3 \frac{k_2}{T} \right) = 0; \\
\lambda C_1 = 0; \\
C_1 \sin \lambda L + C_2 \cos \lambda L - C_3 \frac{k_2}{T} = 0.
\end{cases} \tag{2.84}$$

Отсюда,

$$\begin{cases} C_1 = 0; \\ C_3 = 0; \\ C_4 = 0; \\ C_2 \cos \lambda L = 0. \end{cases}$$

Таким образом, нетривиальное решение уравнений (2.46) существует при  $\cos \lambda L = 0$ , то есть  $\lambda L = \pi n - \frac{\pi}{2}$ , где  $n=1,2,3\dots$

Подставив выражение для  $\lambda$  и  $B$ , получаем:

$$\sqrt{\frac{TL^2}{k_3} \left( 1 + T \left( \frac{1}{k_2} - \frac{1}{k_1} \right) \right)} = \frac{(2n-1)\pi}{2}.$$

Отсюда,

$$T \left( 1 + T \left( \frac{1}{k_2} - \frac{1}{k_1} \right) \right) = \frac{\pi^2 (2n-1)^2 k_3}{4L^2}.$$

Критическое (наименьшее) значение силы  $T$  достигается при  $n=1$  и находится из квадратного уравнения:

$$T^2 \left( \frac{1}{k_2} - \frac{1}{k_1} \right) + T - T_3 = 0, \quad (2.85)$$

где  $T_3 = \frac{\pi^2 k_3}{4L^2}$  – критическая сила Эйлера для стержня с заделкой с одной стороны и скользящей заделкой, допускающей перемещения перпендикулярно оси стержня, с другой [47].

Как и в параграфе 2.9.1 можно показать, что критическое (наименьшее положительное) значение силы  $T$  достигается при  $n=1$  и определяется из квадратного уравнения:

$$T^2 \left( \frac{1}{k_2} - \frac{1}{k_1} \right) + T - T_3 = 0, \quad (2.86)$$

Отсюда получим единственное положительное значение  $T$ :

$$T_{\text{кр}} = \frac{\sqrt{1 + 4T_3 \left( \frac{1}{k_2} - \frac{1}{k_1} \right)} - 1}{2 \left( \frac{1}{k_2} - \frac{1}{k_1} \right)}. \quad (2.87)$$

Определим форму потери устойчивости из системы (2.47), соответствующие выражения для констант из системы (2.84) и найденное значение  $\lambda L = \frac{\pi (2n-1)}{2}$ .

$$\begin{cases} v(s) = C_2 \frac{B}{\lambda} \sin \frac{(2n-1)\pi}{L} s; \\ \theta(s) = C_2 \cos \frac{(2n-1)\pi}{L} s. \end{cases} \quad (2.88)$$

$$\text{где } \lambda = \sqrt{\frac{T_{\text{кр}} B}{k_3}}.$$

Общий вид потребуется нам в дальнейшем в главе 3 для решения задач динамическим методом. В рассматриваемой задаче для определения критической силы соответствующая форма потери устойчивости получена для случая  $n=1$  ( $\lambda L = \frac{\pi}{2}$ ) и имеет следующий вид:

$$\begin{cases} v(s) = C_2 \frac{B}{\lambda} \sin \frac{\pi}{L} s; \\ \theta(s) = C_2 \cos \frac{\pi}{L} s. \end{cases}$$

### 2.9.6 Шарнирно опертый стержень с заделкой (рисунок 2.6)

Рассмотрим задачу - стержень с заделкой на одном конце и шарнирной опорой на другом, сжимаемый «мертвой» осевой силой  $T$ , как показано на рисунке 2.6. Исходная равновесная конфигурация - прямолинейная.

Граничные условия (2.15), соответствующие этой задаче, были получены в пункте 2.2.6. Точное решение нелинейной задачи (1.171), (1.180), (1.183) и (2.15) описывается формулами (2.44). Таким образом, система уравнений устойчивости совпадает с системой (2.46).

Граничные условия для задачи устойчивости стержня с заделкой на одном конце и шарнирной опорой на другом были получены в пункте 2.4.6. В случае физической линейности стержня граничные условия имеют вид:

$$\begin{array}{ll} s = 0: & s = L: \\ u(0) = 0; & (N_B \cos \varphi - Q_B \sin \varphi - \theta(N \sin \varphi + Q \cos \varphi))|_{s=L} = 0; \\ v(0) = 0; & v(L) = 0; \\ \theta(0) = 0; & M_B(L) = 0; \end{array} \quad (2.89)$$

где использованы обозначения (2.7) и (2.40).

Величины  $x$ ,  $y$ ,  $\varphi$ ,  $\varepsilon$ ,  $\gamma$ ,  $\psi$ ,  $N$ ,  $Q$ ,  $M$  обозначают характеристики напряженно - деформированного состояния, удовлетворяющие системе уравнений (1.171), (1.180), (1.183), а также граничным условиям. Величинами с нижним индексом «в» обозначаются вариации.

Подставив точное решение (2.44) в граничные условия (2.89) и используя выражения (2.7) и (2.40), граничные условия для рассматриваемой задачи могут быть записаны в виде:

$$\begin{aligned}
 s = 0: & & s = L: \\
 u(0) = 0; & & k_1 u'(L) = 0; \\
 v(0) = 0; & & v(L) = 0; \\
 \theta(0) = 0; & & k_3 \theta'(L) = 0;
 \end{aligned} \tag{2.90}$$

Условия  $u(0) = 0$ ,  $k_1 u'(L) = 0$  соответствуют продольным деформациям и далее могут быть опущены.

Подставляя общее решение системы (2.47) в граничные условия (2.90), получаем систему из четырех уравнений:

$$\begin{cases}
 -C_1 \frac{B}{\lambda} + C_4 = 0; \\
 -C_1 \frac{B}{\lambda} \cos \lambda L + C_2 \frac{B}{\lambda} \sin \lambda L + C_3 \left(1 - \frac{k_2 B}{T}\right) L + C_4 = 0; \\
 C_2 - C_3 \frac{k_2}{T} = 0; \\
 C_1 \lambda \cos \lambda L - C_2 \lambda \sin \lambda L = 0.
 \end{cases} \tag{2.91}$$

$$\begin{cases}
 C_4 = C_1 \frac{B}{\lambda}; \\
 C_3 = C_2 \frac{T}{k_2}; \\
 C_2 \sin \lambda L = C_1 \cos \lambda L.
 \end{cases}$$

Подставив постоянные интегрирования  $C_2$ ,  $C_3$ ,  $C_4$  во второе уравнение системы (2.91), получаем уравнение:

$$-C_1 \frac{B}{\lambda} \cos \lambda L + C_1 \frac{B}{\lambda} \cos \lambda L + C_1 \left(1 - \frac{k_2 B}{T_{кр}}\right) \frac{T_{кр} \cos \lambda L}{k_2 \sin \lambda L} L + C_1 \frac{B}{\lambda} = 0.$$

Окончательно:

$$C_1 \left[ \left( \frac{T_{кр}}{k_2} - B \right) L \cos \lambda L + \frac{B}{\lambda} \sin \lambda L \right] = 0. \tag{2.92}$$

Таким образом, нетривиальное решение уравнений (2.46) существует при:

$$\left( \frac{T_{кр}}{k_2} - B \right) L \cos \lambda L + \frac{B}{\lambda} \sin \lambda L = 0.$$

Или, используя выражения для  $B$  и  $\lambda$ :



$$\begin{aligned} & \left( 1 + T_{кр} \left( \frac{1}{k_2} - \frac{1}{k_1} \right) \right) \sin \left( L \sqrt{\frac{T_{кр}}{k_3} \left( 1 + T_{кр} \left( \frac{1}{k_2} - \frac{1}{k_1} \right) \right)} \right) = \\ & = \left( 1 - \frac{T_{кр}}{k_1} \right) L \sqrt{\frac{T_{кр}}{k_3} \left( 1 + T_{кр} \left( \frac{1}{k_2} - \frac{1}{k_1} \right) \right)} \cos \left( L \sqrt{\frac{T_{кр}}{k_3} \left( 1 + T_{кр} \left( \frac{1}{k_2} - \frac{1}{k_1} \right) \right)} \right), \end{aligned} \quad (2.93)$$

$$\text{где } \lambda = \sqrt{\frac{T_{кр} B}{k_3}}.$$

Таким образом, для шестой задачи устойчивости равновесия стержня с заделкой и шарнирной опорой, представленной на рисунке 2.6, аналитическое решение не может быть получено, а критическая сила определяется численно, как наименьший положительный корень уравнения (2.93).

Определим форму потери устойчивости из системы (2.47), подставив соответствующие выражения для констант из системы (2.91).

$$\begin{cases} v(s) = -C_1 \frac{B}{\lambda} \cos \lambda s + C_1 \frac{\cos \lambda L}{\sin \lambda L} \frac{B}{\lambda} \sin \lambda s + C_1 \frac{\cos \lambda L}{\sin \lambda L} \frac{T}{k_2} \left( 1 - \frac{k_2 B}{T} \right) s + C_1 \frac{B}{\lambda}; \\ \theta(s) = C_1 \sin \lambda s + C_1 \frac{\cos \lambda L}{\sin \lambda L} \cos \lambda s - C_1 \frac{\cos \lambda L}{\sin \lambda L}. \end{cases}$$

Или:

$$\begin{cases} v(s) = C_1 \left( -\frac{B}{\lambda} \cos \lambda s + \frac{\cos \lambda L}{\sin \lambda L} \frac{B}{\lambda} \sin \lambda s + \frac{\cos \lambda L}{\sin \lambda L} \frac{T}{k_2} \left( 1 - \frac{k_2 B}{T} \right) s + \frac{B}{\lambda} \right); \\ \theta(s) = C_1 \left( \sin \lambda s + \frac{\cos \lambda L}{\sin \lambda L} (\cos \lambda s - 1) \right). \end{cases} \quad (2.94)$$

Подставим в систему (2.94) отношение  $\frac{\cos \lambda L}{\sin \lambda L}$ , выраженное из уравнения (2.93).

Окончательно, форма потери устойчивости может быть записана в виде:

$$\begin{cases} v(s) = C_1 \frac{B}{\lambda} \left( 1 - \cos \lambda s + \frac{B}{\lambda L \left( 1 - \frac{T}{k_1} \right)} \sin \lambda s + \frac{T}{k_2 L \left( 1 - \frac{T}{k_1} \right)} \left( 1 - \frac{k_2 B}{T} \right) s \right); \\ \theta(s) = C_1 \left( \sin \lambda s + \frac{B}{\lambda L \left( 1 - \frac{T}{k_1} \right)} (\cos \lambda s - 1) \right). \end{cases} \quad (2.95)$$

Таким образом, для пяти задач устойчивости стержня с разными граничными условиями, сжатого осевой «мертвой» силой, было получено точное решение (квадратное уравнение и значение критической силы). При этом формулы для определения критической силы (2.53),

(2.61), (2.70), (2.79) и (2.87) отличаются лишь значением силы Эйлера  $T_3 = \frac{\pi^2 k_3}{(\mu L)^2}$  ( $\mu$  –

коэффициент, зависящий от условий закрепления стержня), изменяющимся в зависимости от типа граничных условий. Таким образом, можно сделать вывод, что полученная формула для определения значения критической силы является универсальным решением задачи устойчивости стержня, учитывающим жесткости на растяжение – сжатие, сдвиг и изгиб.

Исключение составляет задача устойчивости равновесия стержня с заделкой и шарнирной опорой, для которой аналитического решения не существует, а критическая сила вычисляется путем численного решения уравнения (2.93) и нахождения наименьшего положительного корня.

Универсальная формула, соответствующее значение силы Эйлера, а также форма потери устойчивости для задач 2.9.1 – 2.9.5 приведены в таблице 2.1.

Полученная формула является справедливой в пределах упругих деформаций, когда напряжения не превосходят предела пропорциональности  $\sigma_{\text{пц}}$ , то есть когда гибкость стержня

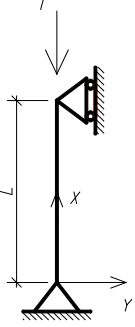
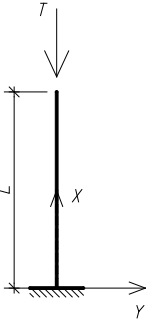
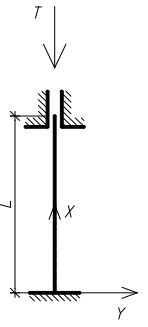
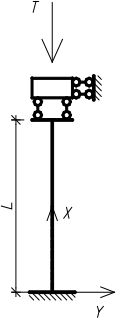
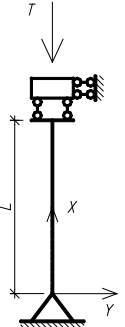
$\lambda_{\text{ст}} = \frac{\mu L}{i}$  больше или равна предельной гибкости:

$$\lambda_{\text{пред}} = \pi \sqrt{\frac{E}{\sigma_{\text{пц}}}},$$

где  $E$  – модуль Юнга,  $i$  – радиус инерции сечения стержня.

Таблица 2.1 - Точное решение задачи устойчивости стержня, сжатого осевой силой, для разных типов граничных условий

Расчетная схема стержня					
Граничные условия s=0	$u(0) = 0$ $v(0) = 0$ $\theta'(0) = 0$	$u(0) = 0$ $v(0) = 0$ $\theta(0) = 0$	$u(0) = 0$ $v(0) = 0$ $\theta(0) = 0$	$u(0) = 0$ $v(0) = 0$ $\theta(0) = 0$	$u(0) = 0$ $v(0) = 0$ $\theta'(0) = 0$
Граничные условия s=L	$u'(L) = 0$ $v(L) = 0$ $\theta'(L) = 0$	$u'(L) = 0$ $\left( k_2 \left[ v' - \theta \cdot \left( 1 - \frac{T}{k_1} \right) \right] - T\theta \right) \Big _{s=L} = 0$ $\theta'(L) = 0$	$u'(L) = 0$ $v(L) = 0$ $\theta(L) = 0$	$u'(L) = 0$ $\left( k_2 \left[ v' - \theta \cdot \left( 1 - \frac{T}{k_1} \right) \right] - T\theta \right) \Big _{s=L} = 0$ $\theta(L) = 0$	$u'(L) = 0$ $\left( k_2 \left[ v' - \theta \cdot \left( 1 - \frac{T}{k_1} \right) \right] - T\theta \right) \Big _{s=L} = 0$ $\theta(L) = 0$
Характ. уравнение	$\sin \lambda L = 0$	$\cos \lambda L = 0$	$\sin \frac{\lambda L}{2} = 0$	$\sin \lambda L = 0$	$\cos \lambda L = 0$

Расчетная схема стержня					
Формула для критической силы	$T_{кр} = \frac{\sqrt{1 + 4T_3 \left( \frac{1}{k_2} - \frac{1}{k_1} \right)} - 1}{2 \left( \frac{1}{k_2} - \frac{1}{k_1} \right)}, \quad T_3 = \frac{\pi^2 k_3}{(\mu L)^2}$				
Коэффициент $\mu$	1	2	1/2	1	2
Форма потери уст-сти	$\begin{cases} v(s) = C \frac{B}{\lambda} \sin \lambda s \\ \theta(s) = C \cos \lambda s \end{cases}$	$\begin{cases} v(s) = C \frac{B}{\lambda} \left( 1 - \cos \frac{\pi}{2L} s \right) \\ \theta(s) = C \sin \frac{\pi}{2} s \end{cases}$	$\begin{cases} v(s) = C \frac{B}{\lambda} \left( 1 - \cos \frac{2\pi}{L} s \right) \\ \theta(s) = C \sin \frac{2\pi}{L} s \end{cases}$	$\begin{cases} v(s) = C \frac{B}{\lambda} \left( 1 - \cos \frac{\pi}{L} s \right) \\ \theta(s) = C \sin \frac{\pi}{L} s \end{cases}$	$\begin{cases} v(s) = C \frac{B}{\lambda} \sin \frac{\pi}{L} s \\ \theta(s) = C \cos \frac{\pi}{L} s \end{cases}$

### 2.9.7 Консольный стержень под действием момента (рисунок 2.7)

Рассмотрим консольный стержень под действием внешнего момента, как показано на рисунке 2.7. Граничные условия (2.16), соответствующие рассматриваемой задаче, были получены в пункте 2.2.7.

Точное решение нелинейной задачи (1.171), (1.180), (1.183) и (2.16) описывается формулами [47]:

$$\begin{aligned} x(s) &= \frac{k_3}{M} \sin \frac{Ms}{k_3}; & y(s) &= \frac{k_3}{M} \left( 1 - \cos \frac{Ms}{k_3} \right); & \varphi(s) &= \frac{Ms}{k_3}; \\ \varepsilon(s) &= 0; & \gamma(s) &= 0; & \psi(s) &= \frac{M}{k_3}; \\ N(s) &= 0; & Q(s) &= 0; & M(s) &= M. \end{aligned} \quad (2.96)$$

Подставив (2.96) в функционал устойчивости (2.37), получим функционал устойчивости для рассматриваемой задачи:

$$\Phi_{\text{ст}}^*(u, v, \theta) = \frac{1}{2} \int_0^L \left[ k_1 \left( u' \cos \frac{Ms}{k_3} + v' \sin \frac{Ms}{k_3} \right)^2 + k_2 \left( v' \cos \frac{Ms}{k_3} - u' \sin \frac{Ms}{k_3} - \theta \right)^2 + k_3 \theta'^2 \right] ds. \quad (2.97)$$

Подставив (2.96) в (2.43), получим уравнения устойчивости:

$$\begin{cases} \left( k_1 \left( u' \cos \frac{Ms}{k_3} + v' \sin \frac{Ms}{k_3} \right) \cos \frac{Ms}{k_3} - k_2 \left( v' \cos \frac{Ms}{k_3} - u' \sin \frac{Ms}{k_3} - \theta \right) \sin \frac{Ms}{k_3} \right)' = 0; \\ \left( k_1 \left( u' \cos \frac{Ms}{k_3} + v' \sin \frac{Ms}{k_3} \right) \sin \frac{Ms}{k_3} + k_2 \left( v' \cos \frac{Ms}{k_3} - u' \sin \frac{Ms}{k_3} - \theta \right) \cos \frac{Ms}{k_3} \right)' = 0; \\ k_3 \theta'' + k_2 \left( v' \cos \frac{Ms}{k_3} - u' \sin \frac{Ms}{k_3} - \theta \right) = 0. \end{cases} \quad (2.98)$$

Нетрудно проверить, что уравнения (2.98) являются уравнениями Эйлера для функционала (2.97).

Граничные условия для рассматриваемой задачи, полученные из внеинтегральных слагаемых первой вариации функционала устойчивости, описаны в пункте 2.4.7. В случае физической линейности стержня, когда смешанные производные  $\frac{\partial^2 W}{\partial \varepsilon \partial \gamma}$ ,  $\frac{\partial^2 W}{\partial \varepsilon \partial \psi}$ ,  $\frac{\partial^2 W}{\partial \gamma \partial \psi}$  равны нулю, а

$N = k_1 \varepsilon$ ,  $Q = k_2 \gamma$ ,  $M = k_3 \psi$ , граничные условия имеют вид:

$s = 0$ :

$$u(0) = 0; \quad v(0) = 0; \quad \theta(0) = 0;$$

$s = L$ :

$$\left( N_B \cos \frac{Ms}{k_3} - Q_B \sin \frac{Ms}{k_3} - \theta \left( N \sin \frac{Ms}{k_3} + Q \cos \frac{Ms}{k_3} \right) \right) \Big|_{s=L} = 0; \quad (2.99)$$

$$\left( N_B \sin \frac{Ms}{k_3} + Q_B \cos \frac{Ms}{k_3} + \theta \left( N \cos \frac{Ms}{k_3} - Q \sin \frac{Ms}{k_3} \right) \right) \Big|_{s=L} = 0;$$

$$M_B(L) = 0,$$

где использованы обозначения (2.7) и (2.40).

Величины  $N$ ,  $Q$ ,  $M$  - решение исходной нелинейной задачи, данное формулой (2.96).

Величинами с нижним индексом «в» обозначаются вариации.

Подставив точное решение (2.96) в граничные условия (2.99) и используя выражения (2.7) и (2.40), граничные условия для рассматриваемой задачи могут быть записаны в виде:

$s = 0$ :

$$u(0) = 0; \quad v(0) = 0; \quad \theta(0) = 0;$$

$s = L$ :

$$\left( k_1 \left( u' \cos \frac{Ms}{k_3} + v' \sin \frac{Ms}{k_3} \right) \cos \frac{Ms}{k_3} - k_2 \left( v' \cos \frac{Ms}{k_3} - u' \sin \frac{Ms}{k_3} - \theta \right) \sin \frac{Ms}{k_3} \right) \Big|_{s=L} = 0; \quad (2.100)$$

$$\left( k_1 \left( u' \cos \frac{Ms}{k_3} + v' \sin \frac{Ms}{k_3} \right) \sin \frac{Ms}{k_3} + k_2 \left( v' \cos \frac{Ms}{k_3} - u' \sin \frac{Ms}{k_3} - \theta \right) \cos \frac{Ms}{k_3} \right) \Big|_{s=L} = 0;$$

$$k_2 \theta'(L) = 0.$$

Для решения задачи устойчивости рассматриваемой задачи проинтегрируем первые два уравнения устойчивости (2.98)

$$\begin{cases} k_1 \left( u' \cos \frac{Ms}{k_3} + v' \sin \frac{Ms}{k_3} \right) \cos \frac{Ms}{k_3} - k_2 \left( v' \cos \frac{Ms}{k_3} - u' \sin \frac{Ms}{k_3} - \theta \right) \sin \frac{Ms}{k_3} = C_1; \\ k_1 \left( u' \cos \frac{Ms}{k_3} + v' \sin \frac{Ms}{k_3} \right) \sin \frac{Ms}{k_3} + k_2 \left( v' \cos \frac{Ms}{k_3} - u' \sin \frac{Ms}{k_3} - \theta \right) \cos \frac{Ms}{k_3} = C_2; \\ k_3 \theta'' + k_2 \left( v' \cos \frac{Ms}{k_3} - u' \sin \frac{Ms}{k_3} - \theta \right) = 0, \end{cases} \quad (2.101)$$

где  $C_1$ ,  $C_2$  – постоянные интегрирования. Из четвертого и пятого граничных условий (2.100) вытекает равенство нулю постоянных интегрирования  $C_1$ ,  $C_2$ .

Умножим первое уравнение системы (2.101) на  $\cos\varphi$  и сложим со вторым уравнением системы, умноженным на  $\sin\varphi$ , а также умножим первое уравнение системы (2.101) на  $(-\sin\varphi)$  и сложим со вторым уравнением системы, умноженным на  $\cos\varphi$ . Таким образом, уравнения устойчивости могут быть записаны в виде:

$$\begin{cases} k_1 \left( u' \cos \frac{Ms}{k_3} + v' \sin \frac{Ms}{k_3} \right) = 0; \\ k_2 \left( v' \cos \frac{Ms}{k_3} - u' \sin \frac{Ms}{k_3} - \theta \right) = 0; \\ k_3 \theta'' + k_2 \left( v' \cos \frac{Ms}{k_3} - u' \sin \frac{Ms}{k_3} - \theta \right) = 0. \end{cases} \quad (2.102)$$

Поскольку, согласно второму уравнению системы (2.102),  $k_2 \left( v' \cos \frac{Ms}{k_3} - u' \sin \frac{Ms}{k_3} - \theta \right) = 0$ ,

третье уравнение устойчивости для функции  $\theta(s)$  может быть записано в виде:

$$k_3 \theta'' = 0. \quad (2.103)$$

Проинтегрируем полученное уравнение два раза:

$$k_3 \theta' + C_3 = 0. \quad (2.104)$$

$$k_3 \theta + C_3 s + C_4 = 0.$$

Согласно третьему и шестому граничному условию (2.100), окончательно получим  $C_3 = C_4 = 0$ .

Получим из уравнений устойчивости (2.102) выражения для функций  $u$  и  $v$ , умножив первые два уравнения устойчивости на  $\cos\varphi$  и  $(-\sin\varphi)$ , а затем на  $\sin\varphi$  и  $\cos\varphi$ , соответственно, сложив между собой и проинтегрировав. Таким образом, выражения примут вид:

$$\begin{cases} u + C_5 = 0; \\ v + C_6 = 0. \end{cases} \quad (2.105)$$

Подставив (2.105) в граничные условия (2.100), получаем, что постоянные интегрирования  $C_5 = C_6 = 0$ .

Таким образом, система (2.46) имеет решение только, когда постоянные интегрирования  $C_1 - C_6$  равны нулю. Следовательно, нетривиального решения уравнений (2.46) не существует, то есть консольный стержень под действием внешнего момента, как показано на рисунке 2.7, (вне зависимости от величины заданного момента) устойчивости не теряет.

## 2.10 Пример решения задачи устойчивости для физически нелинейного стержня статическим методом

Рассмотрим классическую задачу Эйлера - шарнирно закрепленный физически нелинейный стержень, сжимаемый «мертвой» осевой силой  $T$ , как показано на рисунке 2.1. Исходная равновесная конфигурация - прямолинейная. В качестве модели физической нелинейности, воспользуемся моделью, рассмотренной в параграфе 1.7. Подробное описание и полученные формулы приведены в первой главе. Граничные условия (2.10), соответствующие рассматриваемой задаче, были получены в пункте 2.2.1.

Точное решение нелинейной задачи (1.171), (1.180), (1.184) и (2.10) описывается формулами:

$$y = 0; \quad \varphi = 0; \quad \varepsilon = x' - 1; \quad \gamma = 0; \quad \psi = 0;$$

$$N = -T; \quad Q = 0; \quad M = 0. \quad (2.106)$$

$$x' = \varepsilon + 1.$$

Подставив (2.106) в функционал устойчивости (2.17), получим функционал устойчивости для рассматриваемой задачи:

$$\begin{aligned} \Phi_{ст}^*(u, v, \theta) = & \frac{1}{2} \int_0^L \left[ \frac{\partial^2 W}{\partial \varepsilon^2} u'^2 + 2 \frac{\partial^2 W}{\partial \varepsilon \partial \gamma} u'(v' - x'\theta) + 2 \frac{\partial^2 W}{\partial \varepsilon \partial \psi} u'\theta + \frac{\partial W}{\partial \varepsilon} (2v'\theta - x'\theta^2) + \right. \\ & \left. + \frac{\partial^2 W}{\partial \gamma^2} (v' - x'\theta)^2 + 2 \frac{\partial^2 W}{\partial \gamma \partial \psi} (v' - x'\theta)\theta - 2 \frac{\partial W}{\partial \gamma} u'\theta + \frac{\partial^2 W}{\partial \psi^2} \theta^2 \right] ds, \end{aligned} \quad (2.107)$$

где  $W(\varepsilon, \gamma, \psi)$  – энергия деформации стержня для рассматриваемой модели физической нелинейности. Выражение для  $W$  (1.124) было получено в параграфе (1.7).

Таким образом, используя точное решение (2.106):

$$\frac{\partial W}{\partial \varepsilon} = N = \left( E\varepsilon^* + E_1(\varepsilon^*)^2 + E_2(\varepsilon^*)^3 \right) A;$$

$$\frac{\partial^2 W}{\partial \varepsilon^2} = \frac{\partial N}{\partial \varepsilon} = \left( E + 2E_1\varepsilon^* + 3E_2(\varepsilon^*)^2 \right) A;$$

$$\frac{\partial W}{\partial \gamma} = Q = 0;$$

$$\frac{\partial^2 W}{\partial \gamma^2} = \frac{\partial Q}{\partial \gamma} = GA; \quad (2.108)$$

$$\frac{\partial W}{\partial \psi} = M = 0;$$

$$\frac{\partial^2 W}{\partial \psi^2} = \frac{\partial M}{\partial \psi} = \left( E + 2E_1\varepsilon^* + 3E_2(\varepsilon^*)^2 \right) J_z;$$



$$\frac{\partial^2 W}{\partial \varepsilon \partial \gamma} = 0; \quad \frac{\partial^2 W}{\partial \gamma \partial \psi} = 0; \quad \frac{\partial^2 W}{\partial \varepsilon \partial \psi} = 0.$$

Подставив (2.106) и выражение для  $N$  из (2.108) в выражение для  $x$  (L) из граничных условий (2.10), получим следующее кубическое уравнение относительно  $\varepsilon$ :

$$\varepsilon + \frac{E_1}{E} \varepsilon^2 + \frac{E_2}{E} \varepsilon^3 = \frac{-T}{EA}. \quad (2.109)$$

Как было показано в параграфе 1.7, уравнение (2.109) имеет единственное решение на всем участке от  $\varepsilon_1$  до  $\varepsilon_2$ , когда правая часть (2.109) принадлежит интервалу от  $\sigma_1$  до  $\sigma_2$ , согласно рисунку 1.9, где  $\sigma_1$  – разрушающее напряжение при сжатии,  $\sigma_2$  – разрушающее напряжение при растяжении. Единственный положительный корень уравнения (2.109) далее обозначен как  $\varepsilon^*$  ( $\varepsilon_1 < \varepsilon^* < \varepsilon_2$ ). Таким образом,  $x' = \varepsilon^* + 1$ . Для решения задачи устойчивости достаточно знать  $x'$ . Но, если необходимо определить непосредственно  $x$ , достаточно проинтегрировать выражение для производной  $x$ .

Подставив полученные выражения (2.108) в (2.107), получим функционал устойчивости для рассматриваемой задачи:

$$\begin{aligned} \Phi_{\text{ст}}^*(u, v, \theta) = & \frac{1}{2} \int_0^L \left[ \left( E + 2E_1 \varepsilon^* + 3E_2 (\varepsilon^*)^2 \right) A u'^2 - 2T v' \theta + GA (v' - (\varepsilon^* + 1) \theta)^2 + \right. \\ & \left. + \left( E + 2E_1 \varepsilon^* + 3E_2 (\varepsilon^*)^2 \right) J_z \theta'^2 + T (\varepsilon^* + 1) \theta^2 \right] ds, \end{aligned}$$

Компоненты функционала, содержащие  $u$ , описывают продольные деформации, не связанные с нагрузкой  $T$ , и могут быть опущены при исследовании устойчивости. Окончательно, функционал устойчивости примет вид:

$$\Phi_{\text{ст}}(v, \theta) = \frac{1}{2} \int_0^L \left[ GA (v' - (\varepsilon^* + 1) \theta)^2 + \left( E + 2E_1 \varepsilon^* + 3E_2 (\varepsilon^*)^2 \right) J_z \theta'^2 + T (\varepsilon^* + 1) \theta^2 - 2T v' \theta \right] ds. \quad (2.110)$$

Подставив (2.106) в (2.22), получим уравнения устойчивости:

$$\begin{cases} \left( E + 2E_1 \varepsilon^* + 3E_2 (\varepsilon^*)^2 \right) A u'' = 0; \\ GA (v' - (\varepsilon^* + 1) \theta)' - \theta' T = 0; \\ \left( E + 2E_1 \varepsilon^* + 3E_2 (\varepsilon^*)^2 \right) J \theta'' + (v' - (\varepsilon^* + 1) \theta) (GA (\varepsilon^* + 1) + T) = 0. \end{cases}$$

Первое уравнение системы, содержащее  $u$ , описывает продольные деформации, не связанные с нагрузкой  $T$ , и может быть опущено при исследовании устойчивости. Окончательно, система уравнений примет вид:

$$\begin{cases} GA(v' - (\varepsilon^* + 1)\theta)' - \theta' T = 0; \\ \left( (E + 2E_1\varepsilon^* + 3E_2(\varepsilon^*)^2) J \theta'' + (v' - (\varepsilon^* + 1)\theta)(GA(\varepsilon^* + 1) + T) \right) = 0. \end{cases} \quad (2.111)$$

Нетрудно проверить, что уравнения (2.111) являются уравнениями Эйлера для функционала (2.110).

Граничные условия для рассматриваемой задачи устойчивости (2.24), полученные из внеинтегральных слагаемых первой вариации функционала устойчивости, описаны в пункте 2.4.1.

Величины  $x$ ,  $y$ ,  $\varphi$ ,  $\varepsilon$ ,  $\gamma$ ,  $\psi$ ,  $N$ ,  $Q$ ,  $M$  обозначают характеристики напряженно – деформированного состояния, удовлетворяющие системе уравнений (1.171), (1.180), (1.184), а также граничным условиям. Величинами с нижним индексом «в» обозначаются вариации.

