

Федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение
высшего профессионального образования «Тюменский государственный
архитектурно-строительный университет»

На правах рукописи

РАЗОВ Игорь Олегович

**АНАЛИТИЧЕСКИЕ МЕТОДЫ РАСЧЕТА ДИНАМИЧЕСКИХ
ХАРАКТЕРИСТИК ПРЯМОЛИНЕЙНЫХ ТОНКОСТЕННЫХ
ТРУБОПРОВОДОВ БОЛЬШОГО ДИАМЕТРА ПРИ НАЗЕМНОЙ
ПРОКЛАДКЕ**

Специальность 05.23.17 – Строительная механика

Диссертация

на соискание ученой степени
кандидата технических наук

Научный руководитель:
доктор технических наук,
доцент Соколов В.Г.

Тюмень – 2015

ОГЛАВЛЕНИЕ

ВВЕДЕНИЕ.....	4
1 ОБЗОР ТЕОРИЙ И МЕТОДОВ РАСЧЕТА МАГИСТРАЛЬНЫХ ТРУБОПРОВОДОВ	11
1.1 Свободные колебания трубопроводов с позиции стержневой теории	11
1.2 Свободные колебания трубопроводов с протекающей жидкостью, на базе стержневой теории	14
1.3 Свободные колебания трубопроводов с позиции теории цилиндрических оболочек.....	15
1.4 Параметрические колебания и динамическая устойчивость трубопроводов ..	19
Выводы по главе 1	24
2 СВОБОДНЫЕ КОЛЕБАНИЯ И СТАТИЧЕСКАЯ УСТОЙЧИВОСТЬ НАЗЕМНЫХ, ТОНКОСТЕННЫХ, ПРЯМОЛИНЕЙНЫХ УЧАСТКОВ ГАЗОПРОВОДОВ С ПОЗИЦИИ ТЕОРИИ ЦИЛИНДРИЧЕСКИХ ОБОЛОЧЕК ..	26
2.1 Конструкция наземного трубопровода с учетом радиального давления на внешнюю поверхность трубы	26
2.2 Решение контактной задачи с учетом взаимодействие трубопровода с грунтом по узкой полосе	28
2.3 Разложение импульсной функции в ряд Фурье.	32
2.4 Основные уравнения и допущения геометрически нелинейного варианта полубезмоментной теории цилиндрических оболочек	34
2.5 Уравнение движения цилиндрической оболочки с учетом внутреннего рабочего давления, параметра продольной сжимающей силы, и упругого основания грунта	39
2.6 Определение частот и форм свободных колебаний наземных тонкостенных магистральных газопроводов большого диаметра.....	41
2.7 Исследование свободных колебаний наземных газопроводов	45
2.8 Критерий применимости теории цилиндрических оболочек и стержневой теории для наземных газопроводов	58
Выводы по главе 2	61

3 СВОБОДНЫЕ КОЛЕБАНИЯ МАГИСТРАЛЬНЫХ ТОНКОСТЕННЫХ НЕФТЕПРОВОДОВ БОЛЬШОГО ДИАМЕТРА С ПОТОКОМ НЕФТИ ПРИ НАЗЕМНОЙ ПРОКЛАДКЕ	63
3.1 Уравнение движения нефтепровода с учетом стационарного внутреннего рабочего давления, параметра продольной сжимающей силы, протекающей жидкости, и упругого основания грунта	63
3.2 Влияния упругого основания грунта на частоты свободных колебаний участка наземного нефтепровода с протекающей жидкостью	68
3.3 Колебания и статическая устойчивость наземных нефтепроводов.....	72
3.4 Критерий применимости теории цилиндрических оболочек и стержневой теории для наземных нефтепроводов	76
Выводы по главе 3	80
4 ПАРАМЕТРИЧЕСКИЕ КОЛЕБАНИЯ И ДИНАМИЧЕСКАЯ УСТОЙЧИВОСТЬ МАГИСТРАЛЬНЫХ ТОНКОСТЕННЫХ ТРУБОПРОВОДОВ БОЛЬШОГО ДИАМЕТРА ПРИ НАЗЕМНОЙ ПРОКЛАДКЕ	82
4.1 Параметрические колебания и динамическая устойчивость наземных тонкостенных газопроводов большого диаметра.....	82
4.2 Параметрические колебания и динамическая устойчивость наземных тонкостенных нефтепроводов большого диаметра	88
Выводы по главе 4	94
5 СРАВНЕНИЕ И СОПОСТАВЛЕНИЕ РЕЗУЛЬТАТОВ ПОЛУЧЕННЫХ В ДИССЕРТАЦИИ С РЕЗУЛЬТАТАМИ ДРУГИХ АВТОРОВ	96
5.1 Сравнение решений полученных в диссертации с решениями других авторов при $m=1$	96
5.2 Сравнение решений полученных в диссертации с решениями других авторов по теории цилиндрических оболочек	100
Выводы по главе 5	102
ЗАКЛЮЧЕНИЕ	103
СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ.....	106
ПРИЛОЖЕНИЕ А	119
ПРИЛОЖЕНИЕ Б.....	123

ВВЕДЕНИЕ

Актуальность избранной темы. В настоящее время наблюдается тенденция расширения существующих, и строительства новых сетей магистральных трубопроводов, выполненных из тонкостенных труб диаметром свыше 1000мм. Применение таких труб выдвигает новые задачи теории колебаний, связанные с определением частот и форм свободных колебаний. А для нестационарного воздействия, вызванного пульсацией внутреннего рабочего давления, протекающей жидкости – изучение параметрического резонанса. Динамические расчеты, производимые с позиции классической стержневой теории, не позволяют в полной мере оценить работу тонкостенных труб. Это связано с тем, что стержневая модель не позволяет учесть влияние таких факторов, как внутреннее рабочее давление и деформацию поперечного сечения. Таким образом, для получения более достоверных результатов, по определению динамических характеристик, необходимо принять в качестве расчетной модели не стержень, а цилиндрическую оболочку, которая наиболее полно отражает реальную работу конструкции.

Данная работа посвящена изучению вопроса колебаний, статической и динамической устойчивости, наземных тонкостенных трубопроводов большого диаметра с учетом совместного влияния упругого основания грунта, продольной сжимающей силы, внутреннего рабочего давления, протекающей жидкости, и геометрических характеристик. Таким образом, актуальность работы не вызывает сомнений.

Степень разработанности темы исследований. Динамический расчет прямолинейных участков трубопроводов с позиции стержневой теории по определению частот свободных колебаний был рассмотрен авторами: С.П. Тимошенко, Я.Г. Пановко, В.В. Болотин, В.И. Феодосьев, Т.Е. Смит, Дж. Герман, Х. Эшли, Дж. Хевиленд, Н.А. Алфутов, Г.В. Хаузнер, А.П. Ковревский, Р. Лонг, В.В. Лалин, П.А. Джонджоров, С.В. Челомей, В.А. Светлицкий и другими.

Большой вклад в развитие теории колебаний с позиции цилиндрических оболочек внесли: М.А. Ильгамов, М.П. Пайдусис, А.С. Вольмир, Б.К. Михайлов Э.И. Иванюта, С.Н. Кукуджанов, В.П. Ильин, О.Б. Халецкая, и др. В работах М.П. Пайдусиса, А.С. Вольмира, Г.В. Хаузнера, частоты свободных колебаний цилиндрической оболочки определены при помощи численных методов, основанных на уравнениях В. Флюгге. В.П. Ильиным и О.Б. Халецкой разработан новый алгоритм по определению, в аналитическом виде, частот и форм свободных колебаний на основании геометрически нелинейной теории цилиндрических оболочек с учетом тангенциальных и радиальных сил инерции, а так же внутреннего рабочего давления.

Исследования параметрических колебаний и динамической устойчивости с позиции стержневой теории рассмотрены в работах: А.А. Андропова, М.А. Леонтовича, В.А. Гастьева, И.И. Гольденבלата, Н.А. Картвелишвили, А.В. Индейкина, В.Н. Челомея, О.Д. Ониашвили, А.Н. Маркова, В.В. Болотина, А.С. Вольмира, Б.З. Брачковского, М.П. Пайдусиса, и др.

Вопрос исследования колебаний и динамической устойчивости наземных трубопроводов, даже с позиции стержневой теории, рассмотрен не достаточно полно, является актуальным и находится в стадии развития.

Цель и задачи исследования.

Цель исследования – разработать методику динамического расчета прямолинейных участков тонкостенных трубопроводов большого диаметра при наземной прокладке, со стационарным и нестационарным потоком нефти и газа с учетом параметра продольной сжимающей силы и упругого основания грунта.

Задачи исследования:

- изучить существующие методы динамического расчета нефте- и газопроводов при наземной прокладке;
- решить контактную задачу с учетом взаимодействия трубопровода с грунтом по узкой полосе;

- на основании геометрически нелинейном варианте полубезмоментной теории цилиндрических оболочек получить уравнение движения наземного нефте- и газопровода с учетом всех составляющих сил инерции, внутреннего рабочего давления, скорости потока протекающей жидкости, параметра продольной сжимающей силы, и упругого основания грунта;
- для системы «труба-газ», «труба-нефть» при различных геометрических характеристиках изучить влияние упругого основания грунта, внутреннего рабочего давления, параметра продольной сжимающей силы на частоты свободных колебаний;
- получить выражения в аналитическом виде для параметра критической продольной сжимающей силы наземных нефте- и газопроводов, вызывающей потерю статической устойчивости;
- решить задачу о параметрических колебаниях и динамической устойчивости нефте- и газопроводов при наземной прокладке, с построением модифицированных диаграмм Айнса – Стретта, при различных геометрических и механических характеристиках.

Объектом исследования являются наземные, тонкостенные, магистральные трубопроводы большого диаметра.

Предметом исследования являются свободные и параметрические колебания, статическая и динамическая устойчивость наземных тонкостенных магистральных трубопроводов большого диаметра.

Научная новизна исследования:

1. Решена контактная задача с учетом взаимодействия трубопровода с грунтом по узкой полосе позволяющая определить радиальное давления грунта на внешнюю поверхность трубы. На основании геометрически нелинейном варианте полубезмоментной теории цилиндрических оболочек и теории потенциального течения потока жидкости получены уравнения движения наземных нефте- и газопроводов. Получены аналитические выражения по определению частот и форм свободных колебаний для стационарного потока нефти и газа.

2. Получены аналитические зависимости позволяющие уточнить определение частот свободных колебаний наземных тонкостенных нефте- и газопроводов большого диаметра и изучить влияние упругого основания грунта, параметра продольной сжимающей силы, геометрических характеристик, и стационарного потока жидкости (для нефтепровода).

3. Получены выражения для определения параметра критической продольной сжимающей силы наземных нефте- и газопроводов.

4. Установлен критерий применимости теории оболочек для определения наименьших частот свободных колебаний в виде параметра длины l^* .

5. Разработана методика исследования динамической устойчивости нефте- и газопроводов при наземной прокладке с использованием системы уравнений Матье. Построены области динамической неустойчивости при помощи модифицированных диаграмм Айнса – Стретта. Полученные диаграммы позволяют оценить влияние геометрических и механических характеристик на размеры, и расположение областей динамической неустойчивости.

Теоретическая и практическая значимость работы.

Полученные в данной диссертации решения по определению частот свободных колебаний, статической и динамической устойчивости наземных, тонкостенных магистральных трубопроводов большого диаметра позволяют уточнить решения, полученные по стержневой теории, а так же учесть совместное влияние внутреннего рабочего давления, геометрических характеристик, параметра продольной сжимающей силы, упругого основания грунта, и скорости потока протекающей жидкости (для нефтепровода). Решение системы дифференциальных уравнений Матье позволяет изучить динамическую устойчивость наземных трубопроводов, на основании построения областей динамической неустойчивости при помощи модифицированных диаграмм Айнса – Стретта с верхними и нижними границами.

Методология и методы исследования. Диссертационная работа выполнена с применением современных методов строительной механики и математики. Решения, полученные в диссертации, основаны на методике предложенной В.З. Власовым – В.В. Новожиловым, В.П. Ильиным, и другими учеными.

Положения, выносимые на защиту:

1. Решение контактной задачи, и разработка расчетной схемы для наземных трубопроводов с учетом взаимодействия трубы с грунтом по узкой полосе.
2. Решения задачи о свободных колебаниях наземных, тонкостенных, прямолинейных участков трубопроводов большого диаметра подверженных действию стационарного внутреннего рабочего давления, параметра продольной сжимающей силы, потока протекающей жидкости (для нефтепровода) и влияния упругого основания грунта.
3. Аналитические зависимости для определения влияния упругого основания грунта, внутреннего рабочего давления, параметра продольной сжимающей силы, стационарного потока жидкости на частоты свободных колебаний, при различных геометрических характеристиках.
4. Аналитические зависимости для определения параметров критических продольных сжимающих сил для наземных тонкостенных, прямолинейных участков нефте- и газопроводов с учетом влияния упругого основания грунта.
5. Решение задачи о параметрических колебаниях наземных трубопроводов подверженных действию нестационарного внутреннего рабочего давления, продольной сжимающей силы, и потока протекающей жидкости (для нефтепровода).
6. Построение и анализ областей динамической неустойчивости при помощи диаграмм Айнса – Стретта, от действия нестационарного потока газа и нефти в трубопроводах при различных значениях механических и геометрических характеристик.

Область исследования соответствует требованиям паспорта научной специальности ВАК: 05.23.17 – Строительная механика, п.3 «Аналитические методы расчета сооружений и их элементов».

Степень достоверности и апробация результатов. В настоящей диссертационной работе получены решения при помощи известных и апробированных методов, применяемых в строительной механике. Частные случаи полученных решений хорошо согласуются с решениями известных авторов.

Основные положения работы были доложены на следующих научных конференциях: XII научно–практической конференции молодых ученых, аспирантов и соискателей ТюмГАСУ, Тюмень, 2012 год; Конкурс лучший научный доклад на иностранном языке, 2013 (английский), ТюмГАСУ; XXV Международная конференция. Математическое моделирование в механике деформируемых сред и конструкций. Методы граничных и конечных элементов. 23–26 сентября 2013. г. Санкт Петербург, Россия; XIII научно–практической конференции молодых ученых, аспирантов и соискателей ТюмГАСУ, Тюмень, 2013 год; Международная научно–практическая конференция «Актуальные проблемы строительства, экологии и энергосбережения в условиях Западной Сибири, Тюмень, ТюмГАСУ, 2014 год; Конкурс лучший научный доклад на иностранном языке, 2014 (английский), ТюмГАСУ; IX Международная конференция «Проблемы прочности материалов и сооружений на транспорте», проводимой 27–28 мая 2014 года в г. Санкт – Петербург в ПГУПС имени Александра I; XIV научно–практической конференции молодых ученых, аспирантов и соискателей ТюмГАСУ, 2015г; Международная научно–практическая конференция «Актуальные проблемы строительства, экологии и энергосбережения в условиях Западной Сибири, Тюмень, ТюмГАСУ, 2015 год;

Публикации. Материалы диссертации опубликованы в 12 научных статьях объемом 5,44 п.л., лично автором 3,27 п.л., из них 6 статей в рецензируемых изданиях из перечня, размещенного на официальном сайте ВАК.

Структура и объем диссертации. Диссертация состоит из введения, пяти глав, заключения, списка литературы, включающего в себя 145 наименований. Общий объем диссертации составляет 130 страниц машинописного текста. Работа содержит 43 рисунка, 25 таблиц, 2 приложения.

Во введении описывается актуальность темы диссертации и постановка задач исследования.

В первой главе производится обзор и анализ отечественных и зарубежных работ, посвященных вопросам колебаний, статической и динамической

устойчивости магистральных трубопроводов, на основании стержневой теории, и теории цилиндрических оболочек.

Во второй главе решается контактная задача, с учетом взаимодействия трубопровода с грунтом по узкой полосе, исследовано влияние упругого основания грунта на частоты свободных колебаний и статической устойчивости наземных прямолинейных магистральных газопроводов с позиции теории тонких цилиндрических оболочек.

В третьей главе на основании методики приведенной во второй главе исследован вопрос колебаний и статической устойчивости наземного прямолинейного нефтепровода.

В четвертой главе исследован вопрос динамической устойчивости (параметрических колебаний) наземных нефте – и газопроводов при помощи системы дифференциальных уравнений Матье. Определены области динамической неустойчивости, при помощи модифицированных диаграмм Айнса– Стретта.

В пятой главе произведено сравнение и сопоставление решений, полученных в данной диссертации, с решениями других авторов по стержневой теории и по теории цилиндрических оболочек.

В заключении приводятся основные результаты диссертационной работы.

1 ОБЗОР ТЕОРИЙ И МЕТОДОВ РАСЧЕТА МАГИСТРАЛЬНЫХ ТРУБОПРОВОДОВ

1.1 Свободные колебания трубопроводов с позиции стержневой теории

В результате эксплуатации нефте- и газопроводы подвергаются различного рода динамическим воздействиям и вибрациям, вызванные работой компрессорных станций, вследствие которых возникают колебательные процессы. Спектр колебаний представляет собой сложный комплекс взаимодействия собственных и вынужденных частот, определение которых, зависит от геометрических и механических характеристик трубопроводов.

Динамика труб является предметом широких исследований, как в нашей стране, так и за рубежом. Эти исследования отражены в работах [10; 11; 21; 30; 31; 32; 49; 50; 57; 59; 68; 77; 82; 94; 106; 107; 109; 112; 113; 115; 118; 119; 122; 139; 145], и касаются колебаний и устойчивости прямолинейных труб.

В строительстве трубопроводных систем до 80х годов 20 – ого века применялись трубы диаметром менее 1000мм, с относительной толщиной стенки к радиусу $h/R = 1/5 - 1/10$. Такие трубопроводы, согласно трудам [12; 13; 85; 86; 107] и нормативным документам [70; 79; 88], принято рассчитывать с позиции классической стержневой теории. Так в нормативном документе [79] частоты свободных изгибных колебаний трубопроводов, рекомендуется определять, как стержень, с заданными граничными условиями по формуле:

$$\omega_i = \frac{\alpha^2}{l^2} \sqrt{\frac{EI}{(m + m_0)}}, \quad (1.1)$$

где ω_i – круговая частота, соответствующая i – ой форме колебаний балки (трубопровода), l – длина трубопровода между опорами, E – модуль упругости материала трубопровода, I – момент инерции поперечного сечения трубы, m , m_0 – погонные массы трубы и содержащегося в ней продукта соответственно, α_i – коэффициент, значения которого, определяются в зависимости от условий закрепления концов и формы колебаний, i – форма колебаний при $i=1,2,3...$

Для многопролетных *надземных* трубопроводов, частоты свободных колебаний для i – ой формы следует определять согласно справочным данным [16; 53], по формуле:

$$\lambda_i = \frac{1}{2\pi} \cdot \frac{\alpha_i^2}{l^2} \sqrt{\frac{EI}{m}}, \quad (1.2)$$

где $\lambda_i = \frac{\omega_i}{2\pi}$, α_i – коэффициенты, зависящие от условий закрепления концов трубопроводов, числа пролетов, формы колебаний и определяемые при помощи таблиц и графиков [16].

Далее С.П. Тимошенко [106] была решена задача по определению частот свободных колебаний стержня на упругом основании. Автором в уравнении изгибных колебаний было учтено влияние упругого основания в виде коэффициента постели грунта k , определяемого в соответствии с гипотезой Фусса–Винклера:

$$EI \frac{\partial^4 y}{\partial x^4} + ky + \rho F \frac{\partial^2 y}{\partial t^2} = 0, \quad (1.3)$$

где k – коэффициент постели с размерностью [Н/м³], y – прогиб, ρ – плотность материала трубы, F – площадь поперечного сечения, x – продольная координата, вдоль нейтральной оси, t – время.

В результате преобразований частота свободных колебаний стержня на упругом основании имеет вид:

$$p_i = \frac{i^2 \pi^2 a}{l^2} \sqrt{1 + \frac{k_n l^4}{EI i^4 \pi^4}}, \quad (1.4)$$

где p_i – частота свободных колебаний i – ой формы, $a^2 = \frac{EI}{\rho F}$, k_n – коэффициент постели с размерностью [Н/м²]. Полученное С.П. Тимошенко решение (1.4) широко используется в нормативных документах, и применяется для определения собственных частот наземных трубопроводов.

В работе В.В. Болотина [12] была решена задача определения частот и форм свободных колебаний надземного трубопровода обжатого продольной силой,

вызванной смещением опор, недостаточной компенсацией температурных деформаций и т.д. Полученное автором решение представляется в виде:

$$\omega_i = \frac{i^2 \pi^2}{l^2} \sqrt{\frac{EI}{(m + m_0)} \left(1 - \frac{Fl^4}{i^2 \pi^2 EI}\right)}, \quad (1.5)$$

где F – продольная сила.

Используя критерий динамической устойчивости, когда $\omega_i = 0$, величина критической сжимающей силы, при которой система теряет устойчивость, принимает вид:

$$F_{кр} = \frac{i^2 \pi^2 EI}{l^2}. \quad (1.6)$$

Анализ аварий, произошедших в Средней Азии [2], показал, что в случае изменения температуры транспортируемого газа с 34⁰С до 48⁰С наблюдалось выпучивание трубопровода и образование «арочного выброса». Такое явление вызвано действием продольных сжимающих сил действующих на трубопровод. Процесс аркообразования может быть вызван не только температурными деформациями, но и в том числе смещением опор и изменение физико – механических свойств грунта.

Задача устойчивости стержней, связанных с упругим основанием представляет интерес, поскольку такие расчетные схемы широко используются на практике. Решение, полученное Н.А. Алфутовым [4], для стержня на упругом основании, в дальнейшем приобрело широкое применение при статическом расчете наземных трубопроводов, и позволяет определить параметр критической продольной сжимающей силы, с учетом влияния упругого основания:

$$\overline{P}_n = n^2 + \frac{kl^4}{n^2 \pi^4 EI}, \quad (1.7)$$

где $\overline{P}_n = \frac{F}{F_0}$, $F_0 = \frac{\pi^2 EI}{l^2}$.

Позднее П.П. Бородавкин, А.М. Синюков получили в работе [16] выражение для расчетов *подземных* трубопроводов, полученная формула для определения критической сжимающей силы имеет вид:

$$F_{кр} = \frac{\pi^2 EI}{l^2} (n^2 + \eta/n^2), \quad (1.8)$$

где $\eta = \frac{k_0 D l^4}{\pi^2 EI}$, k_0 – коэффициент постели [Н/м³], D – наружный диаметр.

1.2 Свободные колебания трубопроводов с протекающей жидкостью, на базе стержневой теории

Впервые, в 1950 году, задача об изгибных колебаниях прямолинейного трубопровода с потоком протекающей жидкостью была решена Х. Эшли и Дж.Хевилендом [116]. Однако из за неполного учета сил инерции протекающей жидкости ими был получен неточный результат. Допущенная ошибка была исправлена В.И. Федосьевым [107] в 1951 году, полученное им решение на базе стержневой теории и метода Бубнова – Галеркина для квадрата частоты шарнирно закрепленного трубопровода со стационарным потоком жидкости со скоростью V до сих пор имеет практическое применение по нормам [76]:

$$\omega_i^2 = \frac{i^4 \pi^4}{l^4} \frac{EI}{m + m_0} \left(1 - \frac{V^2 l^2 m_0}{\pi^2 EI}\right) \quad (1.9)$$

В дальнейшем Г.В. Хаузнером было получено решение в аналитическом виде, которое подтвердило правильность решения В.И. Феодосьева. Последующие работы [12; 31; 32; 59; 73; 144] были направлены на уточнение решений и учете новых факторов, влияющих на частоты свободных колебаний трубопроводов с потоком жидкости. К экспериментальным исследованиям в этой области из перечисленных выше работ относятся статьи А.П.Ковревского [59] и Р. Лонга [133].

Более детальный анализ работ, посвящённых колебаниям прямолинейного трубопровода с потоком жидкости провел академик С.В.Челомей [111] где, с позиции стержневой теории, был рассмотрен прямолинейный, упругий трубопровод с протекающей через него невязкой несжимаемой жидкостью.

Систематизацию и обобщение в этой области провел в своих монографиях В.А.Светлицкий [94; 98].

Для наземных трубопроводов с протекающей жидкостью и влияния упругого основания существует ряд научных трудов доказывающих, что учет упругого основания несет стабилизирующий эффект, например в работах Х. Чена [119], П.А. Джонджорова [122; 123; 124] доказано, что упругое основание способно увеличить критическую скорость потока жидкости. Аналогичные исследования были проведены О. Доаре [125], его работа была посвящена определению местной и общей устойчивости наземного трубопровода с протекающей жидкостью. И. Лотатти, А. Корнецки [132] установили, что критическая скорость потока, в трубе на упругом основании выше, чем в той же трубе, но без учета упругого основания. Решения, полученные в этих работах, основаны на численных методах расчета. Приведенный анализ показал, что упругое основание увеличивает значения частот свободных колебаний и значения критической скорости потока жидкости в трубе.

1.3 Свободные колебания трубопроводов с позиции теории цилиндрических оболочек

Известные методы определения динамических характеристик в большинстве случаев основаны на допущениях стержневой теории, что в полной мере не отражает реальную работу тонкостенных труб. В настоящее время в строительстве трубопроводных систем применяются трубы диаметром более 1000мм. Такие трубопроводы нельзя рассчитывать с позиции классической стержневой теории. Основная причина заключается в том, что базовая стержневая модель не способна учесть деформацию поперечного сечения и влияния внутреннего рабочего давления на колебания и устойчивость трубопроводов. Поэтому для таких труб необходимо применять более точные методы расчета, основанные на теории цилиндрических оболочек.

Вопросу колебаний цилиндрической оболочки посвящено достаточно большое количество работ основанных на уравнениях В. Флюгге [110], которые

состоят из системы, состоящей из трех дифференциальных уравнений движения в перемещениях. Решение этих уравнений с помощью рядов Фурье для оболочки с шарнирно закрепленными концевыми сечениями приводится к кубическому уравнению относительно квадрата круговой частоты свободных изгибных колебаний оболочки:

$$a_3\omega^6 + a_2\omega^4 + a_1\omega^2 + a_0 = 0. \quad (1.10)$$

Эти уравнения не получили широкого применения в практических расчетах ввиду громоздкости полученных решений. Практически приемлемое уравнение было получено авторами В.З. Власовым [22], Х.М. Муштари [74], Л.Х. Доннел [126], полученные ими уравнения носят названия их авторов Доннела – Муштари – Власова, так же известных под названием уравнений теории пологих оболочек [22; 74; 126]. Однако в этих уравнениях, пренебрегается тангенциальными составляющими сил инерции, что способствует к существенному завышению значений собственных частот оболочки. Как было доказано в работе Э.И. Иванюты и Р.Н. Финкельштейна [45] эта погрешность может достигать 25%.

Несмотря на введенные упрощения, схема решения уравнений движения цилиндрических оболочек осталась прежней, и результат решения сводился так же к кубическому уравнению типа (1.10).

Одни из первых исследований посвященных учету влияния внутреннего рабочего давления на частоты свободных колебаний цилиндрической оболочки были работы В.Е. Бреславского [18], С.Н. Кукуджанова [64; 65; 67] и др. Наиболее плодотворно в этой области работает С.Н.Кукуджанов. Его исследование, опубликованное в статье [65], касается проблеме свободных колебаний цилиндрических оболочек и их динамической устойчивости. Полученное им выражение для квадрата частоты свободных колебаний имеет вид:

$$\omega_{mn}^2 = \frac{Egh_v^2}{\gamma R^2} \frac{m^4(m^2 - 1)(m^2 - 1 + p^*) + \alpha_n^4 / h_v^2}{m^2(m^2 + 1)}, \quad (1.11)$$

где $h_v = h/R\sqrt{12(1-\nu^2)}$, $p^* = 12(1-\nu^2)\frac{p}{E}\left(\frac{R}{h}\right)^3$, $\alpha_n = \frac{n\pi R}{l}$, p^* – нормальное внутренне давление, γ – удельный вес материала трубы, g – ускорение свободного падения, m, n – волновое число в окружном и продольном направлении, R – радиус срединной поверхности.

Дальнейшее исследование в области определения частот свободных колебаний трубопроводов с позиции теории цилиндрических оболочек было построено на применении в расчетах полубезмоментной теории оболочек Власова–Новожилова [22], [78], в которой моменты M_1 , изгибающие замкнутую цилиндрическую оболочку (трубопровод) в продольном направлении, считаются малыми по сравнению с моментами M_2 , изгибающими ее в поперечном направлении. Эта теория дает хорошие результаты для оболочек средней длины и длинных, какими и являются тонкостенные трубопроводы. Такой подход к решению поставленной задачи хорошо согласуется с данными экспериментов. Разрешающими уравнениями движения здесь являются дифференциальные уравнения 4 – го порядка, которые позволяют при решении использовать по два граничных условия на каждом из двух концов закрепления, вместо 4 – х условий на каждом краю как по моментной теории оболочек.

Наиболее полное решение задачи о свободных колебаниях трубопроводов с позиции цилиндрических оболочек с учетом влияния внутреннего рабочего давления, геометрических характеристик, а так же всех составляющих сил инерции в продольном, окружном, и радиальном направлении было получено В.П. Ильиным, О.Б. Халецкой [47; 48] на основании геометрически нелинейном варианте полубезмоментной теории оболочек Власова – Новожилова [3,22,78]. Выражение для определения частоты свободных колебаний трубопровода с шарнирным типом закрепления при различных волновых числах $m, n = 1, 2, 3, \dots$ в окружном и продольном направлении имеет вид:

$$\omega_{mn}^2 = \frac{Egh_v^2}{\gamma R^2} \frac{\lambda_n^4 + m^4(m^2 - 1)(m^2 - 1 \pm p^*)}{\lambda_n^2 h_v + m^4 + m^2}, \quad (1.12)$$

где $\lambda_n = \frac{n\pi R}{l\sqrt{h_v}}$, $p^* = \frac{pR}{Ehh_v^2}$, $h_v = h/R\sqrt{12(1-\nu^2)}$.

Знак плюс в числителе (1.12) у параметра p^* , соответствует внутреннему давлению, знак минус – внешнему. Отличие этой формулы от (1.11) состоит в том, что здесь учтены все силы инерции, включая тангенциальные $\lambda_n^2 h_v$.

Проблеме взаимодействия оболочек с жидкостью посвящено большое количество работ, к ним следует отнести труды В.В. Болотина [13], Ю.Н.Новичкова [77]. В работах И.С. Фанга [127], И.А. Харингса [128] и Р.И. Ниордсона [136] доказано, что внутреннее рабочее давление существенно увеличивает частоты свободных колебаний и приводит к увеличению жесткости самого трубопровода.

В работе М.А. Ильгамова [46] частоты свободных колебаний цилиндрических оболочек с потоком жидкости исследуются на основании полубезмоментной теории оболочек, в которых пренебрегается тангенциальными составляющими сил инерции. Статья М.П. Пайдуссиса и И.П. Дениса [141] посвящена теоретическому и экспериментальному исследованию свободных колебаний и устойчивости замкнутых цилиндрических оболочек с установившимся потенциальным потоком жидкости при различных граничных условиях. Аналогичное решение методом Бубнова – Галеркина получено в работе [144], где так же пренебрегалось тангенциальными силами инерции.

В дальнейшем В.Г. Соколовым и А.А. Ефимовым [40] на основании геометрически нелинейном варианте полубезмоментной теории оболочек было получено выражение для квадрата частоты свободных колебаний подводных прямолинейных участков трубопроводов, которое позволяет учесть влияние, внутреннего рабочего давления, внешнего гидростатического давления, а так же всех составляющих сил инерции включая тангенциальные:

$$\omega_{mn}^2 = \frac{\lambda_n^4 + m^4(m^2 - 1)(m^2 - 1 - Gq_0) - G\rho_0\Phi_{mn}U^2h_v\lambda_n^2m^4}{G\rho Rh(\lambda_n^2h_v + m^4 + m^2) + G\rho_0\Phi_{mn}R^2m^4}, \quad (1.13)$$

где $G = R/Ehh_n^2$, $\lambda_n = \frac{n\pi R}{L\sqrt{h_v}}$, $q_0 = q - p_0$, q – внешнее гидростатическое давление,

p_0 – внутреннее рабочее давление.

В уравнение (1.13) по сравнению с (1.12) дополнительно учтено влияние скорости и присоединенной массы протекающей жидкости.

1.4 Параметрические колебания и динамическая устойчивость трубопроводов

Как показывает практика трубопроводы в процессе эксплуатации подвергаются различного рода динамическим воздействиям и вибрациям. В неблагоприятных условиях эксплуатации в трубопроводе может произойти нарушение изоляционных покрытий, коррозионное растрескивание или например усталостное разрушение металла [49]. Согласно исследованиям [49], спектр колебаний трубопровода весьма разнообразен и представляет собой комплекс воздействия вынужденных, свободных, и параметрических колебаний, который зависит от геометрических параметров трубопровода, а так же значений внутреннего рабочего давления, продольной сжимающей силы, скорости потока протекающей жидкости и упругих свойств подстилающего грунта. В связи с этим в системе повышается вероятность образования опасных резонансных явлений в т.ч. параметрического резонанса.

Параметрический резонанс опаснее обычного резонанса при котором происходит совпадение собственных частот трубопровода и возмущающей частоты, при параметрическом резонансе эти соотношения занимают целые области значений параметров, которые называются областями динамической неустойчивости. Нахождение системы в динамически неустойчивом положении способствует увеличению амплитуды колебаний, и как следствие потери динамической устойчивости трубопровода.

Впервые явление параметрического резонанса было отмечено Мельде (см. [10]) еще в 1859 году при изучении колебаний струны, один из концов которой был прикреплен к колеблющемуся камертону. Теоретическое объяснение этого явления было дано Дж.Стрэттом. Для многих механических систем проблема

динамической устойчивости математически сводится к решению однородного дифференциального уравнения второго порядка с периодическими коэффициентами, т.е. к уравнению Матье:

$$f_{(t)}'' + a(1 - b \cos \gamma t) f_{(t)} = 0, \quad (1.14)$$

где a и b – постоянные параметры, γ – частота возбуждения:

Периодические решения этого уравнения зависят от соотношений параметров периодического коэффициента при $f_{(t)}$, т.е. от a , b , и γ . При некоторых соотношениях эти решения становятся неустойчивыми и начинают неограниченно возрастать, что приводит к параметрическому резонансу. Оценка динамической устойчивости производится при помощи построения областей динамической неустойчивости построение которых выполняется при помощи модифицированных диаграмм Айнса – Стретта. Границы областей динамической неустойчивости найдены давно, т.к. диаграмма Айнса – Стретта построена еще в начале 30-х годов прошлого столетия [7]. Эти диаграммы позволяют не решая уравнения Матье (1.14), а лишь найдя его коэффициенты, определить устойчивая или неустойчива система. Поэтому основная трудность исследования динамической устойчивости механической системы состоит в составлении уравнения Матье, т.е. определении параметров a и b .

Впервые задача о динамической устойчивости шарнирно закрепленного стержня, нагруженного периодически изменяющейся осевой силой

$$F_{(t)} = F_0(1 + \mu \cos \gamma t), \quad (1.15)$$

была решена в 1924 году Н.М. Беляевым [7]. Им было получено уравнение Матье в виде:

$$f_{(t)}'' + \omega^2(1 - \delta \cos \gamma t) f_{(t)} = 0, \quad (1.16)$$

где ω – частота свободных колебаний стержня, нагруженного постоянной силой F_0 , δ – коэффициент возбуждения, определяемый формулой:

$$\delta = \frac{\mu}{\frac{F_{кр}}{F_0} - 1}; \quad F_{кр} = \frac{\pi^2 EI}{l^2}$$

μ – параметр пульсации, изменяющийся в пределах от 0 до 0,5; E – модуль упругости материала стержня; I – минимальный момент инерции поперечного сечения стержня; $F_{кр}$ – Эйлера критическая сила для шарнирно опертого стержня. Зоны неустойчивости решения уравнения (1.16) определяются, как область параметрического резонанса (или области динамической неустойчивости системы) при соотношении частот $\omega = \frac{\gamma}{2}i$, где $i=1,2,3\dots$

Основная область неустойчивости, называется главной и реализуется при $i=1$. Остальные области $i = 2,3,\dots$ соответствуют второстепенным областям, имеющим значительно меньшую ширину, и перекрываются главной областью. В работе [9] была получена формула для верхней и нижней границ главной области:

$$1 - \frac{\delta_{mn}}{2} < \left(\frac{2\omega_{mn}}{\gamma}\right)^2 < 1 + \frac{\delta_{mn}}{2} \quad (1.17)$$

Дальнейшее исследование в области динамической устойчивости под действием параметрических нагрузок проводили авторы: Н.М. Крылов и Н.Н. Боголюбов [62], ими было рассмотрено решение задачи о стержне с граничными условиями, отличными от шарнирного закрепления; А.А. Андронов и М.А. Леонтович [6] рассматривали второстепенные области динамической неустойчивости стержня. В данной работе так же было учтено влияние внутреннего трения. Исследование динамической устойчивости оболочек выполнено в работе О.Д. Ониашвили [82].

Вопросу изучения параметрических колебаний трубопроводов с потоком протекающей жидкостью на базе стержневой теории уделялось большое внимание. Одной из первых работ в этом направлении была статья И.И. Гольденבלата [32] которая посвящена параметрическим колебаниям вертикального сдвоенного трубопровода, с протекающей жидкостью, направленной в противоположных направлениях. Анализ показал, что при определенных критических скоростях

потока жидкости прямолинейная форма трубопровода становится неустойчивой. В трудах Н.А. Картвелишвили [56] данный вопрос уже рассматривался ближе к запросам практики. Здесь была поставлена и решена задача о параметрических колебаниях горизонтального прямолинейного трубопровода с пульсирующим потоком жидкости. Было получено уравнение Матье (1.16) и исследованы частоты колебаний, соответствующие параметрическому резонансу, т.е. динамической устойчивости трубопровода. В этой работе показано, что жидкость, протекающая в трубопроводе с пульсацией скорости потока, играет роль параметрической нагрузки по отношению к поперечным колебаниям трубы.