Подставив точное решение (2.106) в граничные условия (2.24) и используя выражения (2.7), граничные условия для рассматриваемой задачи могут быть записаны в виде:

$$s = 0:$$

$$u(0) = 0; \quad v(0) = 0; \quad \left( (E + 2E_1\varepsilon^* + 3E_2(\varepsilon^*)^2) J \theta' \right) \Big|_{s=0} = 0; \quad (2.112)$$

$$s = L:$$

$$\left( (E + 2E_1\varepsilon^* + 3E_2(\varepsilon^*)^2) A u' \right) \Big|_{s=L} = 0; \quad v(L) = 0; \quad \left( (E + 2E_1\varepsilon^* + 3E_2(\varepsilon^*)^2) J \theta' \right) \Big|_{s=L} = 0.$$

Условия  $u(0) = 0$ ,  $\left( (E + 2E_1\varepsilon^* + 3E_2(\varepsilon^*)^2) A u' \right) \Big|_{s=L} = 0$  соответствуют продольным деформациям и далее могут быть опущены. Окончательно граничные условия (2.112) примут вид:

$$s = 0:$$

$$v(0) = 0; \quad \left( (E + 2E_1\varepsilon^* + 3E_2(\varepsilon^*)^2) J \theta' \right) \Big|_{s=0} = 0; \quad (2.113)$$

$$s = L:$$

$$v(L) = 0; \quad \left( (E + 2E_1\varepsilon^* + 3E_2(\varepsilon^*)^2) J \theta' \right) \Big|_{s=L} = 0.$$

Выразим из второго уравнения системы (2.111)  $(v' - x' \theta)$ :

$$(v' - (\varepsilon^* + 1)\theta) = - \frac{(E + 2E_1\varepsilon^* + 3E_2(\varepsilon^*)^2) J \theta''}{GA(\varepsilon^* + 1) + T}.$$

После подстановки во второе уравнение, получим:

$$\theta''' + \lambda^2 \theta' = 0, \quad (2.114)$$

$$\text{где } \lambda^2 = \frac{T(GA(\varepsilon^* + 1) + T)}{GAJ(E + 2E_1\varepsilon^* + 3E_2(\varepsilon^*)^2)}. \quad (2.115)$$

Решение уравнения (2.114) имеет вид:

$$\theta(s) = c_1 \sin \lambda s + c_2 \cos \lambda s + c_3.$$

Подставив данное решение в уравнение, полученное из второго уравнения системы (2.111), и проинтегрировав, получим:

$$v(s) = \frac{(E + 2E_1\varepsilon^* + 3E_2(\varepsilon^*)^2)J(-c_1\lambda \cos \lambda s + c_2\lambda \sin \lambda s)}{GA(\varepsilon^* + 1) + T} +$$

$$+ (\varepsilon^* + 1) \left( -\frac{c_1}{\lambda} \cos \lambda s + \frac{c_2}{\lambda} \sin \lambda s + c_3 s \right) + c_4.$$

Определим произвольные постоянные, используя граничные условия (2.113):

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{c_1\lambda(E + 2E_1\varepsilon^* + 3E_2(\varepsilon^*)^2)J}{GA(\varepsilon^* + 1) + T} + (\varepsilon^* + 1)\frac{c_1}{\lambda} - c_4 = 0; \\ c_1\lambda(E + 2E_1\varepsilon^* + 3E_2(\varepsilon^*)^2)J = 0; \\ \frac{(E + 2E_1\varepsilon^* + 3E_2(\varepsilon^*)^2)J(-c_1\lambda \cos \lambda L + c_2\lambda \sin \lambda L)}{GA(\varepsilon^* + 1) + T} + \\ + (\varepsilon^* + 1) \left( -\frac{c_1}{\lambda} \cos \lambda L + \frac{c_2}{\lambda} \sin \lambda L + c_3 L \right) + c_4 = 0. \\ (c_1\lambda \cos \lambda L - c_2\lambda \sin \lambda L)(E + 2E_1\varepsilon^* + 3E_2(\varepsilon^*)^2)J = 0. \end{array} \right.$$

Отсюда:

$$\left\{ \begin{array}{l} c_1 = 0; \\ c_2\lambda(E + 2E_1\varepsilon^* + 3E_2(\varepsilon^*)^2)J \sin \lambda L = 0; \\ c_4 = 0; \\ c_3 = 0. \end{array} \right.$$

Таким образом, нетривиальное решение системы уравнений (2.111) существует при  $\sin \lambda L = 0$ , то есть  $\lambda L = \pi n$ , где  $n=1,2,3\dots$

Подставив выражение для  $\lambda$ , получаем:

$$\sqrt{\frac{T(GA(\varepsilon^* + 1) + T)}{GAJ(E + 2E_1\varepsilon^* + 3E_2(\varepsilon^*)^2)}} L = \pi n.$$

Возведем в квадрат обе части уравнения и сгруппируем слагаемые относительно силы  $T$ :

$$\frac{T^2}{GA} + T(\varepsilon^* + 1) - \frac{\pi^2 n^2 J(E + 2E_1\varepsilon^* + 3E_2(\varepsilon^*)^2)}{L^2} = 0,$$

где, как было сказано ранее,  $\varepsilon^*$  находится из кубического уравнения  $\varepsilon + \frac{E_1}{E}\varepsilon^2 + \frac{E_2}{E}\varepsilon^3 = \frac{-T}{EA}$ .

Таким образом, критическое значение силы  $T$  находится из системы нелинейных алгебраических уравнений:

$$\begin{cases} \frac{T^2}{GA} + T(\varepsilon + 1) - \frac{\pi^2 n^2 J (E + 2E_1 \varepsilon + 3E_2 \varepsilon^2)}{L^2} = 0; \\ \varepsilon + \frac{E_1}{E} \varepsilon^2 + \frac{E_2}{E} \varepsilon^3 = \frac{-T}{EA}. \end{cases} \quad (2.144)$$

Для разных значений  $n$ , решая систему (2.144), находим минимальный положительный корень  $T_n$ . Из полученных корней  $T_n$  выбираем наименьшее значение, которое будет являться значением критической силы  $T_{кр}$  для рассматриваемой задачи.

Несложно показать, что в случае, когда материал, из которого выполнен стержень, является физически линейным,  $E_1$ ,  $E_2$  и  $G_2$  становятся равными нулю, а значение  $\varepsilon^*$ , являющееся корнем уравнения (2.134) становится равным  $\left(\frac{-T}{EA}\right)$ .

Таким образом, система уравнений (2.144), из которой определяется критическое (наименьшее положительное) значение силы  $T$ , для плоской задачи геометрически нелинейного деформирования физически линейного стержня можно записать в виде:

$$T^2 \left( \frac{1}{GA} - \frac{1}{EA} \right) + T - T_3 = 0,$$

где  $T_3 = \frac{\pi^2 k_3}{L^2}$  – сила Эйлера для шарнирно опертого стержня [47].

Или, используя обозначения (1.109):

$$T^2 \left( \frac{1}{k_2} - \frac{1}{k_1} \right) + T - T_3 = 0. \quad (2.145)$$

Уравнение (2.117) совпадает с уравнением (2.52) для задачи геометрически нелинейного деформирования физически линейного упругого шарнирно опертого стержня.

## Выводы по главе 2

1. Для физически нелинейных упругих стержней приведена постановка задачи в виде системы дифференциальных уравнений и вариационная постановка в виде задачи о поиске точки стационарности функционала типа Лагранжа. Приведено выражение функционала Лагранжа вариационной постановки плоских статических задач геометрически нелинейного деформирования физически нелинейных упругих стержней.

2. Для гладких решений доказана эквивалентность вариационной и дифференциальной постановок задачи. Выводятся уравнения равновесия как уравнения Эйлера вариационной задачи поиска точки стационарности функционала типа Лагранжа.

3. Приводится выражение для второй вариации функционала Лагранжа, из которой получены точные уравнения задачи устойчивости для любого типа физической нелинейности стержня.

4. Аналогичным образом для физически линейных упругих стержней приводятся постановка задачи в виде системы дифференциальных уравнений и вариационная постановка в виде задачи о поиске точки стационарности функционала типа Лагранжа. Приводится выражение функционала Лагранжа вариационной постановки плоских статических задач геометрически нелинейного деформирования физически линейных упругих стержней. Для гладких решений доказывается эквивалентность вариационной и дифференциальной постановок задачи. Выводятся уравнения равновесия как уравнения Эйлера вариационной задачи поиска точки стационарности функционала типа Лагранжа. Приводится выражение для второй вариации функционала Лагранжа, из которой получены точные уравнения задачи устойчивости для физически линейного стержня.

5. В задаче об устойчивости стержня, сжатого осевой силой, получено универсальное решение с учетом жесткостей на изгиб, сдвиг и растяжение – сжатие, дающее точное значение критической силы для основных типов граничных условий. Приводится разрешающее трансцендентное уравнение задачи устойчивости стержня, сжимаемого «мертвой» осевой силой, с заделкой с одной стороны и шарнирной опорой с другой.

6. Показывается решение классической задачи Эйлера для нелинейного стержня, сжатого осевой «мертвой» силой, на примере физической нелинейности, приведенной в параграфе 1.7. Для рассматриваемой задачи получена система нелинейных алгебраических уравнений, из которых находится значение критической силы с учетом жесткостей на изгиб, сдвиг и растяжение – сжатие, дающее точное значение критической силы.

7. Основные результаты, полученные в данной главе, были опубликованы в статьях [33, 35].

### 3 ЗАДАЧИ УСТОЙЧИВОСТИ ПЛОСКИХ УПРУГИХ СТЕРЖНЕЙ С УЧЕТОМ ЖЕСТКОСТЕЙ НА РАСТЯЖЕНИЕ – СЖАТИЕ, СДВИГ И ИЗГИБ. ДИНАМИЧЕСКИЙ ПОДХОД

#### 3.1 Вариационная формулировка динамической задачи геометрически нелинейного деформирования физически линейного стержня

Как и в статическом методе исследования устойчивости равновесия рассмотрим первоначально прямолинейный стержень. Выберем в качестве отсчетной ненапряженной конфигурации (ОК) этого стержня его положение вдоль оси  $X$  правой декартовой системы координат. Деформирование стержня происходит в плоскости  $XU$ . В ОК положение каждой точки стержня задается материальной координатой  $s$ , а стержень занимает отрезок  $0 \leq s \leq L$ ,  $L$  – длина недеформированного стержня. В плоской задаче геометрически нелинейного деформирования стержня функции  $x(s, t)$ ,  $y(s, t)$  и  $\varphi(s, t)$  представляют собой три степени свободы, где  $\varphi(s, t)$  – угол поворота вокруг оси  $Z$ ;  $t$  – время. На стержень действует «мертвая» осевая сжимающая сила  $T$ , параллельная оси  $X$  и приложенная на правом конце стержня, и распределенные нагрузки.

Постановка геометрически нелинейной задачи для физически линейного стержня состоит из трех групп уравнений: уравнений движения, физических уравнений и геометрических уравнений.

Уравнения движения (1.151) для пространственной задачи, полученные в параграфе 1.5, после подстановки выражений (1.162), (1.165), (1.167) и (1.169) для плоской задачи могут быть записаны в виде:

$$\begin{cases} \rho \ddot{x} - (N \cos \varphi - Q \sin \varphi)' - q_x = 0; \\ \rho \ddot{y} - (N \sin \varphi + Q \cos \varphi)' - q_y = 0; \\ \frac{\rho}{A} J_z \ddot{\varphi} - M' - x'(N \sin \varphi + Q \cos \varphi) - y'(Q \sin \varphi - N \cos \varphi) - m = 0, \end{cases} \quad (3.1)$$

где  $\rho$  – линейная плотность;  $A$  – площадь поперечного сечения;  $J_z$  – момент инерции сечения относительно оси  $Z$ ;  $q_x$ ,  $q_y$  и  $m$  – распределенные силовые и моментная нагрузки, соответственно;  $N$  – продольная сила,  $Q$  – перерезывающая сила,  $M$  – изгибающий момент.

Величинами с точкой сверху обозначены частные производные по времени  $\dot{x} = \frac{\partial x}{\partial t}$ ;  $(\dots)'$  –

обозначает частную производную по координате  $s$ .

В случае, когда стержень находится в покое относительно используемой системы координат, уравнения движения (3.1) преобразуются в статические уравнения равновесия (2.1).

Геометрические уравнения (1.180) и физические уравнения (1.183) были получены в параграфах 1.5, 1.6.

Согласно [16, 49], функционал Гамильтона  $H$  может быть записан в виде:

$$H(x, y, \varphi) = \int_{t_1}^{t_2} [K(x, y, \varphi) - \Pi(x, y, \varphi)] dt, \quad (3.2)$$

где  $K$  – кинетическая энергия, а  $\Pi$  – функционал Лагранжа.

$$H(x, y, \varphi) = \int_{t_1}^{t_2} \left[ \int_0^L \left[ \frac{1}{2} \left( \rho \dot{x}^2 + \rho \dot{y}^2 + \frac{\rho}{A} J_z \dot{\varphi}^2 \right) - \left( \frac{1}{2} (k_1 \varepsilon^2 + k_2 \gamma^2 + k_3 \psi^2) - q_x(x-s) - q_y y - m\varphi \right) \right] ds - T(x(L) - L) \right] dt. \quad (3.3)$$

Докажем, что вариационная задача поиска точки стационарности функционала Гамильтона  $H \rightarrow \text{СТАЦ}$  на гладких решениях задаче равносильна задаче (3.1), (1.180) и (1.183).

Вычислим первую вариацию функционала Гамильтона, определяя вариацию каждого слагаемого функционала. Для этого сначала дадим приращения функциям  $x(s, t)$ ,  $y(s, t)$ ,  $\varphi(s, t)$ :

$$\begin{cases} x \rightarrow x + \alpha \delta x; \\ y \rightarrow y + \alpha \delta y; \\ \varphi \rightarrow \varphi + \alpha \delta \varphi, \end{cases} \quad (3.4)$$

где  $\delta x(s, t)$ ,  $\delta y(s, t)$ ,  $\delta \varphi(s, t)$  – вариации координат  $x$ ,  $y$  и угла поворота  $\varphi$  соответственно;  $\alpha$  – числовой параметр. Так как проварьированные функции должны удовлетворять главным граничным условиям при всех  $t$ , то вариации должны удовлетворять нулевым главным граничным условиям. Как обычно при использовании функционала Гамильтона полагаем, что вариации при всех  $s$  равны нулю в моменты времени  $t_1$  и  $t_2$ :

$$\begin{cases} \delta x(s, t_1) = \delta x(s, t_2) = 0; \\ \delta y(s, t_1) = \delta y(s, t_2) = 0; \\ \delta \varphi(s, t_1) = \delta \varphi(s, t_2) = 0. \end{cases} \quad (3.5)$$

Вычисляем производную по  $\alpha$ , далее полагая  $\alpha = 0$ . Определим вариации инерционных составляющих функционала Гамильтона. Вычисление вариаций статических слагаемых, входящих в функционал Лагранжа, подробно описано в пункте 2.6, а вариаций распределенных нагрузок – в пункте 2.1.

$$\frac{1}{2}\rho\dot{x}^2 \rightarrow \frac{d}{d\alpha} \left( \frac{1}{2}\rho \left( \dot{x} + \alpha\delta\dot{x} \right)^2 \right) \Big|_{\alpha=0} = \frac{1}{2} \cdot 2\rho \left( \dot{x} + \alpha\delta\dot{x} \right) \delta\dot{x} \Big|_{\alpha=0} = \rho\dot{x}\delta\dot{x};$$

$$\frac{1}{2}\rho\dot{y}^2 \rightarrow \frac{d}{d\alpha} \left( \frac{1}{2}\rho \left( \dot{y} + \alpha\delta\dot{y} \right)^2 \right) \Big|_{\alpha=0} = \frac{1}{2} \cdot 2\rho \left( \dot{y} + \alpha\delta\dot{y} \right) \delta\dot{y} \Big|_{\alpha=0} = \rho\dot{y}\delta\dot{y};$$

$$\frac{1}{2} \frac{\rho}{A} J_z \dot{\varphi}^2 \rightarrow \frac{d}{d\alpha} \left( \frac{1}{2} \frac{\rho}{A} J_z \left( \dot{\varphi} + \alpha\delta\dot{\varphi} \right)^2 \right) \Big|_{\alpha=0} = \frac{1}{2} \cdot 2 \frac{\rho}{A} J_z \left( \dot{\varphi} + \alpha\delta\dot{\varphi} \right) \delta\dot{\varphi} \Big|_{\alpha=0} = \frac{\rho}{A} J_z \dot{\varphi} \delta\dot{\varphi}.$$

Таким образом, первая вариация функционала Гамильтона примет вид:

$$\delta H(x, y, \varphi, \delta x, \delta y, \delta \varphi) = \int_{t_1}^{t_2} \left[ \int_{L_0}^L \left[ \rho\dot{x}\delta\dot{x} + \rho\dot{y}\delta\dot{y} + \frac{\rho}{A} J_z \dot{\varphi} \delta\dot{\varphi} - k_1 \varepsilon \delta\varepsilon - k_2 \gamma \delta\gamma - k_3 \psi \delta\psi + \right. \right. \\ \left. \left. + q_x \delta x + q_y \delta y + m \delta \varphi \right] ds - T \delta x(L) \right] dt. \quad (3.6)$$

Используя выражения (2.5), (2.6) и (2.7), первую вариацию функционала (3.6) можно записать в виде:

$$\delta H(x, y, \varphi, u, v, \theta) = \int_{t_1}^{t_2} \left[ \int_{L_0}^L \left[ \rho\dot{x}\dot{u} + \rho\dot{y}\dot{v} + \frac{\rho}{A} J_z \dot{\varphi}\dot{\theta} - k_1 \varepsilon \cdot (u' \cos \varphi - x' \theta \sin \varphi + y' \theta \cos \varphi + \right. \right. \\ \left. \left. + v' \sin \varphi) - k_2 \gamma \cdot (-u' \sin \varphi - x' \theta \cos \varphi - y' \theta \sin \varphi + v' \cos \varphi) - k_3 \psi \cdot \theta' + q_x u + q_y v + m \theta \right] ds - \right. \\ \left. - Tu(L) \right] dt. \quad (3.7)$$

Используя физические уравнения (1.183), первую вариацию функционала Гамильтона можно записать в виде:

$$\delta H(x, y, \varphi, u, v, \theta) = \int_{t_1}^{t_2} \left[ \int_{L_0}^L \left[ \rho\dot{x}\dot{u} + \rho\dot{y}\dot{v} + \frac{\rho}{A} J_z \dot{\varphi}\dot{\theta} - N \cdot (u' \cos \varphi - x' \theta \sin \varphi + y' \theta \cos \varphi + v' \sin \varphi) - \right. \right. \\ \left. \left. - Q \cdot (-u' \sin \varphi - x' \theta \cos \varphi - y' \theta \sin \varphi + v' \cos \varphi) - M \theta' + q_x u + q_y v + m \theta \right] ds - Tu(L) \right] dt.$$

Перегруппировывая слагаемые относительно  $u$ ,  $v$ ,  $\theta$ , первую вариацию функционала Гамильтона можно записать в виде:

$$\delta H(x, y, \varphi, u, v, \theta) = \int_{t_1}^{t_2} \left[ \int_{L_0}^L \left[ \rho\dot{x}\dot{u} - u'(N \cos \varphi - Q \sin \varphi) + q_x u + \rho\dot{y}\dot{v} - v'(N \sin \varphi + Q \cos \varphi) + \right. \right. \\ \left. \left. + q_y v + \frac{\rho}{A} J_z \dot{\varphi}\dot{\theta} + \theta(x'(N \sin \varphi + Q \cos \varphi) - y'(N \cos \varphi - Q \sin \varphi)) - M \theta' + m \theta \right] ds - Tu(L) \right] dt.$$

Интегрируем по частям, чтобы избавиться от производных от вариаций:



$$\int_{t_1 0}^{t_2 L} \rho \dot{x} \dot{u} ds dt = - \int_{t_1 0}^{t_2 L} \rho \ddot{x} \dot{u} ds dt + \int_0^L \rho \dot{x} \dot{u} ds \Big|_{t_1}^{t_2}; \quad \int_{t_1 0}^{t_2 L} \rho \dot{y} \dot{v} ds dt = - \int_{t_1 0}^{t_2 L} \rho \ddot{y} \dot{v} ds dt + \int_0^L \rho \dot{y} \dot{v} ds \Big|_{t_1}^{t_2};$$

$$\int_{t_1 0}^{t_2 L} \frac{\rho}{A} J_z \dot{\varphi} \dot{\theta} ds dt = - \int_{t_1 0}^{t_2 L} \frac{\rho}{A} J_z \ddot{\varphi} \dot{\theta} ds dt + \int_0^L \frac{\rho}{A} J_z \dot{\varphi} \dot{\theta} ds \Big|_{t_1}^{t_2};$$

$$\int_{t_1 0}^{t_2 L} u'(N \cos \varphi - Q \sin \varphi) ds dt = - \int_{t_1 0}^{t_2 L} u(N \cos \varphi - Q \sin \varphi)' ds dt + \int_{t_1}^{t_2} u(N \cos \varphi - Q \sin \varphi) dt \Big|_0^L;$$

$$\int_{t_1 0}^{t_2 L} v'(N \sin \varphi + Q \cos \varphi) ds dt = - \int_{t_1 0}^{t_2 L} v(N \sin \varphi + Q \cos \varphi)' ds dt + \int_{t_1}^{t_2} v(N \sin \varphi + Q \cos \varphi) dt \Big|_0^L;$$

$$\int_{t_1 0}^{t_2 L} \theta' M ds dt = - \int_{t_1 0}^{t_2 L} \theta M' ds dt + \int_{t_1}^{t_2} \theta M dt \Big|_0^L.$$

Исходя из того, что  $u, v, \theta$  удовлетворяют условию (3.5),

$$\int_0^L \rho \dot{x} \dot{u} ds \Big|_{t_1}^{t_2} = \int_0^L \rho \dot{y} \dot{v} ds \Big|_{t_1}^{t_2} = \int_0^L \frac{\rho}{A} J_z \dot{\varphi} \dot{\theta} ds \Big|_{t_1}^{t_2} = 0.$$

Таким образом, после интегрирования по частям первая вариация функционала Гамильтона принимает вид:

$$\begin{aligned} \delta H(x, y, \varphi, u, v, \theta) = & - \int_{t_1 0}^{t_2 L} \left[ \rho \ddot{x} \dot{u} - u(N \cos \varphi - Q \sin \varphi)' - q_x \dot{u} + \rho \ddot{y} \dot{v} - v(N \sin \varphi + Q \cos \varphi)' - \right. \\ & \left. - q_y \dot{v} + \frac{\rho}{A} J_z \ddot{\varphi} \dot{\theta} - \theta(x'(N \sin \varphi + Q \cos \varphi) - y'(N \cos \varphi - Q \sin \varphi) + M') - m\theta \right] ds + Tu(L) \Big] dt - \\ & - \int_{t_1}^{t_2} (u(N \cos \varphi - Q \sin \varphi) + v(N \sin \varphi + Q \cos \varphi) + \theta M) dt \Big|_0^L. \end{aligned}$$

Перегруппировывая слагаемые, первую вариацию функционала Гамильтона можно записать в виде:

$$\begin{aligned} \delta H(x, y, \varphi, u, v, \theta) = & - \int_{t_1 0}^{t_2 L} \left[ u \left( \rho \ddot{x} - (N \cos \varphi - Q \sin \varphi)' - q_x \right) + v \left( \rho \ddot{y} - (N \sin \varphi + Q \cos \varphi)' - \right. \right. \\ & \left. \left. - q_y \right) + \theta \left( \frac{\rho}{A} J_z \ddot{\varphi} - x'(N \sin \varphi + Q \cos \varphi) - y'(Q \sin \varphi - N \cos \varphi) - M' - m \right) \right] ds dt - \\ & - \int_{t_1}^{t_2} (u(N \cos \varphi - Q \sin \varphi + T) + v(N \sin \varphi + Q \cos \varphi) + \theta M) dt \Big|_{s=L} + \\ & + \int_{t_1}^{t_2} (u(N \cos \varphi - Q \sin \varphi) + v(N \sin \varphi + Q \cos \varphi) + \theta M) dt \Big|_{s=0}. \end{aligned} \quad (3.8)$$

Решением вариационной задачи являются функции  $x$ ,  $y$  и  $\varphi$ , такие, что  $\delta H = 0$  при любых вариациях  $u$ ,  $v$ ,  $\theta$ , удовлетворяющих главным граничным условиям исходной задачи. Из выражения (3.8) следует, что уравнениями Эйлера вариационной задачи  $H \rightarrow \text{СТАЦ}$  являются уравнения движения (3.1). Таким образом, доказана требуемая равносильность.

### 3.2 Вариационная формулировка динамической задачи устойчивости физически линейного стержня

Уравнения устойчивости являются уравнениями Эйлера вариационной задачи  $\Phi_d \rightarrow \text{СТАЦ}$  [4, 16, 27], где  $\Phi_d$  – вторая вариация функционала Гамильтона.

Для вычисления второй вариации функционала Гамильтона найдем вариацию каждого слагаемого формулы (3.7). Для этого даем приращения функциям  $x$ ,  $y$ ,  $\varphi$  согласно формулам (2.5), (2.6), (2.7) и (3.4) вычисляем производную по  $\alpha$  и полагаем  $\alpha=0$ . Вычисление вариаций статических слагаемых, подробно описано в пункте 2.7, а вариаций распределенных нагрузок – в пункте 2.3. Определим вариации инерционных составляющих:

$$\rho \dot{x} \dot{u} \rightarrow \frac{d}{d\alpha} \left( \rho \left( \dot{x} + \alpha \dot{u} \right) \dot{u} \right) \Big|_{\alpha=0} = \rho \dot{u} \dot{u} \Big|_{\alpha=0} = \rho \dot{u}^2; \quad \rho \dot{y} \dot{v} \rightarrow \frac{d}{d\alpha} \left( \rho \left( \dot{y} + \alpha \dot{v} \right) \dot{v} \right) \Big|_{\alpha=0} = \rho \dot{v} \dot{v} \Big|_{\alpha=0} = \rho \dot{v}^2;$$

$$\frac{\rho}{A} J_z \dot{\varphi} \dot{\theta} \rightarrow \frac{d}{d\alpha} \left( \frac{\rho}{A} J_z \left( \dot{\varphi} + \alpha \dot{\theta} \right) \dot{\theta} \right) \Big|_{\alpha=0} = \frac{\rho}{A} J_z \dot{\theta} \dot{\theta} \Big|_{\alpha=0} = \frac{\rho}{A} J_z \dot{\theta}^2.$$

Таким образом, вторая вариация функционала Гамильтона примет вид:

$$\delta^2 H(x, y, \varphi, u, v, \theta) = \int_{t_1}^{t_2} \int_0^L \left[ \rho \dot{u}^2 + \rho \dot{v}^2 + \frac{\rho}{A} J_z \dot{\theta}^2 - k_1 \left( (u' \cos \varphi - x' \theta \sin \varphi + y' \theta \cos \varphi + v' \sin \varphi)^2 + \right. \right. \\ \left. \left. + (x' \cos \varphi + y' \sin \varphi - 1) \left( -2u' \theta \sin \varphi + 2v' \theta \cos \varphi - x' \theta^2 \cos \varphi - y' \theta^2 \sin \varphi \right) - k_2 \left( (-u' \sin \varphi - \right. \right. \right. \\ \left. \left. - x' \theta \cos \varphi - y' \theta \sin \varphi + v' \cos \varphi)^2 + (-x' \sin \varphi + y' \cos \varphi) \left( -2u' \theta \cos \varphi - 2v' \theta \sin \varphi + \right. \right. \right. \\ \left. \left. \left. + x' \theta^2 \sin \varphi - y' \theta^2 \cos \varphi \right) - k_3 \theta'^2 \right] ds dt.$$

В этом функционале функции  $x$ ,  $y$ ,  $\varphi$  являются решениями задачи (3.1), (1.180) и (1.183).

Обозначим  $\frac{1}{2} \delta^2 H \equiv \Phi_d^*(u, v, \theta)$ , где  $\Phi_d^*$  – динамический функционал устойчивости.

Тогда,

$$\Phi_d^*(u, v, \theta) = \frac{1}{2} \int_{t_1}^{t_2} \int_0^L \left[ \rho \dot{u}^2 + \rho \dot{v}^2 + \frac{\rho}{A} J_z \dot{\theta}^2 - k_1 \left( (u' \cos \varphi - x' \theta \sin \varphi + y' \theta \cos \varphi + v' \sin \varphi)^2 + \right. \right. \\ \left. \left. + (x' \cos \varphi + y' \sin \varphi - 1) \left( -2u' \theta \sin \varphi + 2v' \theta \cos \varphi - x' \theta^2 \cos \varphi - y' \theta^2 \sin \varphi \right) - k_2 \left( (-u' \sin \varphi - \right. \right. \right. \\ \left. \left. - x' \theta \cos \varphi - y' \theta \sin \varphi + v' \cos \varphi)^2 + (-x' \sin \varphi + y' \cos \varphi) \left( -2u' \theta \cos \varphi - 2v' \theta \sin \varphi + \right. \right. \right. \\ \left. \left. \left. + x' \theta^2 \sin \varphi - y' \theta^2 \cos \varphi \right) - k_3 \theta'^2 \right] ds dt. \quad (3.9)$$

Получим уравнения Эйлера для задачи  $\Phi_d^* \rightarrow \text{СТАЦ}$ . Для этого вычислим первую вариацию динамического функционала устойчивости  $\Phi_d^*$  (3.9). Сначала дадим приращения функциям  $u$ ,  $v$ ,  $\theta$  согласно формулам (2.19) и вычисляем производную по  $\alpha$ , далее полагая  $\alpha = 0$ . Определим вариации инерционных составляющих:

$$\frac{1}{2} \rho \dot{u}^2 \rightarrow \frac{d}{d\alpha} \left( \frac{1}{2} \rho (\dot{u} + \alpha \delta \dot{u})^2 \right) \Big|_{\alpha=0} = \frac{1}{2} \cdot 2\rho (\dot{u} + \alpha \delta \dot{u}) \delta \dot{u} \Big|_{\alpha=0} = \rho \dot{u} \delta \dot{u};$$

$$\frac{1}{2} \rho \dot{v}^2 \rightarrow \frac{d}{d\alpha} \left( \frac{1}{2} \rho (\dot{v} + \alpha \delta \dot{v})^2 \right) \Big|_{\alpha=0} = \frac{1}{2} \cdot 2\rho (\dot{v} + \alpha \delta \dot{v}) \delta \dot{v} \Big|_{\alpha=0} = \rho \dot{v} \delta \dot{v};$$

$$\frac{1}{2} \frac{\rho}{A} J_z \dot{\theta}^2 \rightarrow \frac{d}{d\alpha} \left( \frac{1}{2} \frac{\rho}{A} J_z (\dot{\theta} + \alpha \delta \dot{\theta})^2 \right) \Big|_{\alpha=0} = \frac{1}{2} \cdot 2 \frac{\rho}{A} J_z (\dot{\theta} + \alpha \delta \dot{\theta}) \delta \dot{\theta} \Big|_{\alpha=0} = \frac{\rho}{A} J_z \dot{\theta} \delta \dot{\theta}.$$

Вычисление вариаций статических слагаемых, подробно описано в пункте 2.7.