Последующие работы в этой области [57; 58; 60; 75; 81; 113] были направлены на уточнение решений и исследования различных аспектов задачи о динамической устойчивости трубы – стержня с нестационарным потоком жидкости. Так например в статьях М.С. Натанзона [76], В.П. Катаева [57; 58] приведено обоснование геометрически нелинейного подхода для исследования амплитуд колебаний внутри областей динамической неустойчивости.

Наиболее подробно параметрические колебания и динамическая устойчивость прямолинейных трубопроводов с нестационарным потоком жидкости исследовались в работах С.С. Чженя [120; 121] и М.П. Пайдуссиса [139; 140; 141; 142] в рамках стержневой теории. Авторы этих работ получили системы не разделяющихся дифференциальных уравнений Матье – Хилла, решение которых производилось при помощи численных методов, метода С.С. Хсу [129]. На основании полученных решений построены главные и второстепенные области динамической неустойчивости. Анализ этих областей показал, что с увеличением скорости потока жидкости эти области расширяются. Однако полученные решения не позволяют в полной мере провести качественный анализ полученных результатов.

Вопрос параметрических колебаний и динамической устойчивости тонкостенных трубопроводов большого диаметра с потоком протекающей пульсирующей жидкости исследовался на базе теории тонких цилиндрических оболочек. Одна из первых работ в этой области была опубликованная в 1953 году в

статье Э.И. Григолюка [28], где изложено решение задачи о параметрических колебаниях цилиндрической оболочки, нагруженной пульсирующей осевой силой. В дальнейшем эта и другие задачи были обобщены в монографии этого автора [36].

Наиболее полно основы общей теории динамической устойчивости упругих систем изложены в монографии В.В. Болотина [10], где в качестве частного случая рассмотрены параметрические колебания цилиндрической оболочки, нагруженной периодически изменяющимися силами.

Параметрические колебания цилиндрической оболочки с пульсирующим потоком жидкости, исследованы в монографии А.С. Вольмира [24] где на основании теории потенциального течения идеальной жидкости, получено решение для определения гидродинамического давления потока жидкости на стенку трубы. Получена система связанных дифференциальных уравнений Матье и построены границы областей динамической неустойчивости.

Наиболее подробное исследование параметрических колебаний цилиндрических оболочек с нестационарным потоком жидкости, сопровождаемые построением верхних и нижних границ главных и второстепенных областей динамической неустойчивости, проведены М.П.Пайдуссисом [139; 140; 141; 142]. В этих работах использовалась упрощенная допущениями теория оболочек, а исследования динамической неустойчивости проведено на основании сложного численного решения связанных систем дифференциальных уравнений Матье.

Во всех работах, посвященных оценке динамической устойчивости тонкостенных трубопроводов большого диаметра с протекающей жидкостью, основанной на теории тонких цилиндрических оболочек, в основном получены системы не разделяющихся, т.е. связанных дифференциальных уравнений Матье. Следовательно, для решений этих уравнений необходимо применение численных методов с последующими построениями областей динамической неустойчивости для каждого частного случая. Данная трудность преодолевается в работах В.П. Ильина, В.Г. Соколова [50; 52], А.А. Ефимова [41], где решаются задачи о параметрических колебаниях и динамической устойчивости участков трубопроводов большого диаметра с пульсирующим потоком жидкости на базе

геометрически нелинейном варианте полубезмоментной теории цилиндрических оболочек и теории потенциального течения идеальной жидкости. В этих работах получена разделяющаяся система дифференциальных уравнений Матье, построены и проанализированы диаграммы Айнса – Стретта, модифицированные для практического применения.

Выводы по главе 1

Анализ современного состояния вопроса колебаний, статической и динамической устойчивости наземных нефте – газопроводов позволил сформировать следующие выводы:

1) Определение частот свободных колебаний наземных трубопроводов базируется на стержневой теории. Такой подход не годится для расчета современных тонкостенных труб большого диаметра, по причине невозможности учета деформации поперечного сечения и влияния внутреннего рабочего давления на динамические характеристики.

2) Имеющиеся в нормах и справочных пособиях формулы, не позволяют исследовать собственные частоты *наземных* трубопроводов по оболочечной форме колебаний (при $m > 1$), и не позволяют учесть совместное влияние внутреннего рабочего давления, параметра продольной сжимающей силы, скорости потока протекающей жидкости и влияния упругого основания грунта.

3) Выражения для определения параметра критической продольной сжимающей силы для наземных трубопроводов позволяет учесть только влияние упругого основания, и не позволяет учесть влияние, например, внутреннего рабочего давления и скорости протекающей жидкости.

4) Многочисленные исследования параметрических колебаний трубопроводов с потоком жидкости на базе стержневой теории приводили в основном к системе не разделяющихся дифференциальных уравнений Матье, решение которых производилось при помощи численных методов для каждого

частного случая и последующего построения областей динамической неустойчивости с верхними и нижними границами.

Общим имеющимся недостатком результатов исследований связанных с вопросом колебаний, статической и динамической устойчивости наземных прямолинейных трубопроводов с протекающей жидкостью с позиции стержневой теории является отсутствие учета влияния внутреннего рабочего давления. Работы посвященные вопросу колебаний, и динамической устойчивости цилиндрических оболочек, доказывают, что при пульсирующем внутреннем рабочем давлении в оболочках возникают параметрические колебания, которые могут привести к параметрическому резонансу, т.е. динамической потере устойчивости, что невозможно оценить по стержневой теории.

2 СВОБОДНЫЕ КОЛЕБАНИЯ И СТАТИЧЕСКАЯ УСТОЙЧИВОСТЬ НАЗЕМНЫХ, ТОНКОСТЕННЫХ, ПРЯМОЛИНЕЙНЫХ УЧАСТКОВ ГАЗОПРОВОДОВ С ПОЗИЦИИ ТЕОРИИ ЦИЛИНДРИЧЕСКИХ ОБОЛОЧЕК

2.1 Конструкция наземного трубопровода с учетом радиального давления на внешнюю поверхность трубы

Строительство линейной части является важнейшей составляющей комплекса трубопроводных систем, надежность которых во многом зависит от соблюдения технологии укладки, монтажа и эксплуатации. В зависимости от геологических и климатических условий различают такие типы укладок трубопроводов как подводный, подземный, надземный, полуподземный, и наземный. Каждый тип укладок имеет свои особенности работы, проектирования и сборе нагрузок, и для каждого конкретного случая необходимо разработать свою методику расчета.

Применение наземного типа укладки является актуальным в сложных геологических условиях (болото, обводненные участки, вечная мерзлота), где невозможно применение других типов укладок. Технологией строительства предусматривается несколько вариантов устройства прямолинейной части трубопроводов, например, монтаж непосредственно на поверхность грунта, или на специально подготовленную поверхность, в виде например песчаной подушки толщиной 15 – 20 см. В некоторых случаях трубопровод обсыпается внешним грунтом. Однако обсыпка практически не влияет на динамические свойства трубопровода и поэтому этот фактор в дальнейшем не учитывается.

Для учета влияния упругого основания грунта на частоты свободных колебаний достаточно рассмотреть малые колебания относительно положения равновесия, и решить контактную задачу труба – грунт описывающую напряжения и перемещения в зоне контакта. Рассмотрим прямолинейный участок наземного

трубопровода конечной длины, лежащий на грунтовом основании, либо на песчаной подсыпке [16] (рисунок 2.1).

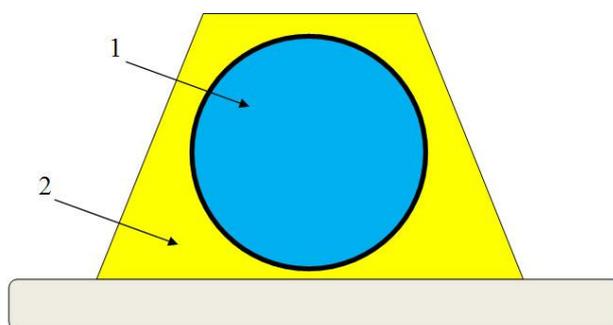


Рисунок 2.1 – Наземный трубопровод: 1 – трубопровод, 2 – грунтовая подушка и внешняя обсыпка грунтом

Для учета влияния упругого основания грунта на частоты свободных колебаний, в качестве расчетной схемы трубопровода принята однородная изотропная цилиндрическая оболочка, замкнутого поперечного сечения, конечной длины L радиусом срединной поверхности R , и толщиной стенки h , оболочка подвержена действию стационарного внутреннего рабочего давления p_0 , продольной сжимающей силы F , и влияния упругого основания грунта $q_{гр}$ (рисунок 2.2).

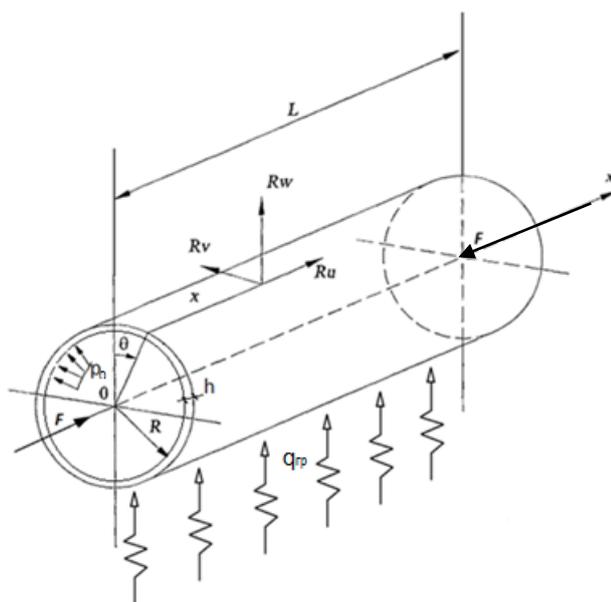


Рисунок 2.2 – Наземный трубопровод на упругом основании

На рисунке приняты следующие обозначения: R_u, R_v, R_w – компоненты перемещения в продольном, окружном, и радиальном направлении, x – продольная координата вдоль оси оболочки.

Реактивное давление грунта на нижней поверхности трубы распределяется по некоторой полосе, ширина которой зависит от свойств грунта подсыпки и параметров трубы. Для определения реактивного давления необходимо решить контактную задачу.

2.2 Решение контактной задачи с учетом взаимодействия трубопровода с грунтом по узкой полосе

Будем предполагать, что жесткость трубы существенно больше жесткости подстилающего слоя грунта. Поэтому контур трубы не деформируется, и контактная задача сводится к задаче о вдавливании жесткого диска в поверхностный слой грунта (рисунок 2.3).

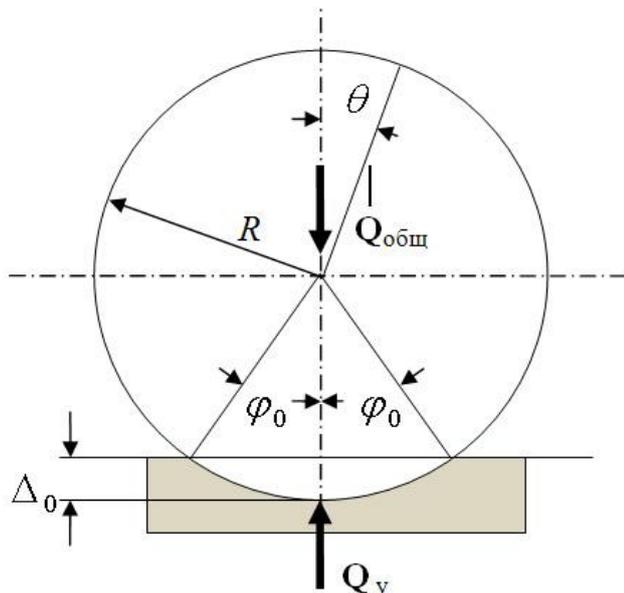


Рисунок 2.3 – Вдавливание наземного трубопровода в подстилающий слой

Трубопровод вдавливается в грунт на величину Δ_0 , причем образуется сектор вдавливания с угловой длиной $2\varphi_0$. При этом вес трубопровода уравновешивается реакцией грунта:

$$Q_{\text{общ}} = Q_y, \quad (2.1)$$

где $Q_{\text{общ}}$ – погонный вес трубы, Q_y – реакция основания, Н/м. Реакция грунта пропорциональна перемещению, которое направлено по нормали к поверхности сектора вдавливания, то есть в радиальном направлении. Давление на контактной поверхности:

$$q_r = k w_r \quad (2.2)$$

где k – коэффициент постели, Н/м³, w_r – перемещение в радиальном направлении, м. Перемещения в радиальном направлении связаны с геометрическими параметрами сектора вдавливания (см. рисунок 2.3) соотношениями, которые следуют непосредственно из рисунка:

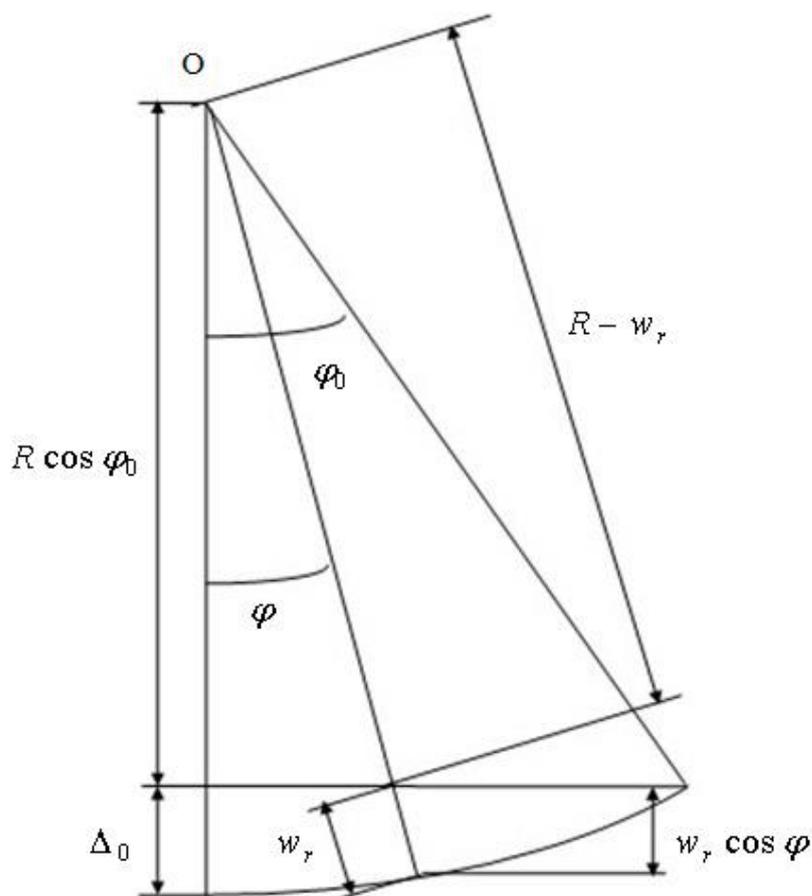


Рисунок 2.4 – Геометрические параметры сектора вдавливания

$$\Delta_0 = R(1 - \cos \varphi_0). \quad (2.3)$$

$$w_r \cos \varphi = R(\cos \varphi - \cos \varphi_0) \quad (2.4)$$

Из последнего равенства получается формула для радиального перемещения:

$$w_r = R \left(1 - \frac{\cos \varphi_0}{\cos \varphi} \right) \quad (2.5)$$

Поскольку угол φ_0 мал, для упрощения выкладок будем использовать следующие разложения в ряды [37]:

$$\cos x = 1 - x^2 / 2 + \dots$$

$$\sin x = x - x^3 / 6 + \dots (1 + x)^n = 1 + n x + \dots$$

Тогда из (2.5), пренебрегая малыми второго порядка, получаем:

$$w_r = \frac{R}{2} (\varphi_0^2 - \varphi^2). \quad (2.6)$$

Для определения величины Q_y необходимо определить вертикальную составляющую давления на поверхность сектора вдавливания. Для этого на произвольном расстоянии φ рассмотрим малую дугу (рисунок 2.5).

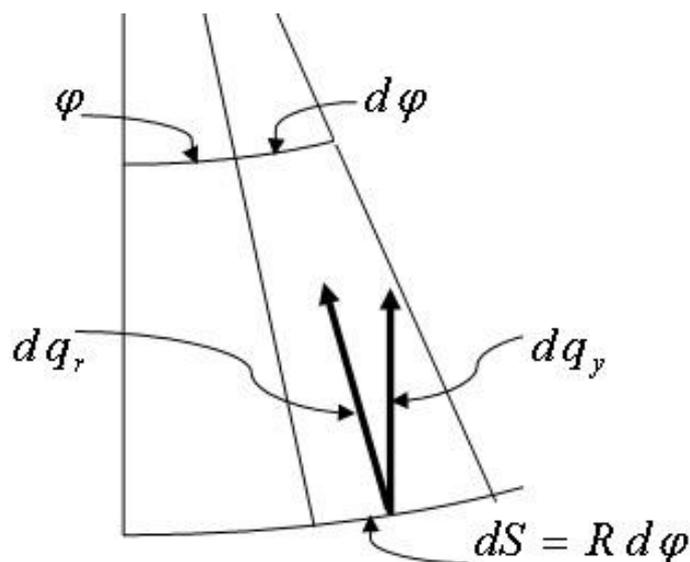


Рисунок 2.5 – Определение вертикального составляющего давления

Из рисунка 2.5 и формулы (2.2):

$$dq_y = dq_r \cos \varphi = k R w_r \cos \varphi d\varphi$$

Эта составляющая давления создает реакцию основания Q_y . Учитывая симметрию относительно вертикальной оси и выражение (2.4), получаем:

$$Q_y = 2 \int_0^{\varphi_0} dq_y = 2kR^2 \int_0^{\varphi_0} (\cos \varphi - \cos \varphi_0) d\varphi = \quad (2.7)$$

$$= 2kR^2 (\sin \varphi_0 - \varphi_0 \cos \varphi_0) \cong 2kR^2 \varphi_0^3 / 3.$$

Из условия равновесия (2.1) получаем:

$$\varphi_0 = \sqrt[3]{\frac{3Q_{\text{общ}}}{2kR^2}}. \quad (2.8)$$

Глубина вдавливания контактной поверхности из (2.3):

$$\Delta_0 = R(1 - \cos \varphi_0) = R\varphi_0^2 / 2. \quad (2.9)$$

Ширина зоны контакта $b = R \sin \varphi_0$

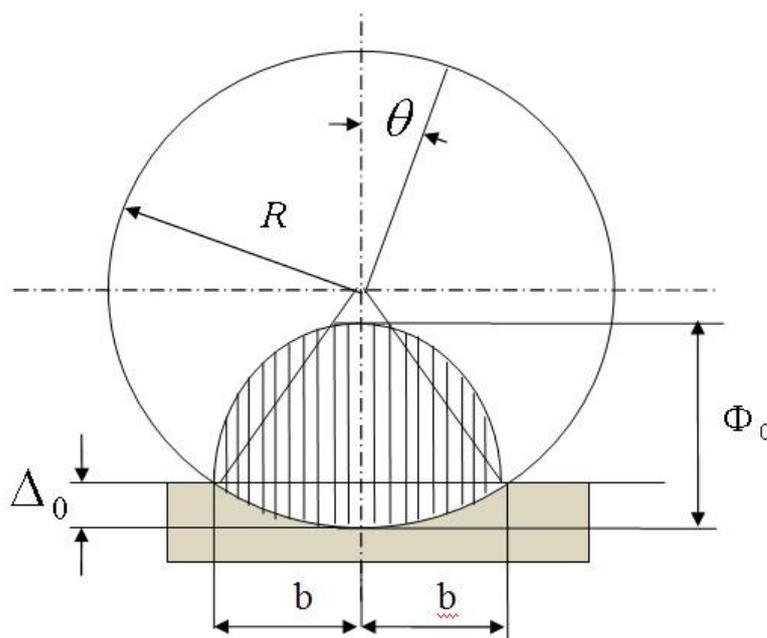


Рисунок 2.6 – Распределение давления на контактной поверхности.

Из (2.2) и (2.6) следует, что давление на контактной поверхности распределено по параболической зависимости:

$$\Phi(\varphi) = \frac{kR}{2} (\varphi_0^2 - \varphi^2); \quad \Phi_0 = \Phi(0) = \frac{kR}{2} \varphi_0^2. \quad (2.10)$$

В качестве примера рассмотрим газопровод (таблица 2.1), и нефтепровод (таблица 2.2) с плотностью нефти 8 кН/м^3 , на песчаном основании, с коэффициентом постели $k = 1 \cdot 10^7 \text{ Н/м}^3$ для труб разного диаметра, остальные

таблицы с параметрами контактной поверхности при различных коэффициентах постели приведены в приложении А.

Таблица 2.1 – Параметры газопровода и контактной поверхности

Диаметр D , мм	Масса трубы, кН/м	$Q_{общ}$, кН/м	Параметры контактной поверхности			
			φ_0	b , мм	Δ_0 , мм	Φ_0 , кН/м ²
720	2,46	2,46	0,142	50,87	3,62	36,18
1020	3,51	3,51	0,126	64,33	4,08	40,79
1220	4,17	4,17	0,119	72,38	4,31	43,15
1420	4,85	4,85	0,113	80,09	4,54	45,36

Таблица 2.2 – Параметры нефтепровода и контактной поверхности

Диаметр D , мм	Масса, кН/м		$Q_{общ}$, кН/м	Параметры контактной поверхности			
	трубы	нефти		φ_0	b , мм	Δ_0 , мм	Φ_0 , кН/м ²
720	2,46	3,26	5,72	0,188	67,20	6,35	63,46
1020	3,51	6,53	10,04	0,180	91,09	8,22	82,23
1220	4,17	9,35	13,52	0,176	106,80	9,45	94,46
1420	4,85	13,77	18,62	0,177	125,00	11,12	111,20

2.3 Разложение импульсной функции в ряд Фурье

Для описания изменения контактного давления по всему периметру трубы в пределах изменения угла θ от 0 до 2π в цилиндрической системе координат введем импульсную функцию $\Psi(\theta)$ (рисунок 2.7).

$$\Psi(\theta) = \begin{cases} = 0; & \theta < \pi - \varphi_0, \theta > \pi + \varphi_0. \\ = \Phi(\varphi); & -\varphi_0 \leq \varphi \leq \varphi_0 \end{cases} \quad (2.11)$$

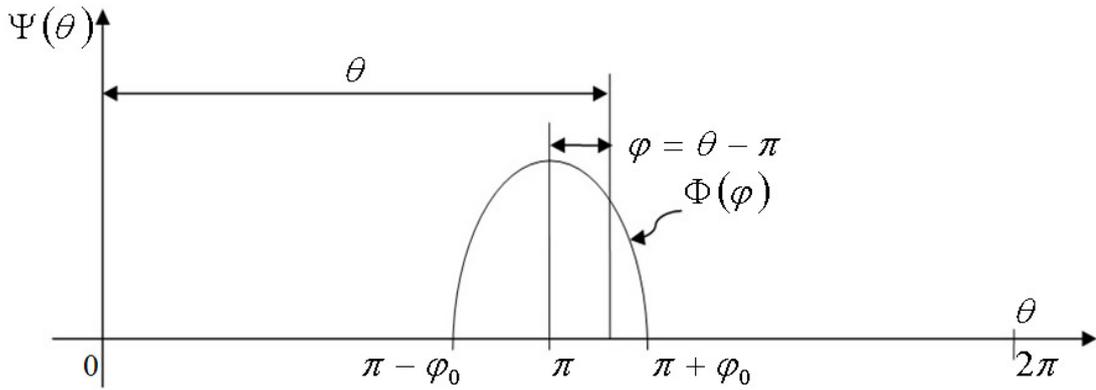


Рисунок 2.7 – Функция распределения контактного давления.

Для решения задачи об определении собственных частот необходимо разложить эту функцию в ряд Фурье. Поскольку функция симметрична относительно вертикальной плоскости, достаточно её разложить в ряд Фурье по косинусам. Такой ряд и его коэффициенты в общем случае имеют вид [105]:

$$f(x) = a_0 / 2 + \sum_{m=1}^{\infty} a_m \cos mx .$$

$$a_0 = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} f(x) dx; \quad a_m = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} f(x) \cos mx dx .$$

Из (2.11) и в силу симметрии импульса вычисление интегралов по θ в пределах $0 - 2\pi$ сводится к вычислению соответствующих интегралов по φ в пределах $0 - \varphi_0$:

$$\int_0^{2\pi} \Psi(\theta) d\theta = 2 \int_0^{\varphi_0} \Phi(\varphi) d\varphi .$$

При этом нужно учитывать, что

$$\cos m\theta = \cos m(\pi + \varphi) = \cos(m\pi + j\varphi) = (-1)^m \cos m\varphi ,$$

Используя (2.10) и эти соотношения и известные правила вычисления интегралов [37], получаем:

$$a_0 = \frac{kR}{\pi} \int_0^{\varphi_0} (\varphi_0^2 - \varphi^2) d\varphi = \frac{2kR}{3\pi} \varphi_0^3 . \quad (2.12)$$

$$\begin{aligned}
 a_m &= (-1)^m \frac{kR}{\pi} \int_0^{\varphi_0} (\varphi_0^2 - \varphi^2) \cos m\varphi d\varphi = \\
 &= (-1)^m \frac{kR}{\pi m^3} \left[2\varphi_m \cos \varphi_m + (\varphi_m^2 - 2) \sin \varphi_m \right]; \varphi_m = m\varphi_0.
 \end{aligned}
 \tag{2.13}$$

Ряд Фурье для импульсной функции имеет вид:

$$\begin{aligned}
 \Psi(\theta) &= \frac{kR}{\pi} \left[\frac{\varphi_0^3}{3} + \sum_{m=1}^{\infty} \beta_m \cos m\theta \right]; \\
 \beta_m &= (-1)^m m^{-3} \left[2\varphi_m \cos \varphi_m - (\varphi_m^2 - 2) \sin \varphi_m \right]; \quad \varphi_m = m\varphi_0.
 \end{aligned}
 \tag{2.14}$$

$m = 1, 2, 3, \dots$

где $\Psi(\theta)$ – радиальное давление грунта на внешнюю поверхность трубы.

Для учета влияния слагаемого $\Psi(\theta)$ на частоты свободных колебаний воспользуемся уравнениями геометрически нелинейного варианта полубезмоментной теории цилиндрических оболочек среднего изгиба [3; 74; 78].

2.4 Основные уравнения и допущения геометрически нелинейного варианта полубезмоментной теории цилиндрических оболочек

Для изучения вопроса свободных и параметрических колебаний участка тонкостенного прямолинейного трубопровода большого диаметра, как это было обосновано в работах [3; 44; 47; 103] является полубезмоментная теория цилиндрических оболочек Власова–Новожилова [22, 78]. Согласно которой моменты M_1 изгибающие замкнутую цилиндрическую оболочку в продольном направлении, считаются малыми по сравнению с моментами M_2 , изгибающими ее в поперечном направлении. Такая теория лучше всего подходит для расчета длинных цилиндрических оболочек, нагруженных незначительно изменяющейся поверхностной нагрузкой вдоль оси оболочки.

Полубезмоментная теория оболочек построена на допущениях, обоснованных для общего случая А.Л. Гольденвейзером [33], а для расчета тонкостенных труб Э.Л. Аксельрадом и В.П. Ильиным [3]. В монографии [3] так же предложен геометрически нелинейный вариант полубезмоментной теории оболочек, который позволяет учесть деформацию поперечного сечения и влияния

внутреннего рабочего давления на частоты свободных колебаний. Такой подход реализован и в данной диссертации.

В теории оболочек в расчетах так же применяется безмоментная теория оболочек. Такой вариант является более простым, поскольку в ней учитываются только тангенциальные усилия, т.е. нормальные T_1 , T_2 и сдвигающие S . Точность решения, получаемого по безмоментной теории, зависит от многих факторов например, плавности формы оболочки, плавности действующей на нее нагрузки, краевых условий и т.д. Для длинных труб – оболочек к этим факторам добавляется ещё и длина оболочки. Причем с увеличением длины точность безмоментного решения снижается. Таким образом при достаточно большой длине оболочки влияние её закрепления по торцам мало сказывается на напряженно–деформированное состояние оболочки в средней её части, что не может предотвратить появления деформаций изгиба, вызванного изгибающими моментами M_2 . В то же время изгиб образующих моментами M_1 и кручение моментами H будет незначительным.

Предложенная В.З. Власовым [22] полубезмоментная теория цилиндрических оболочек получила в дальнейшем строгое математическое обоснование в трудах В.В. Новожилова [78]. Проведенный им анализ уравнений теории оболочек, позволил В.В. Новожилову получить общий принцип формирования уравнений полубезмоментной теории, который заключается в пренебрежении вторыми производными $\partial^2 f / \partial \xi^2$ по продольной координате $\xi = x/R$ по сравнению с производными по окружной координате $\partial^2 f / \partial \theta^2$, где f есть любая функция, характеризующую напряженно – деформированное состояние (НДС) оболочки (усилие, момент, перемещение, деформация). Физический смысл этого принципа заключается в том, что характер изменения всех компонент НДС в направлении вдоль цилиндрической оболочки (по координате ξ) предполагается более плавным, чем характер их изменения в окружном направлении (по координате θ). Такой

подход сохраняет все преимущества полубезмоментной теории [22] и устраняет ряд существенных недостатков.

В работе [33], А.Л. Гольденвейзер подтвердил правомерность применения основного принципа В.В. Новожилова, и установил критерий применимости полубезмоментной теории к задачам о деформации цилиндрических оболочек. Им было доказано, что НДС цилиндрической оболочки, нагруженной равномерно распределенной внешней нагрузкой, можно разделить на два состояния: основное – медленно изменяющееся по длине оболочки, и местное – быстро затухающее при удалении от торцов (краевой эффект), которое быстро затухает в узкой области вблизи краевых сечений. Влиянием краевого эффекта, для достаточно тонких оболочек можно пренебречь, поскольку область затухания измеряется десятками долями радиуса R срединной поверхности поперечного сечения оболочки. Следовательно, для таких труб – оболочек следует рассматривать только основное НДС, которое описывается полубезмоментной теорией оболочек.

Как показано в монографии Э.Л. Аксельрада, В.П. Ильина [3] для расчета труб–оболочек выполненных из однородного, изотропного материала с модулем упругости E , коэффициентом Пуассона $\tilde{\nu}$, и согласно гипотезе Кирхгофа – Лява, принимаются следующие допущения:

1) Относительные удлинения ε_2 в окружном направлении поперечных сечений оболочки, определяемые по общей теории оболочек соотношением [3]:

$$\varepsilon_2 = \frac{\partial v}{\partial \theta} + w,$$

считаются малыми по сравнению с производной тангенциального перемещения v и с радиальным перемещением w , т.е. принимается соотношение [3]:

$$\frac{\partial v}{\partial \theta} + w = 0, \quad (2.15)$$

2) Относительный сдвиг срединной поверхности оболочки $\tilde{\omega}$ считается малым по сравнению с ее углами поворота в поперечном и продольном направлениях, т.е. вместо принятого в общей теории соотношения [3]:

$$\tilde{\omega} = \frac{\partial v}{\partial \xi} + \frac{\partial u}{\partial \theta}, \text{ принимаются } \frac{\partial v}{\partial \xi} + \frac{\partial u}{\partial \theta} = 0, \quad (2.16)$$

3) Угол поворота касательной к средней линии поперечного сечения оболочки ϑ_2 , изменения кривизны в продольном \aleph_1 и \aleph_2 поперечном направлениях, а также кручение срединной поверхности оболочки τ выражаются через компоненты перемещения u, v, w , по общим соотношениям теории оболочек [3]:

$$\begin{aligned} \vartheta_2 &= \frac{\partial w}{\partial \theta} - v, \aleph_1 = -\frac{1}{R} \frac{\partial^2 w}{\partial \xi^2}, \aleph_2 = -\frac{1}{R} \frac{\partial \vartheta_2}{\partial \theta}, \\ \varepsilon_1 &= \varepsilon_0 + \frac{\partial u}{\partial \xi}, \tau = -\frac{1}{R} \frac{\partial \vartheta_2}{\partial \xi}, \varepsilon_0 = \frac{F}{EA}; \end{aligned} \quad (2.17)$$

4) Соотношения между усилиями и деформациями имеют вид [3]:

$$T_1 = Eh\varepsilon_1, \quad M_2 = D\aleph_2,$$

$$T_2 = -\tilde{\nu}Eh\varepsilon_1, \quad M_1 = \tilde{\nu}D\aleph_2 \quad (2.18)$$

$$\text{сдвигающие усилия } S = \frac{Eh}{2(1+\tilde{\nu})} \tilde{\omega};$$

5) В уравнениях равновесия, общей теории оболочек можно упустить величины поперечных сил Q_1 и величину крутящего момента H , в последнем уравнении моментов как это принято в работе [3].

Здесь приняты следующие обозначения:

M_1 и M_2 – изгибающие моменты в продольном и поперечном (кольцевом) направлениях; T_1 и T_2 – продольные и кольцевые тангенциальные усилия;

\aleph_2 – изменение кривизны координатной линии θ срединной поверхности;

ε_1 и ε_2 – относительные удлинения в направлении безразмерных ортогональных координат $\xi = x/R$ и θ , где x – продольная координата вдоль оси оболочки;

τ – кручение срединной поверхности вдоль оболочки; $D = \frac{Eh^3}{12(1-\nu^2)}$ –

цилиндрическая жесткость.

u, v, w – отнесенные к радиусу R тангенциальные (вдоль координат ξ и θ) и радиальные перемещения точек срединной поверхности оболочки соответственно.

При выводе формул геометрически нелинейного варианта полубезмоментной теории цилиндрических оболочек [3] используются соотношения нелинейной теории оболочек среднего изгиба Муштари – Галимова [74], в соответствии с которой наибольшие значения перемещения w соизмеримы с толщиной h , но малы по сравнению с радиусом R . Квадраты углов поворота по [74] принимаются малыми по сравнению с единицей:

$$1 + \frac{1}{2} \mathcal{G}_2^2 \approx 1, \quad 1 + \frac{1}{2} \left(\frac{\partial w}{\partial \xi} \right)^2 + \frac{1}{2} \left(\frac{\partial v}{\partial \xi} \right)^2 \approx 1,$$

где \mathcal{G}_2 – угол поворота касательной к средней линии контура поперечного сечения, а кривизна деформированного поперечного сечения оболочки определяется выражением:

$$\frac{1}{R_2^*} = \frac{1}{R} + \mathcal{K}_2 = \frac{1}{R} \left(1 - \frac{\partial \mathcal{G}_2}{\partial \theta} \right), \quad (2.19)$$

где R_2 – радиус кривизны средней линии поперечного сечения оболочки в деформированном состоянии.

Кривизна оболочки в деформированном состоянии в продольном направлении:

$$\frac{1}{R_1^*} = -\frac{1}{R} \frac{\partial^2 w}{\partial \xi^2}. \quad (2.20)$$

С учетом допущений 1) – 5) и значений параметров Ламе $A_1 = 1$, $A_2 = R$ для цилиндрических оболочек в деформированном состоянии, получим уравнение равновесия элемента, из общих уравнений нелинейной теории оболочек среднего изгиба Муштари – Галимова [74]:

$$\begin{aligned}
\frac{\partial T_1}{\partial \xi} + \frac{\partial S}{\partial \theta} + RQ_2\tau &= -RX_1, \\
\frac{\partial T_2}{\partial \theta} + \frac{\partial S}{\partial \xi} + \frac{R}{R_2^*}Q_2 &= -RX_2, \\
\frac{\partial Q_2}{\partial \theta} - \frac{R}{R_2^*}T_2 - \frac{R}{R_1^*}T_1 &= -RX_3, \\
\frac{\partial M_1}{\partial \xi} + \frac{\partial H}{\partial \theta} - RQ_1 &= 0, \\
\frac{\partial M_2}{\partial \theta} - \frac{\partial H}{\partial \xi} - RQ_2 &= 0,
\end{aligned} \tag{2.21}$$

где усилия и моменты, приходящиеся на единицу длины сечения, обозначенные индексом 1, действуют в продольном направлении, индексом 2 – в кольцевом; T_i – нормальные силы, Q_i – поперечные силы, $S_1 = S_2 = S$ – сдвигающие усилия, M_i – изгибающий момент, X_1, X_2, X_3 – тангенциальные и нормальные составляющие внешней нагрузки.

Система уравнений (2.21) является системой геометрически нелинейных дифференциальных уравнений, т.к. содержит нелинейный член с кручением τ в первом уравнении, а также – кривизны $1/R_2^*$ определяемым по (2.19) во втором, и $1/R_1^*$ в третьем уравнении, определяемым по (2.20), является кривизнами оболочки в деформированном состоянии.

2.5 Уравнение движения цилиндрической оболочки с учетом внутреннего рабочего давления, параметра продольной сжимающей силы, и упругого основания грунта

Применим к уравнениям (2.21) принцип Даламбера и введём составляющие сил инерции с плотностью материала оболочки ρ и постоянными величинами внутреннего давления p_0 и влияния радиального давления грунта $\Psi(\theta)w(\xi, \theta, t)$:

$$X_1 = -Rh\rho \frac{\partial^2 u}{\partial t^2}, X_2 = -Rh\rho \frac{\partial^2 v}{\partial t^2}, X_3 = -Rh\rho \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} + p_0 - \Psi(\theta)w(\xi, \theta, t), \tag{2.22}$$

где $\Psi(\theta)$ определяется по (2.14).

Далее последовательно исключим из уравнения (2.7) все усилия и моменты, кроме T_1 и M_2 . Для этого необходимо в системе (2.7) первое уравнение продифференцировать по $\frac{\partial}{\partial \xi}$, второе по $\frac{\partial}{\partial \theta}$, и третье дважды по $\frac{\partial^2}{\partial \theta^2}$ а так же умножить его на $\frac{R_2^*}{R}$. Из 5 о го уравнения найдем величину Q_2 . После преобразований получим уравнение движения оболочки в усилиях [44; 103]:

$$\begin{aligned} & \frac{\partial^2 T_1}{\partial \xi^2} + \frac{\partial}{\partial \xi} \left(\tau \frac{\partial M_2}{\partial \theta} \right) - \frac{\partial^2}{\partial \theta^2} \left(\frac{R_2^*}{R_1^*} T_1 \right) - \frac{1}{R^2} \frac{\partial^2}{\partial \theta^2} \left(R_2^* \frac{\partial^2 M_2}{\partial \theta^2} \right) - \\ & - \frac{\partial}{\partial \theta} \left(\frac{1}{R_2^*} \frac{\partial M_2}{\partial \theta} \right) + R \frac{\partial X_1}{\partial \xi} - R \frac{\partial X_2}{\partial \theta} - \frac{\partial^2}{\partial \theta^2} (R_2^* X_3) = 0. \end{aligned} \quad (2.23)$$

Для учета продольной силы F необходимо представить деформацию оболочки ε_1 в виде двух частей. Первая часть (исходная деформация) определяется в предположении недеформируемости сечений, т.е. как в балке (A – площадь поперечного сечения оболочки, $A = 2\pi R h$), а вся величина относительного удлинения в продольном направлении имеет вид:

$$\varepsilon_1 = \varepsilon_0 + \frac{\partial u}{\partial \xi}. \quad (2.24)$$

Для решения задачи в перемещениях, подставим в уравнение (2.23) допущения полубезмоментной теории оболочек (2.17) – (2.20). После преобразований получим линеаризованное уравнение, в котором отброшены члены, нелинейные относительно неизвестных функций, но в то же время сохранены члены, нелинейные относительно параметра внутреннего рабочего давления p_0 [3]. В результате дифференциальное уравнение движения оболочки в перемещениях принимает вид:

$$\begin{aligned} & \frac{\partial^3 u}{\partial \xi^3} + h_{\bar{v}}^2 \frac{\partial^3}{\partial \theta^3} \left(\vartheta_2 + \frac{\partial^2 \vartheta_2}{\partial \theta^2} \right) + 2 \frac{\partial^2}{\partial \theta^2} \left(\frac{\partial^2 w}{\partial \xi^2} \varepsilon_0 \right) - \frac{R}{Eh} p_0 \frac{\partial^3 \vartheta_2}{\partial \theta^3} + \\ & + \frac{R}{Eh} \frac{\partial^2}{\partial \theta^2} [\Psi(\theta) w(\xi, \theta, t)] - \frac{R^2 \rho}{E} \left(\frac{\partial^3 u}{\partial \xi \partial t^2} - \frac{\partial^3 v}{\partial \theta \partial t^2} - \frac{\partial^4 w}{\partial \theta^2 \partial t^2} \right) = 0, \end{aligned} \quad (2.25)$$

где u, v, w – компоненты перемещения срединной поверхности оболочки, отнесенные к радиусу R ; E и $\tilde{\nu}$ – коэффициент Пуассона; $h_{\tilde{\nu}}$ – параметр относительной толщины оболочки:

$$h_{\tilde{\nu}} = \frac{h}{R\sqrt{12(1-\tilde{\nu}^2)}} \quad (2.26)$$

Полученное уравнение (2.25) содержит четыре неизвестные функции u, v, w и \mathcal{G}_2 для нахождения которых необходимо решить систему уравнений в перемещениях (2.25), (2.15), (2.16) и (2.17).

2.6 Определение частот и форм свободных колебаний наземных тонкостенных магистральных газопроводов большого диаметра

Для нахождения решения, зададимся граничными условиями. Магистральный трубопровод представляет собой плетть последовательно соединенных между собой труб. Соединение которых выполняется по средствам сварки или закрепления по типу фланец. Такие типы закрепления предполагают, что трубопровод обладает жесткостью в плоскости соединения и не обладает жесткостью из плоскости. Например, соединение фланцами предотвращает перемещение краев оболочки по нормали к срединной поверхности и вдоль продольной оси ξ . В таком случае закрепление по концам оболочки будет соответствовать шарнирному типу закрепления, и определяться выражениями [103]:

$$v|_{\xi=0, \xi=L/R} = 0, \quad \mathcal{G}_2|_{\xi=0, \xi=L/R} = 0, \quad w|_{\xi=0, \xi=L/R} = 0, \quad \frac{\partial^2 w}{\partial \xi^2}|_{\xi=0, \xi=L/R} = 0.$$

Решаем систему уравнений (2.25), (2.15), (2.16) и (2.17) методом разделения переменных, методом Фурье. Представим функцию радиальных перемещений как это принято в работе [44], в виде $w(\xi, \theta, t)$ удовлетворяющем граничным условиям шарнирного типа закрепления и условию периодичности по окружной координате θ :

$$w = \sum_m \sum_n f(t) \sin(\lambda_n \xi) \cos(m\theta), \quad (2.27)$$

где $\lambda_n = \frac{n\pi R}{L}$; $m, n=1, 2, \dots$ – волновые числа в окружном и продольном направлениях.

Остальные компоненты перемещения и угол поворота касательной определяются из соотношений полубезмоментной теории оболочек (2.15) – (2.17) [44]:

$$\begin{aligned} u &= -\sum_m \sum_n \frac{\lambda_n}{m^2} f(t) \cos(\lambda_n \xi) \cos(m\theta), \\ v &= -\sum_m \sum_n \frac{1}{m} f(t) \sin(\lambda_n \xi) \sin(m\theta), \\ g_2 &= -\sum_m \sum_n \frac{m^2 - 1}{m} f(t) \sin(\lambda_n \xi) \sin(m\theta). \end{aligned} \quad (2.28)$$

Полагая, что свободные колебания оболочки являются гармоническими, представим функцию времени $f(t)$ в виде:

$$f(t) = \sin \omega_{mn} t, \quad f''(t) = -\omega_{mn}^2 \sin \omega_{mn} t, \quad (2.29)$$

где ω_{mn} – круговая частота свободных изгибных колебаний оболочки по формам $m, n=1, 2, 3, \dots$

Дополним выражение (2.25) компонентами перемещения (2.27), (2.28) и вычислим входящие в это уравнение производные [44]:

$$\begin{aligned} \frac{\partial^3 u}{\partial \xi^3} &= -\sum_m \sum_n \frac{\lambda_n^4}{m^2} f(t) \sin \lambda_n \xi \cos m\theta, \\ \frac{\partial^5 g_2}{\partial \theta^5} &= \sum_m \sum_n m^4 (m^2 - 1) f(t) \sin \lambda_n \xi \cos m\theta, \\ \frac{\partial^3 g_2}{\partial \theta^3} &= -\sum_m \sum_n m^2 (m^2 - 1) f(t) \sin \lambda_n \xi \cos m\theta, \\ \frac{\partial^3 u}{\partial \xi \partial t^2} &= \sum_m \sum_n \frac{\lambda_n^2}{m^2} f''(t) \sin \lambda_n \xi \cos m\theta, \\ \frac{\partial^3 v}{\partial \theta \partial t^2} &= -\sum_m \sum_n f''(t) \sin \lambda_n \xi \cos m\theta, \\ \frac{\partial^4 w}{\partial \theta^2 \partial \xi^2} &= \sum_m \sum_n m^2 \lambda_n^2 f(t) \sin \lambda_n \xi \cos m\theta, \\ \frac{\partial^4 w}{\partial \theta^2 \partial t^2} &= -\sum_m \sum_n m^2 f''(t) \sin \lambda_n \xi \cos m\theta, \end{aligned} \quad (2.30)$$

Результат дифференцирования слагаемого $\frac{\partial^2}{\partial \theta^2} [\Psi(\theta)w(t, \xi\theta)]$ представим в виде произведения частных сумм. Сначала перемножим ряды, а затем вычислим производную по общим правилам. Введем две частные суммы:

$$S_1 = \sum_m a_m \cos(m\theta); \quad m = 1, 2, 3, \dots \quad a_0 = 0.$$

$$S_2 = b_0 + \sum_m b_m \cos(m\theta); \quad b_0 = \frac{\varphi_0^3}{3}; \quad b_m = \beta_m.$$

Далее имеем:

$$Z = S_1 S_2 = z_0 + \sum_{k=1}^{\hat{m}} z_k \cos k\theta,$$

Дифференцирование суммы сводится к дифференцированию слагаемых:

$$\frac{\partial}{\partial \theta} Z = - \sum_{k=1}^{\hat{m}} z_k k \sin k\theta. \quad \frac{\partial^2}{\partial \theta^2} Z = - \sum_{k=1}^{\hat{m}} z_k k^2 \cos k\theta.$$

Для дальнейших расчетов перейдем к обозначению $k=m$, в итоге получим:

$$\frac{R}{Eh} \frac{\partial^2}{\partial \theta^2} (\Psi(\theta)w(\xi, \theta, t)) = \frac{kR^2}{\pi Eh} f(t) \sum_{m=1}^{\infty} m^2 z_m \cos m\theta, \quad (2.31)$$

где φ_0 определяется выражением (2.8), $\beta_m = (-1)^m m^{-3} [2\varphi_m \cos \varphi_m - (\varphi_m^2 - 2) \sin \varphi_m]$,

$\varphi_m = m\varphi_0$, k – коэффициент постели грунта [Н/м³], m – волновое число в окружном направлении. Порядок перемножения рядов и дифференцирования, слагаемого

$$\frac{\partial^2}{\partial \theta^2} (\Psi(\theta)w(\xi, \theta, t)), \text{ а так же вычисление } z_m \text{ при различных волновых числах } m$$

приведен в приложение Б.

Подставим выражения (2.30), (2.31) в дифференциальное уравнение (2.25), и приравняем коэффициенты при одинаковых тригонометрических функциях получим:

$$\begin{aligned} & \left[-\frac{\lambda_n^4}{m^2} - h_v^2 m^2 (m^2 - 1) - h_v^2 m^4 (m^2 - 1) + 2m^2 \lambda_n^2 \varepsilon_0 - \frac{R}{Eh} p_0 m^2 (m^2 - 1) \right. \\ & \left. - \frac{kR^2}{Eh\pi} z_m m^2 \right] f(t) - \frac{R^2 \rho}{E} \left(\frac{\lambda_n^2}{m^2} - 1 - m^2 \right) f''(t) = 0. \end{aligned} \quad (2.32)$$

Умножим всё выражение на минус m^2 и поделим на h_v^2 , получим систему разделяющихся дифференциальных уравнений:

$$\left\{ \tilde{\lambda}_n^4 + m^4(m^2 - 1)(m^2 - 1 + p^*) + k^* m^4 - 2\varepsilon_0^* \tilde{\lambda}_n^2 m^4 \right\} f(t) + \rho^* R h [\tilde{\lambda}_n^2 h_{\tilde{v}} + m^2 + m^4] f''(t) = 0, \quad (2.33)$$

$$\text{где } \tilde{\lambda}_n = \frac{n\pi R}{L\sqrt{h_{\tilde{v}}}}, \quad p^* = p \frac{R}{E h h_{\tilde{v}}^2}, \quad \rho^* = \rho \frac{R}{E h h_{\tilde{v}}^2}, \quad \varepsilon_0^* = \frac{F}{E A h_{\tilde{v}}^2}, \quad k^* = \frac{R^2 k}{\pi E h h_{\tilde{v}}^2} z_m.$$

дополним систему (2.33) выражениями (2.29) получим:

$$\tilde{\lambda}_n^4 + m^4(m^2 - 1)(m^2 - 1 + p^*) + k^* m^4 - 2\varepsilon_0^* \tilde{\lambda}_n^2 m^4 - \rho^* R \cdot h (\tilde{\lambda}_n^2 h_{\tilde{v}} + m^2 + m^4) \omega_{mn}^2 = 0$$

Преобразуем слагаемое $2\varepsilon_0^* \tilde{\lambda}_n^2 m^4$, с учетом значений площади поперечного сечения тонкостенной трубы $A = 2\pi R h$ и осевого момента инерции $I = \pi R^3 h$ как в работе [103], в результате преобразований получим:

$$\begin{aligned} & \tilde{\lambda}_n^4 + m^4(m^2 - 1)(m^2 - 1 + p^*) + k^* m^4 - \tilde{\lambda}_n^4 m^4 P / n^2 - \\ & - \rho^* R \cdot h (\tilde{\lambda}_n^2 h_{\tilde{v}} + m^2 + m^4) \omega_{mn}^2 = 0, \end{aligned} \quad (2.34)$$

где $P = F / F_{\varepsilon}$.

Преобразуя (2.34) получим общее выражение для квадрата частоты свободных колебаний ω_{mn}^2 прямолинейного участка газопровода (2.35) позволяющее исследовать влияние внутреннего рабочего давления, параметра продольной сжимающей силы, геометрических характеристик и влияние упругого основания грунта на частоты свободных колебаний наземного газопровода конечной длины L :

$$\omega_{mn}^2 = \frac{\tilde{\lambda}_n^4 + m^4(m^2 - 1)(m^2 - 1 + p^*) + k^* m^4 - \tilde{\lambda}_n^4 m^4 P / n^2}{\rho^* R \cdot h (\tilde{\lambda}_n^2 h_{\tilde{v}} + m^2 + m^4)}, \quad (2.35)$$

где $P = \frac{F}{F_{\varepsilon}}$ – безразмерный параметр продольной сжимающей силы, $F_{\varepsilon} = \frac{\pi^2 E I}{L^2}$ –

Эйлерова сила, $\tilde{\lambda}_n = \frac{n\pi R}{L\sqrt{h_{\tilde{v}}}}$

Полученное выражение (2.35), позволяет определить более широкий спектр частот по оболочечным формам при волновых числах m и $n=1,2,3,\dots$, с учетом внутреннего рабочего давления, параметра продольной сжимающей силы, и

упругого основания грунта, при различных значениях геометрических характеристиках.

2.7 Исследование свободных колебаний наземных газопроводов

Анализ доступных литературных источников, показал, что существующие методики по определению частоты свободных колебаний не позволяют в полной мере оценить влияние внутреннего рабочего давления, продольной сжимающей силы и упругого основания грунта на частоты свободных колебаний. Решения, полученные по стержневой теории, в большей мере подходят для расчета более толстых труб порядка $h/R > 1/20$ ($1/5$, $1/10$), и не позволяют учесть деформацию поперечного сечения, и влияния внутреннего рабочего давления, особенно для тонкостенных трубопроводов. Учет внутреннего рабочего давления является обязательной составляющей. Как было показано в работах С.Н. Кукуджанова [64; 67], В.П. Ильина, В.Г. Соколова [51], внутреннее рабочее давление оказывает существенное влияние на рост частот свободных колебаний. Таким образом, с увеличением внутреннего рабочего давления, частоты увеличиваются, тем самым увеличивая жёсткость участка трубопровода.

Для анализа совместного влияния геометрических и механических характеристик был выбран участок газопровода, выполненный из стальной трубы с соотношением толщины стенки h к радиусу R , $1/50$, параметром длины $L=8R$ до $L=15R$. Участок подвержен действию параметра продольной сжимающей силой P , и упругого основания грунта, с коэффициентом постели k .

Результаты расчета, по формуле (2.35), для трех первых наиболее важных, для динамических расчетов гармоник $\omega_{11}, \omega_{21}, \omega_{31}$, сведены в таблицу 2.3, и иллюстрированы в виде графиков на рисунках 2.8 – 2.10. Следует отметить что расчет выполняется в технической частоте в Гц, для перехода от круговой частоты $1/c$ необходимо частоту ω_{mn} поделить на 2π . На рисунках представлены кривые зависимостей наименьших частот ω_{21} участков газопровода от действий параметра продольной сжимающей силы, коэффициентов постели грунта, и различных длин

участков, $L=8R$, $L=10R$, $L=15R$. Наименьшая частота для случая шарнирного закрепления, реализуется при значениях волновых чисел $m=2$ и $n=1$, что соответствует оболочечной форме колебаний ω_{21} .

В результате анализа полученных значений по формуле (2.35) видно, что с увеличением параметра продольной сжимающей силы P частоты при ω_{21} уменьшаются. Так например с ростом параметра продольной сжимающей силы P от 0 до 0,1 при $h/R=1/50$; $L=10R$; $p_0=0$; $k=0,3 \cdot 10^7 \text{ Н/м}^3$, частоты ω_{21} уменьшаются на 61,31%. Вследствие этого увеличивается риск потери устойчивости трубопровода. Однако с увеличением значения коэффициента постели грунта k до $3,0 \cdot 10^7 \text{ Н/м}^3$ снижение частот ω_{21} происходит менее интенсивно, на 29,36%. Далее выявлено, что с увеличением значений k от 0,1 до $3,0 \cdot 10^7 \text{ Н/м}^3$ частоты ω_{21} для труб $L=8R$; $p_0=0$; $P=0$ увеличиваются на 17,77%, а для труб порядка $L=15R$ на 38,94%.

Согласно значениям таблицы 2.3 следует, что увеличение значений частот с учетом влияния упругого основания грунта, и параметра продольной сжимающей силы $P=0,1$, больше всего сказывается на участки газопровода длиной $L=15R$, и составляет 47,31%.

Для нахождения параметра критической продольной сжимающей силы $P_{кр}$, используя критерий динамической устойчивости (когда частота свободных колебаний обращается в ноль $\omega_{mn}=0$), из формулы (2.35) получим выражение:

$$P_{кр} = \frac{\lambda_n^4 + m^4(m^2 - 1)(m^2 - 1 + p^*) + k^* m^4}{\lambda_n^4 m^4} * n^2, \quad (2.36)$$

Формула (2.36) учитывает совместное влияние внутреннего рабочего давления, упругого основания грунта, геометрических характеристик трубопровода, и позволяет определить величину параметра критической продольной сжимающей силы, приводящей к потере статической устойчивости газопровода. Природа появления продольной сжимающей силы весьма разнообразна, она может быть вызвана например недостаточной компенсацией температурных деформаций, изменения физико – механических свойств грунта, а так же нарушением технологии укладки, и т.д.

Зная, что $P_{кр} = F_{кр} / F_{\vartheta}$, определим само значение критической сжимающей силы $F_{кр}$. Например, подставляя данные участка газопровода длиной $L=8R$ при $k=0,5 \cdot 10^7 \text{ Н/м}^3$, получим значение $P_{кр} = 0,08$, отсюда следует, что критическая продольная сила равна $F_{кр} = 0,08F_{\vartheta}$. При этом следует иметь в виду, что участок газопровода теряет устойчивость как тонкостенный стержень с учетом деформации поперечных сечений, а не как короткая цилиндрическая оболочка при осевом сжатии, теряющая устойчивость за счет местного выпучивания стенок.

Таблица 2.3 – Зависимость частот свободных изгибных колебаний ω_{21} (Гц) наземных газопроводов от длины участка L , параметра продольной сжимающей силы P , и коэффициента постели грунта k , без учета внутреннего рабочего давления p_0 .

$h/R=1/50$ (труба 1420x14мм); $p_0=0$										
Кoeff. постели грунта $k \cdot 10^7$ (Н/м ³)	ω_{m1}	$L=8R$			$L=10R$			$L=15R$		
		$P=0$	$P=0,5$	$P=0,1$	$P=0$	$P=0,05$	$P=0,1$	$P=0$	$P=0,05$	$P=0,1$
$k=0,1$	ω_{11}	118,81	115,84	112,78	77,13	75,18	73,18	34,89	34,02	33,12
	ω_{21}	44,03	27,04	–	32,41	23,54	7,65	23,65	21,36	18,92
	ω_{31}	56,64	42,93	21,81	54,87	49,51	43,19	53,87	52,83	51,77
$k=0,3$	ω_{11}	118,94	115,93	112,85	77,23	75,28	73,28	35,11	34,25	33,35
	ω_{21}	45,32	29,09	–	34,15	25,89	13,21	25,89	23,93	21,77
	ω_{31}	59,04	46,04	27,44	57,35	52,23	46,56	56,39	55,39	54,38
$k=0,5$	ω_{11}	118,98	115,98	112,90	77,31	75,36	73,36	35,28	34,42	33,53
	ω_{21}	46,31	30,61	–	35,45	27,58	16,28	27,59	25,75	23,77
	ω_{31}	60,84	48,33	31,13	59,21	54,27	48,83	58,27	57,32	56,34

продолжение таблицы 2.3

$h/R=1/50$ (труба 1420x14мм); $p_0=0$										
Коэфф. постели грунта $k \cdot 10^7$ (Н/м ³)	ω_{m1}	$L=8R$			$L=10R$			$L=15R$		
		$P=0$	$P=0,5$	$P=0,1$	$P=0$	$P=0,05$	$P=0,1$	$P=0$	$P=0,05$	$P=0,1$
$k=1,0$	ω_{11}	119,08	116,08	113,01	77,46	75,52	73,52	35,63	34,77	33,89
	ω_{21}	48,24	33,48	–	37,96	30,74	21,19	30,76	29,12	27,38
	ω_{31}	64,36	52,68	37,4	62,81	58,18	53,16	61,94	61,04	60,13
$k=2,0$	ω_{11}	119,24	116,24	113,16	77,70	75,76	73,78	36,16	35,32	34,45
	ω_{21}	51,18	37,58	14,32	41,64	35,18	27,24	35,21	33,78	32,29
	ω_{31}	69,58	58,94	45,91	68,15	63,91	59,37	67,36	66,53	65,69
$k=3,0$	ω_{11}	119,37	116,37	113,30	77,91	75,97	73,99	36,61	35,78	34,93
	ω_{21}	53,52	40,7	21,21	44,48	38,51	31,42	38,57	37,25	35,91
	ω_{31}	73,61	63,72	51,91	73,33	68,34	64,12	71,58	70,80	70,01

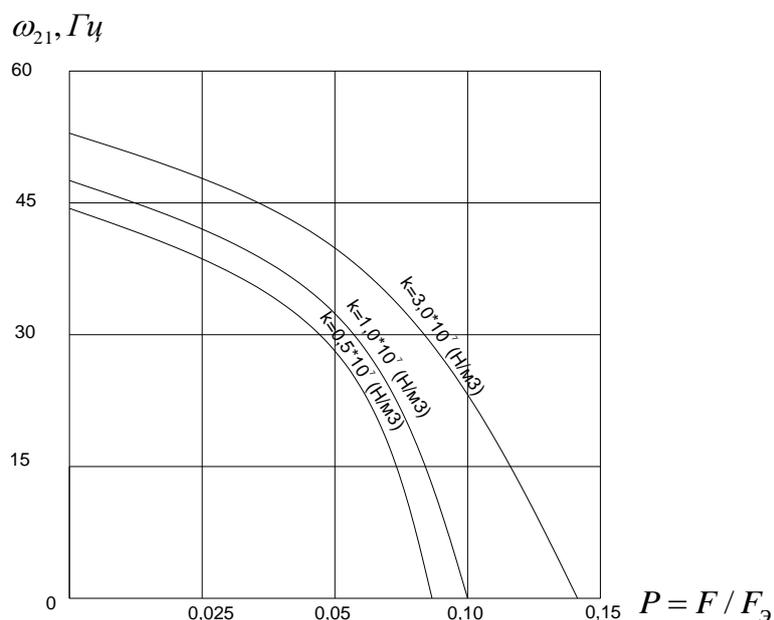


Рисунок 2.8 – Зависимость частот ω_{21} участков газопровода длиной $L=8R$ от действия параметра продольной сжимающей силы, и различных значений коэффициента постели грунта, без учета внутреннего рабочего давления.

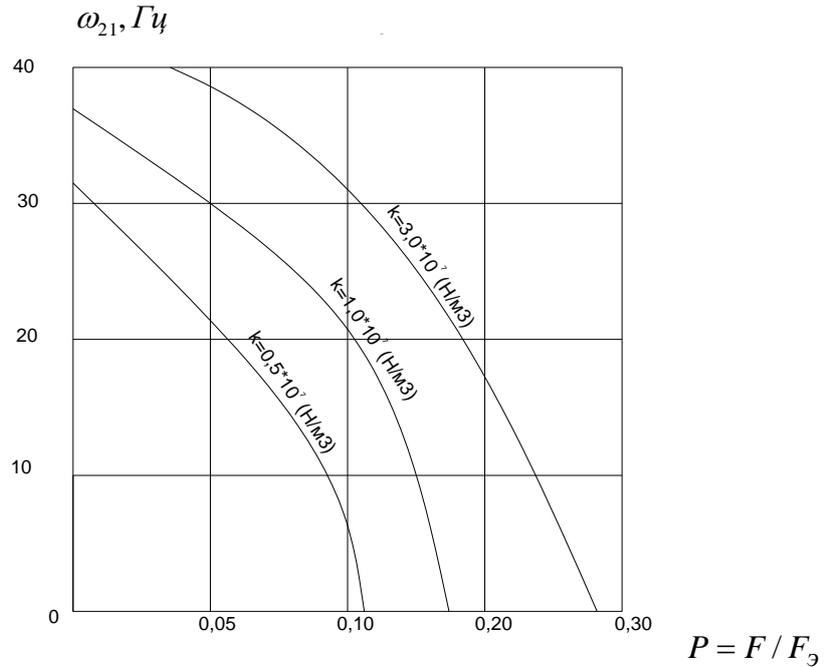


Рисунок 2.9 – Зависимость частот ω_{21} участков газопровода длиной $L=10R$ от действия параметра продольной сжимающей силы, и различных значений коэффициента постели грунта, без учета внутреннего рабочего давления.

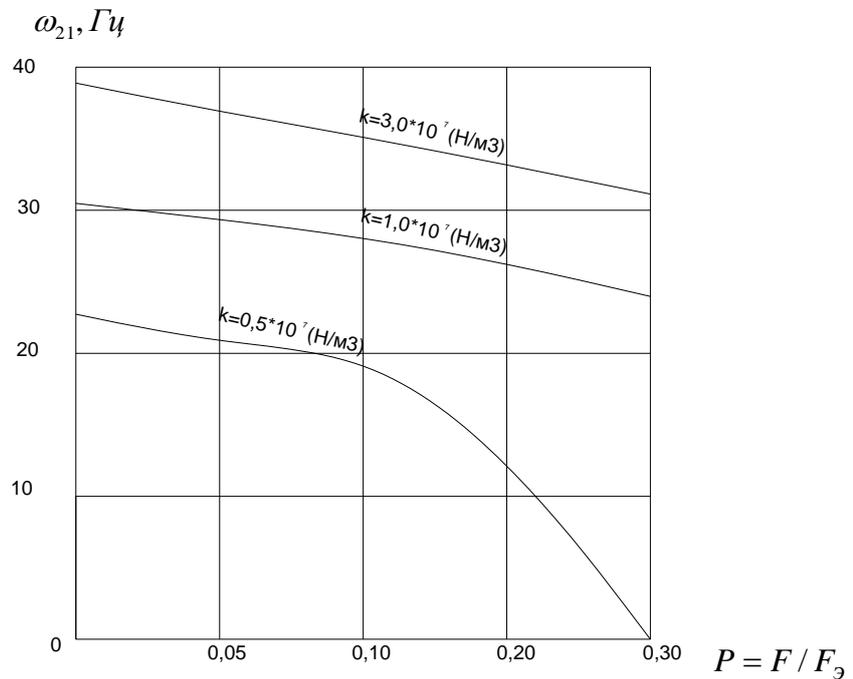


Рисунок 2.10 – Зависимость частот ω_{21} участков газопровода длиной $L=15R$ от действия параметра продольной сжимающей силы, и различных значений коэффициента постели грунта, без учета внутреннего рабочего давления.

Анализ полученных значений показал, что с увеличением коэффициента постели грунта k от 0,1 до $3,0 \cdot 10^7$ Н/м³ значение параметра продольной критической силы увеличивается более чем в 1,5 раза для $L=8R$, и почти в 3 раза для $L=15R$. Это означает, что упругое основание препятствует радиальным перемещениям, аркообразованию, и сплющиванию поперечного сечения.

Формула (2.35) для определения квадрата частоты свободных колебаний, учитывает деформированное состояние поперечного сечения оболочки. В связи с этим можно учесть влияние внутреннего рабочего давления p_0 и оценить его влияние на частоты свободных колебаний, при различных геометрических и механических характеристиках. Поэтому в формуле (2.35) введен безразмерный параметр внутреннего рабочего давления:

$$p^* = \frac{R}{Ehh_v^2} p_0. \quad (2.37)$$

Из формулы (2.35) видно, что внутреннее рабочее давление не оказывает влияния на первую форму колебаний ($m=1$), так как, член содержащий параметр p^* обращается в ноль. Это объясняется тем, что оболочка ведёт себя как стержень, т.е. контур остается недеформированным. Контур поперечного сечения деформируется только при оболочечных формах изгибных колебаний ($m=2,3\dots$). Исследования В.П. Соколова и В.П. Ильина [51] показали, что для *надземного* газопровода внутреннее рабочее давление существенно увеличивает собственные частоты препятствуя деформации (овализации) поперечного сечения. Для оценки влияния внутреннего рабочего давления на частоты свободных колебаний *наземного* участка газопровода с учетом коэффициента постели грунта, без учета влияния параметра продольной сжимающей силы исследовались наименьшие частоты ω_{21} . Результаты проведенного исследования сведены в таблицу 2.4 и представлены в виде графиков на рисунках 2.11. – 2.13. Анализ полученных результатов показал, что с увеличением внутреннего рабочего давления от 0 до 4 МПа, например при $h/R=1/50$; $L=10R$; $P=0$; $k=0,5 \cdot 10^7$ Н/м³ частоты ω_{21} увеличиваются на 46,32% а при $k=3,0 \cdot 10^7$ Н/м³ на 37,62%. Исходя из этого следует, что внутреннее рабочее

давление оказывает большее влияние на газопроводы на слабом основании с коэффициентом постели $k < 0,5 \cdot 10^7 \text{ Н/м}^3$. Далее выявлено, что для участков длиной $L=15R$, частоты ω_{21} , с увеличением внутреннего рабочего давления от 0 до 4МПа при $k = 0,5 \cdot 10^7 \text{ Н/м}^3$ увеличивается в 1,3 раза быстрее чем при $L=8R$. Следует отметить, что минимальная частота реализуется при ω_{21} , т.е. $m=2, n=1$, что соответствует оболочечной форме колебаний. В случае, когда наименьшие частоты реализуются при ω_{11} , т.е. $m=1, n=1$, частоты целесообразнее определять по формулам стержневой теории. Такой случай наблюдается для длинных труб $L > 15R$.

Далее исследовано совместное влияние внутреннего рабочего давления, параметра продольной сжимающей силы, и упругого основания грунта. Полученные результаты расчета сведены в таблицу 2.5.

Таблица 2.4 – Зависимость частот свободных изгибных колебаний ω_{mn} (Гц) наземных газопроводов от длины участка L , от коэффициента постели грунта k , внутреннего рабочего давления p_0 , без учета параметра продольной сжимающей силы P .

<i>h/R=1/50 (труба 1420x14мм); P=0</i>										
<i>Кoeff. постели грунта $k \cdot 10^7$ (Н/м³)</i>	ω_{m1}	<i>L=8R</i>			<i>L=10R</i>			<i>L=15R</i>		
		<i>p=0 МПа</i>	<i>p=2 МПа</i>	<i>p=4 МПа</i>	<i>p=0 МПа</i>	<i>p=2 МПа</i>	<i>p=4 МПа</i>	<i>p=0 МПа</i>	<i>p=2 МПа</i>	<i>p=4 МПа</i>
<i>k=0,1</i>	ω_{11}	118,88	118,88	118,88	77,13	77,13	77,13	34,89	34,89	34,89
	ω_{21}	44,03	59,05	70,95	32,41	51,01	64,45	23,54	45,94	60,55
	ω_{31}	56,64	88,77	112,03	54,87	87,67	111,17	53,87	87,06	110,71
<i>k=0,3</i>	ω_{11}	118,94	118,94	118,94	77,23	77,23	77,23	35,11	35,11	35,11
	ω_{21}	45,32	60,01	71,76	34,15	52,13	65,35	25,89	47,19	61,51
	ω_{31}	59,04	90,31	113,26	57,35	89,23	112,41	56,38	88,64	111,95
<i>k=0,5</i>	ω_{11}	118,99	118,99	118,99	77,31	77,31	77,31	35,28	35,28	35,28
	ω_{21}	46,31	60,76	72,39	35,45	52,99	66,04	27,59	48,14	62,24

продолжение таблицы 2.4

$h/R=1/50$ (труба 1420x14мм); $P=0$										
Коэфф. постели грунта $k \cdot 10^7$ (H/m^3)	ω_{m1}	$L=8R$			$L=10R$			$L=15R$		
		$p=0$ МПа	$p=2$ МПа	$p=4$ МПа	$p=0$ МПа	$p=2$ МПа	$p=4$ МПа	$p=0$ МПа	$p=2$ МПа	$p=4$ МПа
	ω_{31}	60,84	91,51	114,21	59,21	90,44	113,37	58,27	89,85	112,92
$k=1,0$	ω_{11}	119,08	119,08	119,08	77,46	77,46	77,46	35,62	35,62	35,62
	ω_{21}	48,25	62,26	73,64	37,96	54,71	67,42	30,76	50,03	63,71
	ω_{31}	64,36	93,89	116,12	62,81	92,84	115,30	61,94	99,27	114,85
$k=2,0$	ω_{11}	119,24	119,24	119,37	77,70	77,70	77,70	36,16	36,16	36,16
	ω_{21}	51,18	64,55	75,60	41,63	57,33	69,56	35,21	52,87	65,97
	ω_{31}	69,58	97,53	119,09	68,15	96,54	118,29	67,36	95,98	117,85
$k=3,0$	ω_{11}	119,37	119,37	119,37	77,90	77,90	77,90	36,61	36,60	36,60
	ω_{21}	53,52	66,43	77,21	44,48	59,43	71,29	38,54	55,15	68,12
	ω_{31}	73,67	100,49	121,53	72,33	99,53	120,74	71,58	98,99	117,86

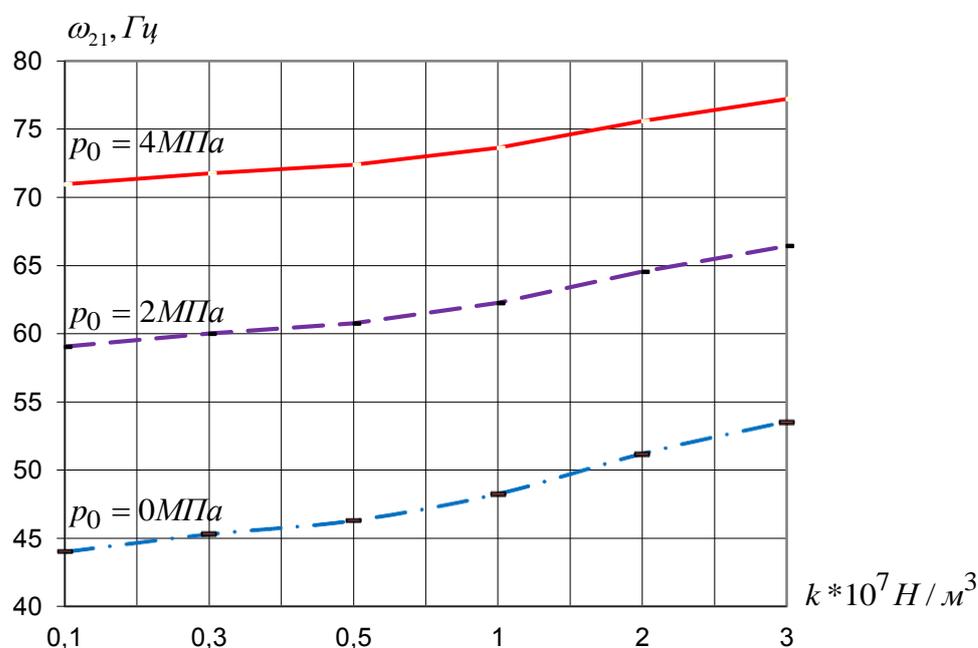


Рисунок 2.11 – Зависимость частот ω_{21} участков газопровода длиной $L=8R$ от действия внутреннего рабочего давления и коэффициента постели грунта, без учета параметра продольной сжимающей силы.

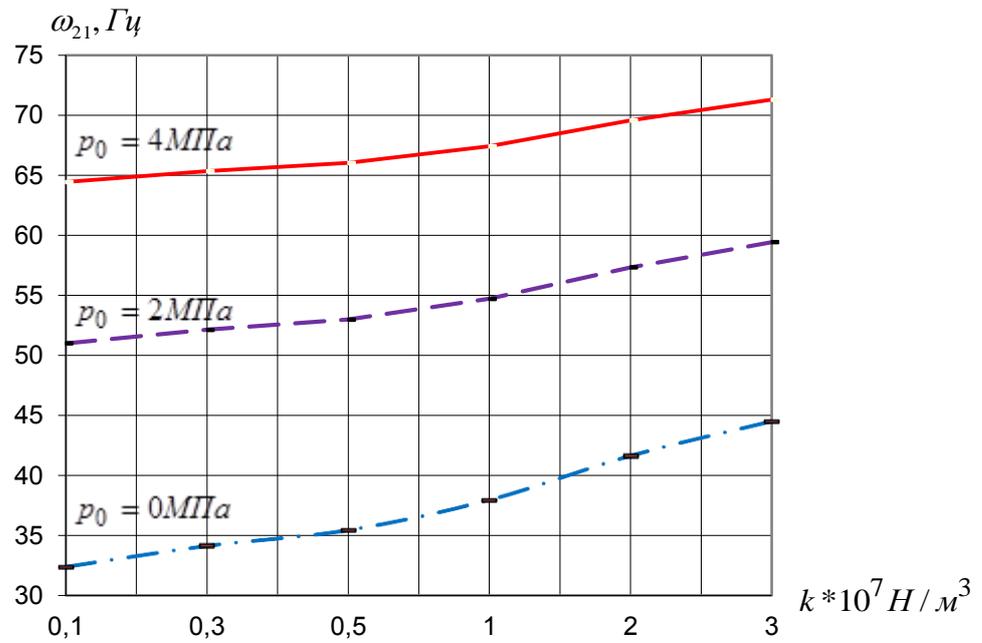


Рисунок 2.12 – Зависимость частот ω_{21} участков газопровода длиной $L=10R$ от действия внутреннего рабочего давления и коэффициента постели грунта, без учета параметра продольной сжимающей силы.