Таким образом, первая вариация динамического функционала устойчивости примет вид:

$$\begin{aligned} \delta \Phi_d^*(u, v, \theta) = & \int_{t_1}^{t_2} \int_0^L \left[ \rho \dot{u} \delta \dot{u} + \rho \dot{v} \delta \dot{v} + \frac{\rho}{A} J_z \dot{\theta} \delta \dot{\theta} - k_1 (u' \cos \varphi - x' \theta \sin \varphi + y' \theta \cos \varphi + \right. \\ & + v' \sin \varphi) (\delta u' \cos \varphi - x' \delta \theta \sin \varphi + y' \delta \theta \cos \varphi + \delta v' \sin \varphi) - k_1 (x' \cos \varphi + y' \sin \varphi - 1) \cdot (-\delta u' \theta \sin \varphi - \\ & - u' \delta \theta \sin \varphi + \delta v' \theta \cos \varphi + v' \delta \theta \cos \varphi - x' \theta \delta \theta \cos \varphi - y' \theta \delta \theta \sin \varphi) - k_2 (-u' \sin \varphi - x' \theta \cos \varphi - \\ & - y' \theta \sin \varphi + v' \cos \varphi) (-\delta u' \sin \varphi - x' \delta \theta \cos \varphi - y' \delta \theta \sin \varphi + \delta v' \cos \varphi) - \\ & \left. - k_2 (-x' \sin \varphi + y' \cos \varphi) (-\delta u' \theta \cos \varphi - u' \delta \theta \cos \varphi - \delta v' \theta \sin \varphi - v' \delta \theta \sin \varphi + x' \theta \delta \theta \sin \varphi - \right. \\ & \left. - y' \theta \delta \theta \cos \varphi) - k_3 \theta' \delta \theta' \right] ds dt. \end{aligned}$$

Используя уравнения (1.180) и (2.7), преобразуем первую вариацию функционала устойчивости:

$$\begin{aligned} \delta \Phi_d^*(u, v, \theta) = & \int_{t_1}^{t_2} \int_0^L \left[ \rho \dot{u} \delta \dot{u} + \rho \dot{v} \delta \dot{v} + \frac{\rho}{A} J_z \dot{\theta} \delta \dot{\theta} - k_1 \varepsilon_B (\delta u' \cos \varphi - x' \delta \theta \sin \varphi + y' \delta \theta \cos \varphi + \right. \\ & + \delta v' \sin \varphi) - k_1 \varepsilon (-\delta u' \theta \sin \varphi - u' \delta \theta \sin \varphi + \delta v' \theta \cos \varphi + v' \delta \theta \cos \varphi - x' \theta \delta \theta \cos \varphi - \\ & - y' \theta \delta \theta \sin \varphi) - k_2 \gamma_B (\delta v' \cos \varphi - \delta u' \sin \varphi - x' \delta \theta \cos \varphi - y' \delta \theta \sin \varphi) - k_2 \gamma (-\delta u' \theta \cos \varphi - \\ & \left. - u' \delta \theta \cos \varphi - \delta v' \theta \sin \varphi - v' \delta \theta \sin \varphi + x' \theta \delta \theta \sin \varphi - y' \theta \delta \theta \cos \varphi) - k_3 \psi_B \delta \theta' \right] ds dt. \end{aligned} \quad (3.10)$$

Таким образом, используя выражения (2.40), первую вариацию динамического функционала устойчивости (3.10) можно записать в следующем виде:

$$\begin{aligned} \delta\Phi_{\text{д}}^*(u, v, \theta) = & - \int_{t_1}^{t_2} \int_0^L \left[ \rho \dot{u} \delta \dot{u} + \rho \dot{v} \delta \dot{v} + \frac{\rho}{A} J_z \dot{\theta} \delta \dot{\theta} - N_B (\delta u' \cos \varphi - x' \delta \theta \sin \varphi + y' \delta \theta \cos \varphi + \delta v' \sin \varphi) - \right. \\ & - N (-\delta u' \theta \sin \varphi - u' \delta \theta \sin \varphi + \delta v' \theta \cos \varphi + v' \delta \theta \cos \varphi - x' \theta \delta \theta \cos \varphi - y' \theta \delta \theta \sin \varphi) - Q_B (-\delta u' \sin \varphi - \\ & - x' \delta \theta \cos \varphi - y' \delta \theta \sin \varphi + \delta v' \cos \varphi) - Q (-\delta u' \theta \cos \varphi - u' \delta \theta \cos \varphi - \delta v' \theta \sin \varphi - v' \delta \theta \sin \varphi + \\ & \left. + x' \theta \delta \theta \sin \varphi - y' \theta \delta \theta \cos \varphi) - M_B \delta \theta' \right] ds dt. \end{aligned}$$

Величины  $x$ ,  $y$ ,  $\varphi$ ,  $\varepsilon$ ,  $\gamma$ ,  $\psi$ ,  $N$ ,  $Q$ ,  $M$  обозначают характеристики напряженно – деформированного состояния, удовлетворяющие системе уравнений (3.1), (1.180) и (1.183), а также граничным условиям. То есть это величины того напряженно – деформированного состояния, устойчивость которого исследуется. Величинами с нижним индексом «в» обозначаются вариации.

Перегруппировав слагаемые, первую вариацию функционала устойчивости окончательно можно записать в виде:

$$\begin{aligned} \delta\Phi_{\text{д}}^*(u, v, \theta) = & \int_{t_1}^{t_2} \int_0^L \left[ \rho \dot{u} \delta \dot{u} + \rho \dot{v} \delta \dot{v} + \frac{\rho}{A} J_z \dot{\theta} \delta \dot{\theta} + \delta u' (-N_B \cos \varphi + N \theta \sin \varphi + Q_B \sin \varphi + Q \theta \cos \varphi) + \right. \\ & + \delta v' (-N_B \sin \varphi - N \theta \cos \varphi - Q_B \cos \varphi + Q \theta \sin \varphi) - M_B \delta \theta' + \delta \theta (-x' (N_B \sin \varphi + N \theta \cos \varphi + \\ & + Q_B \cos \varphi - Q \theta \sin \varphi) - y' (N_B \cos \varphi - N \theta \sin \varphi - Q_B \sin \varphi - Q \theta \cos \varphi) - u' (-N \sin \varphi - Q \cos \varphi) - \\ & \left. - v' (N \cos \varphi - Q \sin \varphi) \right] ds dt. \end{aligned}$$

Интегрируем по частям, чтобы избавиться от производных от вариаций:

$$\int_{t_1}^{t_2} \int_0^L \rho \dot{u} \delta \dot{u} ds dt = - \int_{t_1}^{t_2} \int_0^L \rho \ddot{u} \delta u ds dt + \int_0^L \rho \dot{u} \delta u ds \Big|_{t_1}^{t_2};$$

$$\int_{t_1}^{t_2} \int_0^L \rho \dot{v} \delta \dot{v} ds dt = - \int_{t_1}^{t_2} \int_0^L \rho \ddot{v} \delta v ds dt + \int_0^L \rho \dot{v} \delta v ds \Big|_{t_1}^{t_2};$$

$$\int_{t_1}^{t_2} \int_0^L \frac{\rho}{A} J_z \dot{\theta} \delta \dot{\theta} ds dt = - \int_{t_1}^{t_2} \int_0^L \frac{\rho}{A} J_z \ddot{\theta} \delta \theta ds dt + \int_0^L \frac{\rho}{A} J_z \dot{\theta} \delta \theta ds \Big|_{t_1}^{t_2};$$

$$\int_{t_1}^{t_2} \int_0^L \delta u' (-N_B \cos \varphi + Q_B \sin \varphi) ds dt = - \int_{t_1}^{t_2} \int_0^L \delta u (-N_B \cos \varphi + Q_B \sin \varphi)' ds dt + \int_{t_1}^{t_2} \delta u (-N_B \cos \varphi + Q_B \sin \varphi) dt \Big|_0^L;$$

$$\int_{t_1}^{t_2} \int_0^L \delta u' (N \theta \sin \varphi + Q \theta \cos \varphi) ds dt = - \int_{t_1}^{t_2} \int_0^L \delta u (N \theta \sin \varphi + Q \theta \cos \varphi)' ds dt + \int_{t_1}^{t_2} \delta u (N \theta \sin \varphi + Q \theta \cos \varphi) dt \Big|_0^L;$$

$$\int_{t_1 0}^{t_2 L} \delta v' (-N_B \sin \varphi - Q_B \cos \varphi) ds dt = - \int_{t_1 0}^{t_2 L} \delta v (-N_B \sin \varphi - Q_B \cos \varphi)' ds dt + \int_{t_1}^{t_2} \delta v (-N_B \sin \varphi - Q_B \cos \varphi) dt \Big|_0^L ;$$

$$\int_{t_1 0}^{t_2 L} \delta v' (-N\theta \cos \varphi + Q\theta \sin \varphi) ds dt = - \int_{t_1 0}^{t_2 L} \delta v (-N\theta \cos \varphi + Q\theta \sin \varphi)' ds dt + \int_{t_1}^{t_2} \delta v (-N\theta \cos \varphi + Q\theta \sin \varphi) dt \Big|_0^L ;$$

$$\int_{t_1 0}^{t_2 L} \delta \theta' M_B ds dt = - \int_{t_1 0}^{t_2 L} \delta \theta M_B' ds dt + \int_{t_1}^{t_2} \delta \theta M_B dt \Big|_0^L .$$

Таким образом, после интегрирования по частям первая вариация динамического функционала устойчивости принимает вид:

$$\begin{aligned} \delta \Phi_{\text{д}}^*(u, v, \theta) = & \int_{t_1 0}^{t_2 L} \left[ -\rho \ddot{u} \delta u - \rho \ddot{v} \delta v - \frac{\rho}{A} J_z \ddot{\theta} \delta \theta + \delta u (N_B \cos \varphi - Q_B \sin \varphi)' - \right. \\ & - \delta u (N\theta \sin \varphi + Q\theta \cos \varphi)' + \delta v (N_B \sin \varphi + Q_B \cos \varphi)' + \delta v (N\theta \cos \varphi - Q\theta \sin \varphi)' - \\ & - \delta \theta M_B' + \delta \theta (-x'(N_B \sin \varphi - Q\theta \sin \varphi + N\theta \cos \varphi + Q_B \cos \varphi) - y'(N_B \cos \varphi - \\ & - N\theta \sin \varphi - Q_B \sin \varphi - Q\theta \cos \varphi) + u'(N \sin \varphi + Q \cos \varphi) - v'(N \cos \varphi - Q \sin \varphi)] ds dt + \\ & + \int_0^L \left( \rho \dot{u} \delta u + \rho \dot{v} \delta v + \frac{\rho}{A} J_z \dot{\theta} \delta \theta \right) ds \Big|_{t_1}^{t_2} + \int_{t_1}^{t_2} (\delta u ((-N_B \cos \varphi + Q_B \sin \varphi) + (N\theta \sin \varphi + Q\theta \cos \varphi)) + \\ & + \delta v ((-N_B \sin \varphi - Q_B \cos \varphi) + (-N\theta \cos \varphi + Q\theta \sin \varphi)) - \delta \theta M_B) dt \Big|_0^L ; \end{aligned}$$

Перегруппировывая слагаемые, первую вариацию функционала устойчивости окончательно можно записать в виде:

$$\begin{aligned} \delta \Phi_{\text{д}}^*(u, v, \theta) = & - \int_{t_1 0}^{t_2 L} \left[ \delta u \left( \rho \ddot{u} - (N_B \cos \varphi - Q_B \sin \varphi)' + \theta (N \sin \varphi + Q \cos \varphi)' + \right. \right. \\ & + \theta' (N \sin \varphi + Q \cos \varphi) \Big) + \delta v \left( \rho \ddot{v} - (N_B \sin \varphi + Q_B \cos \varphi)' - \theta (N \cos \varphi - Q \sin \varphi)' - \right. \\ & - \theta' (N \cos \varphi - Q \sin \varphi) \Big) + \delta \theta \left( \frac{\rho}{A} J_z \ddot{\theta} - M_B' - u'(N \sin \varphi + Q \cos \varphi) - v'(Q \sin \varphi - N \cos \varphi) - \right. \\ & - x'(N_B \sin \varphi - Q\theta \sin \varphi + N\theta \cos \varphi + Q_B \cos \varphi) - y'(-N_B \cos \varphi + N\theta \sin \varphi + Q_B \sin \varphi + \\ & + Q\theta \cos \varphi) \Big] ds dt + \int_0^L \left( \rho \dot{u} \delta u + \rho \dot{v} \delta v + \frac{\rho}{A} J_z \dot{\theta} \delta \theta \right) ds \Big|_{t_1}^{t_2} + \int_{t_1}^{t_2} (\delta u ((-N_B \cos \varphi + Q_B \sin \varphi) + \\ & + \theta (N \sin \varphi + Q \cos \varphi)) - \delta v ((N_B \sin \varphi + Q_B \cos \varphi) + (N\theta \cos \varphi - Q\theta \sin \varphi)) - \delta \theta M_B) dt \Big|_0^L ; \end{aligned} \quad (3.11)$$

Уравнениями Эйлера, вытекающими из условия  $\delta\Phi_{\text{д}}^* = 0$ , являются следующие уравнения:

$$\begin{cases} \rho \ddot{u} - (N_{\text{B}} \cos \varphi - Q_{\text{B}} \sin \varphi)' + \theta'(N \sin \varphi + Q \cos \varphi) + \theta(N \sin \varphi + Q \cos \varphi)' = 0; \\ \rho \ddot{v} - (N_{\text{B}} \sin \varphi + Q_{\text{B}} \cos \varphi)' - \theta'(N \cos \varphi - Q \sin \varphi) - \theta(N \cos \varphi - Q \sin \varphi)' = 0; \\ \frac{\rho}{A} J_z \ddot{\theta} - M_{\text{B}}' - u'(N \sin \varphi + Q \cos \varphi) - v'(Q \sin \varphi - N \cos \varphi) - x'(N_{\text{B}} \sin \varphi + Q_{\text{B}} \cos \varphi + \\ + N \theta \cos \varphi - Q \theta \sin \varphi) - y'(N \theta \sin \varphi - N_{\text{B}} \cos \varphi + Q_{\text{B}} \sin \varphi + Q \theta \cos \varphi) = 0. \end{cases} \quad (3.12)$$

Система (3.12) является системой уравнений относительно функций  $u$ ,  $v$  и  $\theta$ . Функции  $x$ ,  $y$  и  $\varphi$ , а также  $N$ ,  $Q$ ,  $M$  фиксированы и являются решениями задачи (3.1), (1.180) и (1.183).

Уравнения (3.12) являются точными уравнениями устойчивости физически линейного стержня для плоской задачи при действии потенциальной нагрузки, полученными динамическим методом. При их выводе не делалось никаких упрощающих предположений о величинах перемещений и углов поворота, а также о характере напряженно-деформированного состояния стержня.

В статическом случае инерционные слагаемые равны нулю, и уравнения (3.12) переходят в уравнения устойчивости (2.42), полученные в параграфе 2.7 статическим методом.

### 3.3 Уравнения устойчивости как уравнения движения в вариациях

Получим уравнения устойчивости вторым способом, как уравнения в вариациях уравнений движения (3.1). Для этого в исходных уравнениях движения искомым функциям, согласно формулам (3.4), дается приращение, зависящее от параметра  $\alpha$ , и затем вычислялось значение производной по  $\alpha$  в точке  $\alpha=0$ , используя выражения (1.183), (2.5), (2.6) и (2.40). При вычислении вариаций функции  $x$ ,  $y$  и  $\varphi$ , а также  $N$ ,  $Q$ ,  $M$  фиксированы и обозначают решение системы (3.1).

$$\begin{aligned} \rho \ddot{x} &\rightarrow \frac{d}{d\alpha} \left( \rho \left( \ddot{x} + \alpha \ddot{u} \right) \right) \Big|_{\alpha=0} = \rho \ddot{u}; \\ (N \cos \varphi - Q \sin \varphi)' &= (k_1 \varepsilon \cos \varphi - k_2 \gamma \sin \varphi)' \rightarrow \frac{d}{d\alpha} (k_1 (\varepsilon + \alpha \delta \varepsilon) \cos (\varphi + \alpha \theta) - \\ &- k_2 (\gamma + \alpha \delta \gamma) \sin (\varphi + \alpha \theta)) \Big|_{\alpha=0} = (k_1 \delta \varepsilon \cos (\varphi + \alpha \theta) - k_1 (\varepsilon + \alpha \delta \varepsilon) \theta \sin (\varphi + \alpha \theta) - \\ &- k_2 \delta \gamma \sin (\varphi + \alpha \theta) - k_2 (\gamma + \alpha \delta \gamma) \theta \cos (\varphi + \alpha \theta)) \Big|_{\alpha=0} = (k_1 \varepsilon_{\text{B}} \cos \varphi - k_1 \varepsilon \theta \sin \varphi - k_2 \gamma_{\text{B}} \sin \varphi - \\ &- k_2 \gamma \theta \cos \varphi)' = (N_{\text{B}} \cos \varphi - N \theta \sin \varphi - Q_{\text{B}} \sin \varphi - Q \theta \cos \varphi)' = (N_{\text{B}} \cos \varphi - Q_{\text{B}} \sin \varphi)' - \\ &- \theta'(N \sin \varphi + Q \cos \varphi) - \theta'(N \sin \varphi + Q \cos \varphi); \end{aligned}$$

$$q_x \rightarrow \frac{d}{d\alpha}(q_x) \Big|_{\alpha=0} = 0;$$

$$\rho \ddot{y} \rightarrow \frac{d}{d\alpha} \left( \rho \left( \ddot{y} + \alpha \ddot{v} \right) \right) \Big|_{\alpha=0} = \rho \ddot{v};$$

$$\begin{aligned} (N \sin \varphi + Q \cos \varphi)' &= (k_1 \varepsilon \sin \varphi + k_2 \gamma \cos \varphi)' \rightarrow \frac{d}{d\alpha} (k_1 (\varepsilon + \alpha \delta \varepsilon) \sin(\varphi + \alpha \theta) + \\ &+ k_2 (\gamma + \alpha \delta \gamma) \cos(\varphi + \alpha \theta)) \Big|_{\alpha=0} = (k_1 \delta \varepsilon \sin(\varphi + \alpha \theta) + k_1 (\varepsilon + \alpha \delta \varepsilon) \theta \cos(\varphi + \alpha \theta) + \\ &+ k_2 \delta \gamma \cos(\varphi + \alpha \theta) - k_2 (\gamma + \alpha \delta \gamma) \theta \sin(\varphi + \alpha \theta)) \Big|_{\alpha=0} = (k_1 \varepsilon_B \sin \varphi + k_1 \varepsilon \theta \cos \varphi + k_2 \gamma_B \cos \varphi - \\ &- k_2 \gamma \theta \sin \varphi)' = (N_B \sin \varphi + N \theta \cos \varphi + Q_B \cos \varphi - Q \theta \sin \varphi)' = (N_B \sin \varphi + Q_B \cos \varphi)' + \\ &- \theta (N \cos \varphi - Q \sin \varphi)' + \theta' (N \cos \varphi - Q \sin \varphi); \end{aligned}$$

$$q_y \rightarrow \frac{d}{d\alpha}(q_y) \Big|_{\alpha=0} = 0;$$

$$\frac{\rho}{A} J_z \ddot{\varphi} \rightarrow \frac{d}{d\alpha} \left( \frac{\rho}{A} J_z \left( \ddot{\varphi} + \alpha \ddot{\theta} \right) \right) \Big|_{\alpha=0} = \frac{\rho}{A} J_z \ddot{\theta};$$

$$\begin{aligned} x'(N \sin \varphi + Q \cos \varphi) &= x'(k_1 \varepsilon \sin \varphi + k_2 \gamma \cos \varphi) \rightarrow \frac{d}{d\alpha} \left( (x + \alpha u)' (k_1 (\varepsilon + \alpha \delta \varepsilon) \sin(\varphi + \alpha \theta) + \right. \\ &+ k_2 (\gamma + \alpha \delta \gamma) \cos(\varphi + \alpha \theta)) \Big|_{\alpha=0} = (u'(k_1 (\varepsilon + \alpha \delta \varepsilon) \sin(\varphi + \alpha \theta) + k_2 (\gamma + \alpha \delta \gamma) \cos(\varphi + \alpha \theta)) + \\ &+ (x + \alpha u)' (k_1 \delta \varepsilon \sin(\varphi + \alpha \theta) + k_1 (\varepsilon + \alpha \delta \varepsilon) \theta \cos(\varphi + \alpha \theta) + k_2 \delta \gamma \cos(\varphi + \alpha \theta) + k_2 \delta \gamma \cos(\varphi + \alpha \theta) - \\ &- k_2 (\gamma + \alpha \delta \gamma) \theta \sin(\varphi + \alpha \theta)) \Big|_{\alpha=0} = u'(k_1 \varepsilon \sin \varphi + k_2 \gamma \cos \varphi) + x'(k_1 \varepsilon_B \sin \varphi + k_1 \varepsilon \theta \cos \varphi + \\ &+ k_2 \gamma_B \cos \varphi - k_2 \gamma \theta \sin \varphi) = u'(N \sin \varphi + Q \cos \varphi) + x'(N_B \sin \varphi + N \theta \cos \varphi + Q_B \cos \varphi - Q \theta \sin \varphi); \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} y'(N \cos \varphi - Q \sin \varphi) &= y'(k_1 \varepsilon \cos \varphi - k_2 \gamma \sin \varphi) \rightarrow \frac{d}{d\alpha} \left( (y + \alpha v)' (k_1 (\varepsilon + \alpha \delta \varepsilon) \cos(\varphi + \alpha \theta) - \right. \\ &- k_2 (\gamma + \alpha \delta \gamma) \sin(\varphi + \alpha \theta)) \Big|_{\alpha=0} = (v'(k_1 (\varepsilon + \alpha \delta \varepsilon) \cos(\varphi + \alpha \theta) - k_2 (\gamma + \alpha \delta \gamma) \sin(\varphi + \alpha \theta)) + \\ &+ (y + \alpha v)' (k_1 \delta \varepsilon \cos(\varphi + \alpha \theta) - k_1 (\varepsilon + \alpha \delta \varepsilon) \theta \sin(\varphi + \alpha \theta) - k_2 \delta \gamma \sin(\varphi + \alpha \theta) - \\ &- k_2 (\gamma + \alpha \delta \gamma) \theta \cos(\varphi + \alpha \theta)) \Big|_{\alpha=0} = v'(k_1 \varepsilon \cos \varphi - k_2 \gamma \sin \varphi) + y'(k_1 \varepsilon_B \cos \varphi - k_1 \varepsilon \theta \sin \varphi - \\ &- k_2 \gamma_B \sin \varphi - k_2 \gamma \theta \cos \varphi) = v'(N \cos \varphi - Q \sin \varphi) + y'(N_B \cos \varphi - N \theta \sin \varphi - Q_B \sin \varphi - Q \theta \cos \varphi); \end{aligned}$$

$$M' = k_3 \psi' \rightarrow \frac{d}{d\alpha} \left( k_3 (\psi + \alpha \delta \psi)' \right) \Big|_{\alpha=0} = k_3 \delta \psi' \Big|_{\alpha=0} = k_3 \psi_B' = M_B';$$

$$m \rightarrow \frac{d}{d\alpha}(m) \Big|_{\alpha=0} = 0.$$

Отсюда получаем систему уравнений:

$$\begin{cases} \rho \ddot{u} - (N_B \cos \varphi - Q_B \sin \varphi)' + \theta'(N \sin \varphi + Q \cos \varphi) + \theta(N \sin \varphi + Q \cos \varphi)' = 0; \\ \rho \ddot{v} - (N_B \sin \varphi + Q_B \cos \varphi)' - \theta'(N \cos \varphi - Q \sin \varphi) - \theta(N \cos \varphi - Q \sin \varphi)' = 0; \\ \frac{\rho}{A} J_z \ddot{\theta} - M_B' - u'(N \sin \varphi + Q \cos \varphi) - v'(Q \sin \varphi - N \cos \varphi) - x'(N_B \sin \varphi + Q_B \cos \varphi + \\ + N \theta \cos \varphi - Q \theta \sin \varphi) - y'(N \theta \sin \varphi - N_B \cos \varphi + Q_B \sin \varphi + Q \theta \cos \varphi) = 0. \end{cases} \quad (3.13)$$

Полученная система уравнений (3.13) является системой уравнений динамической устойчивости физически линейного упругого стержня. Данная система уравнений совпадает с системой уравнений устойчивости, полученных из функционала устойчивости (3.12).

Таким образом, для физически линейного упругого стержня двумя способами получены уравнения устойчивости: как уравнения в вариациях исходных уравнений движения и как уравнения Эйлера для динамического функционала устойчивости.

### 3.4 Примеры решения задачи устойчивости динамическим методом

#### Классическая задача Эйлера – шарнирно опертый стержень (рисунок 3.1)

Рассмотрим классическую задачу Эйлера - шарнирно закрепленный стержень, сжимаемый «мертвой» осевой силой  $T$ , как показано на рисунке 3.1. Исходная равновесная конфигурация - прямолинейная.

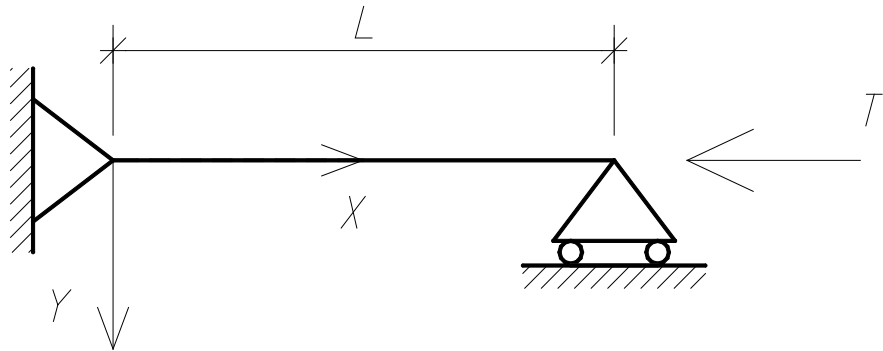


Рисунок 3.1 - Расчетная схема стержня

Граничные условия (2.10), соответствующие рассматриваемой задаче, были получены в пункте 2.2.1. Точное решение нелинейной задачи (3.1), (1.180) и (1.183), (2.10) описывается формулами:



$$y = 0; \quad \varphi = 0; \quad \varepsilon = \frac{N}{k_1} = -\frac{T}{k_1}; \quad \gamma = 0; \quad \psi = 0;$$

$$N = -T; \quad Q = 0; \quad M = 0. \quad (3.14)$$

$$x' = \varepsilon + 1 = \frac{N}{k_1} + 1 = 1 - \frac{T}{k_1}.$$

Подставив (3.14) в динамический функционал устойчивости (3.9), получим динамический функционал устойчивости для рассматриваемой задачи:

$$\Phi_{\text{д}}^*(u, v, \theta) = \frac{1}{2} \int_{t_1}^{t_2} \int_0^L \left[ \rho \dot{u}^2 + \rho \dot{v}^2 + \frac{\rho}{A} J_z \dot{\theta}^2 - k_1 u'^2 + 2Tv'\theta - k_2 \left( v' - \left( 1 - \frac{T}{k_1} \right) \theta \right)^2 - k_3 \theta'^2 - \theta^2 T \left( 1 - \frac{T}{k_1} \right) \right] ds dt.$$

Компоненты функционала, содержащие  $u$ , описывают продольные деформации, не связанные с нагрузкой  $T$ , и могут быть опущены при исследовании устойчивости. Окончательно, функционал устойчивости примет вид:

$$\Phi_{\text{д}}(v, \theta) = \frac{1}{2} \int_{t_1}^{t_2} \int_0^L \left[ \rho \dot{v}^2 + \frac{\rho}{A} J_z \dot{\theta}^2 + 2Tv'\theta - k_2 \left( v' - \left( 1 - \frac{T}{k_1} \right) \theta \right)^2 - k_3 \theta'^2 - \theta^2 T \left( 1 - \frac{T}{k_1} \right) \right] ds dt. \quad (3.15)$$

Подставив (3.14) в (3.13), получим уравнения устойчивости:

$$\begin{cases} \rho \ddot{u} - k_1 u'' = 0; \\ \rho \ddot{v} - k_2 \left( v' - \left( 1 - \frac{T}{k_1} \right) \theta \right)' + \theta' T = 0; \\ \frac{\rho}{A} J_z \ddot{\theta} - k_3 \theta'' - k_2 \left( v' - \left( 1 - \frac{T}{k_1} \right) \theta \right) \left( 1 + \frac{T}{k_2} - \frac{T}{k_1} \right) = 0. \end{cases}$$

Первое уравнение системы, содержащее  $u$ , описывает продольные деформации, не связанные с нагрузкой  $T$ , и может быть опущено при исследовании устойчивости. Окончательно, система уравнений примет вид:

$$\begin{cases} \rho \ddot{v} - k_2 \left( v' - \left( 1 - \frac{T}{k_1} \right) \theta \right)' + \theta' T = 0; \\ \frac{\rho}{A} J_z \ddot{\theta} - k_3 \theta'' - k_2 \left( v' - \left( 1 - \frac{T}{k_1} \right) \theta \right) \left( 1 + \frac{T}{k_2} - \frac{T}{k_1} \right) = 0. \end{cases} \quad (3.16)$$

Нетрудно проверить, что уравнения (3.16) являются уравнениями Эйлера для функционала (3.15).

Граничные условия для задачи устойчивости шарнирно опертого стержня, полученные из внеинтегральных слагаемых первой вариации функционала устойчивости, описаны в пункте 2.4.1. В случае физической линейности стержня, когда смешанные производные  $\frac{\partial^2 W}{\partial \varepsilon \partial \gamma}$ ,  $\frac{\partial^2 W}{\partial \varepsilon \partial \psi}$ ,  $\frac{\partial^2 W}{\partial \gamma \partial \psi}$  равны нулю, а  $\frac{\partial N}{\partial \varepsilon} = k_1$ ,  $\frac{\partial Q}{\partial \gamma} = k_2$ ,  $\frac{\partial M}{\partial \psi} = k_3$ , граничные условия, используя обозначения (2.7) и (2.40), могут быть записаны в виде:

$$\begin{aligned} s = 0 : & & s = L : \\ u(0, t) = 0; & N_B(L, t) \cos \varphi(L, t) - Q_B(L, t) \sin \varphi(L, t) - \theta(N(L, t) \sin \varphi + Q(L, t) \cos \varphi(L, t)) = 0; \\ v(0, t) = 0; & v(L, t) = 0; \\ M_B(0, t) = 0; & M_B(L, t) = 0; \end{aligned} \quad (3.17)$$

Величины  $x$ ,  $y$ ,  $\varphi$ ,  $\varepsilon$ ,  $\gamma$ ,  $\psi$ ,  $N$ ,  $Q$ ,  $M$  обозначают характеристики напряженно – деформированного состояния, удовлетворяющие системе уравнений (3.1), (1.180) и (1.183), а также граничным условиям. Величинами с нижним индексом «в» обозначаются вариации.

Подставив точное решение (3.14) в граничные условия (3.17) и используя выражения (2.7) и (2.40), граничные условия для рассматриваемой задачи могут быть записаны в виде:

$$\begin{aligned} s = 0 : & & s = L : \\ u(0, t) = 0; & k_1 u'(L, t) = 0; \\ v(0, t) = 0; & v(L, t) = 0; \\ k_3 \theta'(0, t) = 0; & k_3 \theta'(L, t) = 0; \end{aligned} \quad (3.18)$$

Условия  $u(0, t) = 0$ ,  $k_1 u'(L, t) = 0$  соответствуют продольным деформациям и далее могут быть опущены. Окончательно граничные условия (3.18) могут быть записаны в виде:

$$v(0, t) = v(L, t) = 0; \quad \theta'(0, t) = \theta'(L, t) = 0. \quad (3.19)$$

Будем искать гармоническое по времени решение системы (3.16) в виде:

$$\theta(s, t) = \theta^*(s) \cos \omega t; \quad v(s, t) = v^*(s) \cos \omega t. \quad (3.20)$$

Функции  $\theta^*(s)$ ,  $v^*(s)$  удовлетворяют граничным условиям:

$$v^*(0) = v^*(L) = 0; \quad \theta^{*'}(0) = \theta^{*'}(L) = 0. \quad (3.21)$$

Таким образом, после подстановки выражений (3.20) в систему (3.16), дифференцирования по времени ( $t$ ) и координате ( $s$ ) и сокращения на  $\cos \omega t$ , получаем систему двух уравнений относительно  $v^*(s)$  и  $\theta^*(s)$ :

$$\begin{cases} -\rho \omega^2 v^* - k_2 \left( v^{*''} - \left( 1 - \frac{T}{k_1} \right) \theta^{*'} \right) + \theta^{*'} T = 0; \\ -\frac{\rho}{A} J_z \omega^2 \theta^* - k_3 \theta^{*''} - k_2 \left( v^{*'} - \left( 1 - \frac{T}{k_1} \right) \theta^* \right) B = 0, \end{cases} \quad (3.22)$$

где  $B = 1 + T \left( \frac{1}{k_2} - \frac{1}{k_1} \right)$ .

Исключая функцию  $v^*(s)$ , получаем следующее уравнение для функции  $\theta^*(s)$ :

$$\frac{\rho \omega^2}{k_2 B} \left[ \left( \frac{\rho}{A} J_z \theta^{*''} \omega^2 + k_3 \theta^{*''} \right) - \left( 1 - \frac{T}{k_1} \right) \theta^* k_2 B \right] + \frac{\left( \frac{\rho}{A} J_z \theta^* \omega^2 + k_3 \theta^{*''} \right)''}{B} + T \theta^{*''} = 0. \quad (3.23)$$

Решение уравнения (3.23) ищем в следующем виде:

$$\theta^*(s) = \sum_{n=1}^{\infty} \theta_n^* \cos \frac{n\pi s}{L}, \quad (3.24)$$

удовлетворяющем граничным условиям (3.21) при любых значениях  $\theta_n$ .

Подставляя (3.24) в уравнение (3.23) и приравнявая нулю коэффициенты при  $\cos \frac{n\pi s}{L}$ ,

получим для каждого  $n$  следующее частотное уравнение, из которого можно найти частоту  $\omega$ :

$$\begin{aligned} & \frac{\rho^2}{A k_2} J_z \omega^4 - \left( \rho \left( \left( 1 - \frac{T}{k_1} \right) B + \frac{k_3}{k_2} \left( \frac{n\pi}{L} \right)^2 \right) + \frac{\rho}{A} J_z \left( \frac{n\pi}{L} \right)^2 \right) \omega^2 + k_3 \left( \frac{n\pi}{L} \right)^4 - \\ & - T B \left( \frac{n\pi}{L} \right)^2 = 0. \end{aligned} \quad (3.25)$$

Условие потери устойчивости определяется условием  $\omega = 0$  [4, 12]. Для того чтобы уравнение (3.25) имело нулевой корень необходимо и достаточно выполнение условия обращения в нуль свободного члена, откуда получаем квадратное уравнение для нахождения критической силы  $T_{кр}$ :

$$T^2 \left( \frac{1}{k_2} - \frac{1}{k_1} \right) + T - T_3 n^2 = 0, \quad (3.26)$$

где  $T_3 = \frac{\pi^2 k_3}{L^2}$  – критическая сила Эйлера для шарнирно закрепленного стержня [47].