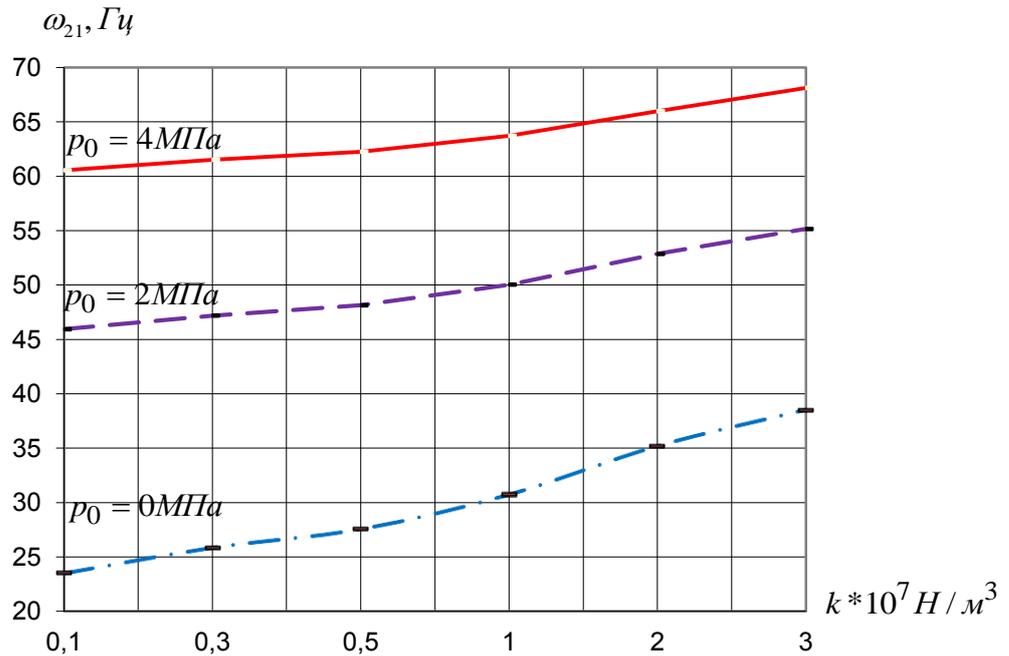


Рисунок 2.13 – Зависимость частот ω_{21} участков газопровода длиной $L=15R$ от действия внутреннего рабочего давления и коэффициента постели грунта, без учета параметра продольной сжимающей силы.

Анализ полученных значений показал, что параметр продольной сжимающей силы влияет в большей степени на участки газопровода с низким давлением. Так например, при $h/R=1/50, P=0,05, k=0,1*10^7 (H/м^3)$, и $p_0=0$, продольная сила уменьшает частоты на 38%, а при $p_0=4$ МПа на 13%.

На практике важным фактором влияющим на частоты свободных колебаний является геометрические характеристики, например толщина стенки h , и диаметр трубопровода D . Выражение (2.35) позволяет определить влияние параметра тонкостенности (h/R) участка газопровода на частоты свободных колебаний. В таблице 2.6 представлены результаты исследования влияния внутреннего рабочего давления на различные соотношения h/R , с учетом коэффициента постели грунта k и параметра продольной сжимающей силы P .

На рисунках 2.14 – 2.16, иллюстрированы результаты исследования влияния изменения внутреннего давления p_0 от 0 до 4 МПа на минимальные частоты свободных колебаний ω_{21} с различными соотношениями $h/R=1/30; 1/40; 1/50$. Из графиков видно, что частоты, увеличиваются по мере увеличения внутреннего рабочего давления. По мере уменьшения параметра тонкостенности трубы $h/R=1/50$, частоты свободных колебаний от действия внутреннее рабочее давление увеличиваются гораздо интенсивнее, чем для труб порядка $h/R=1/30$. Так для $h/R=1/30, L/R=8, k=1*10^7 H/м^3$ при изменении внутреннего давления p_0 от 0 до 4 МПа частоты увеличиваются на 31,7%, а для $h/R=1/50$ на 48,49%. Для более длинных участков $L/R=10, k=1*10^7 H/м^3$ частоты при $h/R=1/30$ увеличиваются на 37,50%, а при $h/R=1/50$ на 53,95%.

Таблица 2.5 – Зависимость частот свободных изгибных колебаний ω_{mn} (Гц) наземных газопроводов от длины участка L , коэффициента постели грунта k , внутреннего рабочего давления p_0 , с учетом параметра продольной сжимающей силы P .

<i>h/R=1/50 (труба 1420x14мм); P=0,05</i>										
Кoeff. постели грунта $k \cdot 10^7$ (Н/м ³)	ω_{m1}	$L=8R$			$L=10R$			$L=15R$		
		$p_0=0$	$p_0=2\text{МПа}$	$p_0=4\text{МПа}$	$p_0=0$	$p_0=2\text{МПа}$	$p_0=4\text{МПа}$	$p_0=0$	$p_0=2\text{МПа}$	$p_0=4\text{МПа}$
$k=0,1$	ω_{11}	118,87	115,87	115,87	75,18	75,18	75,18	34,03	34,03	34,03
	ω_{21}	27,04	47,74	61,86	23,55	45,89	60,48	21,36	44,86	59,74
	ω_{31}	43,93	80,71	105,76	49,51	84,41	108,63	52,83	86,42	110,21
$k=0,3$	ω_{11}	115,94	115,94	115,94	75,28	75,29	75,29	34,25	34,24	34,24
	ω_{21}	29,09	48,94	62,78	25,89	47,14	61,44	23,92	46,14	60,70
	ω_{31}	46,04	82,41	107,06	52,24	86,04	109,89	55,39	88,01	111,45
$k=0,5$	ω_{11}	115,98	115,98	115,98	75,36	75,36	75,36	34,42	34,42	34,42
	ω_{21}	30,61	49,85	63,51	27,58	48,09	62,17	25,75	47,11	61,45
	ω_{31}	48,33	83,71	108,07	54,27	87,28	110,87	57,32	89,23	112,42
$k=1,0$	ω_{11}	116,08	116,08	116,08	75,52	75,52	75,52	34,77	34,77	34,77
	ω_{21}	33,48	51,66	64,94	30,74	49,97	63,63	29,12	49,04	62,94
	ω_{31}	52,68	86,29	110,08	58,19	89,77	112,84	61,04	91,67	113,62
$k=2,0$	ω_{11}	116,24	116,24	116,24	75,76	75,76	75,76	35,32	35,33	35,32
	ω_{21}	37,58	54,41	67,14	35,18	52,82	65,89	33,78	51,94	65,23
	ω_{31}	58,95	90,26	113,21	63,92	93,59	115,90	66,53	95,41	117,39
$k=3,0$	ω_{11}	116,37	116,37	116,37	75,97	75,97	75,97	35,78	35,77	35,77
	ω_{21}	40,71	56,61	68,94	38,51	55,09	67,73	37,25	54,25	67,08
	ω_{31}	63,72	93,45	115,77	68,35	96,67	118,41	70,81	98,44	119,86

Таблица 2.6 – Зависимость частот свободных изгибных колебаний ω_{mn} (Гц) наземных газопроводов от внутреннего рабочего давления p_0 , параметра тонкостенности трубы h/R , и параметра длины участка газопровода L/R .

$k = 1 * 10^7 \text{ Н/м}^3; P = 0,05$										
Отношение толщины стенки h к радиусу R	ω_{m1}	$L=8R$			$L=10R$			$L=15R$		
		$p_0=0$	$p_0=2\text{МПа}$	$p_0=4\text{МПа}$	$p_0=0$	$p_0=2\text{МПа}$	$p_0=4\text{МПа}$	$p_0=0$	$p_0=2\text{МПа}$	$p_0=4\text{МПа}$
$h/R=1/30$ (21x1220мм)	ω_{11}	134,9	134,9	134,9	87,67	87,67	87,61	39,97	39,97	39,97
	ω_{21}	56,03	73,21	82,33	53,38	71,45	81,22	51,85	70,35	80,28
	ω_{31}	101,5	118,0	132,5	105,5	121,5	135,6	107,7	123,4	128,5
$h/R=1/40$ (18x1420мм)	ω_{11}	135,0	135,0	135,0	87,78	87,78	87,78	61,68	61,68	61,68
	ω_{21}	40,05	57,32	70,48	36,96	55,25	68,84	35,79	54,49	68,25
	ω_{31}	73,16	102,1	124,5	78,61	106,0	127,8	80,47	107,4	125,9
$h/R=1/50$ (14x1420мм)	ω_{11}	116,0	116,0	116,0	75,51	75,51	75,51	53,13	53,13	53,13
	ω_{21}	33,48	51,66	64,94	30,74	49,97	63,63	29,70	49,36	63,17
	ω_{31}	52,68	86,29	110,0	58,18	89,77	112,8	60,04	90,99	111,5

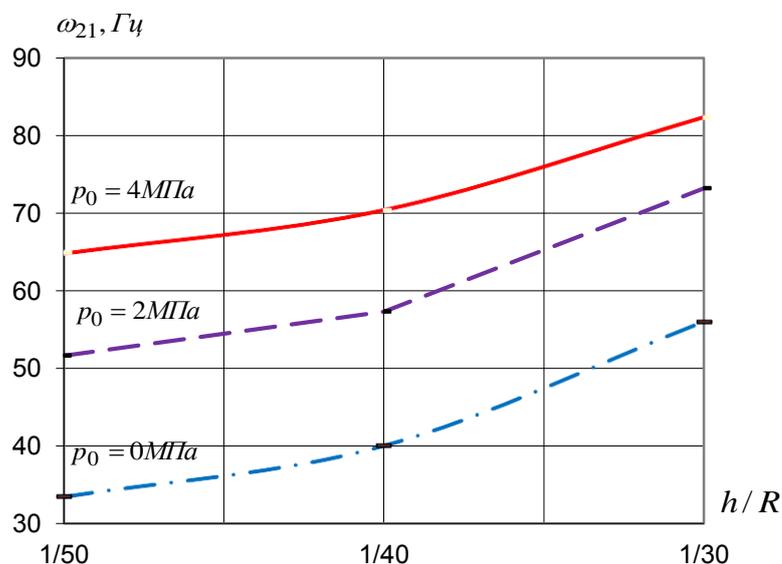


Рисунок 2.14 – Зависимость частот ω_{21} участков газопровода длиной $L=8R$ от действия внутреннего рабочего давления p_0 , параметра продольной сжимающей силы $P=0,05$, коэффициента постели грунта $k = 1 * 10^7 \text{ Н/м}^3$ и параметра тонкостенности трубы h/R .

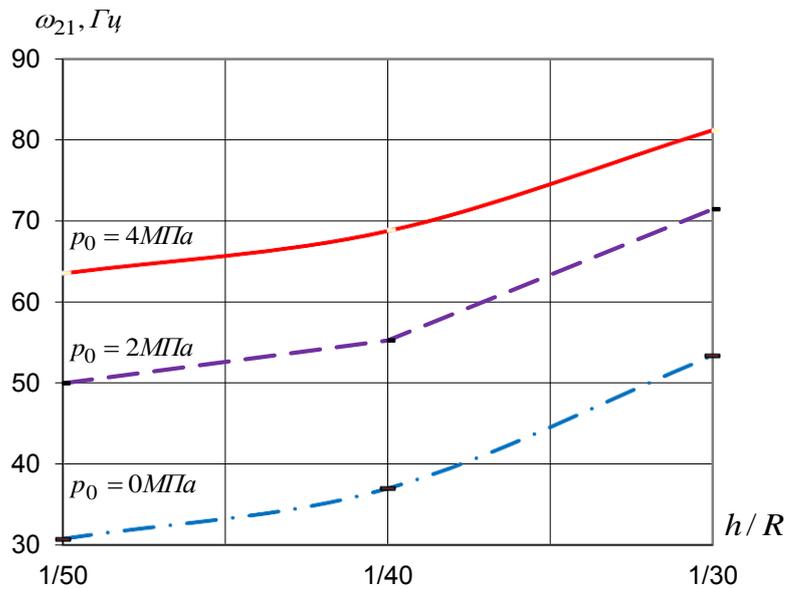


Рисунок 2.15 – Зависимость частот ω_{21} участков газопровода длиной $L=10R$ от действия внутреннего рабочего давления p_0 , параметра продольной сжимающей силы $P=0,05$, коэффициента постели грунта $k = 1 \cdot 10^7 \text{ H/м}^3$ и параметра тонкостенности трубы h/R .

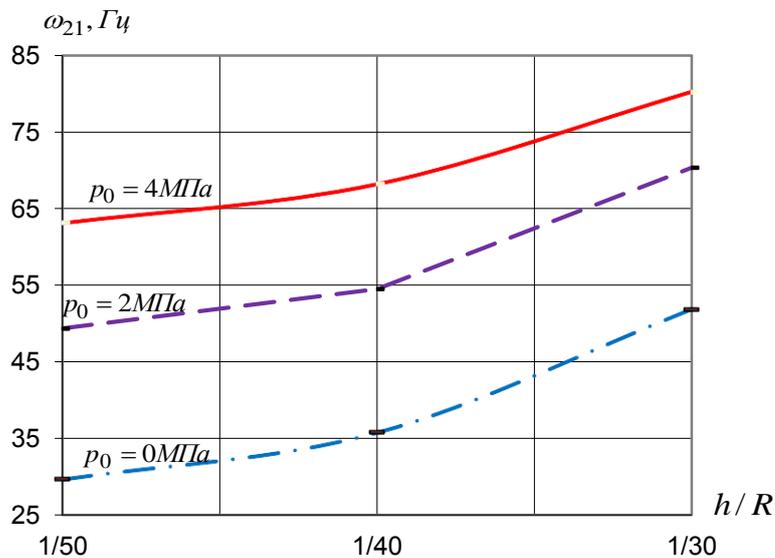


Рисунок 2.16 – Зависимость частот ω_{21} участков газопровода длиной $L=15R$ от действия внутреннего рабочего давления p_0 , параметра продольной сжимающей силы $P=0,05$, коэффициента постели грунта $k = 1 \cdot 10^7 \text{ H/м}^3$ и параметра тонкостенности трубы h/R .

2.8 Критерий применимости теории цилиндрических оболочек и стержневой теории для наземных газопроводов

Анализ частот свободных изгибных колебаний наземного газопровода показал, что при некотором параметре длине трубы l^* значение наименьших частот, рассчитанных при $m=1$, и при $m=2$ совпадают. При этом длина l^* зависит от параметра тонкостенности трубы, внутреннего рабочего давления, коэффициента упругого основания грунта, и параметра продольной сжимающей силы. Определение параметра длины l^* позволяет определить критерий применимости теории оболочек и стержневой теории для определения наименьших частот свободных колебаний. Для получения формулы l^* приравняем правые части формулы (2.35) при $m=1$ и $m=2$. В результате получим:

$$\frac{\tilde{\lambda}_1^4 + k^* - \tilde{\lambda}_1^4 P}{2\rho^* R h \tilde{\lambda}_1^2 h_v} = \frac{\tilde{\lambda}_1^4 + 16(4-1)(4-1+p^*) + 16k^* - 16\tilde{\lambda}_1^4 P}{20\rho^* R h \tilde{\lambda}_1^2 h_v}$$

После преобразования получим формулу в следующем виде:

$$l^* = \frac{L^*}{R} = \frac{\pi}{\sqrt{h_v}} \cdot \sqrt[4]{\frac{9 + 6P}{6k^* + 48(3 + p^*)}} \quad (2.38)$$

Формула (2.38) позволяет определить критерий применения теории оболочек и стержневой теории (рисунки 2.17 – 2.18). Например, при $h/R=1/50$, $P=0,02$, $k=0,4 \cdot 10^7$ (Н/м³), $p_0=2$ МПа (таблица 2.7 и рисунок 2.17) получим $l^*=12,67$, а при $k=3,0 \cdot 10^7$ (Н/м³) и вышеуказанных параметрах $l^*=11,93$ (рисунок 2.18). С увеличением значений коэффициента постели грунта k , происходит увеличение значений частот свободных колебаний трубопровода, а следовательно и параметра длины l^* на 6%. В случае, когда длина участка $l=L/R$ превосходит или равна длине l^* $l \geq l^*$, наименьшие частоты свободных колебаний следует определять при $m=1$, что соответствует стержневой теории, а в случае когда $l < l^*$, по теории оболочек $m=2$.

Дальнейший анализ так же показал, что внутреннее рабочее давление p_0 существенно влияет на параметр длины участка газопровода l^* . Так например, при $p_0 = 2$ МПа параметр $l^*=12,67$, а при $p_0 = 8$ МПа параметр $l^*= 11,02$ (рисунок 2.19).

Таблица 2.7 – Зависимость частоты свободных колебаний наземного участка газопровода от различных значений волновых чисел m , коэффициента постели грунта, внутреннего рабочего давления, и параметра длины L/R .

L/R	$n=1; h/R=1/50; P=0,02; L/R=10$							
	$p_0=2\text{МПа}$				$p_0=8\text{МПа}$			
	$k=0,4*10^7\text{Н/м}^3$		$k=3*10^7\text{Н/м}^3$		$k=0,4*10^7\text{Н/м}^3$		$k=3*10^7\text{Н/м}^3$	
	$m=1$	$m=2$	$m=1$	$m=2$	$m=1$	$m=2$	$m=1$	$m=2$
7	152,09	63,30	152,40	6814	152,09	73,66	152,40	78,66
8	117,71	56,26	118,18	62,58	117,77	68,65	118,18	74,00
9	93,83	52,77	94,34	59,68	93,83	65,84	94,34	71,41
10	76,49	50,66	77,14	57,73	76,49	64,18	77,14	69,89
11	63,56	49,35	64,34	56,58	63,56	63,16	64,34	68,95
12	53,67	48,51	54,59	55,85	53,67	62,51	54,59	68,36
13	45,95	47,93	47,03	55,36	45,95	62,07	47,03	67,97
14	39,81	47,56	41,06	55,03	39,81	61,78	41,06	67,71
15	34,85	47,27	36,27	54,79	34,85	61,57	36,27	67,52

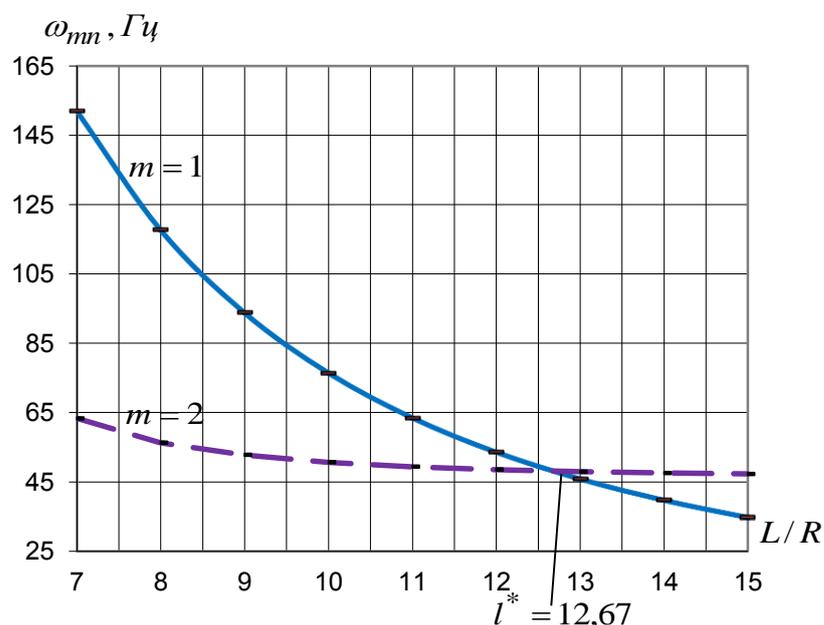


Рисунок 2.17 – Зависимость частоты свободных колебаний наземного участка газопровода от различных значений волновых чисел m , коэффициента постели грунта, внутреннего рабочего давления, и параметра длины L/R при $p_0=2\text{ МПа}$,

$$k=0,4*10^7\text{ Н/м}^3, P=0,02, h/R=1/50.$$

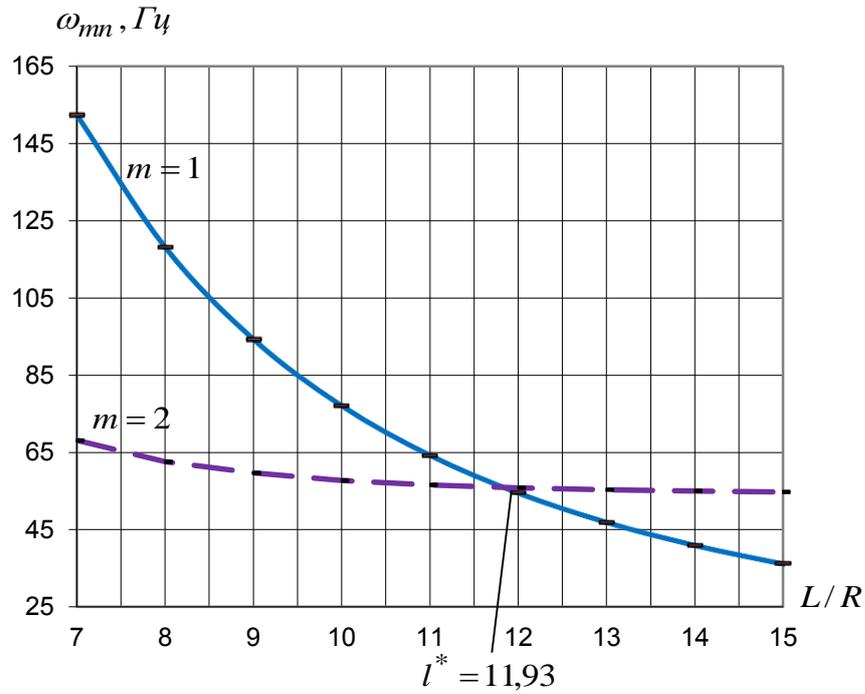


Рисунок 2.18 – Зависимость частоты свободных колебаний наземного участка газопровода от различных значений волновых чисел m , коэффициента постели грунта, внутреннего рабочего давления, и параметра длины L/R при $p_0=2 \text{ МПа}$, $k=3 \cdot 10^7 \text{ Н/м}^3$, $P=0,02$, $h/R=1/50$.

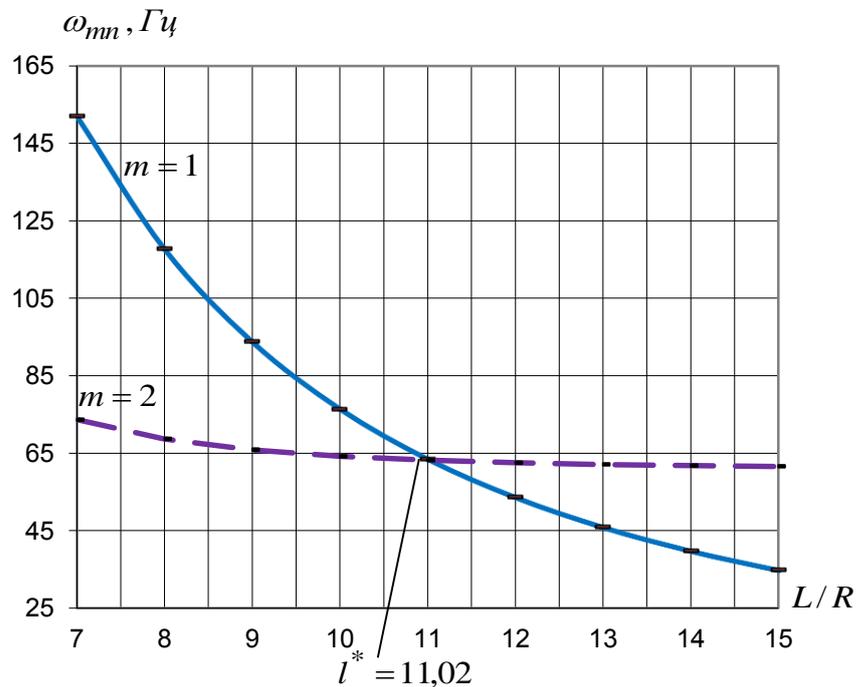


Рисунок 2.19 – Зависимость частоты свободных колебаний наземного участка газопровода от различных значений волновых чисел m , коэффициента постели грунта, внутреннего рабочего давления, и параметра длины L/R при $p_0=8 \text{ МПа}$, $k=0,4 \cdot 10^7 \text{ Н/м}^3$, $P=0,02$, $h/R=1/50$.

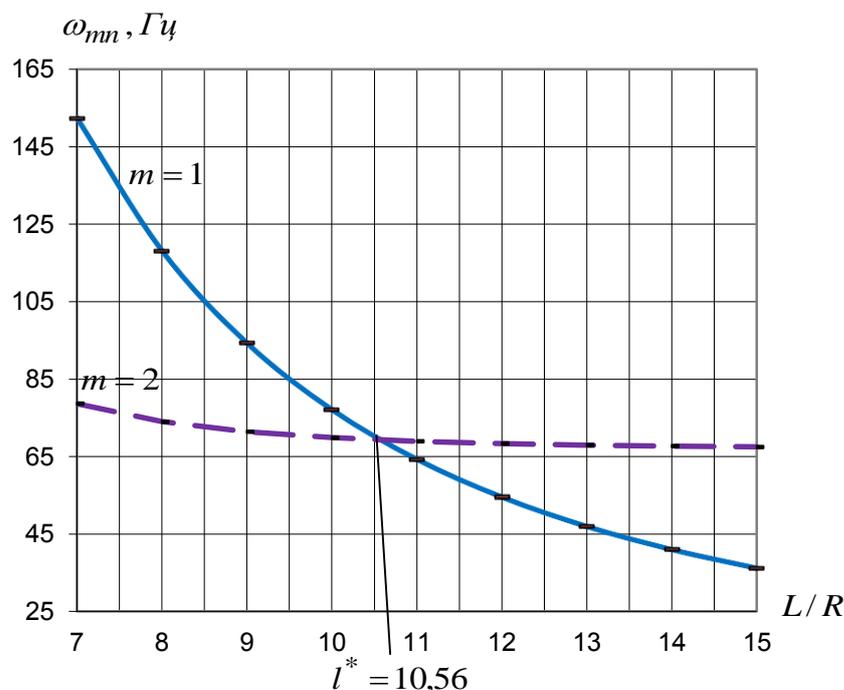


Рисунок 2.20 – Зависимость частоты свободных колебаний наземного участка газопровода от различных значений волновых чисел m , коэффициента постели грунта, внутреннего рабочего давления, и параметра длины L/R при $p_0=8$ МПа, $k=3 \cdot 10^7$ Н/м³, $P=0,02$, $h/R=1/50$.

Выводы по главе 2

1. Решена контактная задача с учетом взаимодействия трубопровода с грунтом по узкой полосе. Произведено разложение импульсной функции в ряд Фурье описывающей радиальное давление грунта на внешнюю поверхность трубы. Определено влияние радиального давления грунта на внешнюю поверхность трубы.
2. На основании геометрически нелинейном варианте полубезмоментной теории цилиндрических оболочек среднего изгиба и допущений Власова – Новожилова решена задача о свободных колебаниях наземных тонкостенных магистральных газопроводов большого диаметра подверженных действию внутреннего рабочего давления, параметра продольной сжимающей силы, геометрических характеристик, и влиянию упругого основания грунта.
3. На основании полученного решения исследовано влияние механических и геометрических характеристик на частоты свободных колебаний

наземных тонкостенных магистральных газопроводов большого диаметра, анализ полученных результатов показал:

- наименьшие частоты свободных колебаний газопроводов реализуются при волновых числах $m=2$ и $n=1$, что соответствует оболочечным формам колебания, учитывающих деформацию (овализацией) поперечного сечения, сопровождаемого изгибными колебаниями в продольном направлении, с одной полуволной;

- с уменьшением параметра тонкостенности газопровода h/R частоты могут уменьшаться на 15 – 50% в зависимости от геометрических и механических характеристик. Так например при $k=1 \cdot 10^7$ Н/м; $p_0=2$ МПа; $P=0,05$; $L=10R$; $h/R=1/30$ частота $\omega_{21} = 71,45$ Гц, а при $h/R=1/50$ частота $\omega_{21} = 49,97$ Гц. Как видно частоты ω_{21} уменьшаются на 30,06%.

- с увеличением величины внутреннего рабочего давления p_0 частоты возрастают 30 – 70%, в зависимости от значений p_0 ;

- рост значений коэффициента постели грунта k от 0,1 до $3 \cdot 10^7$ Н/м³ приводит к увеличению минимальных частоты свободных колебаний (ω_{21}) на 14 – 48%, в зависимости от параметра длины участка L/R ;

- продольная сжимающая силы оказывает большое влияние на частоты свободных колебаний наземных трубопроводов. Увеличение величины параметра продольной сжимающей силы приводит к резкому уменьшению частот ω_{21} .

4. Используя критерий динамической устойчивости, получено и исследовано выражения по определению параметра критической продольной сжимающей силы, приводящей к потере статической устойчивости газопроводов.

5. Определен критерий применимости теории цилиндрических оболочек и стержневой теории для определения наименьших частот свободных колебаний наземных газопроводов в виде параметра длины l^* . В случае, если расчетная длина $l=L/R$ газопроводов меньше l^* ($l < l^*$), наименьшие частоты следует определять с позиции теории цилиндрических оболочек при $m=2$, по формуле (2.35), а для случая когда $l^* > l$ частоты следует определять при $m=1$, что соответствует стержневой теории.

3 СВОБОДНЫЕ КОЛЕБАНИЯ МАГИСТРАЛЬНЫХ ТОНКОСТЕННЫХ НЕФТЕПРОВОДОВ БОЛЬШОГО ДИАМЕТРА С ПОТОКОМ НЕФТИ ПРИ НАЗЕМНОЙ ПРОКЛАДКЕ

3.1 Уравнение движения нефтепровода с учетом стационарного внутреннего рабочего давления, параметра продольной сжимающей силы, протекающей жидкости, и упругого основания грунта

Расчет частот свободных колебаний трубопроводов с протекающей жидкостью принято определять по формуле В.И. Феодосьевым [107]:

$$\omega_n = \frac{n^2 \pi^2}{l^2} \sqrt{\frac{EI}{m + m_0} \left(1 - \frac{V^2 l^2 m_0}{n^2 \pi^2 EI}\right)} \quad (3.1)$$

где m и m_0 – погонные массы трубы и жидкости; EJ – изгибная жесткость трубопровода; L – длина трубопровода; V – скорость потока жидкости.

Анализ представленной формулы показывает, что присоединенная масса жидкости и квадрат скорости протекающей жидкости V^2 уменьшают частоты свободных колебаний нефтепровода. Предложенное решение было получено для толстостенных трубопроводов $h/R > 1/20$ представляющих собой фактически стержни, с недеформируемым контуром поперечного сечения. Однако с применением в строительстве современных тонкостенных труб большого диаметра, расчет по этой формуле может давать существенные погрешности, и не соответствовать реальным эксплуатационным значениям.

Решение полученное В.П. Ильиным, В.Г. Соколовым [51] на основе геометрически нелинейной теории цилиндрических оболочек и теории потенциального течения жидкости наиболее точно описывает работу надземных тонкостенных трубопроводов большого диаметра, а А.А. Ефимовым, В.Г. Соколовым [40; 42, 43] глубоководного нефтепровода. Полученные решения учитывают влияние внутреннего рабочего давления, геометрических

характеристик, а так же позволяют учесть деформацию (сплющивание) поперечного сечения.

Для изучения влияния механических и геометрических характеристик наземных нефтепроводов в качестве расчетной схемы принята однородная изотропная цилиндрическая оболочка конечной длины. В расчетной схеме для нефтепровода, в отличие от газопровода дополнительно учтено влияние скорости потока протекающей жидкости V (рисунок 3.1)

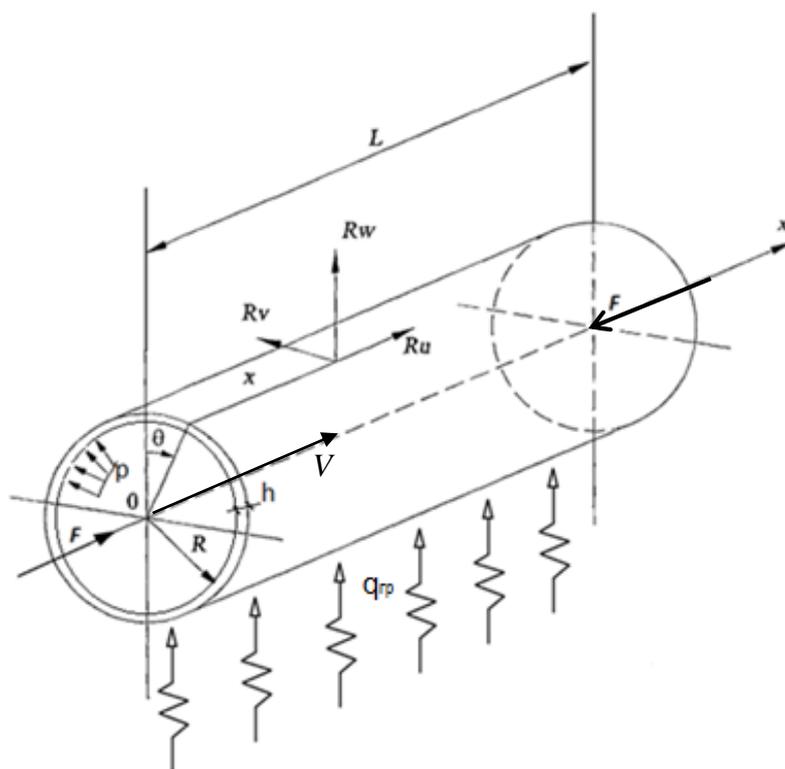


Рисунок 3.1 – Расчетная схема участка нефтепровода в цилиндрических координатах.

На основании теории потенциального течения идеальной несжимаемой жидкости, решение, полученное А.С. Вольмиром [25], М.А. Ильгамовым [46], для учета гидродинамического давления на стенку оболочки, создаваемого потоком жидкости, протекающей в оболочке со скоростью V имеет вид:

$$q_{жс} = \rho_0 \Phi_{mn} \left(R^2 \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} + V^2 \frac{\partial^2 w}{\partial \xi^2} \right) \quad (3.2)$$

С размерностью [МПа] или [кН/см²].

Полагая, что $\rho_0\Phi_{mn}$ присоединенная масса жидкости [25; 46], можно произведения этой массы на выражение в скобках (3.2) рассматривать как инерционные силы оболочки с жидкостью при колебаниях. Первое слагаемое в скобках, умноженное на $\rho_0\Phi_{mn}$, представляет собой нормальную силу инерции, второе слагаемое – центробежную силу инерции.

Для решения задачи о свободных колебаниях наземных тонкостенных нефтепроводов большого диаметра, с учетом влияния упругого основания грунта, внутреннего рабочего давления, параметра продольной сжимающей силы, воспользуемся дифференциальным уравнением движения в усилиях (2.23), полученным в параграфе 2.5. Для учета воздействия стационарного потока жидкости на стенку трубы необходимо нормальную составляющую сил инерции X_3 , действующую на элемент срединной поверхности, дополнить гидродинамическим давлением $q_{ж}$ (3.2):

$$X_3 = -Rh\rho \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} - \rho_0\Phi_{mn} \left(R^2 \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} + V^2 \frac{\partial^2 w}{\partial \xi^2} \right) + p_0 - \Psi(\theta)w(\xi, \theta, t) \quad (3.3)$$

Дифференциальное уравнение движения нефтепровода в перемещениях, с учетом допущений полубезмоментной теории оболочек (2.17) – (2.20), после преобразований имеет вид:

$$\begin{aligned} & \frac{\partial^3 u}{\partial \xi^3} + h_v^2 \cdot \frac{\partial^3}{\partial \theta^3} \left(g_2 + \frac{\partial^2 g_2}{\partial t^2} \right) + 2 \frac{\partial^2}{\partial \theta^2} \left(\frac{\partial^2 w}{\partial \xi^2} \cdot \varepsilon_0 \right) - \frac{R}{Eh} p_0 \frac{\partial^3 g_2}{\partial \theta^3} + \frac{R}{Eh} \frac{\partial^2}{\partial \theta^2} [\Psi(\theta)w(\xi, \theta, t)] - \\ & - \frac{R^2 \rho}{E} \left(\frac{\partial^3 u}{\partial \xi \partial t^2} - \frac{\partial^2 v}{\partial \theta \partial t^2} - \frac{\partial^4 w}{\partial \theta^2 \partial t^2} \right) + \rho_0\Phi_{mn} \frac{R}{Eh} \left(R^2 \frac{\partial^2 w}{\partial \theta^2 \partial t^2} + V^2 \frac{\partial^4 w}{\partial \theta^2 \partial \xi^2} \right) = 0 \end{aligned} \quad (3.4)$$

Полученное уравнение содержит четыре неизвестные функции координат и времени t : u, v, w и g_2 . Дополним уравнение (3.4) допущениями полубезмоментной теории оболочек (2.15) – (2.17) и решим эту систему методом разделения переменных, методом Фурье. Компоненты перемещений u, v, w , и g_2 представлены в параграфе 2.6 формулами (2.27), (2,28):

$$\begin{aligned}
w &= \sum_m \sum_n f(t) \sin(\lambda_n \xi) \cos(m\theta), \\
u &= -\sum_m \sum_n \frac{\lambda_n}{m^2} f(t) \cos(\lambda_n \xi) \cos(m\theta), \\
v &= -\sum_m \sum_n \frac{1}{m} f(t) \sin(\lambda_n \xi) \sin(m\theta), \\
g_2 &= -\sum_m \sum_n \frac{m^2 - 1}{m} f(t) \sin(\lambda_n \xi) \sin(m\theta).
\end{aligned}$$

где ω_{mn} – круговая частота свободных изгибных колебаний оболочки по формам $m, n=1, 2, 3, \dots$

Вычислим производные дополненного слагаемого, учтенного в уравнении движения (3.4):

$$\begin{aligned}
\frac{\partial^4 w}{\partial \theta^2 \partial t^2} &= -\sum_m \sum_n m^2 f''(t) \sin \lambda_n \xi \cos m\theta, \\
\frac{\partial^4 w}{\partial \theta^2 \partial \xi^2} &= \sum_m \sum_n \lambda_n^2 m^2 f(t) \sin \lambda_n \xi \cos m\theta.
\end{aligned} \tag{3.5}$$

Подставляя (2.30) и (3.5) в уравнение (3.4) и приравнявая коэффициенты при одинаковых тригонометрических функциях, получим разделяющуюся систему уравнений:

$$\begin{aligned}
&[\lambda_n^4 + m^4(m^2 - 1)(m^2 - 1 + p^*) + k^* m^4 - \lambda_n^4 m^4 P/n^2] f(t) + \\
&[\rho^* R h(\lambda_n^4 h_v + m^2 + m^4) + \rho_0^* \Phi_{mn} R^2 m^4] f''(t) = 0,
\end{aligned} \tag{3.6}$$

где $p^* = p \frac{R}{E h h_v^2}$, $\rho^* = \rho \frac{R}{E h h_v^2}$, $\varepsilon_0^* = \frac{F}{E A h_v^2}$, $\rho_0^* = \rho_0 \frac{R}{E h h_v^2}$, $k^* = \frac{k R^2}{E h h_v^2} z_m$.

Преобразуем систему (3.6) с учетом $f(t) = \sin \omega_{mn} t$, $f''(t) = -\omega_{mn}^2 \sin \omega_{mn} t$ получим:

$$\begin{aligned}
&\lambda_n^4 + m^4(m^2 - 1)(m^2 - 1 + p^*) + k^* m^4 - \lambda_n^4 m^4 P/n^2 - \lambda_n^2 \rho_0^* \Phi_{mn} V^2 m^4 h_v - \\
&-(\rho^* R \cdot h(\lambda_n^2 h_v + m^2 + m^4) - \rho_0^* \Phi_{mn} R^2 m^4) \omega_{mn}^2 = 0.
\end{aligned} \tag{3.7}$$

После преобразований (3.7) получим аналитическое выражение по определению квадрата частоты ω_{mn}^2 свободных изгибных колебаний участка нефтепровода при наземной прокладке:

$$\omega_{mn}^2 = \frac{\tilde{\lambda}_n^4 + m^4(m^2 - 1)(m^2 - 1 + p^*) + k^* m^4 - \tilde{\lambda}_n^4 m^4 P - \tilde{\lambda}_n^2 \rho_0^* \Phi_{mn} V^2 m^4 h_v}{\rho^* R \cdot h(\tilde{\lambda}_n^2 h_v + m^2 + m^4) + \rho_0^* \Phi_{mn} R^2 m^4}, \quad (3.8)$$

где $\tilde{\lambda}_n = \frac{n\pi R}{L\sqrt{h_v}}$, $P = \frac{F}{F_0}$ – параметр продольной сжимающей силы, $F_0 = \frac{\pi^2 EI}{L^2}$ –

Эйлеровая сила.

Полученное выражение (3.8) позволяет учесть влияние упругого основания грунта, геометрических характеристик, внутреннего рабочего давления p_0 , параметра продольной сжимающей силы P , скорости потока жидкости V , на частоты свободных колебаний, при различных значениях волновых чисел m, n .

Для определения значений частот ω_{mn} необходимо определить параметр функции Бесселя Φ_{mn} и её производную, определяемых формулой (3.9). Для нахождения значений применим методику предложенную [103]:

а) модифицированные функции Бесселя 1–го порядка m от действия аргумента

$$\lambda_n = \frac{n\pi R}{L} :$$

$$I_m(\lambda_n) = \left(\frac{\lambda_n}{2}\right)^m \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\left(\frac{\lambda_n}{2}\right)^{2z}}{z! \Gamma(m+z+1)}, \quad (3.9)$$

где m – порядок функции Бесселя (волновое число), определяемый формой колебаний оболочки ($m=1, 2, 3 \dots$);

б) гамма–функция $\Gamma(m+z+1)$, частные значения которой определяются выражением [114]:

$$\Gamma(n) = (n-1)! = 1 \cdot 2 \dots (n-1), \quad n=3, 4, 5 \dots \quad (3.10)$$

$$\text{т.е. } \Gamma(n) = (n-1)! = 1 \cdot 2 \dots (n-1), \quad n=3, 4, 5 \dots, \quad (3.11)$$

где $\Gamma(1)=1$, $\Gamma(2)=1$, $\Gamma(3)=2!=2$ и т.д.;

в) производные функции Бесселя, вычисляемые по формуле

$$I_m'(\lambda_n) = \frac{1}{2} (I_{m-1}(\lambda_n) + I_{m+1}(\lambda_n)). \quad (3.12)$$

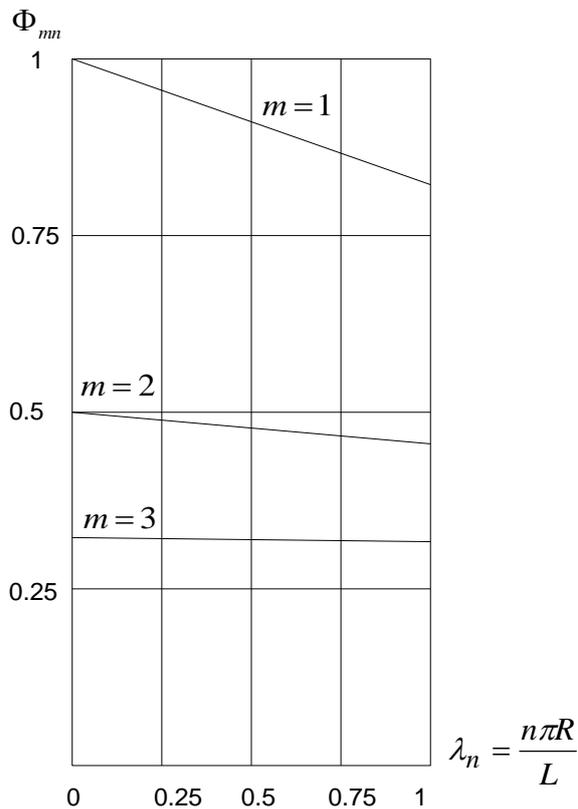


Рисунок 3.2 – Графики функции $\Phi_{mn}(\lambda_n)$.

На рисунке 3.2 по формулам (3.9) – (3.12) иллюстрированы графики функции $\Phi_{mn}(\lambda_n) = \frac{I_m(\lambda_n)}{\lambda_n I_m'(\lambda_n)}$ построенные при значениях волновых чисел $m=1,2,3$, и в диапазоне λ_n от 0 до 1,0, данная методика обеспечивает определение частот свободных колебаний участка наземного нефтепровода по формуле (3.8) по первым трем наиболее важным формам колебаний.

3.2 Влияния упругого основания грунта на частоты свободных колебаний участка наземного нефтепровода с протекающей жидкостью

Анализ влияния геометрических характеристик, внутреннего рабочего давления, параметра продольной сжимающей силы, упругого основания грунта, и скорости потока нефти показал, что влияние скорости потока нефти на частоты свободных колебаний мало по сравнению с другими выше указанными параметрами, вклад пятого слагаемого в числителе формулы (3.8) менее 1%. Из формулы (3.8) видно, что присоединенная масса жидкости

(выраженная во втором слагаемом знаменателя формулы), и параметр продольной силы обжатия P , снижают частоты свободных колебаний нефтепровода. Анализ формулы (3.8) так же показал, что минимальные частоты реализуются при $m=2$ и $n=1$, что соответствует оболочечным формам колебаний. Далее было исследовано влияние параметра тонкостенности трубы, и упругого основания грунта на частоты свободных колебаний нефтепровода. Результаты вычислений по формуле (3.8) полученные для $V=3\text{ м/с}$; $P=0,02$, $L/R=10$; $p_0=2\text{ МПа}$, и удельном весе нефти $\gamma=8\text{ кН/м}^3$ при $m=2$, $n=1$, при различных соотношениях параметров h/R ($1/30; 1/40; 1/50$) и коэффициента постели грунта k от ($0,1$ до $3 \cdot 10^7\text{ Н/м}^3$), приведены в таблице 3.1 и в виде графиков на рисунке 3.3 иллюстрирующих изменения минимальных частот свободных колебаний ω_{21} (Гц). Анализ полученных результатов показывает, что при увеличении значений коэффициента постели k , для различных отношений h/R наблюдается увеличение частот. Так например при $h/R=1/30$ частоты увеличиваются на 8,6%, при $h/R=1/40$ на 18,1%, а при $h/R=1/50$ на 20,96%.

Далее было выявлено, что частоты увеличиваются не только от действия упругого основания грунта, но и в результате действия внутреннего рабочего давления. Согласно значениям таблицы 3.2 и графикам на рисунке 3.4 было выявлено, что при увеличении внутреннего рабочего давления p_0 от 2 МПа до 4 МПа частоты увеличиваются на 17,1%, от 4 МПа до 8 МПа на 21,5%, при $k=1 \cdot 10^7\text{ Н/м}^3$, $P=0,02$, $L/R=10$, $V=3\text{ м/сек}$. Из полученных результатов видно, чем больше жесткость участка трубопровода, обусловленная высоким внутренним давлением, тем меньше упругое основание оказывает влияние на увеличение значений частот свободных колебаний. Следовательно, влияние упругого основания грунта больше всего сказывается на нефтепроводах низкого давления.

Таблица 3.1 – Зависимость частот свободных изгибных колебаний ω_{21} (Гц) наземных нефтепроводов от коэффициента постели грунта k и параметра тонкостенности трубы h/R , при значениях волновых числах $m=1,2$.

$k \cdot 10^7 \text{ Н/м}^3$	$n=1; p_0=2 \text{ МПа}; P=0,02; L/R=10; V=3 \text{ м/сек}$					
	$h/R=1/50$		$h/R=1/40$		$h/R=1/30$	
	$m=1$	$m=2$	$m=1$	$m=2$	$m=1$	$m=2$
0,1	41,19	27,54	51,69	33,33	93,84	59,86
0,3	41,25	28,54	51,76	34,32	93,93	60,59
0,5	41,31	29,31	51,81	35,07	94,00	61,16
1,0	41,41	30,81	51,91	36,54	94,14	62,33
2,0	41,58	33,05	52,07	38,85	94,37	64,15
3,0	41,72	34,82	52,21	40,66	94,56	65,64

Таблица 3.2 – Зависимость частот свободных изгибных колебаний ω_{21} (Гц) наземных нефтепровода от коэффициента постели грунта k , и внутреннего рабочего давления p_0 , при различных волновых числах $m=1,2\dots$

$k \cdot 10^7 \text{ Н/м}^3$	$n=1; h/R=1/40; P=0,02; L/R=10; V=3 \text{ м/сек}$								
	$p_0=2 \text{ МПа}$			$p_0=4 \text{ МПа}$			$p_0=8 \text{ МПа}$		
	$m=1$	$m=2$	$m=3$	$m=1$	$m=2$	$m=3$	$m=1$	$m=2$	$m=3$
0,1	51,69	33,33	68,07	51,69	41,44	82,47	51,69	54,12	105,55
0,3	51,09	34,31	69,32	51,76	42,23	83,51	51,76	54,73	106,36
0,5	51,81	35,07	70,27	51,81	42,85	84,39	51,81	55,22	106,98
1,0	51,91	36,57	72,17	51,92	44,09	85,89	51,92	56,18	108,24
2,0	52,07	38,85	75,07	52,07	45,99	88,34	52,07	57,68	110,19
3,0	52,22	40,65	77,42	52,21	47,53	90,35	52,21	58,92	111,81

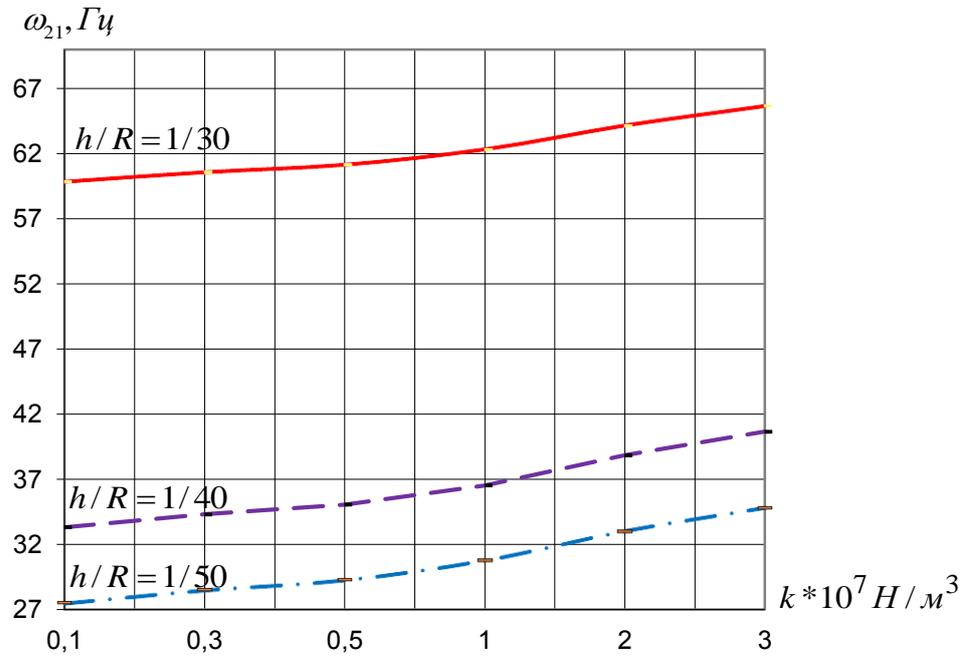


Рисунок 3.3 – Зависимость частот свободных колебаний от параметра тонкостенности нефтепровода h/R и коэффициента постели грунта, при заданных параметрах $h/R=1/30; 1/40; 1/50; P=0,02; L=10R; p_0=2\text{МПа}; V=3 \text{ м/сек}$.

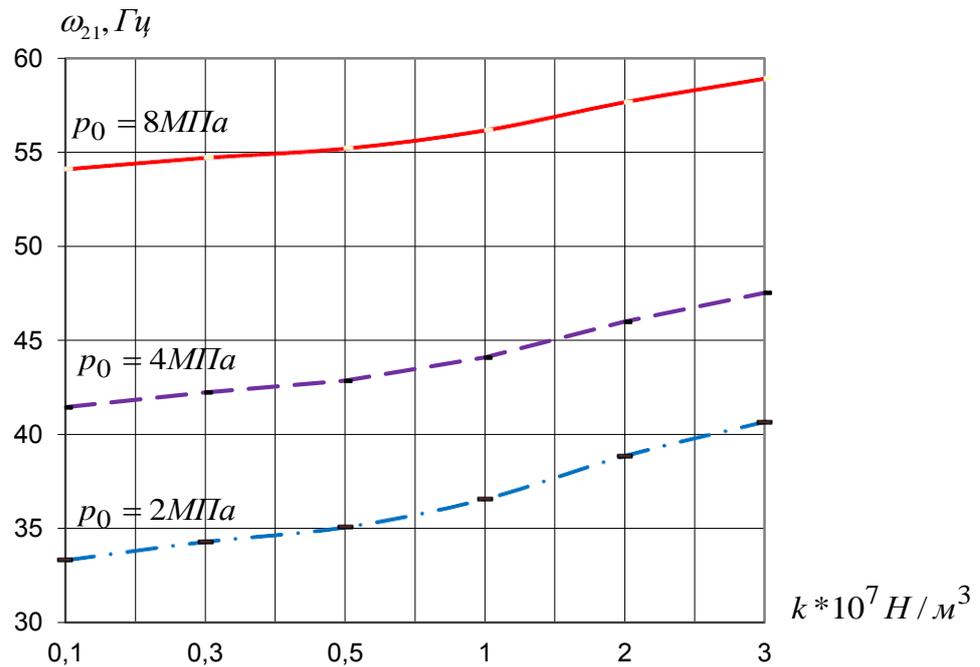


Рисунок 3.4 – Зависимость частот свободных колебаний от внутреннего рабочего давления p_0 и коэффициента постели грунта, при заданных параметрах $h/R=1/40; P=0,02; L=10R; V=3 \text{ м/сек}$.

3.3 Колебания и статическая устойчивость наземных нефтепроводов

Полученное решение (3.8) позволяет исследовать изменение частот свободных колебаний участка нефтепровода от внутреннего рабочего давления p_0 , параметра продольной сжимающей силы P , упругого основания грунта, скорости потока жидкости V , и геометрических характеристик. В рамках данного параграфа было исследовано влияние параметра продольной сжимающей силы наземного нефтепровода на частоты свободных колебаний. Результаты расчета по формуле (3.8) сведены в таблицы 3.3 – 3.6 и иллюстрированы в виде графиков на рисунках 3.5 – 3.8. Анализ полученных результатов показал, что с увеличением величины параметра продольной сжимающей силы, частоты резко уменьшаются, и могут обращаться в ноль, используя это свойство, или критерий динамической устойчивости из формулы (3.8) определим выражение для определения параметра критической продольной сжимающей силы:

$$P_{кр} = \frac{\tilde{\lambda}_n^4 + m^4(m^2 - 1)(m^2 - 1 + p^*) + k^* m^4 - \tilde{\lambda}_n^2 \rho_{жс}^* \Phi_{mn} V^2 m^4 h_v}{\lambda_n^4 m^4} n^2. \quad (3.13)$$

Формула (3.13) позволяет определить величину параметра критической продольной сжимающей силы $P_{кр}$, или величину критической продольной сжимающей силы $F_{кр}$. Например, при значении внутреннего рабочего давления $p_0 = 2$ МПа, получим $P_{кр} = 0,297$, отсюда $F_{кр} = 0,297 F_0$. Далее анализ показал, что в трубопроводах с внутренним рабочим давлением 8 МПа значения собственных частот и параметра критической продольной сжимающей силы $P_{кр}$ выше, чем в трубопроводах низкого давления.

Дальнейшее исследование было направлено на изучение влияние коэффициента постели грунта на величину параметра критической продольной сжимающей силы полученные результаты сведены в таблицу 3.4 и иллюстрированы в виде графиков на рисунке 3.6. Анализ полученных значений показал, что упругое основание грунта не только увеличивает частоты свободных колебаний, но и увеличивает значение параметра критической продольной

сжимающей силы, так например при $L=10R$; $h/R=1/40$; $p_0=2\text{МПа}$; $V=3\text{ м/сек}$ и $k=3,0*10^7\text{Н/м}^3$, величина $P_{кр}$ на 31,66% больше чем при $k=0,1$, а при $k=1*10^7\text{Н/м}^3$ на 10,67% больше чем при $k=0,1*10^7\text{Н/м}^3$.

Таблица 3.3 – Зависимость частот свободных колебаний ω_{21} от значений внутреннего рабочего давления и параметра продольной сжимающей силы P .

$n=1; k=1*10^7\text{ Н/м}^3; h/R=1/40; L/R=10; V=3\text{м/сек};$									
P	$p_0=2\text{ МПа}$			$p_0=4\text{ МПа}$			$p_0=8\text{ МПа}$		
	$m=1$	$m=2$	$m=3$	$m=1$	$m=2$	$m=3$	$m=1$	$m=2$	$m=3$
0	52,43	37,87	73,06	52,43	45,18	86,65	52,43	57,04	108,83
0,05	51,12	34,54	70,81	51,12	42,42	84,75	51,12	54,88	107,34
0,10	49,72	30,85	68,48	49,77	39,47	82,82	49,77	52,63	105,82
0,15	48,38	26,54	66,08	48,39	36,28	80,84	48,39	50,29	104,27
0,20	46,95	21,65	63,58	46,96	32,78	78,81	46,96	47,82	102,71
0,25	45,49	15,07	60,98	45,49	28,87	76,73	45,49	45,23	101,12
0,30	43,97	–	58,26	43,97	24,33	74,59	43,97	42,47	99,50
0,35	42,39	–	55,41	42,39	18,71	72,38	42,39	39,53	97,86
0,40	40,75	–	52,41	40,75	10,43	70,11	40,75	36,35	96,19

Таблица 3.4 – Зависимость частоты свободных колебаний ω_{21} от коэффициента постели грунта и параметра продольной сжимающей силы P .

$n=1; p=2\text{ МПа}; h/R=1/40; L/R=10; V=3\text{м/сек};$									
P	$k=0,1*10^7\text{ Н/м}^3$			$k=1*10^7\text{ Н/м}^3$			$k=3*10^7\text{ Н/м}^3$		
	$m=1$	$m=2$	$m=3$	$m=1$	$m=2$	$m=3$	$m=1$	$m=2$	$m=3$
0	52,31	34,48	68,23	52,43	37,87	73,07	52,73	41,83	78,26
0,05	50,99	30,78	68,81	51,12	34,54	70,80	51,42	38,84	76,16
0,10	49,64	26,57	63,29	49,77	30,85	68,48	50,08	35,59	74,01
0,15	48,25	21,55	60,68	48,38	26,64	66,08	48,71	32,02	71,78
0,20	46,82	14,93	57,95	46,95	21,65	63,58	47,28	27,99	69,48
0,25	45,34	0,21	55,25	45,48	15,07	60,97	45,82	23,28	67,11
0,30	43,71	–	53,09	43,96	–	58,26	44,31	17,34	64,65
0,35	42,12	–	49,95	42,38	–	55,41	42,75	7,68	62,11
0,40	40,47	–	46,59	40,75	–	52,41	41,13	–	59,44

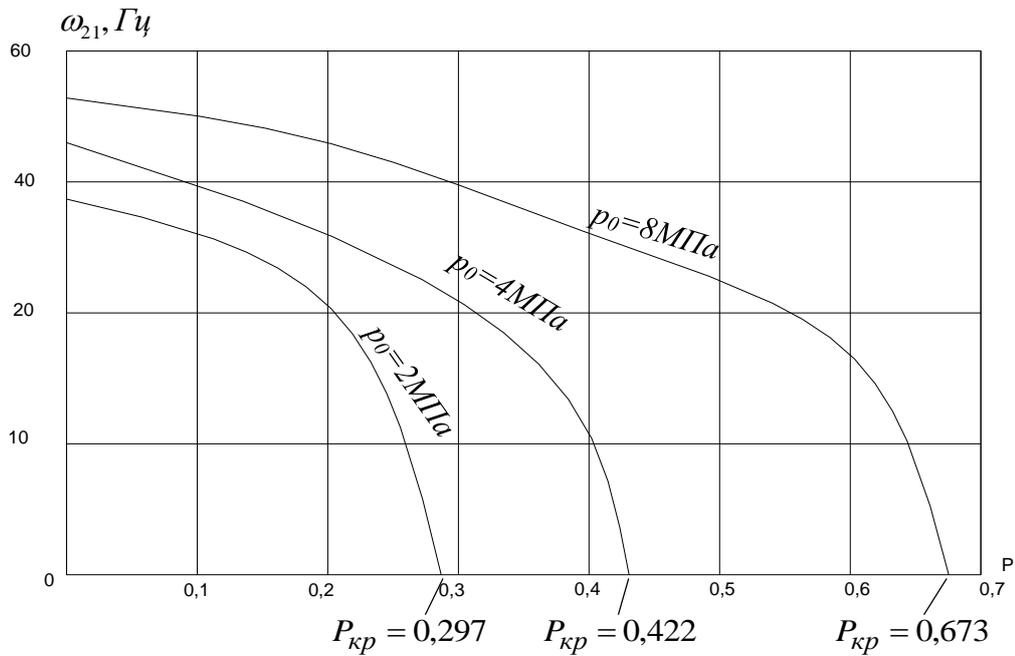


Рисунок 3.5 – Зависимость частоты свободных колебаний наземного нефтепровода от параметра сжимающей продольной силы P , при различных значениях внутреннего рабочего давления, при $L=10R$; $V=3 \text{ м/сек}$; $k=1,0 \cdot 10^7 \text{ Н/м}^3$; $h/R=1/40$.

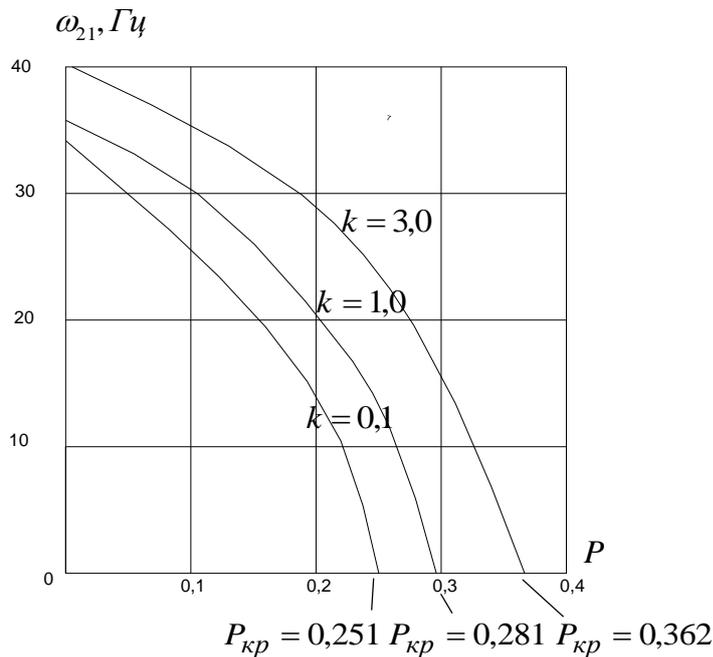


Рисунок 3.6 – Зависимость частоты свободных колебаний наземного нефтепровода от параметра сжимающей продольной силы P при различных значениях коэффициента постели k при $L=10R$; $p_0=2 \text{ МПа}$; $h/R=1/40$; $V=3 \text{ м/сек}$.

Для изучения влияния упругого основания грунта на наименьшие частоты свободных колебаний нефтепровода при значениях внутреннего рабочего давления

$p_0=2$ МПа и 4 МПа сравним частоты определяемые по формулам (2.35) и (3.8). Полученные результаты исследования сведены в таблицу 3.5 и представлены в виде графиков на рисунке 3.7.

Таблица 3.5 – Зависимость частот свободных изгибных колебаний ω_{mn} наземных газо- и нефтепроводов от значений внутреннего рабочего давления p_0 и коэффициента постели грунта k , при волновых числах $m=1,2$.

$k * 10^7 \text{ Н / м}^3$	$n=1; P=0,02; L/R=10; V= 3\text{м/сек}; h/R=1/40.$							
	$p_0=2\text{МПа}$				$p_0=4\text{МПа}$			
	Газопровод		Нефтепровод		Газопровод		Нефтепровод	
	$m=1$	$m=2$	$m=1$	$m=2$	$m=1$	$m=2$	$m=1$	$m=2$
0,1	88,85	55,25	51,70	33,33	88,85	68,83	51,70	41,44
0,3	88,94	56,32	51,76	34,32	88,94	69,70	51,76	42,24
0,5	89,01	57,14	51,81	35,07	89,01	70,36	51,81	42,86
1,0	89,14	58,78	51,91	36,57	89,14	71,70	51,91	44,09
2,0	89,36	61,29	52,07	38,84	89,36	73,78	52,07	45,99
3,0	89,54	63,33	52,21	40,66	89,54	75,48	52,21	47,53

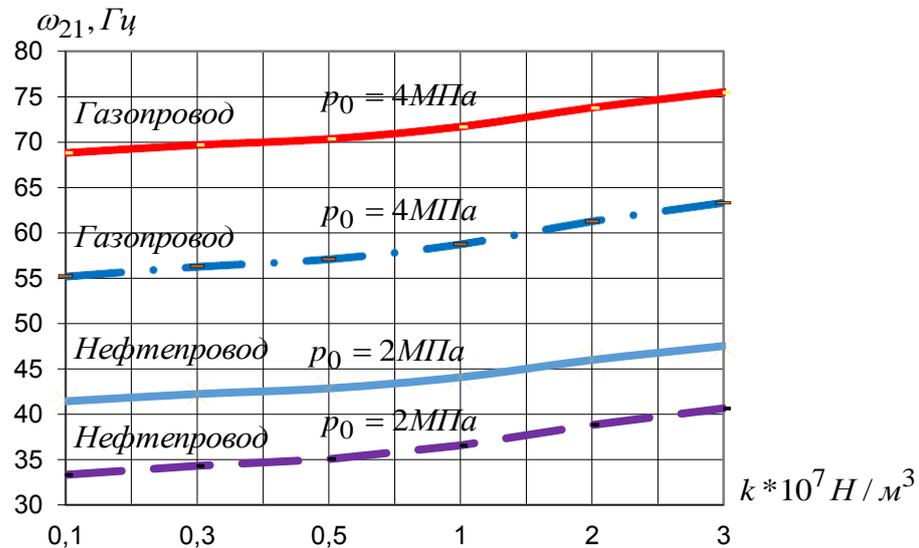


Рисунок 3.7 – Зависимость частот свободных изгибных колебаний ω_{21} наземных газо- и нефтепроводов от значений коэффициента постели грунта k и внутреннего рабочего давления при $p_0=2$ МПа и $p_0=4$ МПа.

Анализ полученных значений показал, что с ростом значений коэффициента постели грунта частоты увеличиваются, как в случае с газопроводом так и с нефтепроводом. Следует отметить, что частоты определяемые для нефтепровода на 37 – 41% ниже чем для газопровода. Такой эффект объясняется влиянием присоединенной массы жидкости в нефтепроводе учтенной во втором слагаемом знаменателя формулы (3.8).

3.4 Критерий применимости теории цилиндрических оболочек и стержневой теории для наземных нефтепроводов

Для определения параметра длины участка нефтепровода l^* воспользуемся методикой предложенной в параграфе 2.8 исходя из которой для получения формулы l^* приравняем правые части формулы (3.8) при $m=1$ и $m=2$, пренебрегая при этом слагаемым $\lambda_n^2 h_v$. В результате анализа значений частот полученных по формуле (3.8) было выявлено, что скорость потока жидкости мало влияет (менее 1%) на частоты свободных колебаний нефтепроводов, причина в том, что скорость потока транспортируемой жидкости в магистральных нефтепроводах не превышает 3 – 5 м/сек. Поэтому для упрощения дальнейших выкладок примем $V=0$:

$$\frac{\tilde{\lambda}_1^4 + k^* - \lambda_1^4 P}{2\rho^* Rh + \rho_0^* \Phi_{11} R^2} = \frac{\tilde{\lambda}_1^4 + 48(3 + p^*) + 16k^* - 16\tilde{\lambda}_1^4 P}{20\rho^* Rh + 16\rho_0^* \Phi_{21} R^2}$$

где $\tilde{\lambda}_1 = \frac{\pi R}{L\sqrt{h_v}}$ выразим из выражения (3.8) L^*/R и обозначим l^* , в результате

получим:

$$l^* = \frac{L^*}{R} = \frac{\pi}{\sqrt{h_v}} \sqrt[4]{\frac{\alpha - P\alpha - \beta + 16P\beta}{k^*(16\beta - \alpha) + 48(3 + p^*)\beta}} \quad (3.14)$$

где $\alpha = 20\rho^* Rh + 16\rho_0^* \Phi_{21} R^2$, $\beta = 2\rho^* Rh + \rho_0^* \Phi_{11} R^2$, $L/R = l$

Выражение (3.14) для определения параметра длины l^* является критерием применимости теории оболочек и стержневой теории для определения наименьших частот свободных колебаний.

Для анализа полученной формулы произведем расчет по формуле (3.8) при $m=1$ и $m=2$. Результаты расчета сведены в таблицу 3.6 и иллюстрированы в виде графиков на рисунках 3.8 – 3.11, из которых следует, что при длине участка наземного нефтепровода больше l^* , т.е. $l \geq l^*$ минимальные частоты свободных колебаний следует определять по первой форме колебаний при $m=1$, а в случае $l \leq l^*$ частоты следует определять по теории цилиндрических оболочек при $m=2$, т.е. по формуле (3.8).

Параметр длины l^* учитывает относительную толщину трубы h/R , коэффициент постели k , внутреннее рабочее давление p_0 , и параметр продольной сжимающей силы P .

Анализ полученных значений показал, что с увеличением величины коэффициента постели грунта и значений внутреннего рабочего давления, величина l^* уменьшается в сторону снижения величины параметра L/R .

Таблица 3.6 – Зависимость частоты свободных колебаний наземного участка нефтепровода с потоком жидкости, от значений волновых чисел $m=1,2$, коэффициента постели грунта, внутреннего рабочего давления и параметра длины L/R .

L/R	$n=1; h/R=1/50; P=0,02; L/R=10; V=3 \text{ м/сек}$							
	$p_0=2 \text{ МПа}$				$p_0=8 \text{ МПа}$			
	$k=0,4 \cdot 10^7 \text{ Н/м}$		$k=2 \cdot 10^7 \text{ Н/м}$		$k=0,4 \cdot 10^7 \text{ Н/м}$		$k=2 \cdot 10^7 \text{ Н/м}$	
	$m=1$	$m=2$	$m=1$	$m=2$	$m=1$	$m=2$	$m=1$	$m=2$
7	104,61	43,32	104,81	47,94	104,61	60,76	104,81	64,14
8	80,44	39,04	80,69	44,13	80,44	57,80	80,69	61,34
9	63,77	36,57	64,09	41,95	63,77	56,17	64,09	59,81
10	51,81	35,07	52,21	40,65	51,81	55,21	52,21	58,92
11	42,94	34,14	43,43	39,86	42,94	54,63	43,43	58,37
12	36,19	33,53	36,77	39,34	36,19	54,26	36,77	58,03
13	30,94	33,13	31,61	38,99	30,94	54,01	31,61	57,79
14	26,78	32,85	27,55	38,76	26,78	53,84	27,55	57,64
15	23,43	32,66	24,31	38,59	23,43	53,73	24,31	57,54

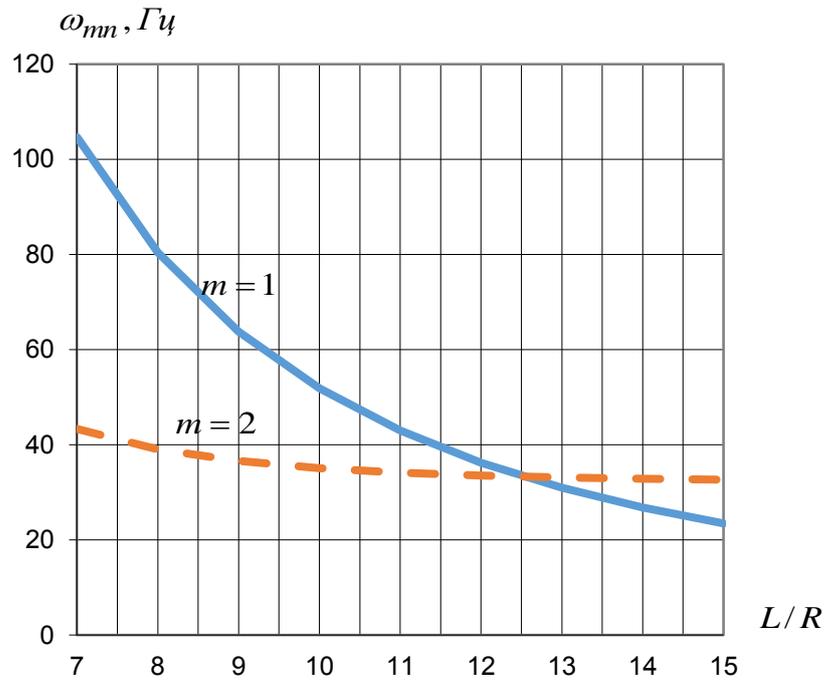


Рисунок 3.8 – Зависимость частоты свободных колебаний наземного участка нефтепровода с потоком жидкости, от значений волновых чисел $m=1,2$, коэффициента постели грунта, внутреннего рабочего давления и параметра длины L/R при $p_0=2 \text{ МПа}$, $k=0,4 \cdot 10^7 \text{ Н/м}^3$, $V=3 \text{ м/сек}$, $P=0,02$, $h/R=1/50$.

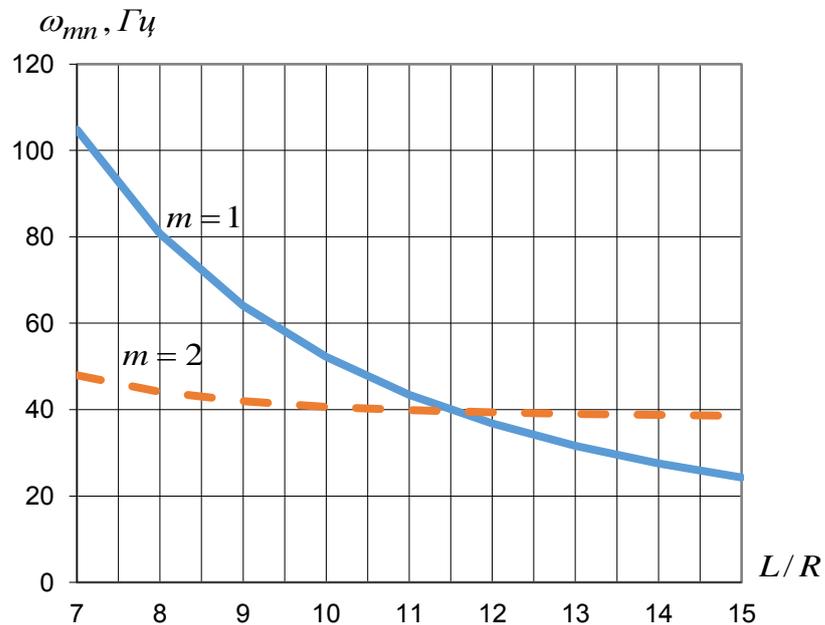


Рисунок 3.9 – Зависимость частоты свободных колебаний наземного участка нефтепровода с потоком жидкости, от значений волновых чисел $m=1,2$, коэффициента постели грунта, внутреннего рабочего давления и параметра длины L/R при $p_0=2 \text{ МПа}$, $k=2 \cdot 10^7 \text{ Н/м}^3$, $V=3 \text{ м/сек}$, $P=0,02$, $h/R=1/50$.