Как и в параграфе 2.9.1 можно показать, что критическое (наименьшее положительное) значение силы  $T$  достигается при  $n=1$  и определяется из квадратного уравнения:

$$T^2 \left( \frac{1}{k_2} - \frac{1}{k_1} \right) + T - T_3 = 0, \quad (3.27)$$

Отсюда получим единственное положительное значение  $T$ :

$$T = \frac{\sqrt{1 + 4T_3 \left( \frac{1}{k_2} - \frac{1}{k_1} \right)} - 1}{2 \left( \frac{1}{k_2} - \frac{1}{k_1} \right)}. \quad (3.28)$$

Формула (3.28) совпадает с формулой (2.53) для статической постановки задачи. Таким образом, было показано, что статический и динамический методы исследования устойчивости системы позволяют получить одинаковый результат.

Аналогичным образом были получены решения задач устойчивости для основных типов закрепления стержня, рассмотренных ранее в параграфах 2.2.2 – 2.2.5. Решения задач приведены в приложении А. Для каждой задачи была получена формула, аналогичная по виду (3.28), в которой сила Эйлера  $T_E$  определяется в соответствии с заданными граничными условиями согласно таблице 2.1. Таким образом, динамическим методом была получена универсальная формула для определения критической силы для упругого стержня, сжимаемого мертвой осевой силой.

### **Выводы по главе 3**

1. Для физически линейных упругих стержней приводятся постановка задачи в виде системы дифференциальных уравнений и вариационная постановка в виде задачи о поиске точки стационарности функционала типа Гамильтона. Для гладких решений доказывается эквивалентность вариационной и дифференциальной постановок задачи.

2. Получено выражение для второй вариации функционала Гамильтона, из которой получены точные уравнения задачи устойчивости.

3. Впервые решения задач устойчивости сжатого стержня с учетом всех жесткостей (на изгиб, сдвиг и растяжение – сжатие) для пяти типов граничных условий были получены динамическим методом. Показано, что формулы для определения критической силы для пяти основных типов граничных условий, полученные динамическим методом, совпадают с формулами, полученными ранее в главе 2 с использованием статического метода. Таким образом, было показано, что статический и динамический методы исследования устойчивости системы позволяют получить одинаковый результат, что доказывает, что выведенные формулы для определения критической силы являются верными.

4. Основные результаты, полученные в данной главе, были опубликованы в статьях [37, 94].

## 4. УСТОЙЧИВОСТЬ УПРУГИХ СТЕРЖНЕЙ ПО УПРОЩЕННЫМ МОДЕЛЯМ С ТОЧКИ ЗРЕНИЯ ОБЩЕЙ ТЕОРИИ

### 4.1 Устойчивость стержня Тимошенко

В данном параграфе рассмотрим устойчивость стержня Тимошенко, теория которого основана на учете влияния деформации сдвига на напряженно – деформированное состояние стержня [47]. В качестве примера приведем классическую задачу Эйлера - шарнирно опертый стержень, сжимаемый мертвой осевой силой  $T$ , как показано на рисунке 4.1.

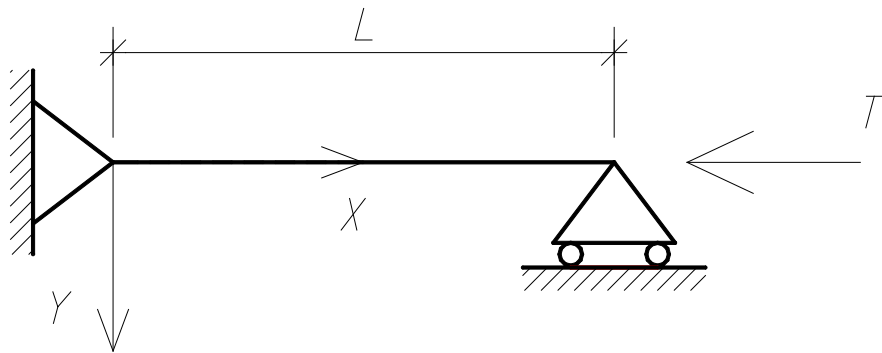


Рисунок 4.1 - Расчетная схема стержня

Постановка геометрически нелинейной задачи для рассматриваемого стержня описана в параграфе 2.6 и состоит из трех групп уравнений: уравнений равновесия (1.171), геометрических уравнений (1.180) и физических уравнений (закон Гука для физически линейного материала) (1.183).

Функционал устойчивости для задачи геометрически нелинейного деформирования физически линейного материала (2.37) был получен в параграфе 2.7. Граничные условия (2.10), соответствующие данной задаче, приведены в пункте 2.2.1. Точное решение нелинейной задачи (1.171), (1.180), (1.183) и (2.10), приведенное в параграфе 2.9.1, описывается формулами (2.44).

Статический функционал устойчивости для рассматриваемой задачи был получен в параграфе 2.9.1. Компоненты функционала, содержащие функцию  $u$ , никак не связаны с функциями  $v$  и  $\theta$ , описывают продольные деформации, не связанные с нагрузкой  $T$ , поэтому будут соответствовать только задаче растяжения – сжатия и могут быть опущены при исследовании устойчивости. Таким образом, функционал устойчивости примет вид:

$$\Phi_{ст}(v, \theta) = \frac{1}{2} \int_0^L \left[ T\theta^2 \left( 1 - \frac{T}{k_1} \right) - 2Tv'\theta + k_2 \left( v' - \left( 1 - \frac{T}{k_1} \right) \theta \right)^2 + k_3\theta'^2 \right] ds. \quad (4.1)$$

При анализе устойчивости стержня Тимошенко принимается допущение, заключающееся в том, что изменение геометрических размеров стержня при докритических деформациях считается пренебрежимо малым; в частности, в процессе нагружения длина стержня, площадь и момент инерции поперечного сечения являются неизменными [1, 47]. Таким образом, стержень в критическом состоянии напряжен, но не деформирован. То есть:

$$N = k_1 \varepsilon = -T; \quad \varepsilon = 0; \quad \Rightarrow \quad k_1 \rightarrow \infty \quad \Rightarrow \quad \frac{1}{k_1} = 0.$$

Отсюда:

$$\Phi_{\text{ст}}(v, \theta) = \frac{1}{2} \int_0^L \left[ k_3 \theta'^2 + k_2 (v' - \theta)^2 + T\theta(\theta - 2v') \right] ds. \quad (4.2)$$

Нетрудно проверить, что функционал устойчивости (4.2) может быть получен из функционала устойчивости (2.45), в котором принимаем  $k_1 \rightarrow \infty \Rightarrow \frac{1}{k_1} = 0$ .

Получим уравнения устойчивости как уравнения Эйлера для задачи  $\Phi_{\text{ст}} \rightarrow \text{СТАЦ}$ . Для этого вычислим первую вариацию функционала устойчивости, определяя вариацию каждого слагаемого функционала. Сначала дадим приращения функциям  $v$  и  $\theta$ , согласно формулам (2.19).

Вычисляем производную по  $\alpha$ , далее полагая  $\alpha = 0$ :

$$k_3 \theta'^2 \rightarrow \frac{d}{d\alpha} \left( k_3 \left( (\theta + \alpha \delta \theta)' \right)^2 \right) \Big|_{\alpha=0} = 2k_3 \left( (\theta + \alpha \delta \theta)' \delta \theta' \right) \Big|_{\alpha=0} = 2k_3 \theta' \delta \theta';$$

$$\begin{aligned} k_2 (v' - \theta)^2 &\rightarrow \frac{d}{d\alpha} \left( k_2 \left( (v + \alpha \delta v)' - (\theta + \alpha \delta \theta) \right)^2 \right) \Big|_{\alpha=0} = \\ &= k_2 \left( 2 \left( (v + \alpha \delta v)' - (\theta + \alpha \delta \theta) \right) (\delta v' - \delta \theta) \right) \Big|_{\alpha=0} = 2k_2 (v' - \theta) (\delta v' - \delta \theta); \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} T\theta(\theta - 2v') &\rightarrow \frac{d}{d\alpha} \left( T(\theta + \alpha \delta \theta) \left( (\theta + \alpha \delta \theta) - 2(v + \alpha \delta v)' \right) \right) \Big|_{\alpha=0} = \\ &= \left( T(\delta \theta \left( (\theta + \alpha \delta \theta) - 2(v + \alpha \delta v)' \right) + (\theta + \alpha \delta \theta) (\delta \theta - 2\delta v') \right) \Big|_{\alpha=0} = \\ &= T(\delta \theta (\theta - 2v') + \theta (\delta \theta - 2\delta v')) = 2T(\theta \delta \theta - \delta v' \theta - v' \delta \theta). \end{aligned}$$

Таким образом, первую вариацию функционала устойчивости можно записать в следующем виде:

$$\delta \Phi_{\text{ст}}(v, \theta) = \int_0^L \left[ k_3 \theta' \delta \theta' + k_2 (v' - \theta) (\delta v' - \delta \theta) + T(\theta \delta \theta - \delta v' \theta - v' \delta \theta) \right] ds. \quad (4.3)$$

Интегрируем (4.3) по частям, чтобы избавиться от производных от вариаций:

$$\int_0^L k_3 \theta' \delta \theta' ds = - \int_0^L k_3 \theta'' \delta \theta ds + k_3 \theta' \delta \theta \Big|_0^L;$$

$$\int_0^L k_2 (v' - \theta) \delta v' ds = - \int_0^L k_2 (v' - \theta)' \delta v ds + k_2 (v' - \theta) \delta v \Big|_0^L;$$

$$\int_0^L T \theta \delta v' ds = - \int_0^L T \theta' \delta v ds + T \theta \delta v \Big|_0^L.$$

Таким образом, после интегрирования по частям первая вариация функционала устойчивости примет вид:

$$\begin{aligned} \delta \Phi_{\text{ст}}(v, \theta) = & - \int_0^L \left[ k_3 \theta'' \delta \theta + k_2 (v' - \theta)' \delta v + k_2 (v' - \theta) \delta \theta + T (v' - \theta) \delta \theta - T \theta' \delta v \right] ds + \\ & + (k_3 \theta' \delta \theta + k_2 (v' - \theta) \delta v - T \theta \delta v) \Big|_0^L. \end{aligned} \quad (4.4)$$

Уравнениями Эйлера, вытекающими из условия  $\delta \Phi_{\text{ст}} = 0$ , являются следующие уравнения:

$$\begin{cases} k_2 (v' - \theta)' - T \theta' = 0; \\ k_3 \theta'' + k_2 (v' - \theta) \left( 1 + \frac{T}{k_2} \right) = 0. \end{cases} \quad (4.5)$$

Нетрудно проверить, что уравнения (4.5) совпадают с уравнениями, полученными из системы (2.46), в которой принимаем  $k_1 \rightarrow \infty \Rightarrow \frac{1}{k_1} = 0$ .

Общее решение системы (4.5), содержащее четыре произвольных постоянных  $C_1 - C_4$ , можно записать в виде:

$$\begin{cases} v(s) = -C_1 \frac{B}{\lambda} \cos \lambda s + C_2 \frac{B}{\lambda} \sin \lambda s + C_3 \left( 1 - \frac{k_2 B}{T} \right) s + C_4 \\ \theta(s) = C_1 \sin \lambda s + C_2 \cos \lambda s - C_3 \frac{k_2}{T}, \end{cases} \quad (4.6)$$

где использованы следующие обозначения

$$B = 1 + \frac{T}{k_2}, \quad \lambda^2 = \frac{TB}{k_3}.$$

Граничные условия (2.48) для задачи устойчивости шарнирно опертого физически линейного стержня приведены в пункте 2.9.1.

Подставив точное решение (2.44) в выражения (2.7) и принимая согласно гипотезе  $k_1 \rightarrow \infty \Rightarrow \frac{1}{k_1} = 0$ , вариации деформаций могут быть записаны в виде:

$$\begin{cases} \varepsilon_B = u'; \\ \gamma_B = v' - \theta; \\ \psi_B = \theta'. \end{cases} \quad (4.7)$$

Подставив точное решение (2.44) в граничные условия (2.48) и используя выражения (2.40) и (4.7), граничные условия для шарнирно закрепленного стержня могут быть записаны в виде:

$$\begin{aligned} s = 0: & & s = L: \\ u(0) = 0; & & k_1 u'(L) = 0; \\ v(0) = 0; & & v(L) = 0; \\ k_3 \theta'(0) = 0; & & k_3 \theta'(L) = 0; \end{aligned} \quad (4.8)$$

Условия  $u(0) = 0$ ,  $k_1 u'(L) = 0$  соответствуют продольным деформациям и далее могут быть опущены.

Подставляя общее решение системы (4.6) в граничные условия (4.8), получаем систему из четырех уравнений:

$$\begin{cases} -C_1 \frac{B}{\lambda} + C_4 = 0; \\ -C_1 \frac{B}{\lambda} \cos \lambda L + C_2 \frac{B}{\lambda} \sin \lambda L + C_3 \left(1 - \frac{k_2 B}{T}\right) L + C_4 = 0; \\ C_1 \lambda = 0; \\ C_1 \lambda \cos \lambda L - C_2 \lambda \sin \lambda L = 0. \end{cases} \quad (4.9)$$

Отсюда:

$$\begin{cases} C_1 = 0; \\ C_3 = 0; \\ C_4 = 0; \\ C_2 \lambda \sin \lambda L = 0 \end{cases}$$

Таким образом, нетривиальное решение уравнений (4.5) существует при  $\lambda L = \pi n$ , где  $n=1,2,3,\dots$

Подставив выражение для  $\lambda$  и  $B$ , получаем:

$$\sqrt{\frac{TL^2}{k_3} \left(1 + \frac{T}{k_2}\right)} = \pi n.$$

Отсюда:

$$T \left(1 + \frac{T}{k_2}\right) = \frac{\pi^2 n^2 k_3}{L^2}.$$



Как и в параграфе 2.9.1 можно показать, что критическое (наименьшее положительное) значение силы  $T$  достигается при  $n=1$  и определяется из квадратного уравнения:

$$\frac{T^2}{k_2} + T - T_3 = 0, \quad (4.10)$$

где  $T_3 = \frac{\pi^2 k_3}{L^2}$  – сила Эйлера для шарнирно опертого стержня [47].

Отсюда получим единственное положительное значение  $T$ :

$$T_{кр} = \frac{k_2}{2} \left( \sqrt{1 + \frac{4T_3}{k_2}} - 1 \right). \quad (4.11)$$

Решение (4.11) представляет собой точное решение задачи устойчивости шарнирно опертого стержня с учетом жесткостей на сдвиг и изгиб.

Нетрудно проверить, что формула для критической силы (4.11) совпадает с формулой, полученной из (2.53), в которой принимаем  $k_1 \rightarrow \infty \Rightarrow \frac{1}{k_1} = 0$ . Можно показать, что формула (4.11) остается справедливой для всех остальных типов задач, рассмотренных ранее в параграфах 2.2.2 – 2.2.5, кроме задачи, приведенной в параграфе 2.2.6, устойчивость которой будет исследована далее в параграфе 4.7.

## 4.2 Сравнение полученных результатов с классическими результатами для стержня Тимошенко

Статический функционал устойчивости для стержня Тимошенко (4.2) получен в параграфе 4.1. Общепринятый классический вид статического функционала устойчивости в технической литературе, согласно [1, 47] имеет вид:

$$\Phi_{ст}(\nu, \theta) = \frac{1}{2} \int_0^L [k_3 \theta'^2 + k_2 (\nu' - \theta)^2 - T \nu'^2] ds. \quad (4.12)$$

Проанализировав последнее слагаемое в функционалах устойчивости (4.2) и (4.12), можно прийти к выводу, что в случае равенства нулю вариации деформации сдвига функционалы идентичны.

То есть, в случае  $\gamma_B = 0$ , из выражений (4.7) следует:

$$\nu' - \theta = 0. \quad (4.13)$$

Подставив полученное выражение в последнее слагаемое (4.2), будем иметь:

$$T \nu' (\nu' - 2\nu') = -T \nu'^2.$$

В результате функционал устойчивости (4.2), примет вид:

$$\Phi_{\text{ст}}(v, \theta) = \frac{1}{2} \int_0^L \left[ k_3 \theta'^2 + k_2 (v' - \theta)^2 - T v'^2 \right] ds, \quad (4.14)$$

совпадающий с функционалом устойчивости (4.12). В то же время предположение  $\gamma_B = 0$ , используемое в третьем слагаемом функционала, во втором слагаемом не применяется. Если же в функционале (4.14) и во второе слагаемое подставить выражение (4.13), то мы получим классический функционал устойчивости стержня Бернулли – Эйлера, который будет рассмотрен в следующем параграфе.

Таким образом, сравнение функционалов устойчивости (4.2) и (4.12) доказывает, что при выводе классического функционала устойчивости (4.12) была использована гипотеза, заключающаяся в равенстве нулю вариации деформации сдвига ( $\gamma \neq 0$ ;  $\gamma_B = 0$ ), что является непоследовательным. Вышесказанное позволяет нам сделать вывод, что классический функционал устойчивости (4.12) является ошибочным.

Иной вид имеет и статический функционал устойчивости для стержня Тимошенко, приведенный в работе [47]:

$$\Phi_{\text{ст}}(v, \theta) = \frac{1}{2} \int_0^L \left[ k_3 \theta'^2 + k_2 (v' - \theta)^2 - T \frac{(v' + \theta)^2}{4} \right] ds. \quad (4.15)$$

Уравнения устойчивости в задаче устойчивости равновесия стержня Тимошенко (4.5), вытекающие из функционала устойчивости (4.2) и получены в параграфе 4.1. В то же время классические уравнения устойчивости для рассматриваемой задачи, вытекающие из функционала устойчивости (4.12), имеют вид [1, 47]:

$$\begin{cases} k_2 (v' - \theta)' - T v'' = 0; \\ k_3 \theta'' + k_2 (v' - \theta) = 0. \end{cases} \quad (4.16)$$

Уравнения устойчивости для стержня Тимошенко, полученные в работе [47] имеют иной вид:

$$\begin{cases} k_2 (v' - \theta)' - T \frac{(v' + \theta)'}{4} = 0; \\ k_3 \theta'' + k_2 (v' - \theta) + T \frac{(v' + \theta)}{4} = 0. \end{cases} \quad (4.17)$$

Решение системы уравнений (4.5), представляющее собой точное решение задачи устойчивости шарнирно опертого стержня с учетом жесткостей на сдвиг и изгиб (4.11), было получено в параграфе 4.1.

Решение системы уравнений (4.16) приводит к классической формуле Энгессера [1, 47]:

$$T_{\text{Энг}} = \frac{T_3}{1 + \frac{T_3}{k_2}}. \quad (4.18)$$

Поскольку, жесткость стержня на сдвиг существенно больше жесткости стержня на изгиб, отношение  $\frac{T_3}{k_2}$  можно считать бесконечно малой величиной. Раскладывая подкоренное выражение в формуле (4.11), а также знаменатель в формуле (4.18) в ряды и учитывая слагаемые первого порядка малости, получим:

$$T_{\text{кр}} = \frac{k_2}{2} \left( 1 + \frac{1}{2} \frac{4T_3}{k_2} - \frac{1}{4 \cdot 2!} \left( \frac{4T_3}{k_2} \right)^2 - 1 \right) = T_3 \left( 1 - \frac{T_3}{k_2} \right); \quad (4.19)$$

$$T_{\text{Энг}} = T_3 \left( 1 - \frac{T_3}{k_2} \right). \quad (4.20)$$

Таким образом, можно сделать вывод, что известное решение Энгессера (4.18) совпадает с решением (4.11) с точностью до малых первого порядка.

Из системы уравнений (4.17), как показано в работе [47], вытекает формула для определения критической силы:

$$T_{\text{кр}} = \frac{T_3}{1 + \frac{T_3}{4k_2}}. \quad (4.21)$$

Несложно заметить, что формулы для определения критической силы (4.11), (4.18) и (4.21) существенно различаются по написанию. Следует подчеркнуть, что полученная нами формула (4.11) является точным решением уравнений устойчивости физически линейного стержня Тимошенко. При ее выводе не делалось никаких упрощающих предположений о величинах перемещений и углов поворота, а также о характере напряженно-деформированного состояния стержня (кроме общепринятого допущения о недеформируемости стержня в докритическом состоянии).

Для оценки погрешности формулы Энгессера (4.18) проведем сравнение значений, полученных по данной формуле со значениями, полученными по формуле (4.11). Для этого выразим формулы в безразмерных коэффициентах и построим графики, как показано на рисунке 4.2.

Вертикальная линия на рисунке 4.2 соответствует пятипроцентной разнице между точным значением, полученным по формуле (4.11) и значением, полученным по формуле Энгессера (4.18) для стержня Тимошенко. Значения, расположенные левее вертикальной линии, соответствуют разнице менее 5%, расположенные правее – разнице более 5%.

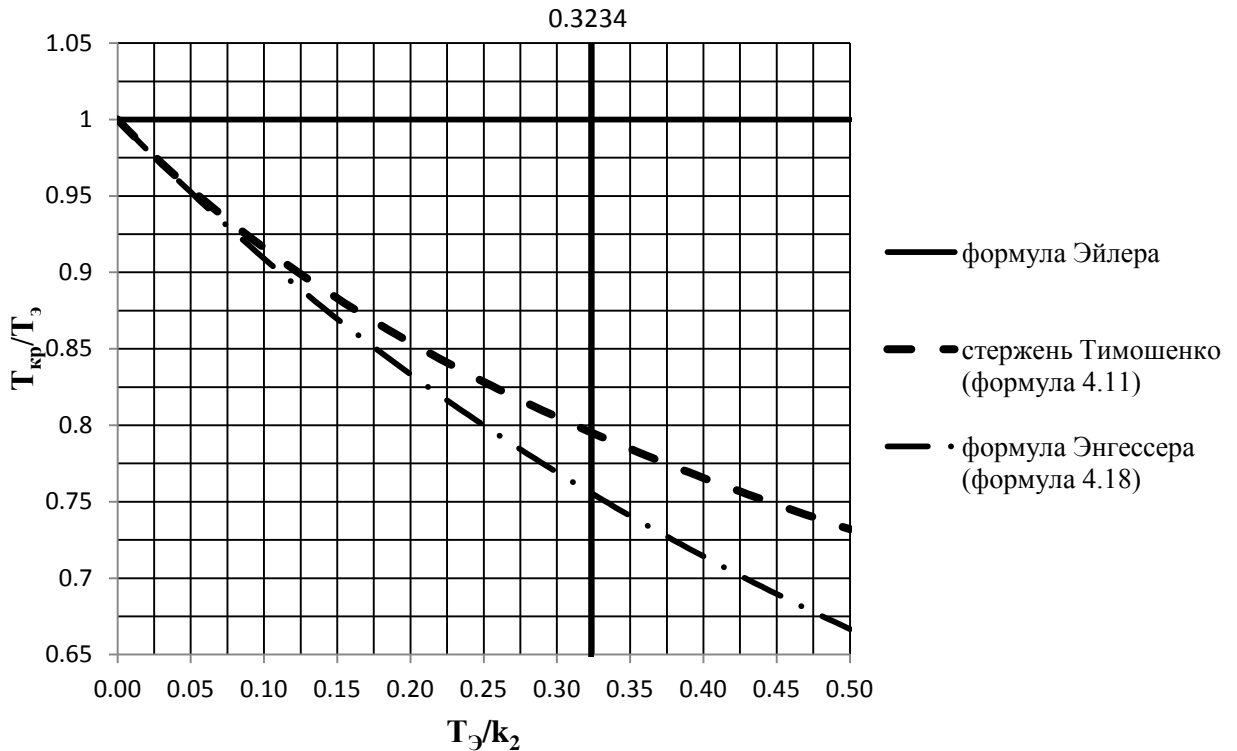


Рисунок 4.2 – Сравнение полученных результатов с классическими результатами для стержня Тимошенко

Проанализировав приведенные графики, представленные на рисунке 4.2, можно сделать вывод, что из полученной нами формулы (4.11) вытекает большее значение критической силы, чем значение, полученное из формулы Энгессера (4.18). Таким образом, можно прийти к выводу, что формула Энгессера для определения критической силы является неточной, в то время как формула (4.11) учитывает внутренние «резервы» стержня под действием «мертвой» осевой нагрузки.

### 4.3 Оценка влияния жесткости стержня на растяжение – сжатие на значение критической силы

Для оценки влияния жесткости на растяжение – сжатие первоначально прямолинейного стержня, сжимаемого «мертвой» осевой силой  $T$ , как показано на рисунке 4.1, проведем сравнение значений критической силы, вычисленных по формуле (2.53), полученной в параграфе 2.9.1 и учитывающей жесткости на растяжение – сжатие, сдвиг и изгиб, со значениями, вычисленными по формуле (4.11) для стержня Тимошенко, полученной в параграфе 4.1 и учитывающей только жесткости стержня на сдвиг и изгиб. В качестве примера, как показано на рисунке 4.3, приведем графики для стоек, выполненных из колонных двутавров, в соответствии с [18]. Для наглядности на графике также приведен график значений критической силы для стержня Тимошенко, вычисленных по формуле Энгессера (4.18).

Проанализировав графики, представленные на рисунке 4.3, можно сделать вывод, что уже для колонного двутавра 40К1 разница между значением, учитывающим жесткость на растяжение – сжатие, и значением, не учитывающим данную жесткость, составляет более двух процентов. Окончательные результаты приведены в таблице Б.1 приложения Б.

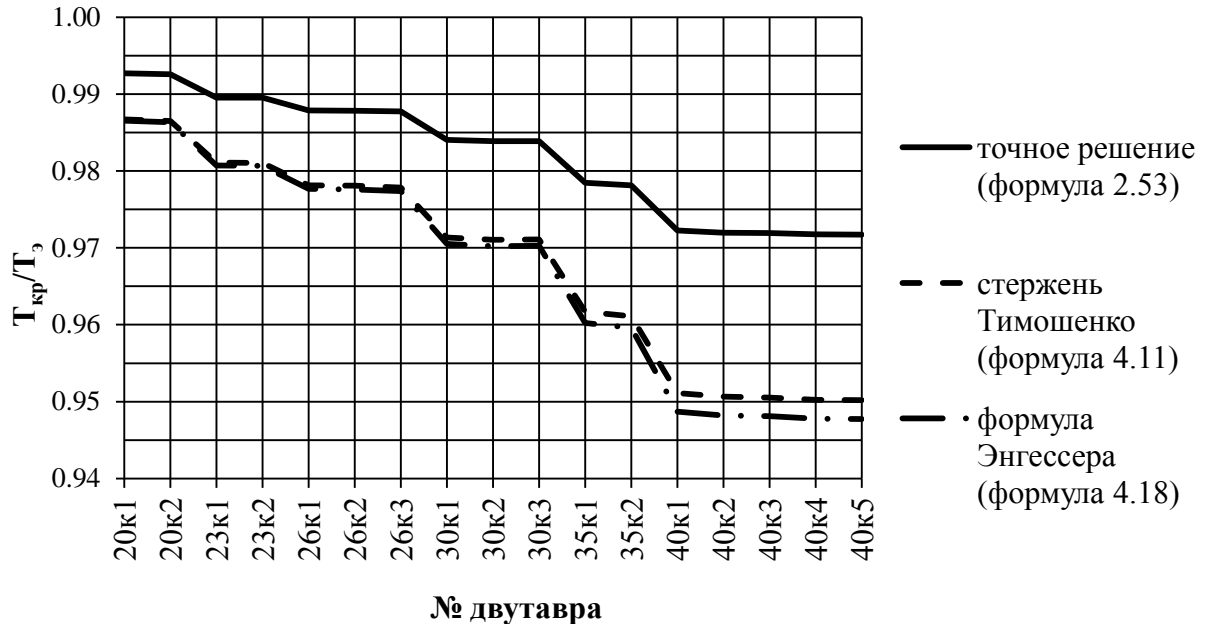


Рисунок 4.3 – Оценка влияния жесткости стержня на растяжение – сжатие на значение критической силы

Проанализировав полученные результаты, можно прийти к выводу, что учет жесткости на растяжение – сжатие приводит к увеличению критической силы. Таким образом, принимая во внимание жесткость на растяжение – сжатие, мы учитываем внутренние «резервы» стержня под действием «мертвой» осевой нагрузки.

#### 4.4 Устойчивость стержня Бернулли – Эйлера без учета продольной податливости

В данном параграфе рассмотрим устойчивость стержня Бернулли - Эйлера, в котором не учитывается влияние деформации сдвига на напряженно – деформированное состояние стержня, а также принимается гипотеза о недеформируемости стержня в докритическом состоянии. Как и в параграфе 4.1 в качестве примера приведем классическую задачу Эйлера - шарнирно опертый стержень, сжимаемый мертвой осевой силой  $T$ , как показано на рисунке 4.1.

Постановка задачи, граничные условия и точное решение задачи устойчивости физически линейного упругого стержня Бернулли – Эйлера будут аналогичны постановке задачи, граничным условиям и точному решению задачи устойчивости физически линейного упругого стержня Тимошенко при условии равенства нулю деформации сдвига.

Как и при анализе устойчивости стержня Тимошенко, при анализе устойчивости стержня Бернулли - Эйлера принимается допущение, заключающееся в том, что изменение геометрических размеров стержня при докритических деформациях считается пренебрежимо малым; в частности, в процессе нагружения длина стержня, площадь и момент инерции поперечного сечения являются неизменными [1, 47]. Таким образом, стержень в критическом состоянии напряжен, но не деформирован. То есть:

$$N = k_1 \varepsilon = -T; \quad \varepsilon = 0; \quad \Rightarrow \quad k_1 \rightarrow \infty \quad \Rightarrow \quad \frac{1}{k_1} = 0. \quad (4.22)$$

Таким образом, как было показано в параграфе 4.1, функционал устойчивости примет вид:

$$\Phi_{\text{ст}}(v, \theta) = \frac{1}{2} \int_0^L [k_3 \theta'^2 + k_2 (v' - \theta)^2 + T\theta(\theta - 2v')] ds. \quad (4.23)$$

Как было сказано ранее, при исследовании устойчивости стержня Бернулли - Эйлера деформация сдвига не учитывается, то есть:

$$\gamma = 0; \quad \Rightarrow \quad k_2 \rightarrow \infty \quad \Rightarrow \quad \frac{1}{k_2} = 0.$$

Поскольку  $\gamma = 0 \Rightarrow \gamma_B = 0$ . В случае  $\gamma_B = 0$ , из выражений (4.7) следует:

$$v' - \theta = 0. \quad (4.24)$$

Используя выражения (2.40), (4.24), второе слагаемое функционала (4.23) можно записать в виде:

$$k_2 (v' - \theta)^2 = Q_B (v' - \theta) = 0. \quad (4.25)$$

Подставив (4.24) и (4.25) в функционал устойчивости (4.23), окончательно получим:

$$\Phi_{\text{ст}}(v, \theta) = \frac{1}{2} \int_0^L [k_3 v''^2 - T v'^2] ds. \quad (4.26)$$

Функционал устойчивости (4.26) совпадает с общепринятым классическим, известным из литературы функционалом устойчивости для стержня Бернулли - Эйлера, согласно [1, 46].

Нетрудно проверить, что функционал устойчивости (4.26) может быть получен из функционала устойчивости (2.45), в котором принимаем  $k_1 \rightarrow \infty \Rightarrow \frac{1}{k_1} = 0$ ;  $k_2 \rightarrow \infty \Rightarrow \frac{1}{k_2} = 0$ .

Уравнением Эйлера, вытекающим из условия  $\delta\Phi_{\text{ст}}=0$ , является следующее уравнение [1, 46]:

$$k_3 v^{IV} + T v'' = 0. \quad (4.27)$$

Нетрудно проверить, что уравнение (4.27) совпадают с уравнением, полученным из системы (2.46), в которой принимаем  $k_1 \rightarrow \infty \Rightarrow \frac{1}{k_1} = 0$ ;  $k_2 \rightarrow \infty \Rightarrow \frac{1}{k_2} = 0$ .

Как показано в работах [1, 46] решением уравнения устойчивости (4.27) является классическая общепринятая формула Эйлера для определения критической силой без учета жесткостей на растяжение – сжатие и сдвиг:

$$T = \frac{\pi^2 k_3}{L^2}. \quad (4.28)$$

Нетрудно проверить, что формула для критической силы (4.28) совпадает с формулой, полученной из (2.53), в которой принимаем  $k_1 \rightarrow \infty \Rightarrow \frac{1}{k_1} = 0$ ;  $k_2 \rightarrow \infty \Rightarrow \frac{1}{k_2} = 0$ . Таким образом, в настоящем параграфе показано, что классическое решение Эйлера является правильным с точки зрения общей теории, в отличие от балки Тимошенко.

#### **4.5 Устойчивость стержня Бернулли – Эйлера с учетом продольной податливости**

В данном параграфе рассмотрим устойчивость стержня Бернулли - Эйлера, в котором, как было указано в параграфе 4.5, в отличие от стержня Тимошенко не учитывается влияние деформации сдвига на напряженно – деформированное состояние стержня. В данном параграфе при анализе устойчивости стержня Бернулли - Эйлера мы откажемся от допущения, заключающегося в том, что изменение геометрических размеров стержня при докритических деформациях считается пренебрежимо малым.

Как и в параграфах 4.1, 4.4 в качестве примера приведем классическую задачу Эйлера - шарнирно опертый стержень, сжимаемый мертвой осевой силой  $T$ , как показано на рисунке 4.1.

Постановка задачи, граничные условия и точное решение задачи устойчивости рассматриваемого стержня будут аналогичны постановке задачи, граничным условиям и точному решению задачи устойчивости физически линейного упругого стержня Тимошенко при условии равенства нулю деформации сдвига. Таким образом, как было показано в параграфе 4.1, функционал устойчивости имеет вид (4.1).

Как было сказано ранее, при исследовании устойчивости стержня Бернулли – Эйлера деформация сдвига не учитывается, то есть:

$$\gamma = 0; \Rightarrow k_2 \rightarrow \infty \Rightarrow \frac{1}{k_2} = 0.$$

$$\text{Поскольку } \gamma = 0 \Rightarrow \gamma_B = 0.$$

В случае  $\gamma_B = 0$ , из точного решения (2.44) и выражений (2.7) следует:

$$v' - \left(1 - \frac{T}{k_1}\right)\theta = 0. \quad (4.29)$$

Используя выражения (2.40), (4.29), второе слагаемое функционала (4.1) можно записать в виде:

$$k_2 \left( v' - \left( 1 - \frac{T}{k_1} \right) \theta \right)^2 = Q_B \left( v' - \left( 1 - \frac{T}{k_1} \right) \theta \right) = 0. \quad (4.30)$$

Подставив (4.29) и (4.30) в функционал устойчивости (4.1), окончательно получим:

$$\Phi_{\text{ст}}(v, \theta) = \frac{1}{2} \int_0^L \left[ \frac{k_3 v''^2}{\left( 1 - \frac{T}{k_1} \right)^2} - \frac{T v'^2}{\left( 1 - \frac{T}{k_1} \right)} \right] ds. \quad (4.31)$$

Нетрудно проверить, что функционал устойчивости (4.31) может быть получен из функционала устойчивости (2.45), в котором принимаем  $k_2 \rightarrow \infty \Rightarrow \frac{1}{k_2} = 0$ .

Первая вариация функционала устойчивости может быть записана в виде:

$$\delta \Phi_{\text{ст}}(v, \theta) = \int_0^L \left[ \frac{k_3 v'' \delta v''}{\left( 1 - \frac{T}{k_1} \right)^2} - \frac{T v' \delta v'}{\left( 1 - \frac{T}{k_1} \right)} \right] ds.$$

Интегрируем по частям, чтобы избавиться от производных от вариаций. Окончательно, первая вариация функционала устойчивости примет вид:

$$\delta \Phi_{\text{ст}}(v, \theta) = \int_0^L \left[ \left( \frac{k_3 v^{IV}}{\left( 1 - \frac{T}{k_1} \right)^2} + \frac{T v''}{\left( 1 - \frac{T}{k_1} \right)} \right) \delta v \right] ds + \left( \frac{k_3 v''}{\left( 1 - \frac{T}{k_1} \right)^2} \delta v' - \delta v \left( \frac{k_3 v'''}{\left( 1 - \frac{T}{k_1} \right)^2} + \frac{T v'}{\left( 1 - \frac{T}{k_1} \right)} \right) \right) \Big|_0^L. \quad (4.32)$$

Уравнением Эйлера, вытекающим из условия  $\delta \Phi_{\text{ст}} = 0$ , являются следующее уравнение:

$$\frac{k_3 v^{IV}}{\left( 1 - \frac{T}{k_1} \right)^2} + \frac{T v''}{\left( 1 - \frac{T}{k_1} \right)} = 0. \quad (4.33)$$



Нетрудно проверить, что уравнение (4.33) совпадают с уравнением, полученным из системы (2.46), в которой принимаем  $k_2 \rightarrow \infty \Rightarrow \frac{1}{k_2} = 0$ .

Решение уравнения (4.33), содержащее четыре произвольных постоянных  $C_1 - C_4$ , можно записать в виде:

$$v(s) = -C_1 \frac{1}{T} \cos \sqrt{\frac{T \left(1 - \frac{T}{k_1}\right)}{k_3}} s + C_2 \frac{1}{T} \sin \sqrt{\frac{T \left(1 - \frac{T}{k_1}\right)}{k_3}} s + C_3 s + C_4. \quad (4.34)$$

Главные граничные условия для рассматриваемой задачи для функций  $u$ ,  $v$ ,  $\theta$  были получены в пункте (2.2.1):  $u(0) = v(0) = v(L) = 0$ . Найдем вариацию приведенных граничных условий. Для этого даем приращения функциям согласно формулам (2.19), вычисляем производную по  $\alpha$  и полагаем  $\alpha=0$ .

$$u(0) \rightarrow (u(0) + \alpha \delta u(0))'_{\alpha=0} = \delta u(0);$$

$$v(0) \rightarrow (v(0) + \alpha \delta v(0))'_{\alpha=0} = \delta v(0);$$

$$v(L) \rightarrow (v(L) + \alpha \delta v(L))'_{\alpha=0} = \delta v(L).$$

Используя выражения (4.29) и (2.19), выражение для  $\delta\theta$  примет вид:

$$\delta\theta = \frac{\delta v'}{\left(1 - \frac{T}{k_1}\right)}. \quad (4.35)$$

Компоненты, содержащие функцию  $u$ , никак не связаны с функциями  $v$  и  $\theta$ , описывают продольные деформации, не связанные с нагрузкой  $T$ , поэтому будут соответствовать только задаче растяжения – сжатия и могут быть опущены при исследовании устойчивости. Отсюда следует, что из внеинтегральных слагаемых первой вариации функционала устойчивости (4.32) слагаемые с  $\delta v(0)$ ,  $\delta v(L)$  пропадают, и остаются только слагаемые с  $\delta\theta(0)$  и  $\delta\theta(L)$ .

Окончательно, используя выражение (4.35), внеинтегральные слагаемые для рассматриваемой задачи могут быть записаны в виде:

$$\delta\theta(L) \cdot \left. \left( \frac{k_3 v''}{\left(1 - \frac{T}{k_1}\right)} \right) \right|_{s=L} - \delta\theta(0) \cdot \left. \left( \frac{k_3 v''}{\left(1 - \frac{T}{k_1}\right)} \right) \right|_{s=0}.$$

Из условия  $\delta\Phi_{ст}=0$  при любых вариациях  $\delta u$ ,  $\delta v$ ,  $\delta\theta$  следует равенство нулю множителей при  $\delta\theta(0)$  и  $\delta\theta(L)$ . Таким образом, получаем следующие естественные граничные условия:

$$\left. \left( \frac{k_3 v''}{\left(1 - \frac{T}{k_1}\right)} \right) \right|_{s=L} = 0; \quad \left. \left( \frac{k_3 v''}{\left(1 - \frac{T}{k_1}\right)} \right) \right|_{s=0} = 0.$$

Окончательно, граничные условия для поставленной задачи могут быть записаны в виде:

$$\begin{aligned} s = 0: & & s = L: \\ v(0) = 0; & & v(L) = 0; \\ \left. \left( k_3 v'' / \left(1 - \frac{T}{k_1}\right) \right) \right|_{s=0}; & & \left. \left( k_3 v'' / \left(1 - \frac{T}{k_1}\right) \right) \right|_{s=L}. \end{aligned} \quad (4.36)$$

Подставляя общее решение системы (4.34) в граничные условия (4.36), получаем систему из четырех уравнений:

$$\left\{ \begin{aligned} -C_1 \frac{1}{T} + C_4 &= 0; \\ -C_1 \frac{1}{T} \cos \sqrt{\frac{T \left(1 - \frac{T}{k_1}\right)}{k_3}} L + C_2 \frac{1}{T} \sin \sqrt{\frac{T \left(1 - \frac{T}{k_1}\right)}{k_3}} L + C_3 L + C_4 &= 0; \\ C_1 &= 0; \\ C_1 \cos \sqrt{\frac{T \left(1 - \frac{T}{k_1}\right)}{k_3}} L - C_2 \sin \sqrt{\frac{T \left(1 - \frac{T}{k_1}\right)}{k_3}} L &= 0. \end{aligned} \right. \quad (4.37)$$

Отсюда:

$$\left\{ \begin{aligned} C_1 &= 0; \\ C_3 &= 0; \\ C_4 &= 0; \\ C_2 \sin \sqrt{\frac{T \left(1 - \frac{T}{k_1}\right)}{k_3}} L &= 0 \end{aligned} \right.$$

Таким образом, нетривиальное решение уравнения (4.33) существует при

$$\sqrt{\frac{TL^2}{k_3} \left(1 - \frac{T}{k_1}\right)} = \pi n, \text{ где } n=1,2,3\dots$$

Отсюда:

$$T \left(1 - \frac{T}{k_1}\right) = \frac{\pi^2 n^2 k_3}{L^2}.$$

Как и в параграфе 2.9.1 можно показать, что критическое (наименьшее положительное) значение силы  $T$  достигается при  $n=1$  и определяется из квадратного уравнения:

$$\frac{T^2}{k_1} - T + T_3 = 0, \quad (4.38)$$

где  $T_3 = \frac{\pi^2 k_3}{L^2}$  – сила Эйлера для шарнирно опертого стержня [47].

Отсюда получим единственное положительное значение  $T$ :

$$T_{кр} = \frac{k_1}{2} \left( 1 - \sqrt{1 - \frac{4T_3}{k_1}} \right). \quad (4.39)$$

Решение (4.39) представляет собой решение задачи устойчивости шарнирно опертого стержня с учетом жесткостей на растяжение - сжатие и изгиб.

Нетрудно проверить, что формула для критической силы (4.39) совпадает с формулой, полученной из (2.53), в которой принимаем  $k_2 \rightarrow \infty \Rightarrow \frac{1}{k_2} = 0$ .

Можно показать, что формула (4.39) остается справедливой для всех остальных типов задач, рассмотренных ранее в параграфах 2.2.2 – 2.2.5, кроме задачи, приведенной в параграфе 2.2.6, устойчивость которой будет исследована далее в параграфе 4.7.

Поскольку, жесткость стержня на растяжение - сжатие существенно больше жесткости стержня на изгиб, отношение  $\frac{T_3}{k_1}$  можно считать бесконечно малой величиной. Раскладывая подкоренное выражение в формуле (4.39) в ряды и учитывая слагаемые первого и второго порядка малости, получим:

$$T_{кр} = \frac{k_1}{2} \left( 1 - 1 + \frac{1}{2} \frac{4T_3}{k_1} + \frac{1}{4 \cdot 2!} \left( \frac{4T_3}{k_1} \right)^2 \right) = T_3 \left( 1 + \frac{T_3}{k_1} \right); \quad (4.40)$$

Таким образом, можно сделать вывод, что решение (4.40) для задачи устойчивости стержня Бернулли – Эйлера с учетом жесткостей на растяжение – сжатие и изгиб совпадает с общепринятой формулой Эйлера (4.28), учитывающей только жесткость на изгиб, с точностью до малых первого порядка.

Для оценки погрешности формулы (4.39), учитывающей жесткость на растяжение – сжатие и изгиб, выразим (2.53), (4.28) и (4.39) в безразмерных коэффициентах  $\frac{T_3}{k_1}$  и построим графики. В качестве примера, как показано на рисунке 4.4, приведем графики для стоек, выполненных из колонных двутавров, в соответствии с [18]. Проанализировав графики, представленные на рисунке 4.4, можно сделать вывод, что уже для колонного двутавра 20К1 разница между

точным значением, полученным по формуле (2.53) и учитывающим жесткости на растяжение – сжатие, сдвиг и изгиб, и значением, полученным для стержня Бернулли – Эйлера по формуле (4.39) и учитывающим жесткость на растяжение – сжатие и изгиб, составляет более одного процента. Окончательные результаты приведены в таблице В.1 приложения В.

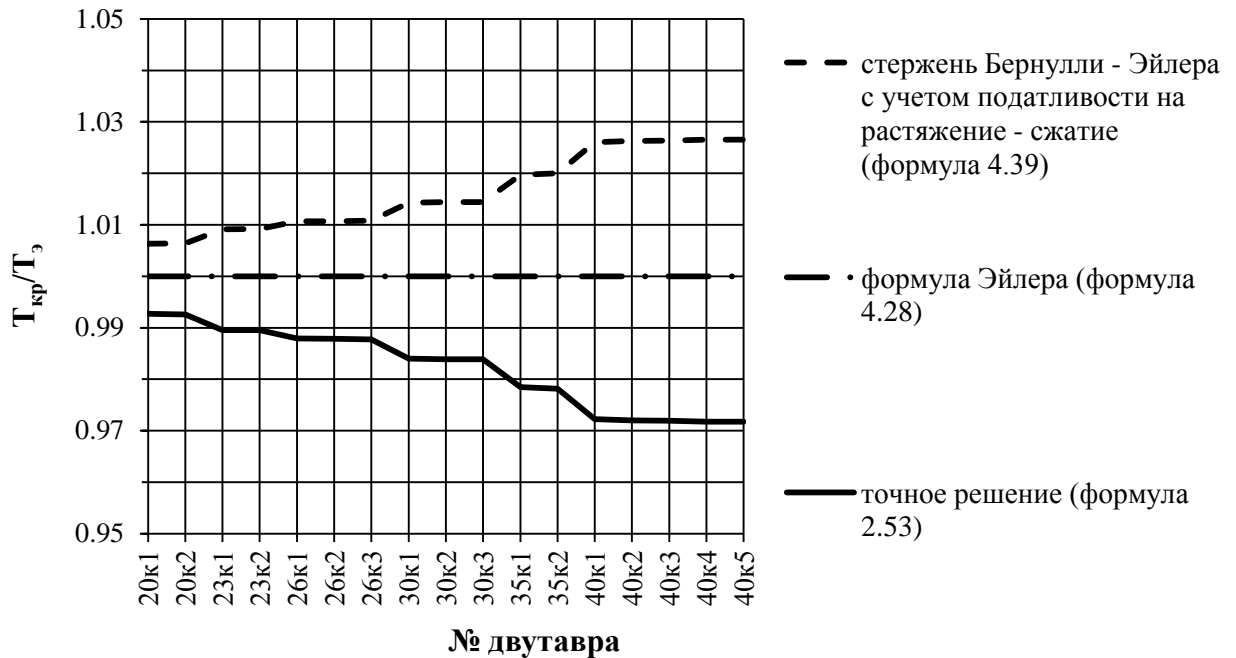


Рисунок 4.4 – Сравнение полученных результатов для стержня Бернулли – Эйлера с учетом продольной податливости с результатами, полученными по точной формуле, учитывающей жесткости на растяжение – сжатие, сдвиг и изгиб

Проанализировав приведенные графики, представленные на рисунке 4.4, можно сделать вывод, что значение критической силы, полученное из формулы (4.39) больше, чем значение, полученное из точной формулы (2.53) и значение, полученное из формулы Эйлера (4.28). Таким образом, можно прийти к выводу, что применение формулы (4.39) приводит к риску потери устойчивости стержнем еще до достижения критической силы, вычисленной по формуле (4.39). Следовательно, как показывает рисунок 4.4, при анализе устойчивости стержня недопустимо учитывать жесткость на растяжение – сжатие, не учитывая жесткость на сдвиг.

#### 4.6 Оценка влияния жесткостей стержня на растяжение – сжатие и сдвиг на значение критической силы

Для оценки влияния жесткостей на растяжение – сжатие и сдвиг первоначально прямолинейного стержня, сжимаемого «мертвой» осевой силой  $T$ , как показано на рисунке 4.1, проведем сравнение значений критической силы, вычисленных по формуле (2.53), полученной в параграфе 2.9.1 и учитывающей жесткости на растяжение – сжатие, сдвиг и изгиб, со

значениями, вычисленными по формуле (4.28) для стержня Бернулли – Эйлера, учитывающей только жесткость на изгиб. В качестве примера, как показано на рисунке 4.5, приведем графики для стоек, выполненных из колонных двутавров, в соответствии с [18]. Для наглядности на графике также приведены график значений критической силы для стержня Тимошенко, вычисленных по формуле (4.11), а также график значений критической силы для стержня Бернулли - Эйлера с учетом продольной податливости, вычисленных по формуле (4.39). Окончательные результаты приведены в таблице Г.1 в приложения Г.

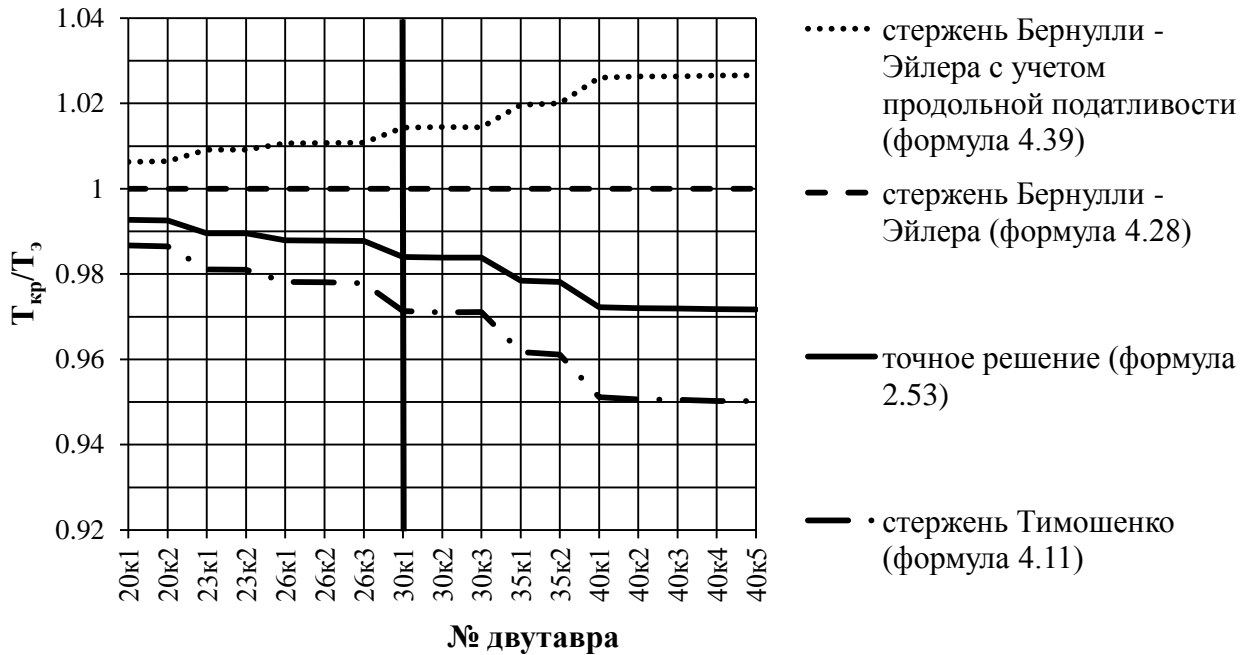


Рисунок 4.5 – Оценка влияния жесткостей стержня на растяжение – сжатие и сдвиг на значение критической силы

Проанализировав полученные результаты, можно прийти к выводу, что учет жесткостей на растяжение – сжатие и сдвиг приводит к существенному уменьшению критической силы. Таким образом, использование общепринятой формулы Эйлера (4.28) приводит к риску, потери устойчивости стержнем еще до достижения критической силы, вычисленной по формуле (4.28).

#### 4.7 Асимптотическое решение задачи устойчивости стержня с заделкой на одном конце и шарнирной опорой на другом

Рассмотрим задачу - стержень с заделкой на одном конце и шарнирной опорой на другом, сжимаемый «мертвой» осевой силой  $T$ , как показано на рисунке 4.6. Исходная равновесная конфигурация - прямолинейная.

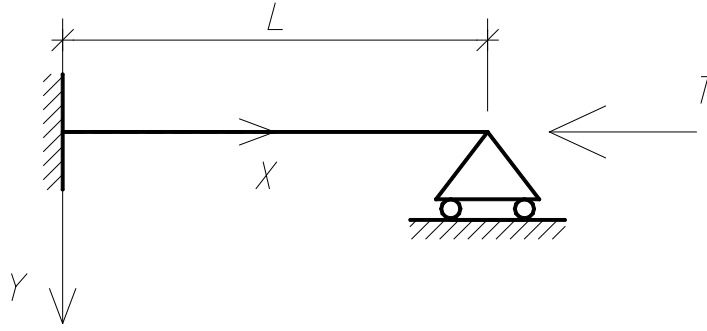


Рисунок 4.6 – Расчетная схема стержня

Как было показано в параграфе 2.9.6, для шестой задачи устойчивости равновесия стержня с заделкой и шарнирной опорой, представленной на рисунке 4.6, аналитическое решение не может быть получено, а критическая сила определяется численно, как наименьший положительный корень уравнения (2.93), полученного в параграфе 2.9.6.

Рассмотрим некоторые частные случаи:

#### 4.7.1 Случай большой жесткости на растяжение - сжатие ( $1/k_1 = 0$ , Стержень Тимошенко)

Уравнение (2.93) в этом случае принимает вид:

$$\left(1 + \frac{T}{k_2}\right) \sin\left(L\sqrt{\frac{T}{k_3}\left(1 + \frac{T}{k_2}\right)}\right) = L\sqrt{\frac{T}{k_3}\left(1 + \frac{T}{k_2}\right)} \cos\left(L\sqrt{\frac{T}{k_3}\left(1 + \frac{T}{k_2}\right)}\right). \quad (4.41)$$

Получим асимптотическое решение уравнения (4.41). Используя обозначения:

$$b = \sqrt{\frac{TL^2}{k_3}}; \quad \xi_1 = \frac{k_3}{k_2 L^2}, \quad (4.42)$$

запишем уравнение (4.41) в безразмерном виде:

$$\operatorname{tg}\left(b\sqrt{1 + b^2\xi_1}\right) = \frac{b}{\sqrt{1 + b^2\xi_1}}. \quad (4.43)$$

Неизвестное  $b$  будем искать в виде асимптотического разложения по малому параметру  $\xi_1$ :

$$b = b_0 + b_1\xi_1 + b_2\xi_1^2 + b_3\xi_1^3 + \dots, \quad (4.44)$$

где  $b_0 = \sqrt{\frac{T_\Theta L^2}{k_3}}$  соответствует классической формуле для критической силы

$$T_\Theta = \frac{\pi^2 k_3}{(0.699 L)^2}, \quad (4.45)$$

вытекающей из уравнения (4.43) при  $\xi_1=0$ .

Подставляя асимптотическое разложение по малому параметру  $\xi_1$  в уравнение (4.43), раскладывая обе части уравнения в ряд, приравнивая коэффициенты при одинаковых степенях малого параметра и учитывая слагаемые только первого порядка малости, получим формулу для определения критической силы:

$$T_{кр} = T_{Э} \left[ 1 - \frac{2k_3}{k_2 L^2} - \frac{T_{Э}}{k_2} \right]. \quad (4.46)$$

Вывод формулы (4.46) с учетом слагаемых до третьего порядка малости приведен в приложении Д.

Для оценки погрешности формулы (4.46) проведем сравнение значений, полученных по данной формуле со значениями, полученными из уравнения (2.93). В качестве примера, как показано на рисунке 4.7, приведем графики для стоек, выполненных из колонных двутавров, в соответствии с [18]. Окончательные результаты приведены в таблице Д.1.

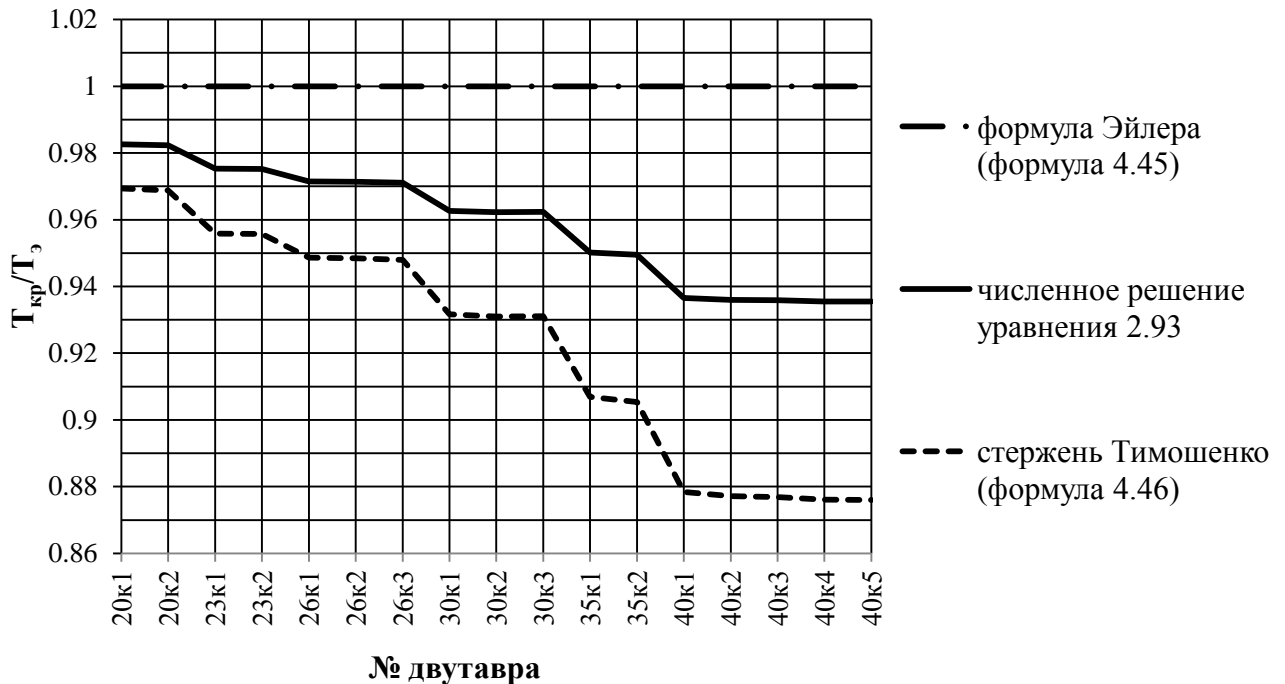


Рисунок 4.7 – Сравнение результатов, полученных асимптотически, с точными результатами

Проанализировав приведенные графики, представленные на рисунке 4.7, можно сделать вывод, что из формулы (4.46), полученной асимптотически, вытекает меньшее значение критической силы, чем значение, полученное из уравнения (2.93). Кроме этого, погрешность значений, полученных по формуле (4.46), относительно значений, полученных из точного уравнения (2.93) составляет менее шести с половиной процентов.

#### 4.7.2 Случай большой жесткости на сдвиг ( $1/k_2 = 0$ , Стержень Бернулли – Эйлера с учетом продольной податливости)

Уравнение (2.93) в этом случае принимает вид:

$$\left(1 - \frac{T}{k_1}\right) \sin\left(L\sqrt{\frac{T}{k_3}\left(1 - \frac{T}{k_1}\right)}\right) = \left(1 - \frac{T}{k_1}\right) L\sqrt{\frac{T}{k_3}\left(1 - \frac{T}{k_1}\right)} \cos\left(L\sqrt{\frac{T}{k_3}\left(1 - \frac{T}{k_1}\right)}\right). \quad (4.47)$$

Получим асимптотическое решение уравнения (4.47). Используя обозначения:

$$b = \sqrt{\frac{TL^2}{k_3}}; \quad \xi_2 = \frac{k_3}{k_1 L^2}, \quad (4.48)$$

запишем уравнение (4.47) в безразмерном виде:

$$\operatorname{tg}\left(b\sqrt{1 - b^2\xi_2}\right) = b\sqrt{1 - b^2\xi_2}. \quad (4.49)$$

Неизвестное  $b$  будем искать в виде асимптотического разложения по малому параметру  $\xi_2$ :

$$b = b_0 + b_1\xi_2 + b_2\xi_2^2 + b_3\xi_2^3 + \dots, \quad (4.50)$$

$$\text{где } b_0 = \sqrt{\frac{T_\Delta L^2}{k_3}}, \quad T_\Delta = \frac{\pi^2 k_3}{(0.699L)^2}.$$

Подставляя асимптотическое разложение по малому параметру  $\xi_2$  в уравнение (4.49), раскладывая обе части уравнения в ряд, приравнивая коэффициенты при одинаковых степенях малого параметра и учитывая слагаемые только первого порядка малости, получим формулу для определения критической силы:

$$T_{\text{кр}} = T_\Delta \left[1 + \frac{T_\Delta}{k_1}\right]. \quad (4.51)$$

Вывод формулы (4.51) с учетом слагаемых до третьего порядка малости приведен в приложении Е.

Для оценки погрешности формулы (4.51) проведем сравнение значений, полученных по данной формуле со значениями, полученными из уравнения (2.93). В качестве примера, как показано на рисунке 4.8, приведем графики для стоек, выполненных из колонных двутавров, в соответствии с [18]. Окончательные результаты приведены в таблице Е.1.

Проанализировав приведенные графики, представленные на рисунке 4.8, можно сделать вывод, что значение критической силы, полученное из формулы (4.51) больше, чем значение, полученное из уравнения (2.93) и значение, полученное из формулы Эйлера (4.45). Таким образом, можно прийти к выводу, что применение формулы (4.51) приводит к риску потери устойчивости стержнем еще до достижения критической силы, вычисленной по формуле (4.51). Следовательно, как было показано в параграфе 4.5, при анализе устойчивости стержня недопустимо учитывать жесткость на растяжение – сжатие, не учитывая жесткость на сдвиг.



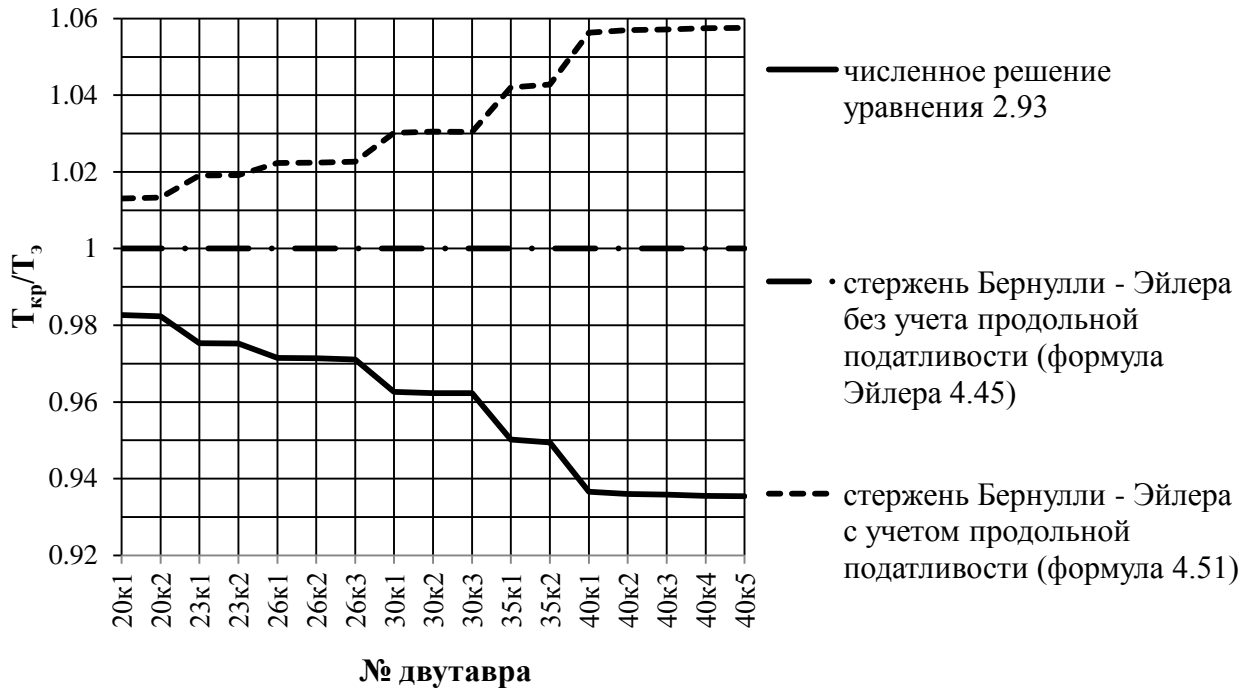


Рисунок 4.8 – Сравнение результатов, полученных асимптотически, с точными результатами

#### 4.7.3 Общий случай ( $1/k_1 \neq 0$ , $1/k_2 \neq 0$ )

Получим асимптотическое решение уравнения (2.93). Используя обозначения:

$$b = \sqrt{\frac{TL^2}{k_3}}; \quad \xi_1 = \frac{k_3}{k_2 L^2}; \quad \xi_2 = \frac{k_3}{k_1 L^2}, \quad (4.52)$$

запишем уравнение (2.93) в безразмерном виде:

$$\operatorname{tg}\left(b\sqrt{1+b^2\xi_1-b^2\xi_2}\right) = \frac{b(1-b^2\xi_2)}{\sqrt{1+b^2\xi_1-b^2\xi_2}}. \quad (4.53)$$

Будем полагать  $\xi_2$  зависящей от  $\xi_1$  через коэффициент  $k$ , где  $k$  – некоторая постоянная.