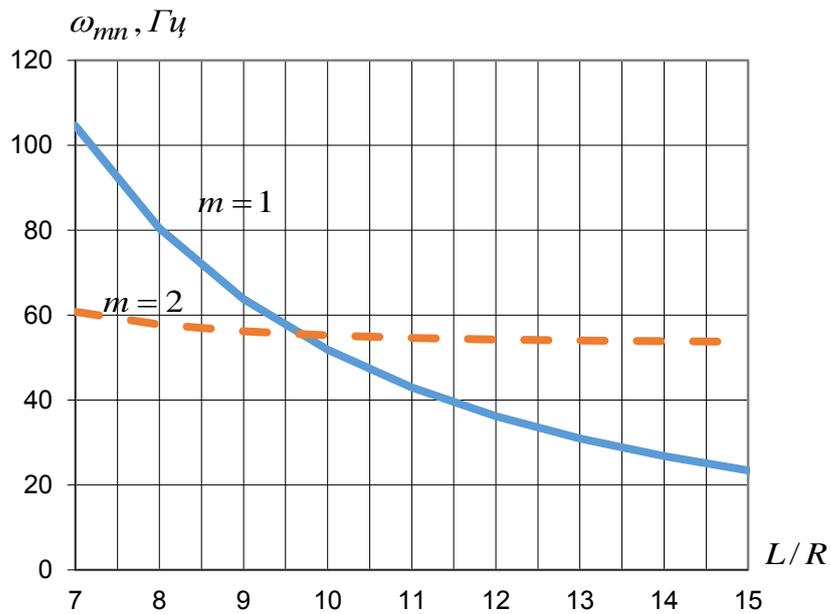


Рисунок 3.10 – Зависимость частоты свободных колебаний наземного участка нефтепровода с потоком жидкости, от значений волновых чисел $m=1,2$, коэффициента постели грунта, внутреннего рабочего давления и параметра длины L/R при $p_0=8$ МПа, $k=0,4 \cdot 10^7$ Н/м³, $V=3$ м/сек, $P=0,02$, $h/R=1/50$.

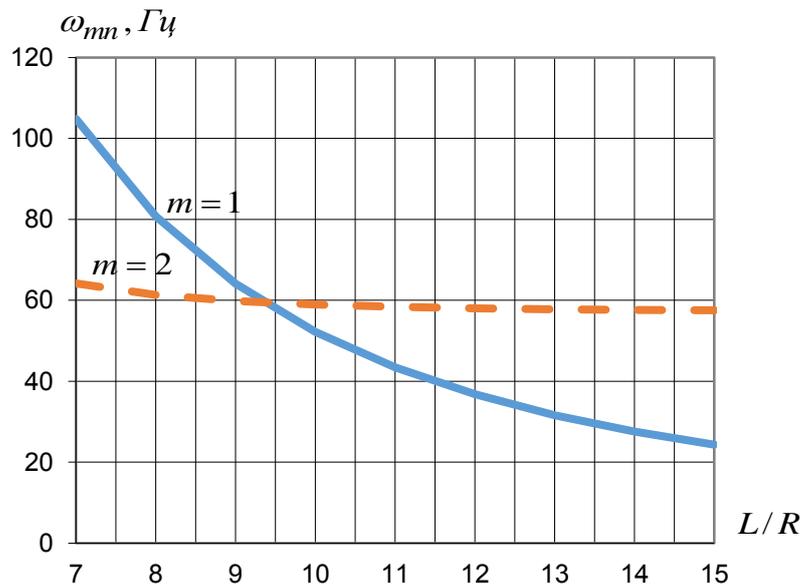


Рисунок 3.11 – Зависимость частоты свободных колебаний наземного участка нефтепровода с потоком жидкости, от значений волновых чисел $m=1,2$, коэффициента постели грунта, внутреннего рабочего давления и параметра длины L/R при $p_0=8$ МПа, $k=2,0 \cdot 10^7$ Н/м³, $V=3$ м/сек, $P=0,02$, $h/R=1/50$.

Выводы по главе 3

1. На основании геометрически нелинейном варианте полубезмоментной теории оболочек среднего изгиба и теории потенциального течения жидкости решена и исследована задача о свободных колебаниях наземных тонкостенных нефтепроводов большого диаметра с учетом влияния внутреннего рабочего давления, параметра продольной сжимающей силы, геометрических характеристик, а так же влияния упругого основания грунта и потока протекающей жидкости.

2. Анализ влияния механических и геометрических характеристик на частоты свободных колебаний нефтепроводов показал:

– наименьшие частоты свободных колебаний газопроводов реализуются при волновых числах $m=2$ и $n=1$, что соответствует оболочечным формам колебания, учитывающих деформацию (овализацию) поперечного сечения, сопровождаемого изгибными колебаниями в продольном направлении, с одной полуволной;

– с уменьшением параметра h/R частоты уменьшаются. Так например, при $P=0,02$, $L/R=10$; $p_0=2$ МПа; $V=3$ м/сек; $k=1,0 \cdot 10^7$ Н/м³ и $h/R=1/30$ частота $\omega_{21} = 62,33$ Гц, а при $h/R=1/50$ и тех же вышеуказанных параметрах, частота $\omega_{21} = 30,81$ Гц;

– с увеличением внутреннего рабочего давления p_0 от 2 до 4 МПа частоты ω_{21} возрастают. Так например, при $P=0,02$; $L/R=10$; $V=3$ м/сек; $k=1,0 \cdot 10^7$ Н/м³; $h/R=1/40$ увеличение составляет 16%.

– с ростом значений коэффициента постели грунта k в нефтепроводах частоты увеличиваются. Так при $h/R=1/50$; $P=0,02$; $L/R=10$; $p_0=2$ МПа; $V=3$ м/сек; $k=0,1 \cdot 10^7$ Н/м³ частота $\omega_{21}=27,54$ Гц, а при $h/R=1/30$ и $k=3,0 \cdot 10^7$ Н/м³, $\omega_{21} = 34,82$ Гц. Увеличение составило 21%;

– рост значений параметра продольной сжимающей силы существенно уменьшает частоты свободных колебаний;

– частоты свободных колебаний наземных нефтепроводов на 30 – 50% ниже, чем в газопроводах. На уменьшение значений частот большое влияние оказывает присоединенная масса жидкости (нефти);

3. Получено выражение для определения параметра критической продольной сжимающей силы наземного тонкостенного нефтепровода большого диаметра, учитывающее совместное влияние упругого основания грунта, внутреннего рабочего давления, и скорости потока протекающей жидкости.

4. Определен критерий применимости теории цилиндрических оболочек и стержневой теории для определения наименьших частот свободных колебаний наземных нефтепроводов в виде параметра длины l^* .

4 ПАРАМЕТРИЧЕСКИЕ КОЛЕБАНИЯ И ДИНАМИЧЕСКАЯ УСТОЙЧИВОСТЬ МАГИСТРАЛЬНЫХ ТОНКОСТЕННЫХ ТРУБОПРОВОДОВ БОЛЬШОГО ДИАМЕТРА ПРИ НАЗЕМНОЙ ПРОКЛАДКЕ

4.1 Параметрические колебания и динамическая устойчивость наземных тонкостенных газопроводов большого диаметра

Как показывает практика, наземные газопроводы подвергаются различного рода динамическим воздействиям и вибрациям, вызванные работой компрессорных станций. Спектр колебаний трубопроводов разнообразен и представляет собой сложный комплекс взаимодействия собственных и вынужденных частот. Доказано, что при определенных соотношениях возмущающей частоты и собственной частоты прямолинейная форма трубопровода становится динамически неустойчивой, появляются поперечные колебания, амплитуда которых резко возрастает и достигает больших значений [10]. Соотношения, при которых наступает этот резонанс, называют параметрическим резонансом.

Магистральные трубопроводы при наземной прокладке подвергаются действию нестационарного внутреннего рабочего давления $p(t)$ которое изменяется во времени по закону:

$$p(t) = p_0(1 + \mu \cos \gamma t) \quad (4.1)$$

Нестационарное внутреннее рабочее давление приводит стационарную продольную сжимающую силу к переменной, то есть изменяющаяся во времени по закону $F(t)$:

$$F(t) = F_0(1 + \mu \cos \gamma t) \quad (4.2)$$

где γ – частоты возбуждения, определяемая технологией компрессорных станций;
 μ – параметр возбуждения, ограничивающий величину переменной составляющей

соответствующего воздействия (по данным [10] $\mu \leq 0,5$); p_0 – внутреннее рабочее давление; F_0 – продольная сжимающая сила.

Уравнение движения участка наземного газопровода с учетом упругого основания, параметра продольной сжимающей силы при стационарном рабочем давлении для имеет вид:

$$[\tilde{\lambda}_n^4 + m^4(m^2 - 1)(m^2 - 1) + p^* m^4(m^2 - 1) + k^* m^4 - \tilde{\lambda}_n^4 m^4 P]f(t) + \rho^* Rh[\tilde{\lambda}_n^2 h_v + m^2 + m^4]f''(t) = 0, \quad (4.3)$$

где $\tilde{\lambda}_n = \frac{n\pi R}{L\sqrt{h_v}}$; $f(t)$ и $f''(t)$ – функция времени и ее производная; $p^* = p_0 \frac{R}{Ehh_v^2}$ –

параметр внутреннего рабочего давления; p_0 – внутреннее рабочее давление;

$\rho^* = \rho \frac{R}{Ehh_v^2}$ – параметр плотности материала оболочки; ρ – плотность материала

оболочки; $k^* = \frac{kR^2}{\pi E h \frac{z_m}{h}}$ – параметр коэффициента постели; k – коэффициент

постели грунта в соответствии с моделью Фусса – Винклера; R – радиус срединной поверхности; h – толщина стенки трубы; $m, n = 1, 2, 3 \dots$ – волновые числа в окружном и продольном направлениях; $P = F_0 / F_s$ – параметр продольной сжимающей силы;

h_v – параметр относительной толщины оболочки; F_s – Эйлера сила;

$h_v = \frac{h}{R\sqrt{12(1 - \tilde{\nu}^2)}}$, где $\tilde{\nu}$ – коэффициент Пуассона.

Подставив (4.1), (4.2) в уравнение (4.3) получим разделяющуюся систему уравнений участка наземного трубопровода, подверженного нестационарному воздействию:

$$\left\{ \tilde{\lambda}_n^4 + m^4(m^2 - 1)(m^2 - 1 + p^*) + k^* m^4 - \tilde{\lambda}_n^4 m^4 P - \mu \cos \gamma t \cdot m^4 \lambda_n^4 [P - p^*(m^2 - 1) / \tilde{\lambda}_n^4] \right\} f(t) + \rho^* Rh[\tilde{\lambda}_n^2 h_v + m^2 + m^4]f''(t) = 0. \quad (4.4)$$

После преобразования (4.4) получаем разделяющуюся систему уравнений Матье:

$$f''(t) + \omega_{mn}^2(1 - \delta_{mn} \cos \gamma t)f(t) = 0, \quad (4.5)$$

где: квадрат частоты свободных колебаний по формуле (2.35) второй главы, имеет вид:

$$\omega_{mn}^2 = \frac{\tilde{\lambda}_n^4 + m^4(m^2 - 1)(m^2 - 1 + p^*) + k^*m^4 - \tilde{\lambda}_n^4 m^4 P/n^2}{\rho^* Rh[\tilde{\lambda}_n^2 h_\nu + m^2 + m^4]}.$$

Коэффициент возбуждения:

$$\delta_{mn} = \frac{[P - p^*(m^2 - 1)/\tilde{\lambda}_n^4] \cdot m^4 \tilde{\lambda}_n^4}{\tilde{\lambda}_n^4 + m^4(m^2 - 1 + p^*) + k^*m^4 - \tilde{\lambda}_n^4 m^4 P/n^2} \cdot \mu \quad (4.6)$$

Полученная система уравнений Матье позволяет исследовать динамическую устойчивость наземного газопровода при условии $P > p^*(m^2 - 1)/\tilde{\lambda}_n^4$ для различных значений волновых чисел $m, n = 1, 2, \dots$ при помощи построения областей динамической неустойчивости типа диаграмм Айнса – Стретта, которые определяются следующими соотношениями частот свободных колебаний ω_{mn} и частот возбуждения γ : $\omega_{mn} = \frac{\gamma}{2}i, i = 1, 2, 3 \dots$

Основная, наиболее широкая область, называется главной областью динамической неустойчивости, которая реализуется при коэффициенте $i = 1$, то есть при $\omega_{mn} = \gamma/2$. Второстепенные области неустойчивости при $i > 1$ имеет значительно меньшую ширину и обычно перекрываются главной областью. Решение уравнений Матье (4.5), для главной области динамической неустойчивости, представляет собой неравенство:

$$1 - \frac{\delta_{mn}}{2} < \left(\frac{2\omega_{mn}}{\gamma}\right)^2 < 1 + \frac{\delta_{mn}}{2} \quad (4.7)$$

Основанное на этом решение методика построения главных областей динамической неустойчивости для участков газопровода заключается в определении положения верхней и нижней границ этих областей. В соответствии с (4.7) имеем:

– верхняя границы, определенная равенством:

$$\gamma^2 = 4\omega_{mn}^2 \left(1 - \frac{\delta_{mn}}{2}\right)^{-1} \quad (4.8)$$

– нижняя граница:

$$\gamma^2 = 4\omega_{mn}^2 \left(1 + \frac{\delta_{mn}}{2}\right)^{-1} \quad (4.9)$$

Согласно вышеуказанной методике построены области динамической неустойчивости в виде модифицированных диаграмм Айнса – Стретта для различных соотношения тонкостенности труб h/R . Области динамической неустойчивости построены для стальных труб 1020x25мм ($h/R=1/20$), 720x11мм ($h/R=1/33$), 1420x18 ($h/R=1/40$), и 1420x14мм ($h/R=1/50$). Для расчета приняты следующие значения: $p_0=2$ МПа, коэффициент постели $k=1,0 \cdot 10^7$ Н/м³, длина участка трубопровода $L=10R$, коэффициент Пуассона $\nu=0.3$ и модулем упругости стали $E=2 \cdot 10^5$ МПа. Следует отметить, что расчет выполнен при наименьших частотах свободных колебаний цилиндрической оболочки ω_{mn} при значениях волновых чисел $n=1$ и $m=2$.

Методика определения динамической устойчивости сводится к определению положения точки (γ, P) на графиках рисунков 4.1, 4.2. Если точка находится в свободной плоскости (незаштрихованной), то устойчивость рассматриваемого газопровода обеспечена. В противном случае следует изменить основные параметры газопровода или перекачивающей станции.

Анализ значений таблицы 4.1 и графиков на рисунок 4.1, 4.2 показал, что при соотношениях $h/R=1/20$ нижняя граница области динамической неустойчивости принимает значение параметра продольной силы $P=0,344$. С уменьшением значений h/R до 1/40, 1/50 величина $P=0,259$ и $P=0,244$ соответственно. При таких значениях область динамической неустойчивости значительно расширяется, что может привести к потере динамической устойчивости.

Далее было исследовано влияние коэффициента постели грунта на размеры и положение областей динамической неустойчивости газопровода при различных отношениях h/R . Расчет выполнен при следующих параметрах: $p_0=2$ МПа, длина участка газопровода $L=10R$, коэффициент постели $k=0,4 \cdot 10^7$ Н/м³ (песок свеженасыпанный) и

$k=3,0 \cdot 10^7 \text{ Н/м}^3$ (песок утрамбованный). Результаты расчета сведены в таблицу 4.2 и иллюстрированы в виде диаграмм Айнса – Стретта на рисунках 4.3 – 4.6. Коэффициент постели k принят в соответствии с моделью Фусса – Винклера [93].

Таблица 4.1 – Определение частот возмущения $\gamma, \text{Гц}$

Труба, мм	h/R	P						
		0,063	0,1	0,15	0,2	0,25	0,3	0,345
1020x25	1/20	148,48	$\frac{140,71}{135,47}$	$\frac{130,62}{116,75}$	$\frac{121,48}{95,42}$	$\frac{120,69}{70,21}$	$\frac{-}{38,62}$	$\frac{-}{-}$
Труба, мм	h/R	P						
720x11	1/33	0,102	0,12	0,15	0,17	0,20	0,25	0,30
		138,30	$\frac{131,56}{116,57}$	$\frac{110,23}{95,65}$	$\frac{103,06}{90,08}$	$\frac{87,02}{53,27}$	$\frac{-}{21,48}$	$\frac{-}{-}$
Труба, мм	h/R	P						
1420x18	1/40	0,124	0,15	0,17	0,20	0,25	0,30	0,35
		90,26	$\frac{84,28}{80,22}$	$\frac{79,64}{71,54}$	$\frac{73,39}{56,76}$	$\frac{-}{0}$	$\frac{-}{-}$	$\frac{-}{-}$
Труба, мм	h/R	P						
1420x14	1/50	0,155	0,17	0,20	0,25	0,30	0,35	-
		77,52	$\frac{73,27}{71,39}$	$\frac{67,19}{60,25}$	$\frac{-}{-}$	$\frac{-}{-}$	$\frac{-}{-}$	$\frac{-}{-}$

В числителе приведены значения частот возбуждения γ верхней границы области динамической неустойчивости, а в знаменателе, частота возбуждения соответствующая нижней границе области динамической неустойчивости.

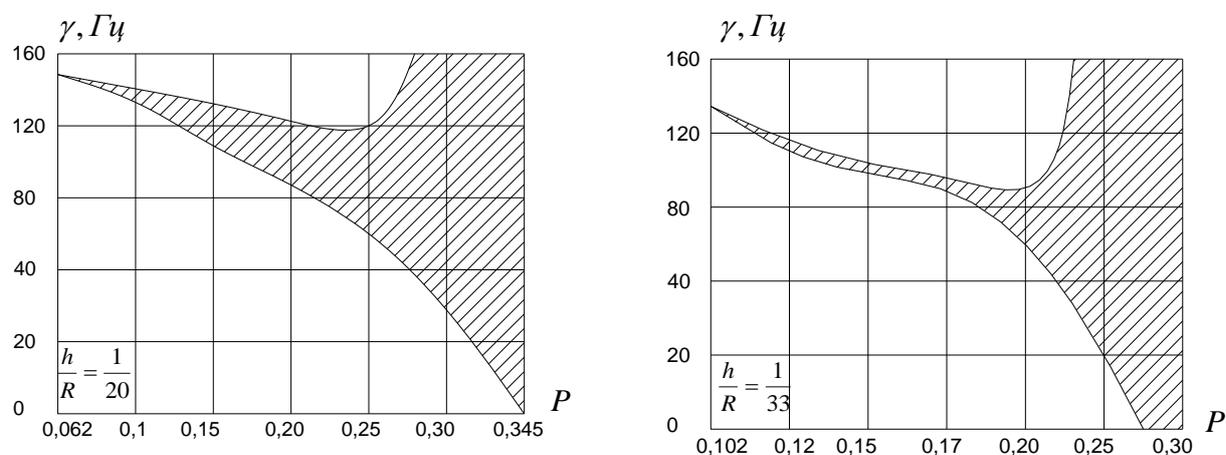


Рисунок 4.1 – Области динамической неустойчивости для газопровода при наземной прокладке при различных соотношениях h/R и P

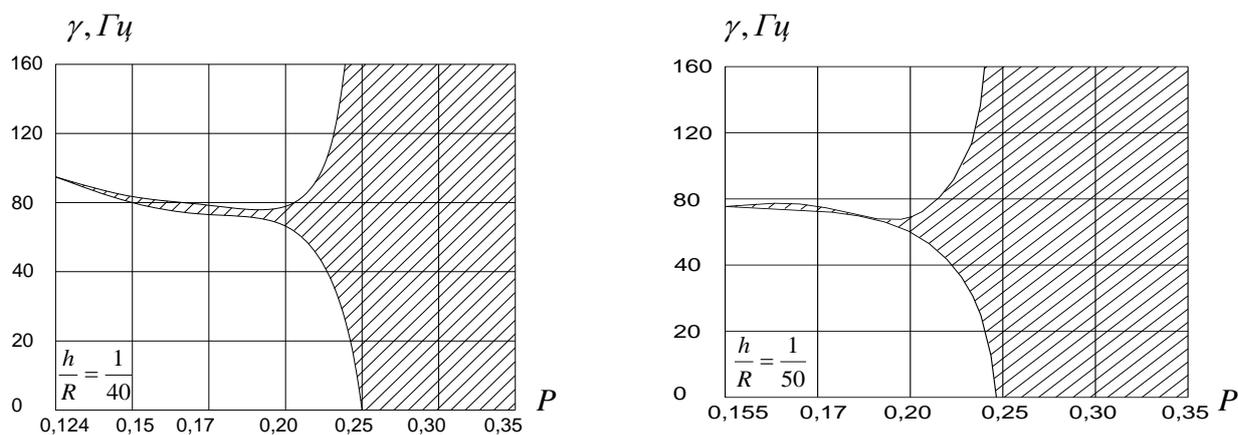


Рисунок 4.2 – Области динамической неустойчивости для газопровода при наземной прокладке при различных соотношениях h/R и P

Таблица 4.2 – Определение частот возмущения $\gamma, \text{Гц}$

		$p_0=2 \text{ МПа}; L/R=10; h/R=1/33$					
		P					
Труба, мм	$k \cdot 10^7$ Н/м^3	0,101	0,15	0,20	0,25	0,30	0,35
720x11	0,4	149,80	$\frac{129,75}{114,78}$	$\frac{117,04}{68,35}$	$\frac{-}{14,25}$	$\frac{-}{-}$	$\frac{-}{-}$
		P					
Труба, мм	$k \cdot 10^7$ Н/м^3	0,101	0,15	0,20	0,25	0,30	0,35
720x11	3,0	169,17	$\frac{151,88}{138,58}$	$\frac{136,48}{100,78}$	$\frac{-}{50,50}$	$\frac{-}{12,30}$	$\frac{-}{-}$
		$p_0=2 \text{ МПа}; L/R=10; h/R=1/40$					
		P					
Труба, мм	$k \cdot 10^7$ Н/м^3	0,123	0,15	0,20	0,25	0,30	0,35
1420x18	0,4	84,67	$\frac{78,80}{74,44}$	$\frac{68,07}{48,67}$	$\frac{-}{9,0}$	$\frac{-}{-}$	$\frac{-}{-}$
		P					
Труба, мм	$k \cdot 10^7$ Н/м^3	0,101	0,15	0,20	0,25	0,30	0,35
1420x18	3,0	100,90	$\frac{96,02}{92,47}$	$\frac{85,82}{72,67}$	$\frac{82,33}{47,92}$	$\frac{-}{-}$	$\frac{-}{-}$

В числители приведены значения частот возбуждения γ верхней границы области динамической неустойчивости, а в знаменателе, частота возбуждения соответствующая нижней границе области динамической неустойчивости.

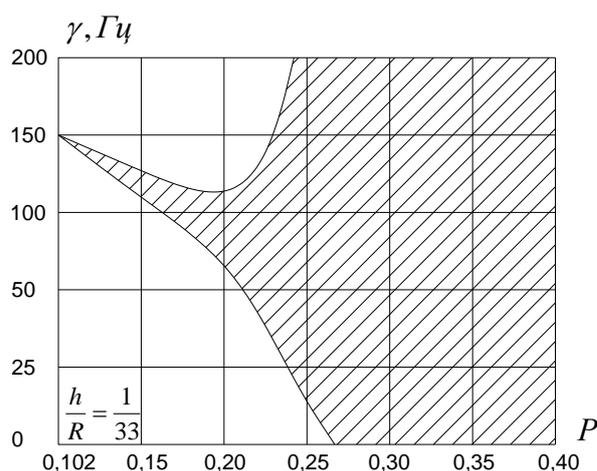


Рисунок 4.3 – Области динамической неустойчивости наземного газопровода с различными значениями параметра P при $p_0=2$ МПа; $h/R=1/33$ и $k=0,4*10^7$ Н/м³

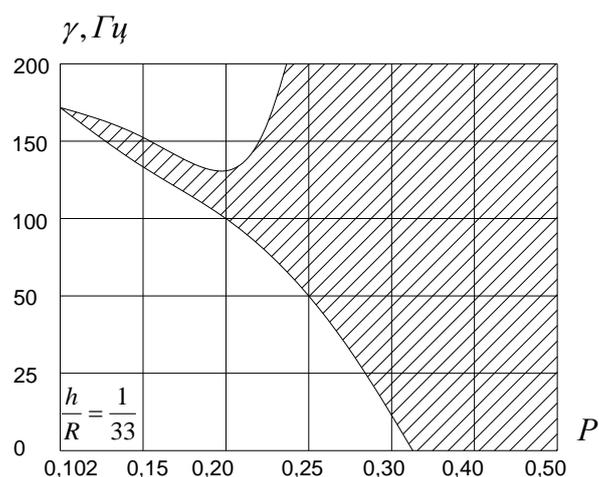


Рисунок 4.4 – Области динамической неустойчивости наземного газопровода с различными значениями параметра P при $p_0=2$ МПа; $h/R=1/33$ и $k=3,0*10^7$ Н/м³

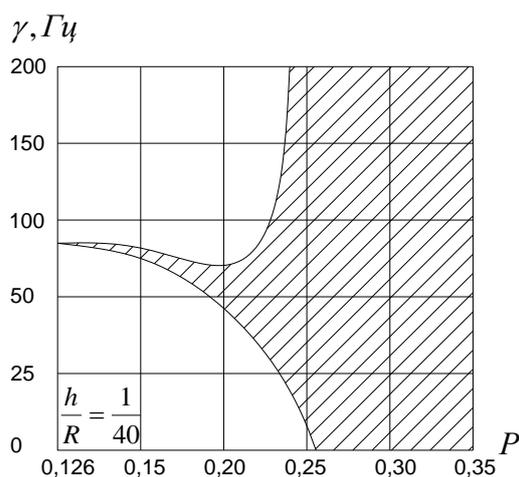


Рисунок 4.5 – Области динамической неустойчивости наземного газопровода с различными значениями параметра P при $p_0=2$ МПа; $h/R=1/40$ и $k=0,4*10^7$ Н/м³

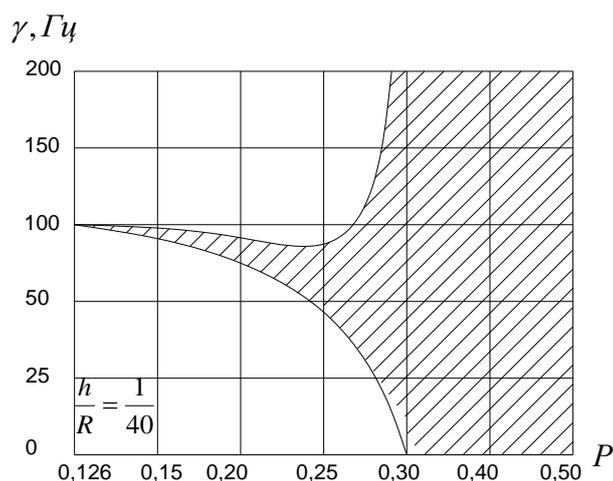


Рисунок 4.6 – Области динамической неустойчивости наземного газопровода с различными значениями параметра P при $p_0=2$ МПа; $h/R=1/40$ и $k=3,0*10^7$ Н/м³

4.2 Параметрические колебания и динамическая устойчивость наземных тонкостенных нефтепроводов большого диаметра

В данном параграфе исследуется вопрос параметрических колебаний и динамической устойчивости наземных тонкостенных нефтепроводов большого диаметра при комплексном воздействии трех параметрических возбуждений:

1) нестационарного внутреннего рабочего давления,

$$p(t) = p_0(1 + \mu \cos \gamma), \quad (4.10)$$

2) нестационарной продольной сжимающей силы:

$$F(t) = F_0(1 + \mu \cos \gamma), \quad (4.11)$$

3) нестационарного потока жидкости:

$$V(t) = V_0(1 + \mu \cos \gamma), \quad (4.12)$$

где γ – частоты возбуждения, определяемая технологией компрессорных станций; μ – параметр возбуждения, ограничивающий величину переменной составляющей давления (по данным [10] $\mu \leq 0,5$); p_0 – внутреннее рабочее давление; F_0 – продольная сжимающая сила, V_0 – скорость потока жидкости.

Используя методику изложенную в параграфе 4.1 уравнение движения для наземного участка нефтепровода принимает вид:

$$\begin{aligned} & [\tilde{\lambda}_n^4 + m^4(m^2 - 1)(m^2 - 1 + p^*) + k^* m^4 - \tilde{\lambda}_n^4 m^4 P - \tilde{\lambda}_n^2 \rho_0^* \Phi_{mn} V_0^2 m^4 h_v] f(t) + \\ & + [\rho^* R \cdot h(\tilde{\lambda}_n^2 h_v + m^2 + m^4) + \rho_0^* \Phi_{mn} R^2 m^4] f''(t) = 0, \end{aligned} \quad (4.13)$$

где $\Phi_{mn} = \frac{I_m(\lambda_0)}{\lambda_0 I_m'(\lambda_0)}$ – параметр, функции Бесселя к ее производной V_0 – скорость потока жидкости, $\rho_0 \Phi_{mn}$ – присоединенная масса жидкости.

В результате преобразования (4.13) с учетом (4.10), (4.11) и (4.12) получим систему разделяющихся уравнений для наземного нефтепровода, подверженного нестационарным воздействиям:

$$\begin{aligned} & \{ \tilde{\lambda}_n^4 + m^4(m^2 - 1)(m^2 - 1 + p^*) + k^* m^4 - \tilde{\lambda}_n^4 m^4 P - \tilde{\lambda}_n^2 \rho_0^* \Phi_{mn} V^2 m^4 h_{\tilde{v}} - \\ & - m^4 \tilde{\lambda}_n^4 \mu \cos \gamma \cdot [P - (p^*(m^2 - 1) + 2\rho_0^* \Phi_{mn} V^2 \tilde{\lambda}_n^2 h_{\tilde{v}}) / \tilde{\lambda}_n^4] \} f(t) + \\ & + [\rho^* R h(\tilde{\lambda}_n^2 h_{\tilde{v}} + m^2 + m^4) + \rho_0^* \Phi_{mn} R^2 m^4] f''(t) = 0. \end{aligned} \quad (4.14)$$

После преобразования (4.14) получим:

$$\begin{aligned} f''(t) + \frac{\tilde{\lambda}_n^4 + m^4(m^2 - 1)(m^2 - 1 + p^*) + k^* m^4 - \tilde{\lambda}_n^4 m^4 P / n^2 - \tilde{\lambda}_n^2 \rho_0^* \Phi_{mn} V^2 m^4 h_{\tilde{v}}}{\rho^* R \cdot h(\tilde{\lambda}_n^2 h_{\tilde{v}} + m^2 + m^4) + \rho_0^* \Phi_{mn} R^2 m^4} (1 - \\ \frac{\tilde{\lambda}_n^4 m^4 [P - (p^*(m^2 - 1) + 2\rho_0^* \Phi_{mn} V^2 \tilde{\lambda}_n^2 h_{\tilde{v}}) / \tilde{\lambda}_n^4]}{\tilde{\lambda}_n^4 + m^4(m^2 - 1)(m^2 - 1 + p^*) + k^* m^4 - \tilde{\lambda}_n^4 m^4 P / n^2 - \tilde{\lambda}_n^2 \rho_0^* \Phi_{mn} V^2 m^4 h_{\tilde{v}}} \cos \gamma) f(t), \end{aligned} \quad (4.15)$$

или систему разделяющихся уравнений Матье:

$$f''(t) + \omega_{mn}^2 (1 - \delta_{mn} \cos \gamma t) f(t) = 0, \quad (4.16)$$

где: квадрат частоты свободных колебаний нефтепровода по формуле 3.8 имеет вид:

$$\omega_{mn}^2 = \frac{\tilde{\lambda}_n^4 + m^4 (m^2 - 1)(m^2 - 1 + p^*) + k^* m^4 - \tilde{\lambda}_n^4 m^4 P / n^2 - \tilde{\lambda}_n^2 \rho_0^* \Phi_{mn} V^2 m^4 h_{\tilde{\gamma}}}{\rho^* R \cdot h (\tilde{\lambda}_n^2 h_{\tilde{\gamma}} + m^2 + m^4) + \rho_0^* \Phi_{mn} R^2 m^4},$$

Коэффициент возбуждения,

$$\delta_{mn} = \frac{\tilde{\lambda}_n^4 m^4 [P - (p^* (m^2 - 1) + 2\rho_0^* \Phi_{mn} V^2 \tilde{\lambda}_n^2 h_{\tilde{\gamma}}) / \tilde{\lambda}_n^4]}{\tilde{\lambda}_n^4 + m^4 (m^2 - 1)(m^2 - 1 + p^*) + k^* m^4 - \tilde{\lambda}_n^4 m^4 P / n^2 - \tilde{\lambda}_n^2 \rho_0^* \Phi_{mn} V^2 m^4 h_{\tilde{\gamma}}} \mu. \quad (4.17)$$

Полученная система уравнений Матье (4.16) позволяет исследовать динамическую устойчивость шарнирно закрепленного участка наземного нефтепровода при условии $P > (p^* (m^2 - 1) + 2\rho_0^* \Phi_{mn} V^2 \tilde{\lambda}_n^2 h_{\tilde{\gamma}}) / \tilde{\lambda}_n^4$ для различных значений волновых чисел $m, n = 1, 2, \dots$ с помощью построения областей неустойчивости типа диаграмм Айнса – Стретта, которые определяются следующими соотношениями частот свободных колебаний ω_{mn} и частот возбуждения γ : $\omega_{mn} = \frac{\gamma}{2} i, i = 1, 2, 3 \dots$

Аналогично выводам и заключениям приведенным в параграфе 4.1 верхние и нижние границы определяются равенством:

– верхняя граница:

$$\gamma^2 = 4\omega_{mn}^2 \left(1 - \frac{\delta_{mn}}{2}\right)^{-1}$$

– нижняя граница:

$$\gamma^2 = 4\omega_{mn}^2 \left(1 + \frac{\delta_{mn}}{2}\right)^{-1}$$

В качестве иллюстрации предложенной методики построения главных областей динамической неустойчивости рассмотрен участок $L=10R$, $p=2$ МПа, $k=1,0 \cdot 10^7$ Н/м³, $V=3$ м/с, для значений параметра продольной сжимающей силы P и h/R . Полученные результаты исследования, согласно предложенной методики, сведены в таблицу 4.3 и представлены в виде модифицированных

диаграмм Айнса – Стретта на рисунках 4.7, 4.8. Анализ полученных значений показал, что с ростом параметра продольной сжимающей силы P , и уменьшения параметра тонкостенности трубы h/R наблюдается резкое расширение областей динамической неустойчивости, например, при $h/R=1/50$, $L=10R$, $p=2$ МПа, $k=1,0 \cdot 10^7$ Н/м³, $V=3$ м/с области динамической неустойчивости занимают почти всю рассматриваемую плоскость « $\gamma-P$ ». Отсюда следует, что вероятность потери динамической устойчивости для нефтепровода значительно выше, для газопровода.

Далее было исследовано влияние коэффициента постели грунта на размеры и положение областей динамической неустойчивости (таблица 4.4, рисунки 4.9 – 4.12). Анализ полученных значений для наземного нефтепровода показал, что с ростом значений коэффициента постели грунта область динамической неустойчивости сужается и смещается в сторону увеличения значений γ .

Методика определения динамической устойчивости как и в случае с наземным газопроводом сводится к определению положения точки на плоскости параметров (γ, P) представленных на графиках рисунков 4.7 – 4.12. Если точка находится в свободной плоскости (незаштрихованной), то устойчивость рассматриваемого нефтепровода обеспечена. В противном случае следует изменить основные параметры нефтепровода или перекачивающей станции.

Таблица 4.3 – Определение частот возмущения γ , Гц

Труба, мм	h/R	P						
		0,063	0,1	0,15	0,2	0,25	0,3	0,35
1020x25	1/20	107,97	$\frac{102,63}{98,83}$	$\frac{95,33}{85,28}$	$\frac{88,68}{69,86}$	$\frac{87,77}{51,69}$	$\frac{-}{28,99}$	$\frac{-}{-}$
		P						
Труба, мм	h/R	0,101	0,15	0,20	0,25	0,30	0,35	-
720x11	1/33	102,66	$\frac{90,96}{81,71}$	$\frac{82,17}{55,01}$	$\frac{-}{16,70}$	$\frac{-}{-}$	$\frac{-}{-}$	$\frac{-}{-}$

продолжение таблицы 4.3

		<i>P</i>						
Труба, мм	<i>h/R</i>	0,126	0,15	0,20	0,25	0,30	0,35	–
1420x18	1/40	54,54	$\frac{51,26}{118,84}$	$\frac{44,77}{35,04}$	– – –	– – –	– – –	– – –
		<i>P</i>						
Труба, мм	<i>h/R</i>	0,157	0,20	0,25	0,30	0,35	–	–
1420x14	1/50	42,95	$\frac{38,19}{34,39}$	$\frac{34,56}{-}$	– – –	– – –	– – –	– – –

В числителе приведены частоты значения возбуждения γ верхней границы области динамической неустойчивости, а в знаменателе, частота возбуждения соответствующая нижней границе области динамической неустойчивости.