Используя зависимость  $\xi_2 = \xi_1 k$ , уравнение (4.53) может быть записано в виде:

$$\operatorname{tg}\left(b\sqrt{1+b^2\xi_1(1-k)}\right) = \frac{b(1-b^2\xi_1 k)}{\sqrt{1+b^2\xi_1(1-k)}}. \quad (4.54)$$

Неизвестное  $b$  будем искать в виде асимптотического разложения по малому параметру  $\xi_1$ :

$$b = b_0 + b_1 \xi_1 + b_2 \xi_1^2 + b_3 \xi_1^3 + \dots, \quad (4.55)$$

$$\text{где } b_0 = \sqrt{\frac{T_0 L^2}{k_3}}, \quad T_0 = \frac{\pi^2 k_3}{(0.699L)^2}.$$

Подставляя асимптотическое разложение (4.55) в уравнение (4.49), раскладывая обе части уравнения в ряд, приравнивания коэффициенты при одинаковых степенях малого параметра и

учитывая слагаемые только первого порядка малости, получим формулу для определения критической силы:

$$T_{кр} = T_{Э} \left[ 1 - \frac{2k_3}{k_2 L^2} - T_{Э} \left( \frac{1}{k_2} - \frac{1}{k_1} \right) \right]. \quad (4.56)$$

Вывод формулы (4.56) с учетом слагаемых до третьего порядка малости приведен в приложении Е.

Несложно показать, что из формулы (4.56) в случае большой жесткости на растяжение – сжатие ( $\xi_2=0$ ) вытекает формула (4.46), а в случае большой жесткости на сдвиг ( $\xi_1=0$ ) – формула (4.51).

Для оценки погрешности формулы (4.56) проведем сравнение значений, полученных по данной формуле со значениями, полученными из уравнения (2.93). В качестве примера, как показано на рисунке 4.9, приведем графики для стоек, выполненных из колонных двутавров, в соответствии с [18]. Для наглядности на графике также показаны графики для формул (4.45), (4.46) и (4.51). Окончательные результаты приведены в таблице Ж.1.



Рисунок 4.9 – Сравнение результатов, полученных асимптотически, с точным результатом

Проанализировав приведенные графики, представленные на рисунке 4.9, можно сделать вывод, что формула (4.56), полученная асимптотически, позволяет получить практически точное значение критической силы. Таким образом, можно прийти к выводу, что применение формулы (4.56) допустимо при анализе устойчивости стержня, поскольку приводит к погрешности менее одного процента. Также, анализ рисунка 4.9 подтверждает вывод, сделанный ранее, согласно которому учет жесткости на растяжение – сжатие без учета жесткости на сдвиг не допустим при исследовании устойчивости, поскольку приводит к завышенному значению критической силы, даже по сравнению с критической силой, вычисленной по формуле Эйлера.

#### 4.8 Устойчивость трехслойного стержня

В данном параграфе остановимся на устойчивости трехслойного стержня симметричного строения и покажем возможность применения результатов, полученных в работах [24, 25], для решения важной практической задачи – задачи устойчивости стержня. Трехслойный стержень состоит из двух жестких, прочных внешних слоев и легкого заполнителя, как показано на рисунке 4.10. Кроме того, будем считать, что внешние слои выполнены из одинаковых изотропных материалов, а внутренний слой выполнен из другого изотропного материала [25]. Рассмотрим первоначально прямолинейный стержень. Начальные границы материалов принимаются параллельными декартовой оси координат. С достаточно высокой степенью точности можно считать, что наружные слои воспринимают продольную нагрузку и изгиб, в то время как заполнитель воспринимает поперечный сдвиг. Как правило, в качестве материала для трехслойных стержней используют металлические или композитные наружные слои и заполнитель, выполненный из вспененного полимерного материала или древесины.

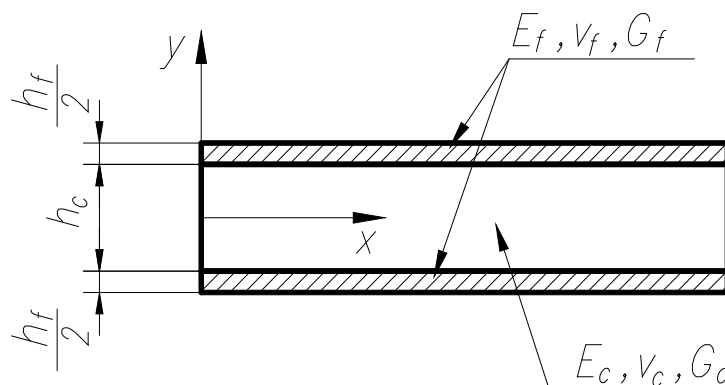


Рисунок 4.10. Расчетная схема стержня

Введем обозначения:

$h_f$  – толщина внешних слоев;

$h_c$  – толщина заполнителя;

$E_f$  – модуль Юнга внешнего слоя;

$E_c$  – модуль Юнга заполнителя;

$\nu_f$  – коэффициент Пуассона внешнего слоя;

$\nu_c$  – коэффициент Пуассона заполнителя;

$G_f$  – модуль сдвига внешнего слоя;

$G_c$  – модуль сдвига заполнителя.

Все модули упругости зависят от характеристик материала слоев и толщины слоев [25].

В качестве примера рассмотрим стержень с заделкой с одной стороны и скользящей заделкой, допускающей перемещения вдоль оси стержня, с другой, сжимаемый мертвой осевой силой, как показано на рисунке 4.11.

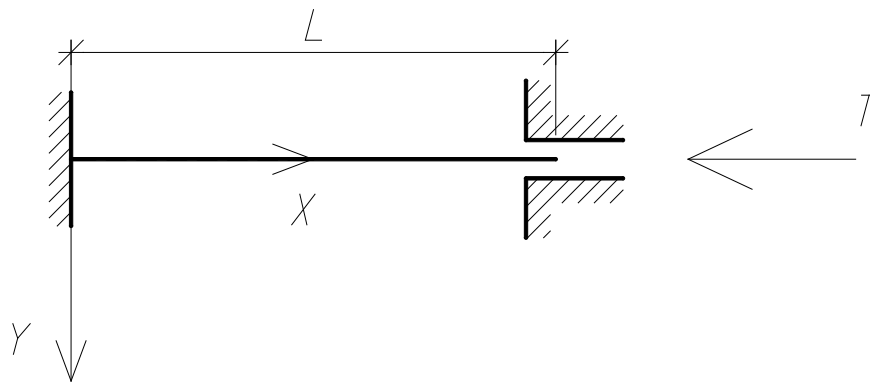


Рисунок 4.11. Расчетная схема стержня

Существующие методы для анализа устойчивости трехслойных стержней являются громоздкими, неудобными и сводятся к интегрированию системы высокого порядка. Согласно теории Жилина [24, 25], исследование устойчивости трехслойного стержня сводится к исследованию устойчивости однослойного стержня с жесткостью, соответствующей жесткости трехслойного стержня и определяемой по специальным формулам, приведенным в работах [24, 25]:

$$k_1 = (A_1 + A_2)b; \quad k_2 = \frac{\pi^2}{6} \frac{G_c h_c G_f h_f}{4G_c h_c + G_f h_f}; \quad k_3 = (C_1 + C_2)b, \quad (4.57)$$

где  $b$  – ширина стержня;

$$h = \frac{1}{2}(h_c + h_f);$$

$$A_1 = \frac{1}{2} \left( \frac{E_f h_f}{1 - \nu_f} + \frac{E_c h_c}{1 - \nu_c} \right);$$

$$A_2 = \frac{1}{2} \left( \frac{E_f h_f}{1 + \nu_f} + \frac{E_c h_c}{1 + \nu_c} \right);$$

$$C_1 = \frac{1}{24} \left( \frac{E_c h_c^3}{(1 - \nu_c)} + \frac{E_f (h^3 - h_c^3)}{(1 - \nu_f)} \right);$$

$$C_2 = \frac{1}{24} \left( \frac{E_c h_c^3}{(1 + \nu_c)} + \frac{E_f (h^3 - h_c^3)}{(1 + \nu_f)} \right).$$

Энергия деформации для рассматриваемой задачи  $W(\varepsilon, \gamma, \psi) = \frac{1}{2} (k_1 \varepsilon^2 + k_2 \gamma^2 + k_3 \psi^2)$  положительно определена, если выполнены неравенства:  $A_1 > 0$ ,  $A_2 > 0$ ,  $C_1 > 0$ ,  $C_2 > 0$  [25].

Решение задачи устойчивости для рассматриваемого однослойного стержня (2.87) получено в параграфе 2.9.5. Таким образом, формула для определения критической силы для трехслойного стержня может быть записана в виде:

$$T_{кр} = \frac{\sqrt{1 + 4T_9 \left( \frac{1}{k_2} - \frac{1}{k_1} \right)} - 1}{2 \left( \frac{1}{k_2} - \frac{1}{k_1} \right)}, \quad (4.58)$$

где  $T_9 = \frac{\pi^2 k_3}{4L^2}$  – критическая сила Эйлера для стержня с заделкой с одной стороны и скользящей заделкой, допускающей перемещения перпендикулярно оси стержня, с другой [47].

Решение (4.58) представляет собой точное решение задачи устойчивости трехслойного стержня с заделкой с одной стороны и скользящей заделкой, допускающей перемещения вдоль оси стержня, с другой, с учетом жесткостей на растяжение-сжатие, сдвиг и изгиб. В формуле (4.58)  $k_1$ ,  $k_2$ ,  $k_3$  – жесткости трехслойного стержня, определяемы из (4.57).

В качестве примера рассмотрим трехслойный стержень, внешние слои которого выполнены из алюминиевого сплава, а в качестве внутреннего слоя использован ячеистый наполнитель. Экспериментальные данные опубликованы в работах [85, 111]. Основные механические и геометрические характеристики стержня, экспериментальные данные, а также аналитические результаты, полученные с использованием формулы (4.58), приведены в таблице 4.1.

Таблица 4.1 – Аналитические и экспериментальные результаты исследования устойчивости трехслойных стержней

$E_f$ , ГПа	$\nu_f$	$E_c$ , МПа	$G_c$ , МПа	$L$ , м	$h_c$ , мм	$h_f/2$ , мм	$b$ , м	$T_{кр}$ , Н [85, 111]	$T_{кр}$ , Н (4.58)	$\Delta$ , %
70	0.3	109	26.6	0.6	75	0.325	0.08	183000	203846.8	11.4

Проанализировав полученные результаты можно сделать вывод, что погрешность критической силы, вычисленной по точной универсальной формуле (4.58), по сравнению с результатами эксперимента составляет менее 12%. Величина критической силы для рассматриваемой задачи для стержня Бернулли – Эйлера, вычисленная по формуле Эйлера

$$T_3 = \frac{\pi^2 k_3}{4L^2},$$

учитывающей исключительно жесткость на изгиб, составляет 655830.1Н.

Следовательно, погрешность формулы Эйлера для рассматриваемой задачи составляет 258.4%. Величина критической силы для рассматриваемой задачи для стержня Тимошенко, вычисленное по формуле Энгессера (4.18), учитывающей жесткость на сдвиг и изгиб, составляет 79259.5Н. Следовательно, погрешность формулы (4.18) для рассматриваемой задачи составляет 56.7%.

Таким образом, можно сделать вывод, что с приемлемой инженерной погрешностью можно исследовать устойчивость трехслойного стержня, в качестве модели которого используется модель однородного упругого стержня с эквивалентными жесткостями, используя универсальную формулу для определения критической силы (4.58), полученную в данной работе.

#### Выводы по главе 4

1. В данной главе исследована устойчивость упругих стержней, модель которых является упрощенной: теория стержней Тимошенко, в которой учитываются жесткости стержня на сдвиг и изгиб, но не учитывается жесткость на растяжение – сжатие, теория стержней Бернулли – Эйлера, учитывающая только жесткость стержня на изгиб, и трехслойный стержень, в качестве упрощенной модели которого при исследовании устойчивости используется одномерная модель однородного стержня.

2. Для модели стержня Тимошенко, как частного случая общей теории, из приведенных во второй главе функционала устойчивости, уравнений устойчивости и формулы для определения критической силы с учетом всех жесткостей получены функционал устойчивости, уравнения устойчивости и формула для критической силы с учетом изгибной и сдвиговой жесткостей.

3. Для модели стержня Бернулли - Эйлера, как частного случая общей теории, из приведенных во второй главе функционала устойчивости, уравнений устойчивости и формулы для определения критической силы с учетом всех жесткостей получены функционал устойчивости, уравнения устойчивости и формула для критической силы с учетом и без учета продольной податливости.

4. Произведена оценка влияния жесткостей на растяжение – сжатие и сдвиг первоначально прямолинейного стержня, сжимаемого «мертвой» осевой силой  $T$ , на значение критической силы.

5. Получено асимптотическое решение для задачи устойчивости стержня, сжатого осевой силой, с заделкой на одном конце и шарнирной опорой на другом.

6. В данной главе показано, что общепринятые функционал устойчивости, уравнения устойчивости и формула Энгессера для стержня Тимошенко являются ошибочными. В то время как классический функционал устойчивости, уравнения устойчивости и формула Эйлера для модели стержня Бернулли – Эйлера совпадают с функционалом устойчивости, уравнениями устойчивости и формулой для определения критической силы, вытекающими из полного функционала устойчивости, уравнений устойчивости и формулы для критической силы с учетом всех жесткостей.

7. В задаче об устойчивости трехслойного стержня с заделкой с одной стороны и скользящей заделкой, допускающей перемещения вдоль оси стержня, с другой, сжимаемого мертвой осевой силой, показана возможность использования универсального решения с учетом жесткостей на изгиб, сдвиг и растяжение – сжатие, в котором трехслойный стержень моделируется как однородный с эквивалентными жесткостями, определяемыми по формулам, полученным в работах [24, 25] .

## Заключение

В данной работе получено выражение для функционала типа Лагранжа вариационной постановки пространственных и плоских статических задач геометрически и физически нелинейного деформирования стержней;

Для физически нелинейных упругих стержней приводятся постановка задачи в виде системы дифференциальных уравнений и вариационная постановка в виде задачи о поиске точки стационарности функционала типа Лагранжа. Приводится выражение функционала Лагранжа вариационной постановки плоских статических задач геометрически нелинейного деформирования физически нелинейных упругих стержней.

Для гладких решений доказываем эквивалентность вариационной и дифференциальной постановок задачи.

Для физически линейных и нелинейных упругих стержней получен функционал устойчивости равновесия и уравнения устойчивости равновесия.

Для физически линейных упругих стержней приводятся постановка задачи динамики в виде системы дифференциальных уравнений и вариационная постановка в виде задачи о поиске точки стационарности функционала типа Гамильтона.

Для физически линейных упругих стержней получен динамический функционал устойчивости и динамические уравнения устойчивости.

В задаче об устойчивости стержня, сжатого осевой силой, статическим и динамическим методом получено универсальное решение с учетом жесткостей на изгиб, сдвиг и растяжение – сжатие, дающее точное значение критической силы для основных типов граничных условий.

Получено разрешающее трансцендентное уравнение, а также асимптотическое решение задачи устойчивости стержня, сжимаемого «мертвой» осевой силой, с заделкой с одной стороны и шарнирной опорой с другой.

В задаче об устойчивости трехслойного стержня с заделкой с одной стороны и скользящей заделкой, допускающей перемещения вдоль оси стержня, с другой стороны, сжимаемого мертвой осевой силой, показана возможность использования универсального решения с учетом жесткостей на изгиб, сдвиг и растяжение – сжатие, в котором в качестве модели трехслойного стержня используется модель однородного стержня с эквивалентными жесткостями, определяемыми по формулам, полученным в работах [24, 25].

Показано, что в задаче об устойчивости консольного стержня под действием изгибающего момента, приложенного на свободном конце, стержень устойчивости не теряет при любой величине моментной нагрузки.

Как частный случаи общей теории была рассмотрена устойчивость упругих стержней, модель которых является упрощенной: теория стержней Тимошенко, в которой учитываются



жесткости стержня на сдвиг и изгиб, но не учитывается жесткость на растяжение – сжатие, теория стержней Бернулли – Эйлера, учитывающая только жесткость стержня на изгиб, и трехслойный стержень, в качестве упрощенной модели которого при исследовании устойчивости используется одномерная модель однородного стержня. В данной работе показано, что общепринятые функционал устойчивости, уравнения устойчивости и формула Энгессера для стержня Тимошенко являются ошибочными.

Произведена оценка влияния жесткостей на растяжение – сжатие и сдвиг первоначально прямолинейного стержня, сжимаемого «мертвой» осевой силой  $T$ , на значение критической силы.

### Список используемой литературы

1. Алфутов, Н.А. Основы расчета на устойчивость упругих систем / Н.А. Алфутов. – М.: Машиностроение, 1978. – 312 с.
2. Байков, В.Н. Проектирование железобетонных тонкостенных пространственных конструкций / В.Н. Байков, Э.Х. Хампе, Э. Рауз. – М.: Стройиздат, 1990. – 232 с.
3. Блейх Фридрих. Устойчивость металлических конструкций / Фридрих Блейх. – М.: Физматгиз, 1959. – 544 с.
4. Болотин, В.В. Динамическая устойчивость упругих систем / В.В. Болотин. – М. ГИТТЛ, 1956. – 600 с.
5. Болотин, В.В. Неконсервативные задачи теории упругой устойчивости / В.В. Болотин. – М.: Физматгиз, 1961. – 339 с.
6. Болотин, В.В. Нелинейная теория упругости и устойчивость «в большом» / В.В. Болотин // Расчеты на прочность. – М.: Машгиз. – 1958. – №3. – С. 310-354.
7. Болотин, В.В. О вариационных принципах теории упругой устойчивости / В.В. Болотин // Проблемы механики деформируемого твердого тела. – Л.: Судостроение. – 1970. – С. 83-88.
8. Болотин, В.В. О понятии устойчивости в строительной механике / В.В. Болотин // Проблемы устойчивости в строительной механике. – М.: Стройиздат. – 1965. – С. 6-27.
9. Болотин, В.В. О сведениях трехмерных задач теории упругой устойчивости к одномерным и двумерным задачам / В.В. Болотин // Проблемы устойчивости в строительной механике. – М.: Стройиздат. – 1965. – С. 186-196.
10. Бровко, Г.Л. Моделирование свойств и движений неоднородного одномерного континуума сложной микроструктуры типа Коссера / Г.Л. Бровко, О.А. Иванова // Известия РАН. МТТ. – 2008. – №1. – С. 22–36.
11. Власов, В.М. Исследование прочностных и деформативных свойств бетонов / В.М. Власов // Труды VI Международной конференции «Научно – технические проблемы прогнозирования надежности и долговечности». – СПб, 2005. – С. 119-131.
12. Вольмир, А.С. Устойчивость деформируемых систем / А.С. Вольмир. – М.: Изд-во «Наука», 1967. – 984 с.
13. Галишникова, В.В. Вывод разрешающих уравнений задачи нелинейного деформирования пространственных ферм на основе унифицированного подхода / В.В. Галишникова // Вестник ВолгГАСУ, Серия: Строительство и архитектура. Волгоград. – 2009. – Вып. 14(33). – С. 39–49.
14. Галишникова, В.В. Геометрически нелинейная задача устойчивости стержневых систем: о возможностях программных комплексов / В.В. Галишникова // Вестник Волгоградского

государственного архитектурно - строительного университета. Серия: Строительство и архитектура. Волгоград. – 2012. – Вып. 29 (48). – С. 231-243.

15. Галишникова, В.В. Проблемы анализа устойчивости равновесия пространственных рам в геометрически нелинейной постановке / В.В. Галишникова // Строительная механика инженерных конструкций и сооружений. – 2013. – №4. – С. 28-30.

16. Гельфанд, И.М. Вариационное исчисление / И.М. Гельфанд, С.В. Фомин. – М.: ГИФМЛ, 1961. – 228 с.

17. Голоскоков, Д.П. Общая нелинейная теория упругих стержней с приложением к описанию эффекта Пойнтинга / Д.П. Голоскоков, П.А. Жилин // Депонировано ВИНТИ №1912-B87 Деп., 20 с.

18. ГОСТ 26020-83 Двутавры стальные горячекатаные с параллельными гранями полок. Сортамент. – М.: ИПК Издательство стандартов, 2003. – 11с.

19. Грудев, И. Д. Несущая способность сжатых элементов стержневых конструкций / И.Д. Грудев. – М.: Изд-во: «МГСУ», 2012. – 388 с.

20. Динник, А.Н. Продольный изгиб, кручение / А.Н. Динник. – М.: АН СССР, 1955. – 392с.

21. Елисеев, В.В. Механика упругих стержней / В.В. Елисеев. – СПб.: Изд-во СПбГПУ, 1994. – 88 с.

22. Елисеев, В.В. Механика упругих тел / В.В. Елисеев. – СПб.: Изд-во СПбГПУ, 2003. – 336с.

23. Жилин, П.А. Векторы и тензоры второго ранга в трехмерном пространстве / П.А. Жилин. – СПб.: Нестор, 2001. – 276 с.

24. Жилин, П.А. Основные уравнения неклассической теории упругих оболочек / П.А. Жилин // Динамика и прочность машин. Сборник научных трудов – Л., изд-во ЛПИ. – 2005. – С. 119-131.

25. Жилин, П.А. Прикладная механика. Основы теории оболочек: учебное пособие / П.А. Жилин. СПб.: Изд-во СПбГПУ, 2006. – 167 с.

26. Жилин, П.А. Прикладная механика. Теория упругих тонких стержней / П.А. Жилин. СПб.: Изд-во СПбГПУ, 2007. – 102 с.

27. Зеликин, М.И. Оптимальное управление и вариационное исчисление / М.И. Зеликин. – М.: Едиториал УРСС, 2004. – 160 с.

28. Ильин, В.П. Численные методы решения задач строительной механики / В.П. Ильин, В.В. Карпов, А.М. Масленников. М.: Издательство АСВ, 2005. – 432 с.

29. Исполов, Ю.Г. О консервативной моментной нагрузке / Ю.Г. Исполов, В.И. Сливкер // Строительная механика и расчет сооружений. – 2007. – №1 – С. 61-67.

30. Исследование напряженно – деформированного состояния и устойчивости каркасов высотных зданий как нелинейных стержневых систем с целью применения результатов при проектировании объектов: отчет по договору №140477606 от 28.12.2006 / Ю.М. Ветюков, В.В. Елисеев, К.В. Елисеев, Н.Н. Шабров. – Санкт – Петербург: Санкт – Петербургский Государственный Политехнический Университет, 2007. – 91 с.
31. Карпов, В.В. Вариационные методы и вариационные принципы механики при расчете строительных конструкций: учебное пособие / В.В. Карпов, А.Ю. Сальников - СПб.: СПбГАСУ, 2009. - 75 с.
32. Карпенко, Н.И. Общие модели механики железобетонных конструкций / Н.И. Карпенко. – М.: Стройиздат, 1996. – 416 с.
33. Лалин, В.В. Вариационная постановка плоской задачи геометрически нелинейного деформирования и устойчивости упругих стержней / В.В. Лалин, Л.А. Розин, Д.А.Кушова // Инженерно – строительный журнал. – 2013. – №1 (36). – С. 87 – 96.
34. Лалин, В.В. Вариационные постановки нелинейных задач с независимыми вращательными степенями свободы / В.В. Лалин, Е.В. Зданчук, Д.А.Кушова, Л.А. Розин, // Инженерно – строительный журнал. – 2015. – №4. – С. 54 – 80.
35. Лалин, В.В. Геометрически нелинейное деформирование и устойчивость плоских упругих стержней с учетом жесткостей на растяжение-сжатие, сдвиг и изгиб / В.В. Лалин, Д.А.Кушова // International Journal for Computational Civil and Structural Engineering. – 2013. Volume 9, Issue 4. – С. 178-185.
36. Лалин, В.В. Различные формы уравнений нелинейной динамики упругих стержней / В.В. Лалин // Труды СПбГПУ. – 2004. – №489. – С. 121-128
37. Лалин, В.В. Решение задачи устойчивости сжатого стержня динамическим методом с учетом жесткостей на сдвиг и растяжение / В.В. Лалин, Д.А. Кушова // Строительная механика и расчет сооружений. – 2014. – №5 (256). – С. 49-54.
38. Лалин, В.В. Уравнения нелинейной динамики моментной упругой среды / В.В. Лалин // Научно – технические ведомости СПбГПУ. – 2007. – №49. – С. 97–105.
39. Лин, Т.И. Проектирование предварительно напряженных железобетонных конструкций / Т.И. Лин. – М.: Госстройиздат, 1960. – 438 с.
40. Масленников, А. М. Основы динамики и устойчивости стержневых систем / А.М. Масленников. М.,ООО Изд-во АСВ, 2000. – 204 с.
41. Моисеев, Н.Д. Очерки развития теории устойчивости / Н.Д. Моисеев. – М.: Гостехиздат, 1949. – 663 с.
42. Николаи, Е.Л. К вопросу об устойчивости скрученного стержня / Е.Л. Николаи // Вестн. прикл. матем. мех. 1, 1929.

43. Николаи, Е.Л. Об устойчивости прямолинейной формы равновесия сжатого и скрученного стержня / Е.Л. Николаи // Известия Ленинградского политехнического института. – 31. – 1928.
44. Николаи, Е.Л. Труды по механике / Е.Л. Николаи. – М.: Гостехтеориздат, 1955.
45. Новожилов, В.В. Основы нелинейной теории упругости / В.В. Новожилов. – М.: Гостехиздат, 1948. – 212с.
46. Пановко, Я.Г. Устойчивость и колебания упругих систем: Современные концепции, парадоксы и ошибки. – 4-е изд., перераб. / Я.Г. Пановко, И.И. Губанова. – М.: Наука, 1987. – 352с.
47. Перельмутер, А.В. Устойчивость равновесия конструкций и родственные проблемы. Т. 1/ А.В. Перельмутер, В.И. Сливкер. – М.: Изд-во СКАД СОФТ, 2010. – 704 с.
48. Ржаницын, А.Р. Устойчивость равновесия упругих систем / А.Р. Ржаницын. – М.: Гостехтеориздат. – 1955. – 475 с.
49. Розин, Л.А. Задачи теории упругости и численные методы их решения / Л.А. Розин. – СПб.: Изд-во ГТУ, 1998. – 532 с.
50. Смирнов, А. Ф. Строительная механика. Динамика и устойчивость сооружений: учебник для вузов / А.Ф. Смирнов, А.В. Александров, Б.Я. Лашеников, Н.Н. Шапошников. Под ред. Смирнова А. Ф. — М.: Стройиздат, 1984. — 416 с.
51. Снитко, Н.К. Устойчивость стержневых систем / Н.К. Снитко. М.: Госстрой-издат, 1952. - 267 с.
52. Снитко, Н.К. Устойчивость сжатых и сжато-изогнутых стержневых систем / Н.К. Снитко. Л.-М.: Госстройиздат, 1956. - 207 с.
53. Снитко, Н.К. Устойчивость конструкций / Н.К. Снитко. Л.: Изд-во Ленингр. кораблестроит.ин-та, 1973. - 93 с.
54. Снитко, Н.К. Определение критических распределенных нагрузок для стержней и свободных рам методом начальных параметров / Н.К. Снитко // Изв.вузов. Стр-во и архит., 1966 – № 10 – с.63-67.
55. Тимошенко, С.П. К вопросу о продольном изгибе / С.П. Тимошенко // Известия Киевского политехнического института, 1908, книга 2. – С. 181 – 212.
56. Тимошенко, С.П. К вопросу об устойчивости упругих систем / С.П. Тимошенко // Известия Киевского политехнического института, 1910. – С. 147 – 167.
57. Тимошенко, С.П. Курс теории упругости / С.П. Тимошенко. – К.: Наукова Думка, 1972.
58. Тимошенко, С.П. Об устойчивости плоской формы изгиба двутавровой балки под влиянием сил, действующих в плоскости ее наибольшей жесткости / С.П. Тимошенко // Изв. СПб Политехнического института, т. IV–V, 1905-1906.

59. Тимошенко, С.П. Устойчивость упругих систем / С.П. Тимошенко. – М.: Гостехтеориздат, 1955.
60. Улитин, В.В. Алгоритм корректировки модулей при анализе устойчивости железобетонных конструкций / В.В. Улитин // Строительная механика и расчет сооружений №4. – М., ЦНИИСК. – 2007. – С. 36-48.
61. Улитин, В.В. Анализ устойчивости строительных конструкций с учетом физической нелинейности / В.В. Улитин // Строительная механика и расчет сооружений №3. – М., ЦНИИСК. – 2007. – № 3. – С. 30-43.
62. Улитин, В.В. Деформационный критерий при анализе устойчивости и продольного изгиба в условиях физической нелинейности / В.В. Улитин // Строительная механика и расчет сооружений – 2012. – № 1. – С. 34-38.
63. Улитин, В.В. Общий подход к анализу устойчивости конструкций за пределом упругости / В.В. Улитин // Математическое моделирование в механике деформируемых тел и конструкций. Труды XXII Международной конференции. – СПб.: НИЦ МОРИНТЕХ. – 2007. – С. 354 – 360. 2007. С. 354-360.
64. Улитин, В.В. Физически нелинейный анализ устойчивости конструкций / В.В. Улитин. – СПб.: ГИОРД, 2007. – 96с.
65. Харлаб, В. Д. Устойчивость стойки Шенли в упрощенной теории нелинейной ползучести нестареющего бетона при сжатии / В. Д. Харлаб, Ю. А. Гурьева // Вестн. гражд. инженеров. - 2008. - №3 (16). - С. 38 - 42.
66. Ясинский, Ф.С. Избранные работы по устойчивости сжатых стержней / Ф.С. Ясинский.– М.–Л.: Госстройиздат, 1952. 427 с.
67. Allen, H. G. Analysis and design of structural sandwich panels / H. G. Allen. – Pergamon Press, Oxford, 1969.
68. Attard, M.M. Hyperelastic constitutive modeling under finite strain / M.M. Attard, G.W. Hunt // International Journal of Solids and Structures – 2004. – Vol.41 (18-19). – Pp. 5327–5350.
69. Bauchau, O.A. Flexible Multibody Dynamics / O.A. Bauchau. – Springer, 2010. – 728 p.
70. Bauschinger, J. Mittheilungen aus dem mechanisch-technischen Laboratorium der Technischen Hochschule in Munchen, 1886, 1887. H.V.
71. Bazant, Z.P. Correlation study of formulations of incremental deformations and stability of continuous bodies / Z.P. Bazant // Journal of Applied Mechanics Transactions, ASME. – 1971. – Vol.38. –Pp. 919-928.
72. Bazant, Z.P. Sandwich buckling formulas and applicability of standard computational algorithm for finite strain / Z.P. Bazant, A. Beghini // Composites: Part B. – 2004. – Vol.35. – Pp. 573-581.

73. Bazant, Z.P. Shear buckling of sandwich, fiber-composite and lattice columns, bearings and helical springs: paradox resolved / Z.P. Bazant // *Journal of Applied Mechanics, ASME*. – 2003. – Vol.70. – Pp. 75-83.
74. Bazant, Z.P. Stability and finite strain of homogenized structures soft in shear: sandwich or fiber composites, and layered bodies / Z.P. Bazant, A. Beghini // *International Journal of Solids and Structure*. – 2006. – Vol.43. – Pp. 1571-1593.
75. Bazant, Z.P. *Stability of Structures* / Z.P. Bazant, L. Cedolin. – Oxford University Press, Inc., New York. – 1991.
76. Crisfield, M.A. *Non-linear Finite Element Analysis of Solids and structures. Vol. 2* / M.A. Crisfield. – Wiley: Chichester, 1977.
77. Engesser, F. Die Knickfestigkeit gerader Stäbe / F. Engesser // *Zeitschrift des Architekten und Ingenieur Vereins zu Hannover*. – 1889. – Vol.35. – 455p.
78. Engesser, F. Die Knickfestigkeit gerader Stäbe / F. Engesser // *Zeutralblatt des Bauverwaltung*. – 1891. – Vol.11. – Pp. 483-486.
79. Eremeyev, V.A. *Foundations of Micropolar Mechanics* / V.A. Eremeyev, L.P. Lebedev, H. Altenbach – New York. Springer, 2013. – 145 p
80. Facesheet wrinkling in sandwich structures: technical report NASA CR-1999-208994 / Ley R. P., Lin W., Mbanefo U., 1999.
81. Fleck, N.A. End compression of sandwich columns / N.A. Fleck, L. Sridhar // *Composites, Part A: Applied Science and Manufacturing*. – 2002. – Vol.33. – Pp. 353-359.
82. Frostig, Y. High-order buckling analysis of sandwich beams with transversely flexible core / Y. Frostig, M. Baruch // *Journal of Engineering Mechanics*. – 1993. – Vol.119(3). – Pp. 476-495.
83. Gerstmayr, J. Analysis of thin beams and cables using the absolute nodal coordinate formulation / J. Gerstmayr, A.A. Shabana // *Nonlinear Dyn.* – 2006. – №45 (1–2). – Pp. 109–130.
84. Gjelsvik, A. Stability of built-up columns / A. Gjelsvik // *Journal of Engineering Mechanics*. – Vol.117 (6). – 1991. – Pp. 1331–1345.
85. Hadi, B.K. Wrinkling of sandwich column: comparison between finite element analysis and analytical solutions / B.K. Hadi // *Composite Structures*. – 2001. – Vol.53. – Pp. 477-482.
86. Haringx, J.A. On highly compressible helical springs and rubber rods, and their application for vibration-free mountings / J.A. Haringx // *Phillips research report. Eindhoven*. – 1948. – Vol. I. – Pp. 401–449.
87. Haringx, J.A. On highly compressible helical springs and rubber rods, and their application for vibration-free mountings / J.A. Haringx // *Phillips research report. Eindhoven*. – 1949. – Vol. III. – Pp. 206-220.

88. Haringx, J.A. On the buckling and lateral rigidity of helical springs / J.A. Haringx // Proceedings of the Koninklijke Nederlandse Akademie Van Wetenschappen. –1942. – Vol. 45. – Pp. 533-535.
89. Hodgkinson, E. Experimental researches on the strength of pillars of cast iron and other materials / E. Hodgkinson // Philosophical Transactions. – 1840. – Part II. – Pp. 385-456.
90. Ibrahimbegovic, A. Nonlinear Solid Mechanics / A. Ibrahimbegovic. – Springer Science+Business Media B.V, 2009. – 585 p.
91. Iesan, D. Classical and Generalized Models of Elastic Rods / D. Iesan. – Boca Raton.CRC Press, 2009. – 369 p.
92. Jelenic, G. Geometrically exact 3D beam theory: implementation of a strain – invariant finite element for static and dynamics / G. Jelenic, M.A. Crisfield // Comp. Meths. Appl. Mech. Engng. – 1999. – №171. – Pp. 141–171.
93. Kardomateas, G.A. Buckling of moderately thick orthotropic columns: comparison of an elasticity solution with the Euler and Engesser/Haringx/Timoshenko formulae / G.A. Kardomateas, D.S. Dancila // International Journal of Solids and Structures. – 1997. – Vol.34 (3). – Pp. 341-357.
94. Lalin, V.V. New results in dynamic stability problems of elastic rods / V.V. Lalin, D.A. Kushova // Applied Mechanics and Materials. – 2014. – Vol.617. – Pp. 181-186.
95. Lamarle, E. Memo ire sur la flexion du bois / E. Lamarle // Annales des travaux publics de Belgique. Brussels.1845 T. 3
96. Lang, H. Lagrangian fields theory in space – time for geometrically exact Cosserat rods / H. Lang, J. Linn. – Preprint: Berichte des ITWM Kaiserslautern, 2009.
97. Léotoing L. First applications of a novel unified model for global and local buckling of sandwich columns / L. Léotoing, S. Drapier, A. Vautrin // European Journal of Mechanics, A/Solids. – 2002. – Vol.21(4). – Pp. 683-701.
98. Lurie, A.I. Nonlinear theory of elasticity / A.I. Lurie. – Amsterdam: North-Holland, 1990. – 617 p.
99. Makinen, J. Total Lagrangian Reissner’s geometrically exact beam element without singularities / J. Makinen // Int. J. Numer. Meth. Engng. – 2007. – Pp. 1009–1048.
- 100.Nänni, J. Das Eulersche Knickproblem unter Berücksichtigung der Querkräfte / J. Nänni // Z. Angew. Math. Phys. – 1971. – Vol.22. – Pp. 156-185.
- 101.Niu, K. Modeling of wrinkling in sandwich panels under compression / K. Niu, R. Talreja // Journal of Engineering Mechanics. – 1999. – Vol.125(8). Pp. 875-883.
- 102.Plantema, F. J. Sandwich construction: the bending and buckling of sandwich beams, plates, and shells / F. J. Plantema. – Wiley, New York, 1966.



- 103.Reissner, E. Some remarks on the problem of column buckling / E. Reissner // *Ingenieur-Archiv.* – 1982. – Vol.52. – Pp. 115–119.
- 104.Rubin, M.B. Cosserat theories: shells, rods and points / M.B. Rubin. – Dordrecht: Kluwer Acad. Publ., 2000. – 408 p.
- 105.Shanlev, F. The column paradox / F. Shanlev // *Journal of the aeronautical Science.* – 1946. – №12. – P.678.
- 106.Simo, J.C. A three-dimensional finite-strain rod model. Part II: Geometric and computational aspects / J.C. Simo, L. Vu-Quoc // *Computer Methods In Applied Mechanics and Engineering.* – 1986. – Vol. 58. Issue 1. – Pp. 79–116.
- 107.Simo, J.C. Numerical formulations of elasto-viscoplastic response of beams accounting for the effect of shear / J.C. Simo, K.D. Hjelmstad, R.L. Taylor // *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering.* – 1984. – Vol.42. – Pp. 301-330.
- 108.Simo, J.C. On the dynamics in space of rods undergoing large motions – a geometrically exact approach / J.C. Simo, L. Vu-Quoc // *Computer Methods In Applied Mechanics and Engineering.* – 1988. – Vol. 66. – Pp.125–161.
- 109.Tetmajer L. Mittheilungen der Anstalt zur Pruefung von Baumaterialen in Zuerich.1890. H.IV.
- 110.Timoshenko, S.P. Theory of Elastic Stability / S.P. Timoshenko, J.M. Gere. – McGraw-Hill International, London, 1963. – 541p.
- 111.Webber, JPH. On the wrinkling of anisotropic sandwich column with laminated cross-ply faces / JPH. Webber, S. Kyriakides, CT. Lee. – *Aeronaut Quart.* – 1976. – Pp. 264-272.
- 112.Xiao, N. Non-linear quadrature element analysis of planar frames based on geometrically exact beam theory / N. Xiao, H. Zhong // *Int. J. Non-Lin. Mech.* – 2012. – Vol. 47. – Pp. 481–488.
- 113.Zhilin, P.A. A new Approach to the Analysis of Free Rotations of Rigid Bodies / P.A. Zhilin // *ZAMM – Journal of Applied Mathematics and Mechanics.* – 1996. – №4. – Pp. 187–204.
- 114.Zielger, H. Arguments for and against Engesser's buckling formulas / H. Zielger // *Ingenieur-Archiv.* – 1982. – Vol.52. – Pp. 105–113.
- 115.Zienkiewicz, O.C. The Finite Element Method for Solis and Structural Mechanics / O.C. Zienkiewicz, R.L. Taylor, D.D. Fox // Elsevier. – 2014. – 624 p.

## Приложение А

### Примеры решения задачи устойчивости динамическим методом

#### Консольный стержень (рисунок А.1)

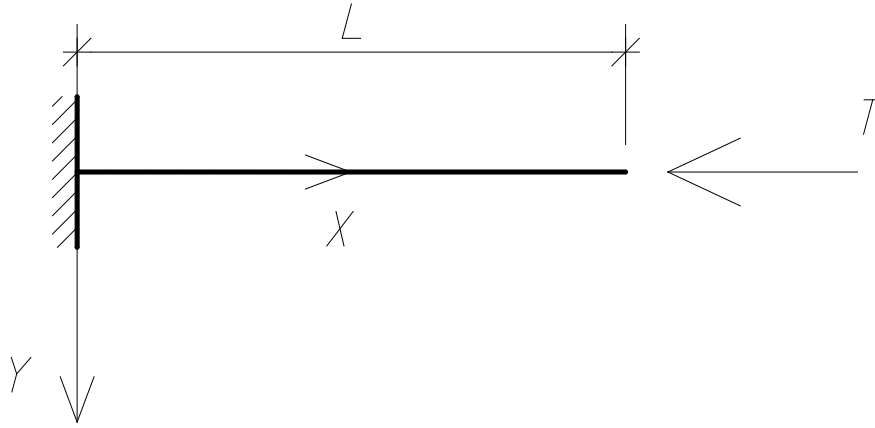


Рисунок А.1. Расчетная схема стержня

Рассмотрим консольный стержень, сжимаемый мертвой осевой силой  $T$ , как показано на рисунке А.1. Граничные условия (2.11), соответствующие рассматриваемой задаче, были получены в пункте 2.2.2. Точное решение нелинейной задачи (3.1), (1.180), (1.183) и (2.11) описывается формулами (3.14). Таким образом, система уравнений устойчивости совпадает с системой (3.16).

Граничные условия для задачи устойчивости шарнирно опертого стержня, полученные из внеинтегральных слагаемых первой вариации функционала устойчивости, описаны в пункте 2.4.2. В случае физической линейности стержня, когда смешанные производные  $\frac{\partial^2 W}{\partial \varepsilon \partial \gamma}$ ,  $\frac{\partial^2 W}{\partial \varepsilon \partial \psi}$ ,  $\frac{\partial^2 W}{\partial \gamma \partial \psi}$  равны нулю, а  $\frac{\partial N}{\partial \varepsilon} = k_1$ ,  $\frac{\partial Q}{\partial \gamma} = k_2$ ,  $\frac{\partial M}{\partial \psi} = k_3$ , граничные условия имеют вид:

$$\begin{aligned}
 s = 0 : & & s = L : \\
 u(0, t) = 0; & N_B(L, t) \cos \varphi(L, t) - Q_B(L, t) \sin \varphi(L, t) - \theta(N(L, t) \sin \varphi + Q(L, t) \cos \varphi(L, t)) = 0; \\
 v(0, t) = 0; & N_B(L, t) \sin \varphi(L, t) + Q_B(L, t) \cos \varphi(L, t) + \theta(N(L, t) \cos \varphi - Q(L, t) \sin \varphi(L, t)) = 0; \\
 \theta(0, t) = 0; & M_B(L, t) = 0;
 \end{aligned} \tag{A.1}$$

где использованы обозначения (2.7) и (2.40).

Величины  $x$ ,  $y$ ,  $\varphi$ ,  $\varepsilon$ ,  $\gamma$ ,  $\psi$ ,  $N$ ,  $Q$ ,  $M$  обозначают характеристики напряженно – деформированного состояния, удовлетворяющие системе уравнений (3.1), (1.180), (1.183), а также граничным условиям. Величинами с нижним индексом «в» обозначаются вариации.

Подставив точное решение (3.14) в граничные условия (А.1) и используя выражения (2.7) и (2.40), граничные условия для рассматриваемой задачи могут быть записаны в виде:

$$\begin{aligned}
 s = 0 : & & s = L : \\
 u(0, t) = 0; & & k_1 u'(L, t) = 0; \\
 v(0, t) = 0; & & k_2 \left[ v'(L, t) - \theta(L, t) \cdot \left( 1 - \frac{T}{k_1} \right) \right] - T\theta(L, t) = 0; \\
 \theta(0, t) = 0; & & k_3 \theta'(L, t) = 0;
 \end{aligned} \tag{A.2}$$

Условия  $u(0, t) = 0$ ,  $k_1 u'(L, t) = 0$  соответствуют продольным деформациям и далее могут быть опущены. Окончательно граничные условия (А.2) могут быть записаны в виде:

$$v(0, t) = 0; \quad k_2 \left[ v'(L, t) - \theta(L, t) \cdot \left( 1 - \frac{T}{k_1} \right) \right] - T\theta(L, t) = 0; \quad \theta(0, t) = 0; \quad \theta'(L, t) = 0. \tag{A.3}$$

Будем искать гармоническое по времени решение системы (3.16) в виде:

$$\theta(s, t) = \theta^*(s) \cos \omega t; \quad v(s, t) = v^*(s) \cos \omega t. \tag{A.4}$$

Функции  $\theta^*(s)$ ,  $v^*(s)$  удовлетворяют граничным условиям:

$$v^*(0) = 0; \quad k_2 \left[ v^{*'}(L) - \theta^*(L) \cdot \left( 1 - \frac{T}{k_1} \right) \right] - T\theta^*(L) = 0; \quad \theta^*(0) = 0; \quad \theta^{*'}(L) = 0. \tag{A.5}$$

Таким образом, после подстановки выражений (А.4) в систему (3.16), дифференцирования по времени ( $t$ ) и координате ( $s$ ) и сокращения на  $\cos \omega t$ , получаем систему двух уравнений относительно  $v^*(s)$  и  $\theta^*(s)$ , совпадающую с системой (3.22).

Исключая функцию  $v^*(s)$ , получаем уравнение (3.23) для функции  $\theta^*(s)$ , решение которого ищем в следующем виде:

$$\theta^*(s) = \sum_{n=1}^{\infty} \theta_n^* \sin \frac{(2n-1)\pi}{2L} s, \tag{A.6}$$

удовлетворяющем граничным условиям (А.5) при любых значениях  $\theta_n$ .

Подставляя (А.6) в уравнение (А.5) и приравнявая нулю коэффициенты при  $\sin \frac{(2n-1)\pi}{2L} s$ , получим для каждого  $n$  следующее частотное уравнение, из которого можно найти частоту  $\omega$ :

$$\frac{\rho^2}{Ak_2} J_z \omega^4 - \left( \rho \left( \left( 1 - \frac{T}{k_1} \right) B + \frac{k_3}{k_2} \left( \frac{(2n-1)\pi}{2L} \right)^2 \right) + \frac{\rho}{A} J_z \left( \frac{(2n-1)\pi}{2L} \right)^2 \right) \omega^2 + k_3 \left( \frac{(2n-1)\pi}{2L} \right)^4 - TB \left( \frac{(2n-1)\pi}{2L} \right)^2 = 0. \quad (A.7)$$

Условие потери устойчивости определяется условием  $\omega = 0$  [4, 12]. Для того чтобы уравнение (A.7) имело нулевой корень необходимо и достаточно выполнение условия обращения в нуль свободного члена, откуда получаем квадратное уравнение для нахождения критической силы  $T_{кр}$ :

$$T^2 \left( \frac{1}{k_2} - \frac{1}{k_1} \right) + T - T_3 (2n-1)^2 = 0, \quad (A.8)$$

где  $T_3 = \frac{\pi^2 k_3}{4L^2}$  – критическая сила Эйлера для консольного стержня [42].

Как и в параграфе 2.9.1 можно показать, что критическое (наименьшее положительное) значение силы  $T$  достигается при  $n=1$  и определяется из квадратного уравнения:

$$T^2 \left( \frac{1}{k_2} - \frac{1}{k_1} \right) + T - T_3 = 0, \quad (A.9)$$

Отсюда получим единственное положительное значение  $T$ :

$$T = \frac{\sqrt{1 + 4T_3 \left( \frac{1}{k_2} - \frac{1}{k_1} \right)} - 1}{2 \left( \frac{1}{k_2} - \frac{1}{k_1} \right)}. \quad (A.10)$$

Формула (A.10) совпадает с формулой (2.61) для статической постановки задачи.

**Стержень с заделкой с одной стороны и скользящей заделкой, допускающей перемещения вдоль оси стержня, с другой (рисунок А.2)**

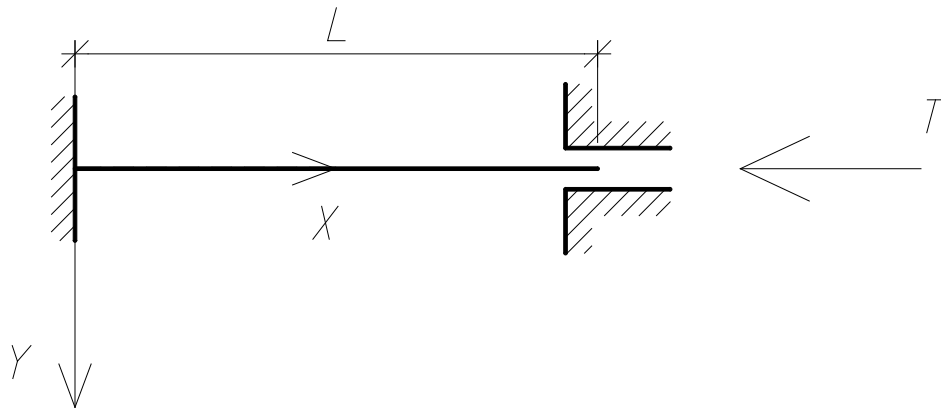


Рисунок А.2. Расчетная схема стержня

Рассмотрим стержень с заделкой с одной стороны и скользящей заделкой, допускающей перемещения вдоль оси стержня, с другой, сжимаемый мертвой осевой силой  $T$ , как показано на рисунке А.2. Граничные условия (2.12), соответствующие рассматриваемой задаче, были получены в пункте 2.2.3. Точное решение нелинейной задачи (3.1), (1.180), (1.183), (2.12) описывается формулами (3.14). Таким образом, система уравнений устойчивости совпадает с системой (3.16).

Граничные условия для задачи устойчивости стержня с заделкой с одной стороны и скользящей заделкой, допускающей перемещения вдоль оси стержня, с другой, полученные из внеинтегральных слагаемых первой вариации функционала устойчивости, описаны в пункте 2.4.3. В случае физической линейности стержня, когда смешанные производные

$$\frac{\partial^2 W}{\partial \varepsilon \partial \gamma}, \quad \frac{\partial^2 W}{\partial \varepsilon \partial \psi}, \quad \frac{\partial^2 W}{\partial \gamma \partial \psi} \text{ равны нулю, а } \frac{\partial N}{\partial \varepsilon} = k_1, \quad \frac{\partial Q}{\partial \gamma} = k_2, \quad \frac{\partial M}{\partial \psi} = k_3, \text{ граничные условия имеют}$$

вид:

$$\begin{aligned} s = 0: & & s = L: \\ u(0, t) = 0; & N_B(L, t) \cos \varphi(L, t) - Q_B(L, t) \sin \varphi(L, t) - \theta(N(L, t) \sin \varphi + Q(L, t) \cos \varphi(L, t)) = 0; \\ v(0, t) = 0; & v(L, t) = 0; \\ \theta(0, t) = 0; & \theta(L, t) = 0; \end{aligned} \quad (\text{A.11})$$

где использованы обозначения (2.7) и (2.40).

Величины  $x$ ,  $y$ ,  $\varphi$ ,  $\varepsilon$ ,  $\gamma$ ,  $\psi$ ,  $N$ ,  $Q$ ,  $M$  обозначают характеристики напряженно – деформированного состояния, удовлетворяющие системе уравнений (3.1), (1.180), (1.183), а также граничным условиям. Величинами с нижним индексом «в» обозначаются вариации.

Подставив точное решение (3.14) в граничные условия (A.11) и используя выражения (2.7) и (2.40), граничные условия для рассматриваемой задачи могут быть записаны в виде:

$$\begin{aligned} s = 0: & & s = L: \\ u(0, t) = 0; & k_1 u'(L, t) = 0; \\ v(0, t) = 0; & v(L, t) = 0; \\ \theta(0, t) = 0; & \theta(L, t) = 0; \end{aligned} \quad (\text{A.12})$$

Условия  $u(0, t) = 0$ ,  $k_1 u'(L, t) = 0$  соответствуют продольным деформациям и далее могут быть опущены. Окончательно граничные условия (A.12) могут быть записаны в виде:

$$v(0, t) = v(L, t) = 0; \quad \theta(0, t) = \theta(L, t) = 0. \quad (\text{A.13})$$

Будем искать гармоническое по времени решение системы (3.16) в виде:

$$\theta(s, t) = \theta^*(s) \cos \omega t; \quad v(s, t) = v^*(s) \cos \omega t. \quad (\text{A.14})$$

Функции  $\theta^*(s)$ ,  $v^*(s)$  удовлетворяют граничным условиям:

$$v^*(0) = v^*(L) = 0; \quad \theta^*(0) = \theta^*(L) = 0. \quad (\text{A.15})$$

Таким образом, после подстановки выражений (A.14) в систему (3.16), дифференцирования по времени (t) и координате (s) и сокращения на  $\cos\omega t$ , получаем систему двух уравнений относительно  $v^*(s)$  и  $\theta^*(s)$ , совпадающую с системой (3.22).

Исключая функцию  $v^*(s)$ , получаем уравнение (3.23) для функции  $\theta^*(s)$ , решение которого ищем в следующем виде:

$$\theta^*(s) = \sum_{n=1}^{\infty} \theta_n^* \sin \frac{2n\pi}{L}s, \quad (\text{A.16})$$

удовлетворяющем граничным условиям (A.15) при любых значениях  $\theta_n$ .

Подставляя (A.16) в уравнение (A.15) и приравнявая нулю коэффициенты при  $\sin \frac{2n\pi}{L}s$ , получим для каждого n следующее частотное уравнение, из которого можно найти частоту  $\omega$ :

$$\begin{aligned} & \frac{\rho^2}{Ak_2} J_z \omega^4 - \left( \rho \left( \left( 1 - \frac{T}{k_1} \right) B + \frac{k_3}{k_2} \left( \frac{2n\pi}{L} \right)^2 \right) + \frac{\rho}{A} J_z \left( \frac{2n\pi}{L} \right)^2 \right) \omega^2 + k_3 \left( \frac{2n\pi}{L} \right)^4 - \\ & - TB \left( \frac{2n\pi}{L} \right)^2 = 0. \end{aligned} \quad (\text{A.17})$$

Условие потери устойчивости определяется условием  $\omega = 0$  [4, 12]. Для того чтобы уравнение (A.17) имело нулевой корень необходимо и достаточно выполнение условия обращения в нуль свободного члена, откуда получаем квадратное уравнение для нахождения критической силы  $T_{кр}$ :

$$T^2 \left( \frac{1}{k_2} - \frac{1}{k_1} \right) + T - T_3 n^2 = 0, \quad (\text{A.18})$$

где  $T_3 = \frac{4\pi^2 k_3}{L^2}$  – критическая сила Эйлера для стержня с заделкой с одной стороны и скользящей заделкой, допускающей перемещения вдоль оси стержня, с другой [42].

Как и в параграфе 2.9.1 можно показать, что критическое (наименьшее положительное) значение силы  $T$  достигается при  $n=1$  и определяется из квадратного уравнения:

$$T^2 \left( \frac{1}{k_2} - \frac{1}{k_1} \right) + T - T_3 = 0, \quad (\text{A.19})$$

Отсюда получим единственное положительное значение  $T$ :

$$T = \frac{\sqrt{1 + 4T_3 \left( \frac{1}{k_2} - \frac{1}{k_1} \right)} - 1}{2 \left( \frac{1}{k_2} - \frac{1}{k_1} \right)}. \quad (\text{A.20})$$

Формула (А.20) совпадает с формулой (2.70) для статической постановки задачи.

**Стержень с заделкой с одной стороны и скользящей заделкой, допускающей перемещения перпендикулярно оси стержня, с другой (рисунок А.3)**

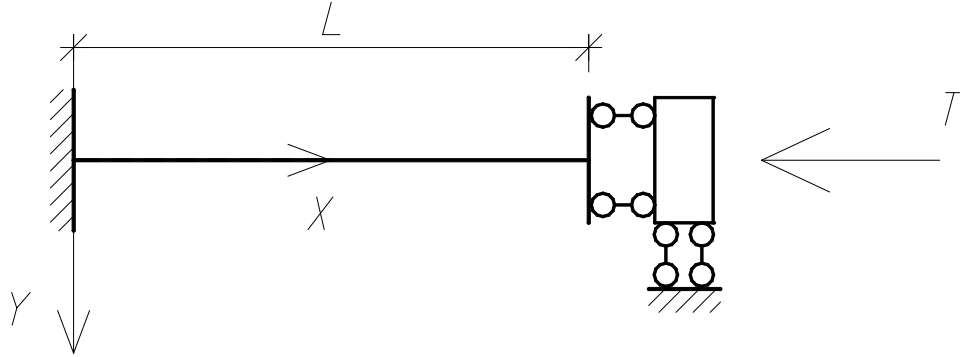


Рисунок А.3. Расчетная схема стержня

Рассмотрим стержень с заделкой с одной стороны и скользящей заделкой, допускающей перемещения перпендикулярно оси стержня, сжимаемый мертвой осевой силой \$T\$, как показано на рисунке А.3. Граничные условия (2.13), соответствующие рассматриваемой задаче, были получены в пункте 2.2.4. Точное решение нелинейной задачи (3.1), (1.180), (1.183) и (2.13) описывается формулами (3.14). Таким образом, система уравнений устойчивости совпадает с системой (3.16).

Граничные условия для задачи устойчивости стержня с заделкой с одной стороны и скользящей заделкой, допускающей перемещения перпендикулярно оси стержня, с другой, полученные из внеинтегральных слагаемых первой вариации функционала устойчивости, описаны в пункте 2.4.4. В случае физической линейности стержня, когда смешанные производные  $\frac{\partial^2 W}{\partial \varepsilon \partial \gamma}$ ,  $\frac{\partial^2 W}{\partial \varepsilon \partial \psi}$ ,  $\frac{\partial^2 W}{\partial \gamma \partial \psi}$  равны нулю, а  $\frac{\partial N}{\partial \varepsilon} = k_1$ ,  $\frac{\partial Q}{\partial \gamma} = k_2$ ,  $\frac{\partial M}{\partial \psi} = k_3$ , граничные условия имеют вид:

$$\begin{aligned}
 s = 0: & & s = L: \\
 u(0, t) = 0; & & N_B(L, t) \cos \varphi(L, t) - Q_B(L, t) \sin \varphi(L, t) - \theta(N(L, t) \sin \varphi + Q(L, t) \cos \varphi(L, t)) = 0; \\
 v(0, t) = 0; & & N_B(L, t) \sin \varphi(L, t) + Q_B(L, t) \cos \varphi(L, t) + \theta(N(L, t) \cos \varphi - Q(L, t) \sin \varphi(L, t)) = 0; \\
 \theta(0, t) = 0; & & \theta(L, t) = 0;
 \end{aligned} \tag{A.21}$$

где использованы обозначения (2.7) и (2.40).

Величины  $x$ ,  $y$ ,  $\varphi$ ,  $\varepsilon$ ,  $\gamma$ ,  $\psi$ ,  $N$ ,  $Q$ ,  $M$  обозначают характеристики напряженно – деформированного состояния, удовлетворяющие системе уравнений (3.1), (1.180), (1.183), а также граничным условиям. Величинами с нижним индексом «в» обозначаются вариации.

Подставив точное решение (3.14) в граничные условия (A.21) и используя выражения (2.7) и (2.40), граничные условия для рассматриваемой задачи могут быть записаны в виде:

$$\begin{aligned}
 s = 0 : & & s = L : \\
 u(0, t) = 0; & & k_1 u'(L, t) = 0; \\
 v(0, t) = 0; & & k_2 \left[ v'(L, t) - \theta(L, t) \cdot \left( 1 - \frac{T}{k_1} \right) \right] - T\theta(L, t) = 0; \\
 \theta(0, t) = 0; & & \theta(L, t) = 0;
 \end{aligned} \tag{A.22}$$

Условия  $u(0, t) = 0$ ,  $k_1 u'(L, t) = 0$  соответствуют продольным деформациям и далее могут быть опущены. Окончательно граничные условия (A.22) могут быть записаны в виде:

$$v(0, t) = 0; \quad k_2 \left[ v'(L, t) - \theta(L, t) \cdot \left( 1 - \frac{T}{k_1} \right) \right] - T\theta(L, t) = 0; \quad \theta(0, t) = \theta(L, t) = 0. \tag{A.23}$$

Будем искать гармоническое по времени решение системы (3.16) в виде:

$$\theta(s, t) = \theta^*(s) \cos \omega t; \quad v(s, t) = v^*(s) \cos \omega t. \tag{A.24}$$

Функции  $\theta^*(s)$ ,  $v^*(s)$  удовлетворяют граничным условиям:

$$v^*(0) = 0; \quad k_2 \left[ v^{*'}(L) - \theta^*(L) \cdot \left( 1 - \frac{T}{k_1} \right) \right] - T\theta^*(L) = 0; \quad \theta^*(0) = 0; \quad \theta^*(L) = 0. \tag{A.25}$$

Таким образом, после подстановки выражений (A.24) в систему (3.16), дифференцирования по времени ( $t$ ) и координате ( $s$ ) и сокращения на  $\cos \omega t$ , получаем систему двух уравнений относительно  $v^*(s)$  и  $\theta^*(s)$ , совпадающую с системой (3.22).

Исключая функцию  $v^*(s)$ , получаем уравнение (3.23) для функции  $\theta^*(s)$ , решение которого ищем в следующем виде:

$$\theta^*(s) = \sum_{n=1}^{\infty} \theta_n^* \sin \frac{n\pi}{L} s, \tag{A.26}$$

удовлетворяющем граничным условиям (A.25) при любых значениях  $\theta_n$ .

Подставляя (A.26) в уравнение (A.25) и приравнявая нулю коэффициенты при  $\sin \frac{n\pi}{L} s$ , получим для каждого  $n$  следующее частотное уравнение, из которого можно найти частоту  $\omega$ :



$$\frac{\rho^2}{Ak_2} J_z \omega^4 - \left( \rho \left( \left( 1 - \frac{T}{k_1} \right) B + \frac{k_3}{k_2} \left( \frac{n\pi}{L} \right)^2 \right) + \frac{\rho}{A} J_z \left( \frac{n\pi}{L} \right)^2 \right) \omega^2 + k_3 \left( \frac{n\pi}{L} \right)^4 - TB \left( \frac{n\pi}{L} \right)^2 = 0. \quad (\text{A.27})$$

Условие потери устойчивости определяется условием  $\omega = 0$  [4, 12]. Для того чтобы уравнение (A.27) имело нулевой корень необходимо и достаточно выполнение условия обращения в нуль свободного члена, откуда получаем квадратное уравнение для нахождения критической силы  $T_{кр}$ :

$$T^2 \left( \frac{1}{k_2} - \frac{1}{k_1} \right) + T - T_3 n^2 = 0, \quad (\text{A.28})$$

где  $T_3 = \frac{\pi^2 k_3}{L^2}$  – критическая сила Эйлера для стержня с заделкой с одной стороны и скользящей заделкой, допускающей перемещения перпендикулярно оси стержня, с другой [42].

Как и в параграфе 2.9.1 можно показать, что критическое (наименьшее положительное) значение силы  $T$  достигается при  $n=1$  и определяется из квадратного уравнения:

$$T^2 \left( \frac{1}{k_2} - \frac{1}{k_1} \right) + T - T_3 = 0, \quad (\text{A.29})$$

Отсюда получим единственное положительное значение  $T$ :

$$T = \frac{\sqrt{1 + 4T_3 \left( \frac{1}{k_2} - \frac{1}{k_1} \right)} - 1}{2 \left( \frac{1}{k_2} - \frac{1}{k_1} \right)}. \quad (\text{A.30})$$

Формула (A.30) совпадает с формулой (2.79) для статической постановки задачи.

**Шарнирно опертый стержень со скользящей заделкой, допускающей перемещения перпендикулярно оси стержня (рисунок А.4)**

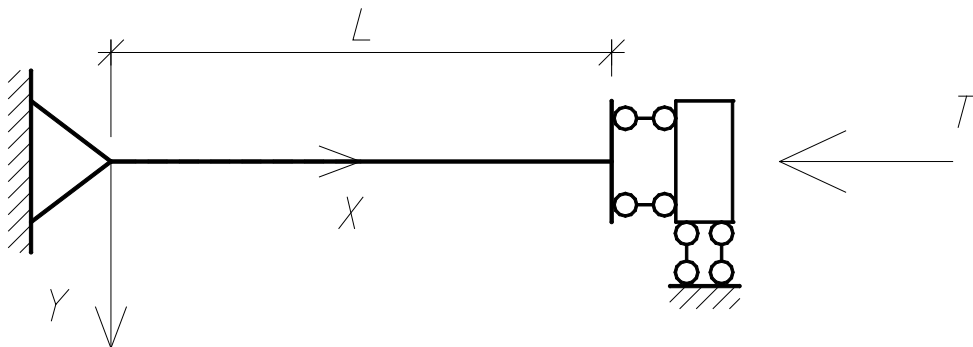


Рисунок А.4. Расчетная схема стержня

Рассмотрим шарнирно опертый стержень со скользящей заделкой, допускающей перемещения перпендикулярно оси стержня, сжимаемый мертвой осевой силой  $T$ , как показано на рисунке А.4. Граничные условия (2.14), соответствующие рассматриваемой задаче, были получены в пункте 2.2.5. Точное решение нелинейной задачи (3.1), (1.180), (1.183), (2.14) описывается формулами (3.14). Таким образом, система уравнений устойчивости совпадает с системой (3.16).