Таблица 4.4 – Определение частот возмущения γ , Гц

		<i>p₀=2Mna; L/R=10; V=3м/сек; h/R=1/33</i>					
		<i>P</i>					
Труба	10^7 <i>H/м³</i>	0,101	0,15	0,20	0,25	0,30	0,35
1220x20	<i>k=0,4</i>	99,05	$\frac{86,98}{77,22}$	$\frac{80,07}{48,67}$	– 4,83	– –	– –
		<i>P</i>					
Труба	<i>h/R</i>	0,101	0,15	0,20	0,25	0,30	0,35
1220x20	<i>k=3,0</i>	110,72	$\frac{99,87}{91,55}$	$\frac{89,89}{68,16}$	– 37,69	– –	– –
		<i>p₀=2Mna; L/R=10; V=3м/сек; h/R=1/40</i>					
		<i>P</i>					
Труба	<i>h/R</i>	0,126	0,15	0,20	0,25	0,30	0,35
1220x15	<i>k=0,4</i>	51,03	$\frac{47,58}{44,95}$	$\frac{41,13}{29,65}$	– –	– –	– –
		<i>P</i>					
Труба	<i>h/R</i>	0,126	0,15	0,20	0,25	0,30	0,35
1220x15	<i>k=3,0</i>	61,95	$\frac{59,11}{57,03}$	$\frac{53,13}{45,53}$	$\frac{49,87}{31,40}$	– –	– –

В числителе приведены частоты значения возбуждения γ верхней границы области динамической неустойчивости, а в знаменателе, частота возбуждения соответствующая нижней границе области динамической неустойчивости

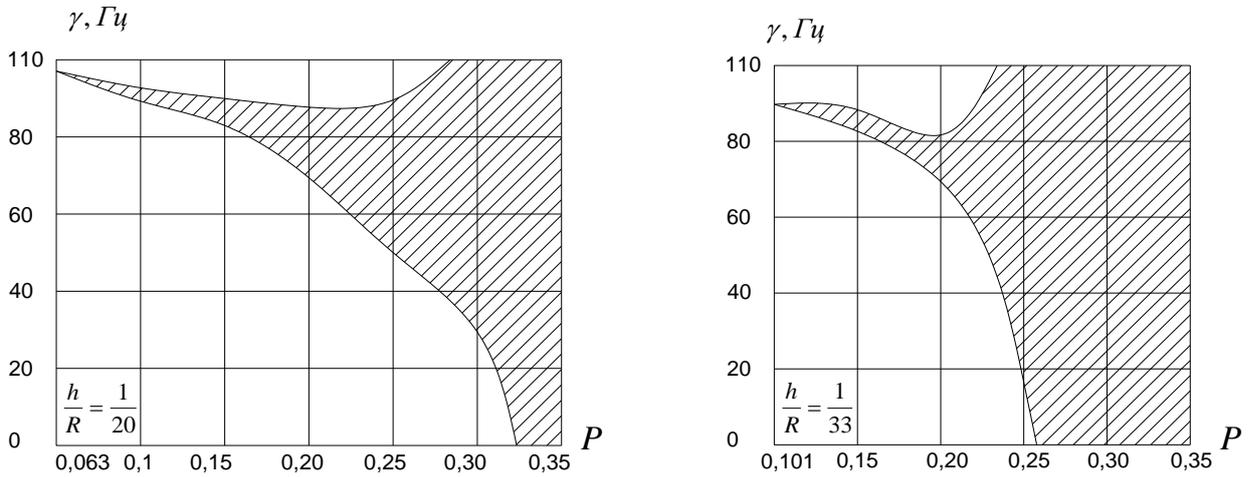


Рисунок 4.7 – Области динамической неустойчивости для нефтепровода при наземной прокладке при различных соотношениях h/R и P .

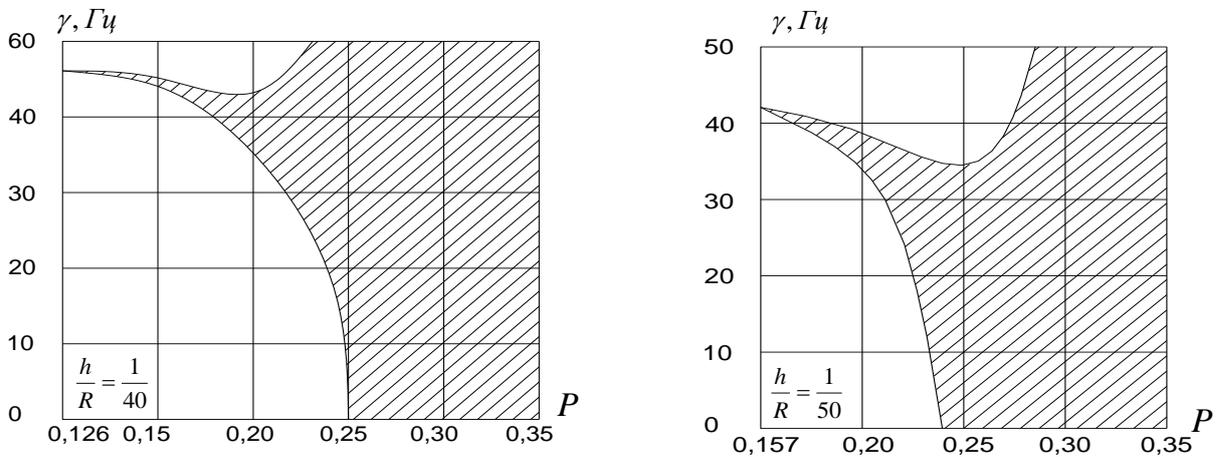


Рисунок 4.8 – Области динамической неустойчивости для нефтепровода при наземной прокладке при различных соотношениях h/R и P .

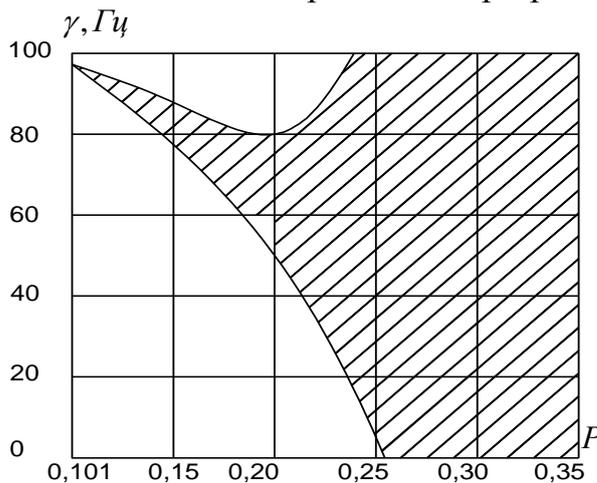


Рисунок 4.9 – Области динамической неустойчивости наземного нефтепровода с различными значениями параметра P при $p_0=2$ МПа; $h/R=1/33$ и $k=0,4*10^7$ Н/м³

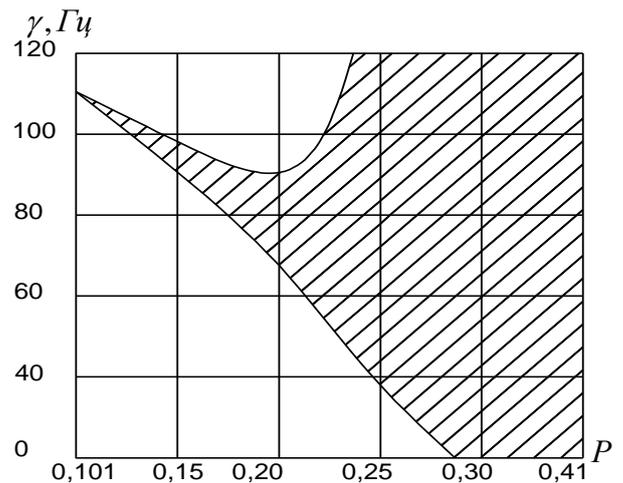


Рисунок 4.10 – Области динамической неустойчивости наземного нефтепровода с различными значениями параметра P при $p_0=2$ МПа; $h/R=1/33$ и $k=3,0*10^7$ Н/м³

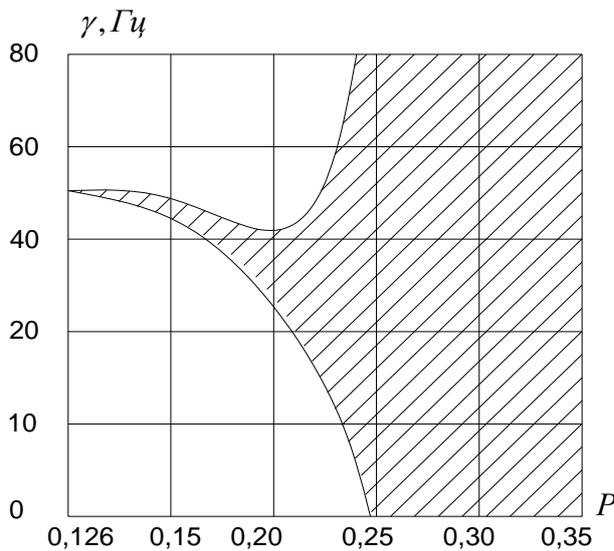


Рисунок 4.11 – Области динамической неустойчивости наземного нефтепровода с различными значениями параметра P при $p_0=2$ МПа; $h/R=1/40$ и $k=0,4*10^7$ Н/м³

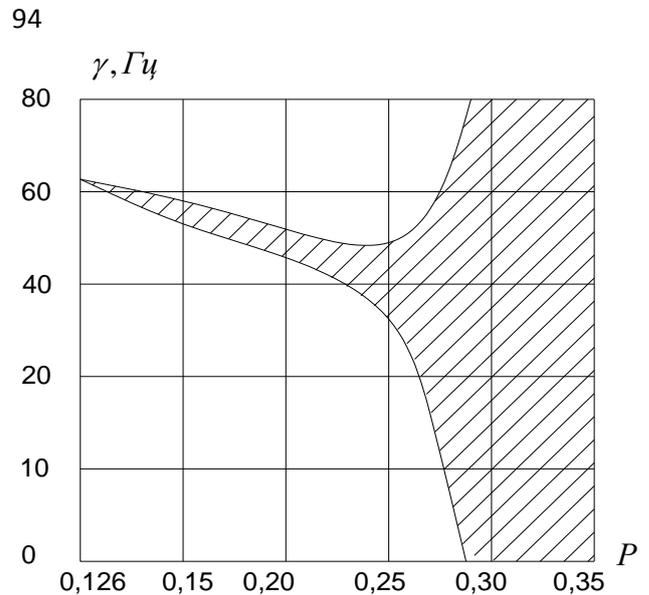


Рисунок 4.12 – Области динамической неустойчивости наземного нефтепровода с различными значениями параметра P при $p_0=2$ МПа; $h/R=1/40$ и $k=3,0*10^7$ Н/м³

Выводы по главе 4

1. Решена задача о параметрических колебаниях наземных нефте- и газопроводов, с различными отношениями h/R , при нестационарном воздействии внутреннего рабочего давления, параметра продольной сжимающей силы и потока протекающей жидкости. Получена разделяющаяся система дифференциальных уравнений Матье, позволяющая оценить динамическую устойчивость при помощи построения областей динамической неустойчивости в виде модифицированных диаграмм Айнса – Стретта при совместном влиянии параметра тонкостенности трубы, коэффициента постели, внутреннего рабочего давления, параметра продольной сжимающей силы и скорости протекающей жидкости (для нефтепровода).

2. Проведено исследование динамической устойчивости наземных прямолинейных участков нефте- и газопроводов большого диаметра при различных геометрических и механических характеристиках. Анализ полученных результатов показал:

- с увеличением параметра продольной сжимающей силы область динамической неустойчивости расширяется;
- трубы с соотношением $h/R=1/40 - 1/50$ более опасны с позиции динамической устойчивости, чем трубы $h/R=1/20$ и $1/30$. Вероятность возникновения параметрического резонанса в таких трубах увеличивается, за счет расширения области динамической неустойчивости и её резкого смещения вниз, в сторону уменьшения значений γ ;
- с ростом значений коэффициента постели грунта k , область динамической неустойчивости заметно сужается, и смещается в сторону увеличения значений γ ;
- область динамической неустойчивости при фиксированных геометрических и механических характеристиках для нефтепроводов значительно шире, чем для газопроводов, что означает более высокую вероятность потери динамической устойчивости для нефтепроводов.

5 СРАВНЕНИЕ И СОПОСТАВЛЕНИЕ РЕЗУЛЬТАТОВ ПОЛУЧЕННЫХ В ДИССЕРТАЦИИ С РЕЗУЛЬТАТАМИ ДРУГИХ АВТОРОВ

5.1 Сравнение решений полученных в диссертации с решениями других авторов при $m=1$

Для достоверности полученного решения для наземных газо- и нефтепроводов с шарнирным типом закрепления, покажем на примере универсальность формулы (3.8) для определения частот свободных колебаний. Выражение для квадрата частоты наземного нефтепровода имеет вид (3.8):

$$\omega_{mn}^2 = \frac{\tilde{\lambda}_n^4 + m^4(m^2 - 1)(m^2 - 1 + p^*) + k^* m^4 - \tilde{\lambda}_n^4 m^4 P - \tilde{\lambda}_n^2 \rho_0^* \Phi_{mn} V^2 m^4 h_v}{\rho^* R \cdot h(\tilde{\lambda}_n^2 h_v + m^2 + m^4) + \rho_0^* \Phi_{mn} R^2 m^4}.$$

Формула (3.8) является наиболее полной, поскольку в ней учтено влияние стационарного внутреннего рабочего давления p_0 , параметра продольной сжимающей силы P , геометрических характеристик трубы h, R, L , влияние упругого основания k , скорости потока нефти V и присоединённой массы жидкости $\rho_0 \Phi_{mn}$.

Для сравнения полученной формулы (3.8) с решениями по стержневой теории необходимо принять в выражении (3.8) $m=1$, и параметр функции Бесселя $\Phi_{mn}(\lambda_n) = 1$, что соответствует графику на рисунке 3.2 для реальных отношений L/R при $\lambda_n < 0,25$. Далее в знаменателе можно пренебречь слагаемым $\lambda_n^2 h_v$, ввиду малости этого слагаемого $\lambda_n^2 h_v \ll 1$. В результате преобразований получим:

$$\omega_{1n}^2 = \frac{\tilde{\lambda}_n^4 + k^* - \tilde{\lambda}_n^4 P - \tilde{\lambda}_n^2 \rho_0^* V^2 h_v}{2\rho^* R h + \rho_0^* R^2}, \quad (5.1)$$

где $p^* = p_0 \frac{R}{Ehh_v^2}$, $\rho^* = \rho \frac{R}{Ehh_v^2}$, $k^* = \frac{kR^2}{\pi Ehh_v^2} z_m$, $\rho_0^* = \rho_0 \frac{R}{Ehh_v^2}$, $P = \frac{F}{F_3}$, $F_3 = \frac{n^2 \pi^2 EI}{L^2}$.

Ниже приведены результаты сравнения формулы (5.1) с результатами известных авторов по стержневой теории:

1. Если положить в формуле (5.1), что параметр продольной силы $P=0$, коэффициент постели $k^*=0$ и скорость протекающей жидкости $V=0$, в трубе, не заполненной жидкостью $\rho_0^*=0$, то после преобразований (5.1) получим формулу следующего вида:

$$\omega_{1n}^2 = \frac{\tilde{\lambda}_n^4}{2\rho^* Rh}. \quad (5.2)$$

Подставляем в формулу (5.2) $\tilde{\lambda}_n = \frac{n\pi R}{L\sqrt{h_{\tilde{v}}}}$, $\rho^* = \rho \frac{R}{Ehh_v^2}$, получим:

$$\omega_{1n}^2 = \frac{n^4 \pi^4 ER^3 h^3 \pi}{L^4 2Rh\rho\pi},$$

где $I = \pi R^3 h$, – осевой момент инерции, $A = 2\pi R h$ – площадь поперечного сечения, после преобразования имеем:

$$\omega_{1n}^2 = \frac{n^4 \pi^4 EI}{L^4 A\rho}.$$

Представленная формула, приведена в нормативном документе [79] для определения частоты свободных изгибных колебаний шарнирно закрепленного трубопровода (1.2):

$$\omega_n = \frac{n^2 \pi^2}{L^2} \sqrt{\frac{EI}{m}}.$$

2. Для дальнейшего сравнения положим, что параметр продольной сжимающая сила $P \neq 0$, а остальные вышеуказанные параметра равны нулю тогда формула (5.1) примет следующий вид:

$$\omega_{1n}^2 = \frac{\tilde{\lambda}_n^4 - \tilde{\lambda}_n^4 P}{2\rho^* Rh}. \quad (5.3)$$

После преобразования получим вид известной формулы В.В. Болотина, Я.Г. Пановко приведенную в [85]:

$$\omega_n = \frac{n^2 \pi^2}{l^2} \sqrt{\frac{EI}{m} \left(1 - \frac{Fl^4}{n^2 \pi^2 EI}\right)}. \quad (5.4)$$

3. Для нахождения частоты свободных изгибных колебаний надземного нефтепровода учитывающая скорость протекающей жидкости (нефти) $V = const$, без учета сжимающих сил положим, что $V \neq 0$ в формуле (5.1), получим:

$$\omega_{1n}^2 = \frac{\tilde{\lambda}_n^4 - \tilde{\lambda}_n^2 \rho_0^* V^2 h_{\tilde{v}}}{2\rho^* Rh + \rho_0^* R^2} \quad (5.5)$$

Подставим $\tilde{\lambda}_n = \frac{n\pi R}{L\sqrt{h_{\tilde{v}}}}$, $\rho^* = \rho \frac{R}{Ehh_v^2}$, $\rho_0^* = \rho_0 \frac{R}{Ehh_v^2}$ в формулу (5.5) и преобразуем

$$\omega_{1n}^2 = \frac{n^4 \pi^4 R^4 \left(1 - \frac{\rho_0 R V^2}{Eh} \frac{L^2 h_v h_{\tilde{v}}}{n^2 \pi^2 R^2}\right)}{L^4 h_v^2 \left(2Rh\rho \frac{R}{Ehh_v^2} + R^2 \rho_0 \frac{R}{Ehh_v^2}\right)} = \frac{n^4 \pi^4 E \pi R^3 h}{L^4 (A\rho + A_0 \rho_0)} \left(1 - \frac{\pi R^2 \rho_0 V^2 L^2}{n^2 \pi^2 \pi R^3 h E}\right)$$

где $I = \pi R^3 h$, $A = 2\pi R h$, после преобразования получим известную формулу В.И.Феодосьева [107] (1.9):

$$\omega_n^2 = \frac{n^4 \pi^4}{l^4} \frac{EI}{m + m_0} \left(1 - \frac{V^2 m_0 l^2}{n^2 \pi^2 EI}\right).$$

4. Для дальнейшего сравнения положим, что коэффициент постели $k \neq 0$, а остальные параметры $\rho_0 = 0$, $P=0$, $V=0$, с учетом вышеуказанных условий, формула (5.1) после преобразования представим в следующем виде:

$$\omega_{1n}^2 = \frac{\tilde{\lambda}_n^4 + k^*}{2\rho^* Rh}, \quad (5.6)$$

где $\tilde{\lambda}_n = \frac{n\pi R}{L\sqrt{h_v}}$, $\rho^* = \rho \frac{R}{Ehh_v^2}$, $\rho_0^* = \rho_0 \frac{R}{Ehh_v^2}$, $k^* = \frac{kR^2}{\pi Ehh_v^2} z_m$. Значения коэффициента z_m

зависят от величины коэффициента постели грунта k , массы и геометрии участка трубопровода и определяются согласно методики приведенной в приложении Б.

Сравним численно частоты полученные по формуле (5.6) и формуле

С.П. Тимошенко (1.4) для балки на упругом основании [106]:

$$p_i = \frac{i^2 \pi^2 a}{l^2} \sqrt{1 + \frac{k_n l^4}{EI i^4 \pi^4}},$$

где p_i – частота свободных колебаний i – ой формы, k_n – коэффициент постели с размерностью $[Н/м^2]$, $k_n = k \cdot b$, b – ширина полосы контакта с поверхностью

грунта, [см] ρ – плотность материала трубы, F – площадь поперечного сечения, $a^2 = \frac{EI}{\rho F}$. Полученные результаты расчета сведены в таблицу 5.1, из которой следует,

что расхождения между значениями полученными по формулам (5.6) и (1.4) составляет менее 1%.

Основное отличие формулы (5.6) и (1.4) заключается в том, что в формуле С.П. Тимошенко (1.4) полоса контакта трубопровода с грунтом сводится к прямолинейной поверхности т.е. как в балке на упругом основании. В расчетах коэффициент постели k умножается на ширину полосы контакта b т.е. $k_n = k \cdot b$. В случае формулы (5.6) полоса контакта трубопровода с грунтом представляет собой криволинейную поверхность, и в результате решения контактной задачи в k^* вводится коэффициент z_m , значение которого зависит от параметров контактной поверхности, определяемых методикой полученной в диссертации.

Таблица 5.1 – Определение частот свободных колебаний наземного газопровода при различных значениях коэффициента постели грунта

Кэфф. постели грунта $k \cdot 10^7 \text{ Н/м}^3$	Ширина полосы контакта b , см	$L/R=10; h/R=1/50 (14 \times 1420 \text{ мм})$		
		z_1 для (5.6)	Формула (5.6)	Формула С.П. Тимошенко
0,1	34,24	0,380	77,13	77,15
0,5	20,16	0,283	77,30	77,37
1	16,02	0,181	77,45	77,56
2	12,72	0,144	77,69	77,85
3	11,12	0,126	77,89	78,11

5. В главах 2 и 3 были получены выражения, определяющие параметр критической продольной сжимающей силы. Для дальнейшего анализа и сопоставления принята формула (3.13). Данная формула является более полной, так как учитывает большее количество параметров:

$$P_{кр} = \frac{\tilde{\lambda}_n^4 + m^4(m^2 - 1)(m^2 - 1 + p^*) + k^* m^4 - \tilde{\lambda}_n^2 \rho_0^* \Phi_{mn} V^2 m^4 h_v}{\tilde{\lambda}_n^4 m^4} n^2.$$

Положим $m=1, V=0$, для класса труб $L/R > 15$, получим:

$$P_{кр} = \frac{\tilde{\lambda}_n^4 + k^*}{\tilde{\lambda}_n^4} n^2, \quad (5.7)$$

где $k^* = \frac{kR^2}{\pi E h h_v^2} z_m$.

Сравним полученное выражение (5.7) с решением Н.А. Алфутова [4] (1.7):

$$\bar{P}_n = n^2 + \frac{\bar{k}}{n^2},$$

где $\bar{P}_n = \frac{F}{F_3}$, $\bar{k} = \frac{k_n l^4}{\pi^4 EI}$, k_n – коэффициент постели грунта [Н/м²].

Полученные результаты исследования сведены в таблицу 5.2, анализ которой показывает, что полученные значения по формуле (5.8) хорошо согласуются с результатами формулы Н.А. Алфутова (1.7), расхождение значений составляет менее 3%.

Таблица 5.2 – Определение параметра критической продольной сжимающей силы наземного газопровода при различных значениях коэффициента постели грунта.

Коэфф. постели грунта $k^*10^7 \text{Н/м}^3$	$L/R=10; h/R=1/50 (14 \times 1420 \text{мм})$		
	z_1 для (5.7)	Формула (5.7)	Формула Н.А.Алфутова (1.5)
0,1	0,380	1,0042	1,0059
0,5	0,283	1,0083	1,0178
1	0,181	1,0108	1,0284
2	0,144	1,0138	1,0453
3	0,126	1,0159	1,0594

5.2 Сравнение решений полученных в диссертации с решениями других авторов по теории цилиндрических оболочек

Полученная в настоящей диссертации формула (3.8) является универсальной для определения частоты свободных изгибных колебаний нефтепровода, она позволяет учесть совместное влияние стационарного внутреннего рабочего давления p^* , параметра продольной сжимающей силы P , геометрических характеристик трубы h , R , L , влияние упругого основания грунта k , и влияние скорости потока нефти V . В данном пункте покажем, что полученное

аналитическое выражение (3.8), является достоверным и позволяет определить частоты свободных колебаний при различных волновых числах m и n .

1. В первом частном случае формулы (3.8) положим $\rho_0 = 0$, $V=0$. Формула (3.8) после преобразования примет вид:

$$\omega_{mn}^2 = \frac{\tilde{\lambda}_n^4 + m^4(m^2 - 1)(m^2 - 1 + p^*)}{\rho^* R \cdot h(\tilde{\lambda}_n^2 h_v + m^2 + m^4)}, \quad (5.8)$$

преобразуем слагаемые:

$$\frac{1}{\rho^* R h} = \frac{1}{\rho \frac{R}{E h h_v^2} R h} = \frac{1}{\frac{\gamma}{g} \frac{R^2 h}{E h h_v^2}} = \frac{E g h_v^2}{\gamma R^2}; \quad p^* = p \frac{R}{E h h_v^2} = p \frac{R}{E h \frac{h^2}{R^2 12(1-v^2)}} = p 12(1-v^2) \frac{R^3}{E h^3};$$

получим известную формулу В.П. Ильина, О.Б. Халецкой [47; 48] для определения частот свободных колебаний надземного тонкостенного трубопровода большого диаметра (1.12):

$$\omega_{mn}^2 = \frac{E g h_v^2}{\gamma R^2} \frac{\tilde{\lambda}_n^4 + m^4(m^2 - 1)(m^2 - 1 \pm p^*)}{\tilde{\lambda}_n^2 h_v + m^4 + m^2},$$

где $\tilde{\lambda}_n = \frac{n\pi R}{L\sqrt{h_v}}$ или $\frac{\lambda_n}{\sqrt{h_v}}$, $p^* = \frac{pR}{E h h_v^2}$, $h_v = h/R\sqrt{12(1-v^2)}$.

2. Приравняем к нулю тангенциальную составляющую сил инерции $\tilde{\lambda}_n^2 h_v$ в формуле (5.8) в итоге получим формулу С.Н. Кукуджанова (1.11) приведенную в [65]:

$$\omega_{mn}^2 = \frac{E g h_v^2}{\gamma R^2} \frac{m^4(m^2 - 1)(m^2 - 1 + p^*) + \alpha_n^4 / h_v^2}{m^2(m^2 + 1)},$$

где $h_v = h/R\sqrt{12(1-v^2)}$, $p^* = p 12(1-v^2) \left(\frac{R}{E h}\right)^3$, $\alpha_n = \frac{n\pi R}{l}$.

3. Для случая глубоководного трубопровода, если принять влияние упругого основания $k=0$, после преобразования (3.8) получим:

$$\omega_{mn}^2 = \frac{\lambda_n^4 + m^4(m^2 - 1)(m^2 - 1 - Gq_0) - G\rho_0 \Phi_{mn} U^2 h_v \lambda_n^2 m^4}{G\rho R h(\lambda_n^2 h_v + m^4 + m^2) + G\rho_0 \Phi_{mn} R^2 m^4}, \quad (1.13)$$

где $P = \frac{F}{F_3}$, $F_3 = \frac{n^2 \pi^2 EI}{l^2}$.

Формула (1.13) В.Г. Соколова, А.А. Ефимова [40] для глубоководного трубопровода, подверженного действию внешнего гидростатического давления, с учетом присоединённой массы и скорости потока жидкости.

4. Если принять $\rho_0 = 0$, внутренне рабочее давление $p_0 = 0$ и $k = 0$, то из формулы (3.8) получим:

$$\omega_{mn}^2 = \frac{\tilde{\lambda}_n^4 + m^4(m^2 - 1)^2}{\rho^* R \cdot h(m^2 + m^4)}, \quad (5.9)$$

где $\tilde{\lambda}_n = \frac{n\pi R}{L\sqrt{h_v}}$, $\rho^* = \rho \frac{R}{Ehh_v^2}$, при $L = \infty$, $\lambda_n = 0$

В случае когда слагаемое $\tilde{\lambda}_n$ обращается в ноль, формула (5.9) примет вид известной формулы С.П. Тимошенко [106] для шарнирно опертого кругового кольца, единичной ширины, позволяющая определить частоты свободных колебаний бесконечно длинной трубы:

$$\omega_{mn}^2 = \frac{m^4(m^2 - 1)^2}{\rho \frac{R}{Eh \frac{h^2}{R^2 12(1 - \nu^2)}} R \cdot h(m^2 + m^4)} = \frac{m^2(m^2 - 1)^2}{R^4} \cdot \frac{D}{\rho h(m^2 + 1)}$$

или

$$\omega_{mn} = \frac{m(m^2 - 1)}{R^2} \sqrt{\frac{D}{\rho h(m^2 + 1)}}, \quad (5.10)$$

где $D = \frac{Eh^3}{12(1 - \nu^2)}$ – цилиндрическая жесткость.

Выводы по главе 5

Полученные в диссертации частные случаи решений для прямолинейного трубопровода хорошо согласуются с решениями других авторов по стержневой теории, и по теории оболочек, что подтверждает надежность полученного аналитического решения.

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

1. Решена контактная задача с учетом взаимодействия трубопровода с грунтом по узкой полосе. Получены выражения для определения параметров контактной поверхности. Получена методика перемножения рядов Фурье и их последующего дифференцирования. Определено влияние радиального давления грунта на внешнюю поверхность трубы.

2. На основании геометрически нелинейном варианте полубезмоментной теории цилиндрических оболочек среднего изгиба получены и решены уравнения движения наземного газопровода большого диаметра с учетом влияния стационарного внутреннего рабочего давления, продольной сжимающей силы, упругого основания грунта, и всех составляющих сил инерции. Получены выражения, в аналитическом виде, для определения частот и форм свободных колебаний наземного, магистрального газопровода большого диаметра с учетом вышеуказанных факторов.

3. На основании теории потенциального течения жидкости и решения модифицированного дифференциального уравнения Бесселя решена задача в аналитическом виде по определению частот и форм свободных колебаний наземных нефтепроводов с учетом влияния скорости потока, и присоединенной массы жидкости.

4. Используя критерий динамической устойчивости, получено и исследовано выражения по определению параметра критической продольной сжимающей силы, приводящей к потере статической устойчивости нефте- и газопроводов.

5. Определен критерий применимости стержневой теории и теории цилиндрических оболочек для определения наименьших частот свободных колебаний наземных трубопроводов в виде критического параметра длины l^* . В случае, если параметр длины $l=L/R$ трубопровода меньше l^* ($l < l^*$), наименьшие частоты следует определять с позиции теории цилиндрических оболочек, по формулам (2.35), (3.8), а для случая когда $l^* > l$ частоты следует определять при волновом числе $m=1$, которое соответствует стержневой теории.

6. Анализ полученных решений по определению частот и форм свободных колебаний и статической устойчивости наземных нефте– газопроводов показал:

- наименьшие частоты свободных колебаний трубопроводов реализуются при волновых числах $m=2$ и $n=1$, что соответствует оболочечным формам колебания, учитывающих деформацию (овализацией) поперечного сечения, сопровождаемого изгибными колебаниями в продольном направлении, с одной полуволной;

- с уменьшением отношения h/R при постоянном внутреннем рабочем давлении и постоянном коэффициенте постели грунта, частоты свободных колебаний уменьшаются на 15 – 45%.

- с увеличением внутреннего рабочего давления p_0 частоты возрастают на 30 – 80% в зависимости от геометрических характеристик (h/R ; L/R);

- с ростом значений коэффициента постели грунта $k=0,1$ до $3 \cdot 10^7 \text{ Н/м}^3$ в трубопроводах частоты увеличиваются на 18 – 37%, в зависимости от параметра длины L/R ;

- с увеличением значений параметра продольной сжимающей силы частоты ω_{21} резко уменьшаются, а при $\omega_{mn} = 0$, используя критерий динамической устойчивости получены формулы для определения параметров критических продольных сжимающих сил для наземных трубопроводов;

- частоты свободных колебаний наземных нефтепроводов на 30–40% ниже, чем в газопроводах. На уменьшение значений частот большое влияние оказывает присоединенная масса жидкости (нефти);

7. Решена задача о параметрических колебаниях наземных газо– и нефтепроводов, с различными значениями h/R , при нестационарном воздействии внутреннего рабочего давления, параметра продольной сжимающей силы и потока протекающей жидкости. Получена разделяющаяся система дифференциальных уравнений Матье, позволяющая оценить динамическую устойчивость при помощи построения областей динамической неустойчивости в виде модифицированных диаграмм Айнса – Стретта при различных параметрах тонкостенности.

8. Проведено исследование областей динамической неустойчивости наземных прямолинейных участков нефте- и газопроводов большого диаметра при

различных геометрических и механических характеристиках. Анализ полученных результатов показал:

- построены главные области динамической неустойчивости которые реализуется при коэффициенте $i=1$, то есть при $\omega_{mn} = \frac{\gamma}{2}$. Второстепенные области неустойчивости при $i>1$ имеет значительно меньшую ширину и обычно перекрываются главной областью.

- с увеличением параметра продольной сжимающей силы область динамической неустойчивости расширяется;

- трубы с соотношением $h/R=1/40 - 1/50$ более опасны с позиции динамической устойчивости, чем трубы $h/R=1/20$ и $1/30$. Вероятность возникновения параметрического резонанса в таких трубах увеличивается, за счет расширения области динамической неустойчивости и её резкого смещения вниз, в сторону уменьшения значений γ ;

- с ростом значений коэффициента постели грунта k , область динамической неустойчивости заметно сужается, и смещается в сторону роста значений γ ;

- область динамической неустойчивости при фиксированных геометрических и механических характеристиках для нефтепроводов значительно шире, чем для газопроводов, что означает более высокую вероятность потери динамической устойчивости для нефтепроводов.

9. Полученные в диссертации частные случаи решений для прямолинейного трубопровода хорошо согласуются с решениями других авторов по стержневой теории, и по теории оболочек, что подтверждает надежность полученного аналитического решения.

Рекомендации к практическому применению:

Полученные в диссертации решения могут быть использованы при проектировании магистральных трубопроводов, а так же при проведении технической экспертизы.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Агапкин, В. М. Справочное руководство по расчетам трубопроводов / В. М. Агапкин, С. Н. Борисов, Б. Л. Кривошей. – М.: Недра, 1987. – 190 с.
2. Айнбиндер, А. Б. Расчет магистральных трубопроводов на прочность и устойчивость / А. Б. Айнбиндер, А. Г. Камерштейн. – М.: Недра, 1982. – 343 с.
3. Аксельрад, Э. Л. Расчет трубопроводов / Э.Л.Аксельрад, В.П.Ильин. – Л.: Машиностроение, 1972. – 240 с.
4. Алфутов, Н.А. Основы расчета на устойчивость упругих систем / Н.А. Алфутов. – М.: Машиностроение, 1978. – 310с.
5. Ананьев, И.В. Справочник по расчету собственных колебаний упругих систем / И.В.Ананьев. – М.: Гостехиздат, 1946. – 320с.
6. Андронов, А.А. О колебаниях системы с периодически меняющимися параметрами / А. А. Андронов, М. А. Леонтович // ЖРФХО. – 1927. – т. 59. – С. 115 – 127.
7. Беляев, Н.М. Устойчивость призматических стержней под действием переменных продольных сил / Н.М.Беляев // Инженерные сооружения и строительная механика. – Л.: Изд. «Путь», 1924. – С.27 – 108.
8. Биргер, И.А. Прочность, устойчивость, колебания. В 3 т. Т.3 / И.А.Биргер; под общ. ред. Я.Г.Пановко. – М.: Машиностроение, 1968. – 568 с.
9. Боголюбов, Н.Н. Асимптотические методы в теории нелинейных колебаний / Н.Н.Боголюбов, Ю.А.Митропольский. – М.: Наука, 1974. – 503 с.
10. Болотин, В.В. Динамическая устойчивость упругих систем / В.В.Болотин. – М.: Гос. изд – во технико – теоретической литературы, 1956. – 600 с.
11. Болотин, В.В. Вибрации в технике: монография / под общ. ред. В.В. Болотина. – М.: Машиностроение, 1978. – 352 с.
12. Болотин, В.В. Конечные деформации гибких трубопроводов / В.В.Болотин // Труды московского энергетического института. – 1956. – вып. XIX. – С.272 – 291.

13. Болотин, В.В. Колебания и устойчивость упругой цилиндрической оболочки в потоке сжимаемой жидкости / В.В.Болотин // Инженерный сборник. – 1956. – т. 24. – С. 3 – 16.
14. Болотин, В.В. Некоторые новые задачи динамики оболочек / В.В.Болотин // Расчеты на прочность. – 1959. – №4. – С.331 – 365.
15. Березин, И.С. Методы вычислений. В 2 т. Т.1 / И.С. Березин, Н.П. Жидков. – М., 1962. – 464 с.
16. Бородавкин, П.П. Прочность магистральных трубопроводов / П.П.Бородавкин, А. М. Синюков. – М.: Недра, 1984. – 243 с.
17. Брачковский, Б.З. О динамической устойчивости упругих систем / Б.З.Брачковский // ПММ. – 1942. – Т. IV, вып. 1. – С.31–42.
18. Бреславский, В.Е. Собственные колебания круговой цилиндрической оболочки, находящейся под действием гидростатического давления / В.Е.Бреславский. – М.: Известия АН СССР. – 1956. – №12. – С.117 – 120
19. Булыгин, А.В. Колебания и устойчивость тороидальной оболочки, нагруженной нормальным давлением / А.В.Булыгин // Изв. вузов, Авиационная техника. – 1981. – №2. – С. 18 – 22.
20. Вагнер, В.В. Механизм формирования арочного выброса подземного трубопровода в период паводковых явлений / В.В.Вагнер, А.И.Горковенко // Горные ведомости. – 2008. – №8. – С. 72 – 75.
21. Вайнберг, Д.В. Механические колебания и их роль в технике / Д. В. Вайнберг, Г.С. Писаренко. – М.: Наука, 1965, – 276 с.
22. Власов, В.З. Общая теория оболочек и ее приложения в технике. – М.: Гостехиздат. –1949. – 784 с.
23. Власов, В.З. Строительная механика оболочек / В.З.Власов. – М.: Стройиздат, 1936. – 280 с.
24. Вольмир, А.С. Оболочки в потоке жидкости и газа. Задачи гидроупругости – М.: Наука, 1979. – 320 с.
25. Вольмир, А.С. Колебания оболочки с протекающей жидкостью / А.С.Вольмир, М.С.Грач // Изв. АН СССР.– МТТ, 1973. – №6. – С.162 – 166.

26. Вольмир, А.С. Собственные нелинейные колебания оболочек / А.С.Вольмир, А.А.Логвинская, В.В.Рогалеви́ч // Докл. АН СССР. – 1972. –Т. 205, №2. – С.44 – 46.
27. Вольмир, А.С. Нелинейная динамика пластин и оболочек / А.С.Вольмир. – М.: Наука, 1972. – 432 с.
28. Григолюк, Э. И. Устойчивость и колебания трехслойных оболочек / Э.И.Григолюк, П.П.Чулков. – М.: Машиностроение, 1973. – 172 с.
29. Ганиев, Р.Ф. Колебания твердых тел / Р.Ф.Ганиев, В.О.Кононенко. – М.: Наука, 1976. – 431 с.
30. Гастев, В.А. Поперечные колебания и устойчивость стержней при действии периодически повторяющихся продольных импульсов / В.А. Гастев // Труды Ленинградского института авиаприборостроения, 1949, вып.1.
31. Гладких, П.А. Вибрации в трубопроводах и методы их устранения / П.А.Гладких, С. А.Хачатурян. – М.: Машгиз, 1969. – 230 с.
32. Гольденблат, И.И. Некоторые вопросы колебаний и динамической устойчивости упругих систем / И.И.Гольденблат // сб. статей. Исследовательские работы по инженерным конструкциям. — Стройиздат, 1948. – С. 4 – 12.
33. Гольденвейзер, А.Л. Теория упругих тонких оболочек / А.Л.Гольденвейзер. – М.: Наука, 1976. – 512 с.
34. Гольденвейзер, А.Л. Свободные колебания тонких упругих оболочек / А.Л.Гольденвейзер, Б.Б.Лидский, П.Е.Товстик. – М.: Наука, 1979. – 384 с.
35. Горковенко, А.И. Высотное положение вертикальной арки при воздействии гидростатических сил выталкивания / А.И.Горковенко // Известия вузов «Нефть и газ». – Тюмень: ТюмГНГУ, 2006г., №2. – С.55 – 58.
36. Григолюк, Э.И. Устойчивость оболочек / Э.И.Григолюк, В.В.Кабанов. –М.: Наука, 1978. – 360 с.
37. Двайт, Г.Б. Таблицы интегралов и другие математические формулы. – М.: Наука. 1983. – 176 с.