Граничные условия для задачи устойчивости шарнирно опертого стержня, со скользящей заделкой, допускающей перемещения перпендикулярно оси стержня, полученные из внеинтегральных слагаемых первой вариации функционала устойчивости, описаны в пункте 2.4.5. В случае физической линейности стержня, когда смешанные производные

$\frac{\partial^2 W}{\partial \varepsilon \partial \gamma}$ ,  $\frac{\partial^2 W}{\partial \varepsilon \partial \psi}$ ,  $\frac{\partial^2 W}{\partial \gamma \partial \psi}$  равны нулю, а  $\frac{\partial N}{\partial \varepsilon} = k_1$ ,  $\frac{\partial Q}{\partial \gamma} = k_2$ ,  $\frac{\partial M}{\partial \psi} = k_3$ , граничные условия имеют

вид:

$$\begin{aligned} s = 0 : & & s = L : \\ u(0, t) = 0; & N_B(L, t) \cos \varphi(L, t) - Q_B(L, t) \sin \varphi(L, t) - \theta(N(L, t) \sin \varphi + Q(L, t) \cos \varphi(L, t)) = 0; \\ v(0, t) = 0; & N_B(L, t) \sin \varphi(L, t) + Q_B(L, t) \cos \varphi(L, t) + \theta(N(L, t) \cos \varphi - Q(L, t) \sin \varphi(L, t)) = 0; \\ k_3 \theta'(0, t) = 0; & \theta(L, t) = 0; \end{aligned} \quad (A.31)$$

где использованы обозначения (2.7) и (2.40).

Величины  $x$ ,  $y$ ,  $\varphi$ ,  $\varepsilon$ ,  $\gamma$ ,  $\psi$ ,  $N$ ,  $Q$ ,  $M$  обозначают характеристики напряженно – деформированного состояния, удовлетворяющие системе уравнений (3.1), (1.180), (1.183), а также граничным условиям. Величинами с нижним индексом «в» обозначаются вариации.

Подставив точное решение (3.14) в граничные условия (A.31) и используя выражения (2.7) и (2.40), граничные условия для рассматриваемой задачи могут быть записаны в виде:

$$\begin{aligned} s = 0 : & & s = L : \\ u(0, t) = 0; & & k_1 u'(L, t) = 0; \\ v(0, t) = 0; & & k_2 \left[ v'(L, t) - \theta(L, t) \cdot \left( 1 - \frac{T}{k_1} \right) \right] - T \theta(L, t) = 0; \\ \theta'(0, t) = 0; & & \theta(L, t) = 0; \end{aligned} \quad (A.32)$$

Условия  $u(0, t) = 0$ ,  $k_1 u'(L, t) = 0$  соответствуют продольным деформациям и далее могут быть опущены. Окончательно граничные условия (A.32) могут быть записаны в виде:

$$v(0, t) = 0; \quad k_2 \left[ v'(L, t) - \theta(L, t) \cdot \left( 1 - \frac{T}{k_1} \right) \right] - T\theta(L, t) = 0; \quad \theta'(0, t) = 0; \quad \theta(L, t) = 0. \quad (\text{A.33})$$

Будем искать гармоническое по времени решение системы (3.16) в виде:

$$\theta(s, t) = \theta^*(s) \cos \omega t; \quad v(s, t) = v^*(s) \cos \omega t. \quad (\text{A.34})$$

Функции  $\theta^*(s)$ ,  $v^*(s)$  удовлетворяют граничным условиям:

$$v^*(0) = 0; \quad k_2 \left[ v^{*'}(L) - \theta^*(L) \cdot \left( 1 - \frac{T}{k_1} \right) \right] - T\theta^*(L) = 0; \quad \theta^{*'}(0) = 0; \quad \theta^*(L) = 0. \quad (\text{A.35})$$

Таким образом, после подстановки выражений (A.34) в систему (3.16), дифференцирования по времени ( $t$ ) и координате ( $s$ ) и сокращения на  $\cos \omega t$ , получаем систему двух уравнений относительно  $v^*(s)$  и  $\theta^*(s)$ , совпадающую с системой (3.22).

Исключая функцию  $v^*(s)$ , получаем уравнение (3.23) для функции  $\theta^*(s)$ , решение которого ищем в следующем виде:

$$\theta^*(s) = \sum_{n=1}^{\infty} \theta_n^* \cos \frac{(2n-1)\pi}{2L} s, \quad (\text{A.36})$$

удовлетворяющем граничным условиям (A.35) при любых значениях  $\theta_n$ .

Подставляя (A.36) в уравнение (3.23) и приравнявая нулю коэффициенты при  $\cos \frac{(2n-1)\pi}{2L} s$ , получим для каждого  $n$  следующее частотное уравнение, из которого можно найти частоту  $\omega$ :

$$\begin{aligned} & \frac{\rho^2}{Ak_2} J_z \omega^4 - \left( \rho \left( \left( 1 - \frac{T}{k_1} \right) B + \frac{k_3}{k_2} \left( \frac{n\pi}{2L} \right)^2 \right) + \frac{\rho}{A} J_z \left( \frac{n\pi}{2L} \right)^2 \right) \omega^2 + k_3 \left( \frac{n\pi}{2L} \right)^4 - \\ & - TB \left( \frac{n\pi}{2L} \right)^2 = 0. \end{aligned} \quad (\text{A.37})$$

Условие потери устойчивости определяется условием  $\omega = 0$  [4, 12]. Для того чтобы уравнение (A.37) имело нулевой корень необходимо и достаточно выполнение условия обращения в нуль свободного члена, откуда получаем квадратное уравнение для нахождения критической силы  $T_{кр}$ :

$$T^2 \left( \frac{1}{k_2} - \frac{1}{k_1} \right) + T - T_3 n^2 = 0, \quad (\text{A.38})$$

где  $T_3 = \frac{\pi^2 k_3}{4L^2}$  – критическая сила Эйлера для стержня с заделкой с одной стороны и скользящей заделкой, допускающей перемещения перпендикулярно оси стержня, с другой [42].

Как и в параграфе 2.9.1 можно показать, что критическое (наименьшее положительное) значение силы  $T$  достигается при  $n=1$  и определяется из квадратного уравнения:

$$T^2 \left( \frac{1}{k_2} - \frac{1}{k_1} \right) + T - T_3 = 0, \quad (\text{A.39})$$

Отсюда получим единственное положительное значение  $T$ :

$$T = \frac{\sqrt{1 + 4T_3 \left( \frac{1}{k_2} - \frac{1}{k_1} \right)} - 1}{2 \left( \frac{1}{k_2} - \frac{1}{k_1} \right)}. \quad (\text{A.40})$$

Формула (A.40) совпадает с формулой (2.87) для статической постановки задачи.

## Приложение Б

### Оценка влияния жесткости стержня на растяжение – сжатие на значение критической силы

Таблица Б.1 - Оценка влияния жесткости стержня на растяжение – сжатие на значение критической силы

№ двутавра	$T_3 / k_2$	$T_{кр}/T_3$ (формула 4.11)	$T_{кр}/T_3$ (точная формула 2.53)	Погрешность, %
20K1	0.01363	0.9867	0.9927	0.6024
20K2	0.01387	0.9865	0.9926	0.6125
23K1	0.01965	0.9811	0.9896	0.8556
23K2	0.01970	0.9810	0.9895	0.8580
26K1	0.02285	0.9781	0.9879	0.9875
26K2	0.02292	0.9781	0.9879	0.9904
26K3	0.02316	0.9779	0.9877	1.0002
30K1	0.03038	0.9713	0.9840	1.2900
30K2	0.03070	0.9710	0.9839	1.3028
30K3	0.03066	0.9711	0.9839	1.3012
35K1	0.04142	0.9617	0.9785	1.7148
35K2	0.04210	0.9611	0.9781	1.7402
40K1	0.05407	0.9511	0.9723	2.1767
40K2	0.05462	0.9506	0.9720	2.1965
40K3	0.05475	0.9505	0.9719	2.2009
40K4	0.05509	0.9503	0.9718	2.2131
40K5	0.05515	0.9502	0.9717	2.2152

## Приложение В

### Сравнение полученных результатов для стержня Бернулли – Эйлера с учетом продольной податливости с результатами, полученными по точной формуле, учитывающей жесткости на растяжение – сжатие, сдвиг и изгиб

Таблица 4.2 – Сравнение полученных результатов для стержня Бернулли – Эйлера с учетом продольной податливости с результатами, полученными по точной формуле, учитывающей жесткости на растяжение – сжатие, сдвиг и изгиб

№ двугавра	$T_{кр}/T_э$ (формула 4.39)	$T_{кр}/T_э$ (точная формула 2.53)	Погрешность, %
20К1	1.006310	0.9927	1.3703
20К2	1.006422	0.9926	1.3943
23К1	1.009147	0.9896	1.9797
23К2	1.009173	0.9895	1.9855
26К1	1.01067	0.9879	2.3053
26К2	1.01070	0.9879	2.3124
26К3	1.01082	0.9877	2.3370
30К1	1.01429	0.9840	3.0749
30К2	1.01444	0.9839	3.1081
30К3	1.01443	0.9839	3.1039
35К1	1.01969	0.9785	4.2120
35К2	1.02002	0.9781	4.2822
40К1	1.02602	0.9723	5.5298
40К2	1.02630	0.9720	5.5882
40К3	1.02637	0.9719	5.6013
40К4	1.02654	0.9718	5.6375
40К5	1.02657	0.9717	5.6437

## Приложение Г

### Оценка влияния жесткостей стержня на растяжение – сжатие и сдвиг на значение критической силы

Таблица 4.3 – Оценка влияния жесткостей стержня на растяжение – сжатие и сдвиг на значение критической силы

№ двугавра	$T_{кр}/T_э$ (формула 4.28)	$T_{кр}/T_э$ (точная формула 2.53)	Погрешность, %
20K1	1.0000	0.9927	0.7346
20K2	1.0000	0.9926	0.7473
23K1	1.0000	0.9896	1.0554
23K2	1.0000	0.9895	1.0584
26K1	1.0000	0.9879	1.2253
26K2	1.0000	0.9879	1.2290
26K3	1.0000	0.9877	1.2418
30K1	1.0000	0.9840	1.6229
30K2	1.0000	0.9839	1.6399
30K3	1.0000	0.9839	1.6378
35K1	1.0000	0.9785	2.2000
35K2	1.0000	0.9781	2.2352
40K1	1.0000	0.9723	2.8536
40K2	1.0000	0.9720	2.8822
40K3	1.0000	0.9719	2.8886
40K4	1.0000	0.9718	2.9063
40K5	1.0000	0.9717	2.9094

## Приложение Д

### Асимптотическое решение задачи устойчивости стержня с заделкой на одном конце и шарнирной опорой на другом (Случай большой жесткости на растяжение - сжатие ( $1/k_1=0$ , Стержень Тимошенко))

Подставим асимптотическое разложение по малому параметру  $\xi_1$  (4.44) в уравнение (4.43) и разложим обе части уравнения в ряд.

Тогда правая часть примет вид:

$$\frac{(b_0 + b_1\xi_1 + b_2\xi_1^2 + b_3\xi_1^3 + \dots)}{\sqrt{1 + (b_0 + b_1\xi_1 + b_2\xi_1^2 + b_3\xi_1^3 + \dots)^2} \xi_1} = b_0 + \xi_1 \left( b_1 - \frac{b_0^3}{2} \right) + \xi_1^2 \left( b_2 - \frac{3b_0^2 b_1}{2} + \frac{3b_0^5}{8} \right) + \xi_1^3 \left( b_3 - \frac{3b_0^2 b_2}{2} - \frac{3b_0 b_1^2}{2} + \frac{15b_0^4 b_1}{8} - \frac{5b_0^7}{16} \right). \quad (Д.1)$$

Разложим в ряд левую часть уравнения (4.43):

$$\begin{aligned} \operatorname{tg} \left( (b_0 + b_1\xi_1 + b_2\xi_1^2 + b_3\xi_1^3 + \dots) \sqrt{1 + (b_0 + b_1\xi_1 + b_2\xi_1^2 + b_3\xi_1^3 + \dots)^2} \xi_1 \right) = & b_0 + \\ & + \xi_1 \left( b_0^2 b_1 + \frac{b_0^5}{2} + b_1 + \frac{b_0^3}{2} \right) + \xi_1^2 \left( b_2 + \frac{3b_0^2 b_1}{2} - \frac{b_0^5}{8} + b_0^2 b_2 + \frac{5b_0^4 b_1}{2} + \frac{b_0^7}{8} + \right. \\ & \left. + b_0 b_1^2 \right) + \xi_1^3 \left( b_3 + \frac{3b_0^2 b_2}{2} + \frac{3b_0 b_1^2}{2} - \frac{5b_0^4 b_1}{8} + \frac{b_0^7}{16} + \frac{b_1^3}{3} + \frac{7b_0^6 b_1}{8} - \frac{b_0^9}{48} + \right. \\ & \left. + b_0^2 b_3 + \frac{5b_0^4 b_2}{2} + \frac{b_0^2 b_1^3}{3} + \frac{b_0^5 b_1^2}{2} + \frac{b_0^8 b_1}{4} + \frac{b_0^{11}}{24} + 2b_0 b_1 b_2 + 5b_0^3 b_1^2 \right) \end{aligned} \quad (Д.2)$$

Приравняем коэффициенты при одинаковых степенях малого параметра  $\xi$  в (Д.1) и (Д.2).

Отсюда:

$$b_0 = b_0;$$

$$b_1 = - \left( \frac{b_0^3}{2} + b_0 \right);$$

$$b_2 = \frac{7b_0^3}{2} + \frac{7b_0^5}{8} + 2b_0;$$

$$b_3 = - \left( \frac{33b_0^7}{16} + \frac{99b_0^5}{8} + \frac{97b_0^3}{6} + \frac{14b_0}{3} \right).$$

Получаем следующее решение:



$$b = b_0 + b_1 \xi_1 + b_2 \xi_1^2 + b_3 \xi_1^3 + \dots = b_0 - \left( \frac{b_0^3}{2} + b_0 \right) \xi_1 + \left( \frac{7b_0^3}{2} + \frac{7b_0^5}{8} + 2b_0 \right) \xi_1^2 - \\ - \left( \frac{33b_0^7}{16} + \frac{99b_0^5}{8} + \frac{97b_0^3}{6} + \frac{14b_0}{3} \right) \xi_1^3 + \dots$$

Имея решение для неизвестного  $b$  и учитывая кубические слагаемые, из первой формулы (4.42) находим критическую силу:

$$T_{\text{кр}} = \left( b_0 - \left( \frac{b_0^3}{2} + b_0 \right) \xi_1 + \left( \frac{7b_0^3}{2} + \frac{7b_0^5}{8} + 2b_0 \right) \xi_1^2 - \left( \frac{33b_0^7}{16} + \frac{99b_0^5}{8} + \right. \right. \\ \left. \left. + \frac{97b_0^3}{6} + \frac{14b_0}{3} \right) \xi_1^3 + \dots \right)^2 \frac{k_3}{L^2} = b_0^2 \frac{k_3}{L^2} \left( 1 - (2 + b_0^2) \xi_1 + (5 + 8b_0^2 + 2b_0^4) \xi_1^2 - \right. \\ \left. - \left( \frac{40}{3} + \frac{124b_0^2}{3} + 30b_0^4 + 5b_0^6 \right) \xi_1^3 + \dots \right) = T_{\text{Э}} \left[ 1 - (2 + b_0^2) \xi_1 + (5 + 8b_0^2 + 2b_0^4) \xi_1^2 - \right. \\ \left. - \left( \frac{40}{3} + \frac{124b_0^2}{3} + 30b_0^4 + 5b_0^6 \right) \xi_1^3 + \dots \right]. \quad (\text{Д.3})$$

Или, подставив в формулу (Д.3) выражения для  $\xi_1$  и  $b_0$  и учитывая слагаемые только первого порядка малости, формулу (Д.3) запишем в виде:

$$T_{\text{кр}} = T_{\text{Э}} \left[ 1 - \frac{2k_3}{k_2 L^2} - \frac{T_{\text{Э}}}{k_2} \right]. \quad (\text{Д.4})$$

Таблица Д.1 – Сравнение результатов, полученных асимптотически, с точными результатами

№ двугавра	$T_{кр}/T_э$ (уравнение 2.93)	$T_{кр}/T_э$ (формула 4.46)	Погрешность $\Delta$ , %
20K1	0.9826	0.9694	1.3520
20K2	0.9823	0.9688	1.3768
23K1	0.9753	0.9558	1.9963
23K2	0.9752	0.9557	2.0025
26K1	0.9715	0.9486	2.3509
26K2	0.9714	0.9485	2.3587
26K3	0.9711	0.9479	2.3857
30K1	0.9627	0.9317	3.2159
30K2	0.9623	0.9310	3.2541
30K3	0.9623	0.9311	3.2493
35K1	0.9502	0.9069	4.5602
35K2	0.9495	0.9054	4.6457
40K1	0.9366	0.8784	6.2089
40K2	0.9360	0.8772	6.2842
40K3	0.9359	0.8769	6.3011
40K4	0.9355	0.8761	6.3478
40K5	0.9354	0.8760	6.3558

## Приложение Е

### Асимптотическое решение задачи устойчивости стержня с заделкой на одном конце и шарнирной опорой на другом (Случай большой жесткости на сдвиг ( $1/k_2=0$ , Стержень Бернулли – Эйлера с учетом продольной податливости))

Подставим асимптотическое разложение по малому параметру  $\xi_2$  (4.50) в уравнение (4.49) и разложим обе части уравнения в ряд.

Тогда правая часть примет вид:

$$\begin{aligned} & (b_0 + b_1\xi_2 + b_2\xi_2^2 + b_3\xi_2^3 + \dots) \sqrt{1 - (b_0 + b_1\xi_2 + b_2\xi_2^2 + b_3\xi_2^3 + \dots)^2 \xi_2} = b_0 + \xi_2 \left( b_1 - \right. \\ & \left. - \frac{b_0^3}{2} \right) + \xi_2^2 \left( b_2 - \frac{3b_0^2 b_1}{2} - \frac{b_0^5}{8} \right) + \xi_2^3 \left( b_3 - \frac{3b_0^2 b_2}{2} - \frac{3b_0 b_1^2}{2} - \frac{5b_0^4 b_1}{8} - \frac{b_0^7}{16} \right). \end{aligned} \quad (E.1)$$

Разложим в ряд левую часть уравнения (4.49):

$$\begin{aligned} & \operatorname{tg} \left( (b_0 + b_1\xi_2 + b_2\xi_2^2 + b_3\xi_2^3 + \dots) \sqrt{1 - (b_0 + b_1\xi_2 + b_2\xi_2^2 + b_3\xi_2^3 + \dots)^2 \xi_2} \right) = b_0 + \\ & + \xi_2 \left( b_0^2 b_1 - \frac{b_0^5}{2} + b_1 - \frac{b_0^3}{2} \right) + \xi_2^2 \left( b_2 - \frac{3b_0^2 b_1}{2} - \frac{b_0^5}{8} + b_0^2 b_2 - \frac{5b_0^4 b_1}{2} + \frac{b_0^7}{8} + \right. \\ & \left. + b_0 b_1^2 \right) + \xi_2^3 \left( b_3 - \frac{3b_0^2 b_2}{2} - \frac{3b_0 b_1^2}{2} - \frac{5b_0^4 b_1}{8} - \frac{b_0^7}{16} + \frac{b_1^3}{3} + \frac{7b_0^6 b_1}{8} + \frac{b_0^9}{48} + b_0^2 b_3 - \right. \\ & \left. - \frac{5b_0^4 b_2}{2} + \frac{b_0^2 b_1^3}{3} - \frac{b_0^5 b_1^2}{2} + \frac{b_0^8 b_1}{4} - \frac{b_0^{11}}{24} + 2b_0 b_1 b_2 - 5b_0^3 b_1^2 \right) \end{aligned} \quad (E.2)$$

Приравняем коэффициенты при одинаковых степенях малого параметра  $\xi_2$  в (E.1) и (E.2).

Отсюда:

$$b_0 = b_0;$$

$$b_1 = \frac{b_0^3}{2};$$

$$b_2 = \frac{7b_0^5}{8};$$

$$b_3 = \frac{33b_0^7}{16}.$$

Получаем следующее решение:

$$b = b_0 + b_1\xi_2 + b_2\xi_2^2 + b_3\xi_2^3 + \dots = b_0 + \frac{b_0^3}{2}\xi_2 + \frac{7b_0^5}{8}\xi_2^2 + \frac{33b_0^7}{16}\xi_2^3 + \dots$$

Имея решение для неизвестного  $b$  и учитывая кубические слагаемые, из первой формулы (4.48) находим критическую силу:

$$T_{кр} = \left( b_0 + \frac{b_0^3}{2} \xi_2 + \frac{7b_0^5}{8} \xi_2^2 + \frac{17b_0^7}{4} \xi_2^3 + \dots \right)^2 \frac{k_3}{L^2} = b_0^2 \frac{k_3}{L^2} \left( 1 + \frac{b_0^2}{2} \xi_2 + \frac{7b_0^4}{8} \xi_2^2 + \frac{17b_0^6}{4} \xi_2^3 + \dots \right)^2 = T_{\text{Э}} \left[ 1 + b_0^2 \xi_2 + 2b_0^4 \xi_2^2 + 5b_0^6 \xi_2^3 + \dots \right] \quad (\text{E.3})$$

Или, подставив в формулу (E.3) выражения для  $\xi_2$  и  $b_0$  и учитывая слагаемые только первого порядка малости, формулу (E.3) запишем в виде:

$$T_{кр} = T_{\text{Э}} \left[ 1 + \frac{T_{\text{Э}}}{k_1} \right]. \quad (\text{E.4})$$

Таблица E.1 – Сравнение результатов, полученных асимптотически, с точными результатами

№ двугавра	$T_{кр}/T_{\text{Э}}$ (уравнение 2.93)	$T_{кр}/T_{\text{Э}}$ (формула 4.51)	Погрешность $\Delta$ , %
20K1	0.9826	1.01275	3.06445
20K2	0.9823	1.01297	3.1178
23K1	0.9753	1.01837	4.4169
23K2	0.9752	1.01843	4.4296
26K1	0.9715	1.02137	5.1369
26K2	0.9714	1.02143	5.1526
26K3	0.9711	1.02166	5.2068
30K1	0.9627	1.02841	6.8313
30K2	0.9623	1.02871	6.9041
30K3	0.9623	1.02868	6.8951
35K1	0.9502	1.03873	9.3164
35K2	0.9495	1.03937	9.4693
40K1	0.9366	1.05056	12.1690
40K2	0.9360	1.05108	12.2949
40K3	0.9359	1.05120	12.3231
40K4	0.9355	1.05152	12.4009
40K5	0.9354	1.05158	12.4142

## Приложение Ж

### Асимптотическое решение задачи устойчивости стержня с заделкой на одном конце и шарнирной опорой на другом (Общий случай ( $1/k_1 \neq 0$ ; $1/k_2 \neq 0$ ))

Подставим разложение в уравнение (4.54) и разложим обе части уравнения в ряд.

Тогда правая часть примет вид:

$$\begin{aligned} & \frac{(b_0 + b_1 \xi_1 + b_2 \xi_1^2 + b_3 \xi_1^3 + \dots) \left( 1 - (b_0 + b_1 \xi_1 + b_2 \xi_1^2 + b_3 \xi_1^3 + \dots)^2 \xi_1 k \right)}{\sqrt{1 + (b_0 + b_1 \xi_1 + b_2 \xi_1^2 + b_3 \xi_1^3 + \dots)^2 \xi_1 (1 - k)}} = b_0 + \\ & + \xi_1 \left( b_1 - \frac{b_0^3}{2} - \frac{b_0^3}{2} k \right) + \xi_1^2 \left( b_2 - \frac{3b_0^2 b_1}{2} - \frac{3b_0^2 b_1}{2} k + \frac{3b_0^5}{8} - \frac{b_0^5}{4} k - \frac{b_0^5}{8} k^2 \right) + \\ & + \xi_1^3 \left( b_3 - \frac{3b_0^2 b_2}{2} - \frac{3b_0^2 b_2}{2} k - \frac{3b_0 b_1^2}{2} - \frac{3b_0 b_1^2}{2} k + \frac{15b_0^4 b_1}{8} - \frac{5b_0^4 b_1}{4} k - \right. \\ & \left. - \frac{5b_0^4 b_1}{8} k^2 - \frac{5b_0^7}{16} + \frac{9b_0^7}{16} k - \frac{3b_0^7}{16} k^2 - \frac{b_0^7}{16} k^3 \right). \end{aligned} \quad (\text{Ж.1})$$

Разложим в ряд левую часть уравнения (4.54):

$$\begin{aligned} & \operatorname{tg} \left( (b_0 + b_1 \xi_1 + b_2 \xi_1^2 + b_3 \xi_1^3 + \dots) \sqrt{1 + (b_0 + b_1 \xi_1 + b_2 \xi_1^2 + b_3 \xi_1^3 + \dots)^2 \xi_1 (1 - k)} \right) = \\ & = b_0 + \xi_1 \left( b_1 + \frac{b_0^3}{2} - \frac{b_0^3}{2} k \right) + \xi_1^2 \left( b_2 + \frac{3b_0^2 b_1}{2} - \frac{b_0^5}{8} - \frac{3b_0^2 b_1}{2} k + \frac{b_0^5}{4} k - \frac{b_0^5}{8} k^2 \right) + \\ & + \xi_1^3 \left( b_3 + \frac{3b_0 b_1^2}{2} + \frac{3b_0^2 b_2}{2} - \frac{5b_0^4 b_1}{8} + \frac{b_0^7}{16} - \frac{3b_0 b_1^2}{2} k - \frac{3b_0^2 b_2}{2} k + \frac{5b_0^4 b_1}{4} k - \frac{3b_0^7}{16} k - \right. \\ & \left. - \frac{5b_0^4 b_1}{8} k^2 - \frac{b_0^7}{16} k^3 + \frac{3b_0^7}{16} k^2 \right). \end{aligned} \quad (\text{Ж.2})$$

Приравняем коэффициенты при одинаковых степенях малого параметра  $\xi_1$  в (Ж.1) и (Ж.2).

Отсюда:

$$b_0 = b_0;$$

$$b_1 = -\left(b_0 + \frac{b_0^3}{2}\right) + \frac{b_0^3}{2}k;$$

$$b_2 = \left(\frac{7b_0^5}{8} + \frac{7b_0^3}{2} + 2b_0\right) + \left(\frac{7b_0^5}{8}k^2 - \frac{7b_0^5}{4}k - \frac{7b_0^3}{2}k\right);$$

$$b_3 = \left(-\frac{14b_0}{3} - \frac{97b_0^3}{6} - \frac{99b_0^5}{8} - \frac{33b_0^7}{16}\right) + \left(\frac{33b_0^7}{16}k^3 - \frac{99b_0^7}{16}k^2 + \frac{99b_0^7}{16}k - \frac{99b_0^5}{8}k^2 + \frac{99b_0^5}{4}k + \frac{33b_0^3}{2}k\right).$$

Получаем следующее решение:

$$b = b_0 + b_1\xi_1 + b_2\xi_1^2 + b_3\xi_1^3 + \dots = b_0 + \left(-\left(b_0 + \frac{b_0^3}{2}\right) + \frac{b_0^3}{2}k\right)\xi_1 + \left(\frac{7b_0^5}{8} + \frac{7b_0^3}{2} + 2b_0 + \frac{7b_0^5}{8}k^2 - \frac{7b_0^5}{4}k - \frac{7b_0^3}{2}k\right)\xi_1^2 + \left(-\frac{14b_0}{3} - \frac{97b_0^3}{6} - \frac{99b_0^5}{8} - \frac{33b_0^7}{16} + \frac{33b_0^7}{16}k^3 - \frac{99b_0^7}{16}k^2 + \frac{99b_0^7}{16}k - \frac{99b_0^5}{8}k^2 + \frac{99b_0^5}{4}k + \frac{33b_0^3}{2}k\right)\xi_1^3 + \dots$$

Имея решение для неизвестного  $b$  и учитывая только линейные и квадратичные слагаемые, из первой формулы (4.52) находим критическую силу:

$$T_{\text{кр}} = \left(b_0 - \left(\frac{b_0^3}{2} + b_0 - \frac{b_0^3}{2}k\right)\xi_1 + \left(\frac{7b_0^5}{8} + \frac{7b_0^3}{2} + 2b_0 + \frac{7b_0^5}{8}k^2 - \frac{7b_0^5}{4}k - \frac{7b_0^3}{2}k\right)\xi_1^2 + \left(-\frac{14b_0}{3} - \frac{97b_0^3}{6} - \frac{99b_0^5}{8} - \frac{33b_0^7}{16} + \frac{33b_0^7}{16}k^3 - \frac{99b_0^7}{16}k^2 + \frac{99b_0^7}{16}k - \frac{99b_0^5}{8}k^2 + \frac{99b_0^5}{4}k + \frac{33b_0^3}{2}k\right)\xi_1^3 + \dots\right)^2 \frac{k_3}{L^2} = T_{\Theta} \left[1 - (2 + b_0^2 - b_0^2k)\xi_1 + (5 + 8b_0^2 + 2b_0^4 - 8b_0^2k - 4b_0^4k + 2b_0^4k^2)\xi_1^2 - \left(\frac{40}{3} + \frac{124b_0^2}{3} + 30b_0^4 + 5b_0^6 - 42kb_0^2 - 60kb_0^4 - 15kb_0^6 + 30k^2b_0^4 + 15k^2b_0^6 - 5k^3b_0^6\right)\xi_1^3 + \dots\right] \quad (\text{Ж.3})$$

Используя зависимость между  $\xi_1$  и  $\xi_2$ , (Ж.3) примет вид:

$$\begin{aligned}
T_{кр} = T_{\Theta} & \left[ 1 - (2 + b_0^2) \xi_1 + b_0^2 \xi_2 + (5 + 8b_0^2 + 2b_0^4) \xi_1^2 + 2b_0^4 \xi_2^2 - \right. \\
& - (8b_0^2 + 4b_0^4) \xi_1 \xi_2 - \left( \frac{40}{3} + \frac{124b_0^2}{3} + 30b_0^4 + 5b_0^6 \right) \xi_1^3 + (40b_0^2 + 60b_0^4 + \\
& \left. + 15b_0^6) \xi_1^2 \xi_2 - (30b_0^4 + 15b_0^6) \xi_1 \xi_2^2 + 5b_0^6 \xi_2^3 + \dots \right] \quad (Ж.4)
\end{aligned}$$

Подставив в формулу (Ж.4) выражения для  $\xi_1$ ,  $\xi_2$  и  $b_0$  и учитывая слагаемые только первого порядка малости, формулу (Ж.4) запишем в виде:

$$T_{кр} = T_{\Theta} \left[ 1 - \frac{2k_3}{k_2 L^2} - T_{\Theta} \left( \frac{1}{k_2} - \frac{1}{k_1} \right) \right]. \quad (Ж.5)$$

Таблица Ж.1 – Сравнение результатов, полученных асимптотически, с точным результатом

№ двутавра	$T_{кр}/T_{\Theta}$ (уравнение 2.93)	$T_{кр}/T_{\Theta}$ (формула 4.56)	Погрешность $\Delta$ , %
20К1	0.9826	0.9821	0.05461
20К2	0.9823	0.9818	0.05651
23К1	0.9753	0.9742	0.1124
23К2	0.9752	0.9741	0.1130
26К1	0.9715	0.9700	0.1513
26К2	0.9714	0.9699	0.1522
26К3	0.9711	0.9696	0.1554
30К1	0.9627	0.9601	0.2645
30К2	0.9623	0.9597	0.2700
30К3	0.9623	0.9597	0.2693
35К1	0.9502	0.9456	0.4839
35К2	0.9495	0.9447	0.4994
40К1	0.9366	0.9290	0.8103
40К2	0.9360	0.9283	0.8265
40К3	0.9359	0.9281	0.8301
40К4	0.9355	0.9277	0.8402
40К5	0.9354	0.9276	0.8420