38. Денисов, Г.В. Собственные колебания заглубленных магистральных трубопроводов при сейсмическом воздействии / Г.В. Денисов, В.В. Лалин // Трубопроводный транспорт: теория и практика. – 2013. – № 4(38).
39. Доценко, П.Д. О постановке задач устойчивости и колебаний трубопроводов с жидкостью / П.Д.Доценко. – В. кн. Динамика систем, несущих подвижную распределительную нагрузку. – Харьков, 1978. – вып. 1. – С. 21–32.
40. Ефимов, А. А. Собственные колебания морского глубоководного нефтепровода большого диаметра / А.А. Ефимов // Вестник гражданских инженеров. – СПб.: СПбГАСУ, 2008. – № 4 (17). – С. 26–29.
41. Ефимов, А.А. Динамическая устойчивость стальных газопроводов при подводной прокладке / А. А. Ефимов, В. Г. Соколов // Изв. вузов, Нефть и газ. – 2007. – №4. – С. 47–51.
42. Ефимов, А.А. Колебания и устойчивость магистральных газопроводов при подводной прокладке / А.А.Ефимов, В.Г.Соколов // Вестник гражданских инженеров. – СПб.: СПбГАСУ, 2007. – № 1 (10). – С. 36–41.
43. Ефимов, А.А. Свободные колебания подводных нефтепроводов / А.А.Ефимов // Известия, вузов. Нефть и газ. – 2008. – №1. – С. 49–56.
44. Ефимов, А.А. Колебания и динамическая устойчивость глубоководных нефтегазопроводов: дис. ... канд. техн. наук: 05.23.17 / Ефимов Александр Алексеевич. – СПб., 2008. – 95 с.
45. Иванюта, Э.И. О влиянии тангенциальных сил инерции на величину частоты свободных колебаний тонкой цилиндрической оболочки / Э.И.Иванюта, Р.М.Финкельштейн // Исследования по упругости и пластичности. – Л.: ЛГУ, 1963. вып.2 – С. 212 – 215.
46. Ильгамов, М.А. Колебания упругих оболочек, содержащих жидкости газ / М.А.Ильгамов. – М.: Наука, 1969. – 184 с.
47. Ильин, В.П. Применение полубезмоментной теории к задачам расчета тонкостенных труб // Всб.: Проблемы расчета пространственных конструкций // Труды МИСИ. – М.: 1980. – С.45–55.

48. Ильин В.П. О применении полубезмоментной теории к определению частот свободных колебаний круговой цилиндрической оболочки / В.П.Ильин, О.Б.Халецкая // Всб.: Исследования по расчету строительных конструкций // ТрудыЛИСИ, – 1974. – №89. – С.49–60.
49. Ишемгужин, И.Е. Демпфирование параметрических колебаний трубопровода [Электронный ресурс] / И.Е.Ишемгужин, Т.И. Габбасов, И.А.Шаммазов, М.Р. Ситдииков, М.А. Кочекон // Электронный научный журнал «Нефтегазовое дело». – 2011, – № 3. – С.84 – 93. – Режим доступа: http://ogbus.ru/authors/IshemguzhinIE/IshemguzhinIE_2.pdf
50. Ильин, В. П. Исследование параметрического резонанса в трубопроводах, содержащих пульсирующий поток жидкости / В.П.Ильин, В.Г.Соколов // Вопросы механики строительных конструкций и материалов. Межвузовский тематический сборник. – Л., 1987. – С. 6 – 10.
51. Ильин, В.П. О свободных колебаниях цилиндрических оболочек с учетом влияния протекающей жидкостью / В.П.Ильин, В.Г.Соколов // Известия вузов, Строительство и архитектура. – 1979. – №12. – С. 26 – 31.
52. Ильин, В.П. Параметрические колебания цилиндрических оболочек с потоком жидкости / В.П.Ильин // Вестник российской академии Архитектуры и строит, наук. – 1996. – Вып.1 – С.15 – 21.
53. Камерштейн, А.Г. Расчет трубопроводов на прочность. Справочная книга / А.Г.Камерштейн, В.В.Рождественский, М. Н. Ручимский. – М.: Недра, 1969. – 440 с.
54. Каплан, Ю.И. Балочные колебания цилиндрических оболочек с учетом деформации контура / Ю.И.Каплан // Прикладная механика. – 1968. – №4.– С. 11–18.
55. Карпов, В. В. Геометрически нелинейные задачи для пластин и оболочек и методы их решения / В. В. Карпов. – М.: СПб: Изд. АСВ, 1999. – 155 с.
56. Картвелишвили, Н. А. Поперечные колебания и динамическая прочность напорных трубопроводов в связи с кавитационными явлениями в турбинах / Н. А. Картвелишвили // Изв. Всесоюзного НИИ Гидротехники. – 1958. – Т. 49. – С. 31–53.

57. Катаев, В. П. Динамика трубопроводов с нестационарными потоком жидкости / В.П.Катаев, А.Е.Плуталов // Изв. вузов. Авиационная техника. – 1971. – № 2. – С. 95–97.
58. Катаев, В.П. Динамическая устойчивость трубопровода с потоком жидкости / В.П.Катаев // Динамика и прочность машин. – 1970. – ТХІV, В.П.– С. 116–120.
59. Ковревский, А. П. Экспериментальное и теоретическое исследование колебаний труб, содержащих протекающую жидкость / А. П. Ковревский // Изв. вузов. Энергетика. – 1964. – № 4. – С. 89–94.
60. Ковревский, А.П. Динамика трубопроводов, содержащих неустановившийся поток жидкости / А.П.Ковревский // Прикл. мех. – 1970. – Т. VI, вып. 8. – С. 97–102.
61. Коллатц, Л. Задачи на собственные значения / Л. Коллатц. – М.: Наука, 1968, – 503 с.
62. Крылов, Н.М. Исследование явлений резонанса при поперечных колебаниях стержней, находящихся под воздействием периодических нормальных сил / Н.М.Крылов, Н.Н.Боголюбов. – М.: ОНТИ. исследование колебаний конструкций. – 1935. – С.28 – 40.
63. Кукуджанов, С.Н. О свободных колебаниях предварительно напряженной цилиндрической оболочки переменной толщины / С.Н.Кукуджанов // Прикл. мех. – 1983. – Т. XIX, № 2. – С. 33–37.
64. Кукуджанов, С.Н. О влиянии нормального давления на частоты собственных колебаний цилиндрических оболочек / С.Н.Кукуджанов // Механика твердого тела, 1968. – №3. – С. 14–20.
65. Кукуджанов, С.Н. Колебания и динамическая устойчивость оболочек вращения, близких к цилиндрическим, находящихся под действием нормального давления и меридиональных усилий / С.Н.Кукуджанов // Изв. РАН, МТТ. – 2006. – № 2. – С. 48–59.
66. Кукуджанов, С.Н. О влиянии неоднородного кручения и нормального давления на собственные колебания цилиндрической оболочки /

- С.Н.Кукуджанов // Строительная механика и расчет сооружений. – 1987. – №3. – С. 43–47.
67. Кукуджанов, С.Н. О влиянии нормального давления на частоты собственных колебаний оболочек вращения, близких к цилиндрическим / С.Н. Кукуджанов // Изв. РАН, МТТ. – 1996. – № 6. – С. 121–126.
68. Лалин, В.В. Динамическое поведение бесконечных стержневых элементов на упруго-вязком основании под действием точечного источника возмущения / В.В. Лалин, Г.В. Денисов // Научный вестник Воронежского ГАСУ. Строительство и архитектура. – 2013. – № 2(30). – С.105 – 113.
69. Лойцянский, Л. Г. Механика жидкости и газа / Л.Г.Лойцянский. – М.: Наука, 1987. – 840 с.
70. Магистральные трубопроводы: СНиП 2.05.06–2010 первая редакция. – М.: Москва, 2010. – 60 с.
71. Матвеев, Е.П. Собственные колебания криволинейных участков трубопроводов с протекающей жидкостью при разных закреплениях на концах: дис. ... канд. техн. наук: 05.23.17 / Матвеев Евгений Петрович. – Спб., 2010. – 126 с.
72. Михайлов, Б.К. Пластины и оболочки с разрывными параметрами: монография / Б.К. Михайлов; под ред В.А. Лебедева. – Л.: Изд-во Ленингр. ун-та, 1980. – 196 с.
73. Мовчан, А.А. Об одной задаче устойчивости трубы при протекании через нее жидкости / А.А.Мовчан // ПММ.–1965. – вып. 4. – С. 760–762.
74. Муштари, Х. М. Нелинейная теория упругих оболочек / Х.М.Муштари, К.З.Галимов. – Казань: Таткнигоиздат, 1957. – 520 с.
75. Мухин, А.А. Динамический критерий устойчивости трубопровода с протекающей жидкостью / А.А.Мухин // Изв. АН СССР, Механика. – 1965. – №3. – С. 154–155.
76. Натанзон, М. С. Параметрические колебания трубопровода, возбуждаемые пульсирующим расходом жидкости / М. С. Натанзон // Изв. АН СССР, Мех. и маш. – 1962. – № 4. – С.42–46.

77. Новичков, Ю. Н. Исследование спектров частот собственных колебаний цилиндрических оболочек, содержащих сжимаемую жидкость / Ю.Н.Новичков // VI Всесоюзная конференция по теории оболочек и пластинок. – М.: Наука, 1966, – С. 600 – 606.
78. Новожилов, В.В. Теория тонких оболочек / В.В.Новожилов. – Л.: Судпрогаз, 1962. – 430 с.
79. Нормы расчета на прочность оборудования трубопроводов атомных Энергетических установок ПНАЭ Г–7–002–86. М.: Энергоатомиздат, 1989, –525 с.
80. Индейкин, А. В. Динамическая устойчивость внецентренно сжатых тонкостенных стержней металлических конструкций / А.В. Индейкин // Известия ПГУПС. – 2008. – вып. 4. – С. 23 – 33.
81. Огибалов, П.М. Вопросы динамики и устойчивости оболочек / П.М. Огибалов. – М.: Изд-во Моск.Ун-та, 1963. – 418 с.
82. Ониашвили, О.Д. Некоторые динамические задачи теории оболочек / О.Д.Ониашвили. – М.: Изд. АН СССР. – 1957. – 195 с.
83. Ониашвили, О.Д. О динамической устойчивости оболочек / О.Д.Ониашвили // Сообщения АН Груз. ССР. – 1950. – №3. – С.3 – 12.
84. Орлов, В.А. Трубопроводные сети. Автоматизированное сопровождение проектных разработок: Учебное пособие. – СПб.: Издательство "Лань", 2015. – 160 с.
85. Пановко, Я.Г. Основы прикладных теорий колебаний / Я.Г. Пановко // М.: Машиностроение, 1967. – 316 с.
86. Пановко Я. Г. Устойчивость и колебания упругих систем: Современные концепции, парадоксы и ошибки / Я.Г. Пановко, И. И. Губанова 6–е изд. – М.: КомКнига, 2007. – 352 с.
87. Постнов, В.А. Вибрация корабля / В.А.Постнов, В.С.Калинин, Д.М.Ростовец. – Л.: Судостроение, 1983. – 248 с.
88. Расчеты на прочность стальных трубопроводов: СНиП 2.04.12 86. – М.: Госстрой, 1986. – 13 с.

89. Разов, И.О. Исследования свободных колебаний наземных тонкостенных газопроводов большого диаметра / Разов, И.О. // Вестник гражданских инженеров. 2013. №4– С.100–104.
90. Разов, И.О. Параметрические колебания и динамическая устойчивость магистральных газопроводов при наземной прокладке / Разов И.О // Вестник гражданских инженеров. 2014 №2.
91. Разов, И.О. Напряжения и перемещения на контактной поверхности наземного трубопровода большого диаметра / И.О. Разов // Вестник гражданских инженеров. – 2015. – №3. – С. 58-62.
92. Разов, И.О. Исследование свободных колебаний тонкостенных трубопроводов большого диаметра при наземной прокладке / И.О.Разов // Актуальные проблемы строительства, экологии и энергосбережения в условиях Западной Сибири: сборник материалов международной научно-практической конференции. – В 3-х т. – Т. II. – Тюмень: РИО ТюмГАСУ, 2014. – 224 с.
93. Саргсян, А.Е. Строительная механика. Основы теории с примерами расчетов / А.Е.Саргсян, А.Т.Демченко, Н.В. Дворянчиков, Г.А.Джинчвелашвили; Учебник/Под. ред. А.Е. Саргсяна. – 2–е изд., испр. и доп. – М.: Высш. шк., 2000. – 416 с.
94. Светлицкий, В.А. Колебаний гибких труб с протекающей жидкостью / В.А.Светлицкий // Известия вузов. – Машиностроение, 1966. – №3
95. Светлицкий, В.А. Нелинейные уравнения движения тонких балок / В.А.Светлицкий // Известия вузов. – Машиностроение, 1969. – №6
96. Светлицкий, В.А. Малые колебания труб с протекающей жидкостью в плоскости кривизны / В.А.Светлицкий, Н.К.Купесов // Известия вузов. – Машиностроение, 1970. – №5.
97. Светлицкий, В.А. О критических скоростях установившегося потока жидкости / В.А.Светлицкий, Р.А.Мирошник // Прикл.мех. – 1973. – Т.9, №5.
98. Светлицкий, В.А. Механика трубопроводов и шлангов / В.А.Светлицкий. – М.: Машиностроение, 1982. – 280 с.

99. Светлицкий, В.А. Механика стержней: в 2 ч. / В.А.Светлицкий. – М.: Высшая школа, 1987. – ч. I. – 316 с.; ч. II. – 302 с.
100. Соколов, В. Г. Свободные колебания наземных газопроводов, обжатых продольной силой, с учетом упругого основания грунта / В.Г. Соколов, И.О.Разов // Вестник гражданских инженеров. – 2013. – № 1(36). – С.29–32.
101. Соколов, В.Г. Свободные колебания и статическая устойчивость нефтепровода большого диаметра с учетом потока жидкости, продольной сжимающей силы и упругого основания / В.Г. Соколов, И. О. Разов // Вестник гражданских инженеров. – 2014. – №1. – С.49 – 53.
102. Соколов, В.Г. Параметрические колебания и динамическая устойчивость магистральных газопроводов при наземной прокладке / Соколов В.Г., Разов И. О. // Вестник гражданских инженеров. 2014 №2 – С.65–68.
103. Соколов, В.Г. Колебания, статическая и динамическая устойчивость трубопроводов большого диаметра: дис. ... доктор. техн. наук: 05.23.17 / Соколов Владимир Григорьевич. – Спб., 2011. – 314 с.
104. Соколов, В.Г. Колебания, статическая и динамическая устойчивость трубопроводов большого диаметра: автореф. ... доктор. техн. наук: 05.23.17 / Соколов Владимир Григорьевич. – Спб., 2011. – 38 с.
105. Толстов, Г.П. Ряды Фурье. Изд. второе исправленное. – М.: Физматгиз, 1960. – 360 с.
106. Тимошенко, С. П. Колебания в инженерном деле / С.П.Тимошенко. – М.: Наука, 1967. – 444 с.
107. Феодосьев, В. И. О колебаниях и устойчивости трубы при протекании через нее жидкости / В. И. Феодосьев // Инж. сборник. – 1952. – Т.10.– С. 169 – 170.
- 108.Филин, А.П. Прикладная механика твердого деформируемого тела / А.П.Филин. – М.: Наука, 1981. – Т.3. – 480 с.
- 109.Филиппов, А.П. Колебания механических систем / А.П.Филиппов. Киев.: Наук,думка, 1955. – 96 с.
- 110.Флюгге, В. Статика и динамика оболочек / В. Флюгге. – М.: Госстройиздат, 1961. – 306 с.

111. Челомей, С. В. О динамической устойчивости упругих систем / С.В.Челомей *ИМ.*: Докл. АН СССР. – 1980. – Т. 252, – № 2. – С.307–310.
112. Чижов, В.Ф. Динамика и устойчивость трубопровода / В.Ф.Чижов // Строительная механика и расчет сооружений. – 1987. – №4. – С.33 – 34.
113. Щеглов, Г.А. Динамическая устойчивость прямого трубопровода с протекающей жидкостью под действием двух параметрических возбуждений: автореф. дис. ... канд. физ. – мат. наук: 05.13.16 / Щеглов Георгий Александрович; [МГТУ им. Баумана]. – М., 1999. – 15 с.
114. Янке, Е. Специальные функции / Е. Янке, Ф. Эмде, Ф. Леш. – М.: Наука, 1964. – 344 с.
115. Arnold, R.N. Flexural vibration of the walls of thin cylindrical shells having free supported ends / R.N. Arnold, G.B. Warburton // Proc.Of the Roy. Soc. Of London. – 1949. – Ser A, Vol.197.
116. Ashley, H. Bending vibrations of a pipeline, containing flowing fluid [Text] / H.Ashley, G.Haviland // Journ. Appl. Mech. – 1950. – vol 17, №3. – P. 229– 232.
117. Benjamin, T.B. Dynamics of 2 system of articulated pipes conveying fluid. I Theory. II Experiments / T.B.Benjamin // Proc. Of the Roy. Soc. Ser A, vol 261, 1961, London, p.457 – 499.
118. Chany, H.H. On the flexural vibrations of a pipeline containing flowing fluid / H.H.Chany, T.W. India // Proc. Theoret. and Appl. Mech. India. – 1957. – P.254.
119. Chen, H. Vibration of a Pipeline Containing Fluid Flow with Elastic Support / Chen, H. // M. Sc. Thesis, Ohio University. – 1991. – P. 61.
120. Chen, S. S. Dynamic stability of tube conveying fluid / S.S. Chen // Journ. Of the Eng. Mech. Division. – October, 1971. – Vol. 97. – P. 1469 – 1485.
121. Chen, S. S. Free vibration of fluid conveying cylindrical sheells / S. S. Chen, G. S. Rosenberg // Journ of Eng of India. – 1974. – vol. 9. – №2. – P. 420 – 526.
122. Djondjorov, P. Dynamic stability of fluid conveying cantilevered pipes on elastic foundations / Djondjorov, P., Vassilev, V., and Dzhupanov // Journal of Sound and Vibration. – 2001. Vol. 247(3) – P.537 – 546.

123. Djondjorov, P. Dynamic stability of pipes partly resting on Winkler foundation / Djondjorov, P. // Journal of Theoretical and Applied Mechanics – 2001. Vol. 31(3) – P.101 – 112.
124. Djondjorov, P. On the critical velocities of pipes on variable elastic foundations / Djondjorov, P // Journal of Theoretical and Applied Mechanics. – 2001. Vol. 31. P.73 – 81.
125. Doare, O. Local and global instability of fluid–conveying pipes on elastic foundations / O. Doare, E. de Langre // Journal of Fluids and Structures. – 2002. Vol.16 – P.1 – 14.
126. Donnel, L. H. A new theory for the buckling of thin cylinders under axial compression and bending / L. H. Donnel // Trans. ASME. – November, 1934. – Vol. 56. – №11. – P.86 – 94.
127. Fung, Y. C. On the vibrations of thin cylindrical shells under internal pressure / Y. C Fung // J. Aeronaut. Sci. – 1957. – Vol. 24. – № 9.
128. Harings, I.A. Instability of thin–walled cylinders subjected to internal pressure / I.A Harings // Philips Research Report. – 1952. – Vol. 7. – P. 112.
129. Hsu, C. S. On the parametric excitation of a dynamic system having multiple degrees of freedom / C. S. Hsu // J. Appl. Mech. – 1963. – Vol. 30, № 3. – P.367 –372.
130. Kohli, A.K. Vibration analysis of straight and curved tubes conveying fluid by means of straight beam finite elements / A.K.Kohli, B.S.Nakra // Journ. of sound and vibration. – 1984. – 93(2). – P.307 – 311.
131. Love, A.B.H. On small free vibrations and deformation of thin elastic shell / A.B.H.Love // Phil. Trans. Roy. Soc. – 1988. – Vol.17 9(A). – P. 520
132. Lottati, I. The effect of an elastic foundation and of dissipative forces on the stability of fluid–conveying pipes / I. Lottati, A. Kornecki // Journal of Sound and Vibration. – 1986. – Vol. 2 (109). – P. 327 – 338.
133. Long, R. A. Experimental and theoretical study of transverse vibration of a tube containing flowing fluid / R. A. Long // Journ. Of Appl. Mech. – 1955. – Vol. 22. –P. 65 – 68.

134. Lee, S. Y. Stability of a Timosenko Beam Resting on a Winkler Elastic Foundation // S. Y. Lee and Y. H. Kuo and F. Y. Lin // Journal of Sound and Vibration. – 1992. Vol. 153 (2). – P– 193–202.
135. Lilkova–Markova, S.V. Vibration of a pipe on elastic foundation / S.V Lilkova–Markova and D.S. Lolov // Sadhana – 2004. №29 (3). – P. 259–262.
136. Niordson, R.I. Vibrations of a cylindrical tube containing flowing fluid / R.I.Niordson // Kungliga Tekniska Hogskolans Hongligar. – 1953. – №73.
137. Nawras, H.M. Effect of a Viscoelastic Foundation on the Dynamic Stability of a Fluid Conveying Pipe // Nawras, H.M. // International Journal of Applied Science and Engineering. – 2014. Vol. 12 (1). – P. 59 – 74.
138. Mahrenholtz, O.H. Beam on viscoelastic foundation: an extension of Winkler’s model // Mahrenholtz, O. H. // Archive of Applied Mechanics – 2010. Vol. 80(1). P – 93–102.
139. Paidoussis, M. P. Dynamic stability of pipes conveying fluid / M.P.Paidoussis, N.T.Issid // Journ. of sound and vibr. – 1974. – 33 (3). – P. 264 – 294.
140. Paidoussis, M.P. Experiments on parametric resonance of pipes containing pulsate flow / M.P.Paidoussis, N.T.Issid // Trans of ASME. – June 1976, – P. 198–202.
141. Paidoussis, M.P. Flutter of thin cylindrical shells conveying fluid / M.P.Paidoussis, J.P.Denise // Journ .of sound and vibrations. – 1972. – Vol. 20(1). – P.9 – 26.
142. Paidoussis, M.P. Flow–induced instabilities of cylindrical structures / M.P.Paidoussis // Appl.Mech.Reviws. – 1987.–Vol.40. – P. 162 – 175.
143. Smith, T.E. Stability of a beam on an elastic foundation subjected to follower forces / T.E Smith, G. Hermann // Journal of applied mechanics. – 1972 – №39. P.628 – 629.
144. Stein, R. A. Vibration of pipes containing flowing fluids / R. A. Stein, M. W. Torbiner // Journ. of Appl. Mech. – 1970. – Vol. 92. – P. 906 – 916.
145. Weaver, D.S. On the dynamic stability of fluid conveying pipes / D.S. Weaver, T.E. Unny // Journ .Appl. Mech. – 1973. – Vol.40. – P.51 – 54.

ПРИЛОЖЕНИЕ А

Определение параметров контактной поверхности для газопроводов при различных геометрических характеристиках и коэффициентах постели грунта

Коэффициент постели назначен в соответствии с классификацией [93].

$$k = 0,1 \cdot 10^7 \text{ Н/м}^3 \text{ – песок свеженасыпанный.}$$

Таблица А.1

Диаметр D , мм	Масса трубы, кН/м	$Q_{общ}$, кН/м	Параметры контактной поверхности			
			φ_0	b , мм	Δ_0 , мм	Φ_0 , кН/м ²
720	2,46	2,46	0,305	108,26	16,79	16,79
1020	3,51	3,51	0,272	137,25	18,93	18,93
1220	4,17	4,17	0,256	154,61	20,03	20,03
1420	4,85	4,854	0,244	171,20	21,05	21,05

$$k = 0,5 \cdot 10^7 \text{ Н/м}^3 \text{ – песок слежавшийся.}$$

Таблица А.2

Диаметр D , мм	Масса трубы, кН/м	$Q_{общ}$, кН/м	Параметры контактной поверхности			
			φ_0	b , мм	Δ_0 , мм	Φ_0 , кН/м ²
720	2,46	2,46	0,179	63,96	5,74	28,72
1020	3,51	3,51	0,159	80,92	6,47	32,37
1220	4,17	4,17	0,150	91,07	6,85	34,25
1420	4,85	4,85	0,142	100,78	7,20	36,00

$k = 1,0 \dots 10,0 \cdot 10^7 \text{ Н/м}^3$ – песок утрамбованный. [93]

Таблица А.3

$k = 1,0 \cdot 10^7 \text{ Н/м}^3$							
Диаметр D , мм	Масса трубы,		$Q_{общ}$, кН/м	Параметры контактной поверхности			
	кН/м			φ_0	b , мм	Δ_0 , мм	Φ_0 , кН/м ²
720	2,46		2,46	0,142	50,87	3,62	36,18
1020	3,51		3,51	0,126	64,33	4,08	40,79
1220	4,17		4,17	0,119	72,38	4,31	43,15
1420	4,85		4,85	0,113	80,09	4,54	45,36

Таблица А.4

$k = 3,0 \cdot 10^7 \text{ Н/м}^3$							
Диаметр D , мм	Масса трубы,		$Q_{общ}$, кН/м	Параметры контактной поверхности			
	кН/м			φ_0	b , мм	Δ_0 , мм	Φ_0 , кН/м ²
720	2,46		2,46	0,098	35,33	1,74	52,18
1020	3,51		3,51	0,088	44,67	1,96	58,83
1220	4,17		4,17	0,082	50,25	2,07	62,23
1420	4,85		4,854	0,078	55,59	2,18	65,42

Определение параметров контактной поверхности нефтепроводов при различных геометрических характеристиках и коэффициентах постели грунта

Таблица А.5

$k = 0,1 \cdot 10^7 \text{ Н/м}^3$							
Диаметр D , мм	Масса, кН/м		$Q_{общ}$, кН/м	Параметры контактной поверхности			
	трубы	нефти		φ_0	b , мм	Δ_0 , мм	Φ_0 , кН/м ²
720	2,46	3,26	5,72	0,405	141,69	29,46	29,46

продолжение таблицы А.5

$k = 0,1 * 10^7 \text{ Н/м}^3$							
Диаметр D , мм	Масса, Н/м		$Q_{общ}$, кН/м	Параметры контактной поверхности			
	трубы	нефти		φ_0	b , мм	Δ_0 , мм	Φ_0 , кН/м ²
1020	3,51	6,53	10,04	0,387	192,43	38,17	38,17
1220	4,17	9,34	13,51	0,379	225,78	43,85	43,85
1420	4,85	13,77	18,62	0,381	264,21	51,61	51,61

Таблица А.6

$k = 0,5 * 10^7 \text{ Н/м}^3$							
Диаметр D , мм	Масса, кН/м		$Q_{общ}$, кН/м	Параметры контактной поверхности			
	трубы	нефти		φ_0	b , мм	Δ_0 , мм	Φ_0 , кН/м ²
720	2,46	3,26	5,72	0,237	84,38	10,07	50,37
1020	3,51	6,53	10,04	0,226	114,41	13,05	65,27
1220	4,17	9,34	13,51	0,222	134,15	15,00	74,98
1420	4,85	13,77	18,62	0,223	157,01	17,65	88,26

Таблица А.7

$k = 1,0 * 10^7 \text{ Н/м}^3$							
Диаметр D , мм	Масса, кН/м		$Q_{общ}$, кН/м	Параметры контактной поверхности			
	трубы	нефти		φ_0	b , мм	Δ_0 , мм	Φ_0 , кН/м ²
720	2,46	2,46	5,72	0,188	67,20	6,35	63,46
1020	3,51	3,51	10,04	0,180	91,09	8,22	82,23
1220	4,17	4,17	13,52	0,176	106,80	9,45	94,46
1420	4,85	4,85	18,63	0,177	125,00	11,12	111,20

Таблица А.8

$k = 3,0 \cdot 10^7 \text{ Н/м}^3$							
Диаметр D , мм	Масса, кН/м		$Q_{\text{общ}}$, кН/м	Параметры контактной поверхности			
	трубы	трубы		φ_0	b , мм	Δ_0 , мм	Φ_0 , кН/м ²
720	2,46	2,46	5,72	0,130	46,74	3,05	91,53
1020	3,51	3,51	10,04	0,125	63,34	3,95	118,60
1220	4,17	4,17	13,52	0,122	74,25	4,54	136,24
1420	4,85	4,85	18,63	0,123	86,91	5,35	160,37

ПРИЛОЖЕНИЕ Б

Методика перемножение рядов Фурье $\Psi(\theta)w(\xi, \theta, t)$ и их дифференцирование.

Для решения поставленной задачи, сначала необходимо перемножить ряды Фурье, а затем продифференцировать их произведение. В дальнейшем будем рассматривать ряды Фурье вида:

$$f(\theta) = a_0 + \sum_{k=1}^{\infty} a_k \cos k\theta .$$

$$a_0 = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(x) dx; \quad a_m = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} f(x) \cos mx dx .$$

Первоначально рассмотрим частные суммы, содержащие \hat{m} слагаемых

$$S_1 = a_0 + \sum_{k=1}^{\hat{m}} a_k \cos k\theta = a_0 + \sum_{k=1}^{\hat{m}} a_k c_k ; \tag{Б.1}$$

$$S_2 = b_0 + \sum_{k=1}^{\hat{m}} b_k \cos k\theta = b_0 + \sum_{k=1}^{\hat{m}} b_k c_k ; \quad c_k = \cos k\theta .$$

Произведение этих сумм вычисляется перемножением по общим правилам

$$S_1 S_2 = a_0 b_0 + a_0 \sum_{k=1}^{\hat{m}} b_k c_k + b_0 \sum_{k=1}^{\hat{m}} a_k c_k + \sum_{k=1}^{\hat{m}} a_k c_k \sum_{k=1}^{\hat{m}} b_k c_k . \tag{Б.2}$$

$$Z = S_1 S_2 = z_0 + \sum_{k=1}^{\hat{m}} z_k \cos k\theta . \tag{Б.3}$$

Произведение косинусов определяется известным выражением

$$\cos m\theta \cos n\theta = \frac{1}{2} (\cos (m-n)\theta + \cos (m+n)\theta) .$$

$$c_m c_n = \frac{1}{2} (c_{m-n} + c_{m+n}); \quad m = n, \quad c_m^2 = \frac{1}{2} (1 + c_{2m}) . \tag{Б.4}$$

В качестве первого примера рассмотрим перемножение сумм при $\hat{m} = 2$.

$$S_1 = a_0 + a_1 c_1 + a_2 c_2 ;$$

$$S_2 = b_0 + b_1 c_1 + b_2 c_2 .$$

С помощью (Б.2):

$$S_1 S_2 = a_0 b_0 + a_0 (b_1 c_1 + b_2 c_2) + b_0 (a_1 c_1 + a_2 c_2) + (a_1 c_1 + a_2 c_2)(b_1 c_1 + b_2 c_2) .$$

Раскрывая скобки с помощью (Б.4) получаем:

$$S_1 S_2 = a_0 b_0 + (a_0 b_1 + a_1 b_0) c_1 + (a_0 b_2 + a_2 b_0) c_2 + \\ + \frac{1}{2} a_1 b_1 (1 + c_2) + \frac{1}{2} (a_1 b_2 + a_2 b_1) (c_1 + c_3) + \frac{1}{2} a_2 b_2 (1 + c_4).$$

Приводя подобные получаем:

$$S_1 S_2 = a_0 b_0 + \frac{1}{2} (a_1 b_1 + a_2 b_2) + \\ + [a_0 b_1 + a_1 b_0 + \frac{1}{2} (a_1 b_2 + a_2 b_1)] c_1 + \quad (*) \\ + (a_0 b_2 + a_2 b_0 + \frac{1}{2} a_1 b_1) c_2 + \\ + \frac{1}{2} (a_1 b_2 + a_2 b_1) c_3 + \frac{1}{2} a_2 b_2 c_4.$$

Первые три строчки содержат коэффициенты в функции z :

$$z_0 = a_0 b_0 + \frac{1}{2} (a_1 b_1 + a_2 b_2);$$

$$z_1 = a_0 b_1 + a_1 b_0 + \frac{1}{2} (a_1 b_2 + a_2 b_1);$$

$$z_2 = a_0 b_2 + a_2 b_0 + \frac{1}{2} a_1 b_1.$$

Из этого выражения видно, что формулы для коэффициентов состоят из двух частей.

В первой – попарные произведения коэффициентов с индексом ноль на коэффициент из другой суммы с индексом коэффициента в выражении функции z .

Во второй – коэффициенты, которые входят в выражения при вычисления произведений косинусов.

Слагаемые в последней строке выражения (*) не имеют практического смысла, поскольку выходят за пределы рассматриваемых значений $\hat{m} = 2$.

Для того, чтобы выявить общие закономерности формирования выражений для коэффициентов z_k рассмотрим перемножение сумм при $\hat{m} = 5$.

$$S_1 = a_0 + a_1 c_1 + a_2 c_2 + a_3 c_3 + a_4 c_4 + a_5 c_5;$$

$$S_2 = b_0 + b_1 c_1 + b_2 c_2 + b_3 c_3 + b_4 c_4 + b_5 c_5;$$

$$Z = z_0 + z_1 c_1 + z_2 c_2 + z_3 c_3 + z_4 c_4 + z_5 c_5.$$

Будем вычислять произведение, рассматривая слагаемые в S_1 как вектор строку, а в S_2 – как вектор столбец. Результат перемножения представим в виде следующей матрицы (будем называть её матрицей произведений):

$$\begin{array}{cccccc}
a_0b_0 & a_1b_0c_1 & a_2b_0c_2 & a_3b_0c_3 & a_4b_0c_4 & a_5b_0c_5 \\
a_0b_1c_1 & a_1b_1c_1c_1 & a_2b_1c_2c_1 & a_3b_1c_3c_1 & a_4b_1c_4c_1 & a_5b_1c_5c_1 \\
a_0b_2c_2 & a_1b_2c_1c_2 & a_2b_2c_2c_2 & a_3b_2c_3c_2 & a_4b_2c_4c_2 & a_5b_2c_5c_2 \\
a_0b_3c_3 & a_1b_3c_1c_3 & a_2b_3c_2c_3 & a_3b_3c_3c_3 & a_4b_3c_4c_3 & a_5b_3c_5c_3 \\
a_0b_4c_4 & a_1b_4c_1c_4 & a_2b_4c_2c_4 & a_3b_4c_3c_4 & a_4b_4c_4c_4 & a_5b_4c_5c_4 \\
a_0b_5c_5 & a_1b_5c_1c_5 & a_2b_5c_2c_5 & a_3b_5c_3c_5 & a_4b_5c_4c_5 & a_5b_5c_5c_5
\end{array} \tag{Б.5}$$

Расстановка индексов в этой матрице подчиняется определенной логике и легко контролируется, что гарантирует правильность всех последующих результатов. В каждой строке содержатся коэффициенты первой суммы, а в каждом столбце – второй. Далее необходимо вычислить произведения косинусов с помощью (Б.4). Результат представим в виде матрицы вычисления коэффициентов (Б.6).

Матрица вычисления коэффициентов

$$\begin{array}{cccccc}
a_0b_0 & a_1b_0c_1 & a_2b_0c_2 & a_3b_0c_3 & a_4b_0c_4 & a_5b_0c_5 \\
a_0b_1c_1 & \frac{a_1b_1}{2}(1+c_2) & \frac{a_2b_1}{2}(c_1+c_3) & \frac{a_3b_1}{2}(c_2+c_4) & \frac{a_4b_1}{2}(c_3+c_5) & \frac{a_5b_1}{2}(c_4+c_6) \\
a_0b_2c_2 & \frac{a_1b_2}{2}(c_1+c_3) & \frac{a_2b_2}{2}(1+c_4) & \frac{a_3b_2}{2}(c_1+c_5) & \frac{a_4b_2}{2}(c_2+c_6) & \frac{a_5b_2}{2}(c_3+c_7) \\
a_0b_3c_3 & \frac{a_1b_3}{2}(c_2+c_4) & \frac{a_2b_3}{2}(c_1+c_5) & \frac{a_3b_3}{2}(1+c_6) & \frac{a_4b_3}{2}(c_1+c_7) & \frac{a_5b_3}{2}(c_2+c_8) \\
a_0b_4c_4 & \frac{a_1b_4}{2}(c_3+c_5) & \frac{a_2b_4}{2}(c_2+c_6) & \frac{a_3b_4}{2}(c_1+c_7) & \frac{a_4b_4}{2}(1+c_8) & \frac{a_5b_4}{2}(c_1+c_9) \\
a_0b_5c_5 & \frac{a_1b_5}{2}(c_4+c_6) & \frac{a_2b_5}{2}(c_3+c_7) & \frac{a_3b_5}{2}(c_2+c_8) & \frac{a_4b_5}{2}(c_1+c_9) & \frac{a_5b_5}{2}(1+c_{10})
\end{array} \tag{Б.6}$$

$$z_0 = a_0b_0 + \frac{1}{2}(a_1b_1 + a_2b_2 + a_3b_3 + a_4b_4 + a_5b_5);$$

$$z_1 = a_0b_1 + a_1b_0 + \frac{1}{2}(a_1b_2 + a_2b_1 + a_2b_3 + a_3b_2 + a_3b_4 + a_4b_3 + a_5b_4 + a_4b_5);$$

$$z_2 = a_0b_2 + a_2b_0 + \frac{1}{2}(a_1b_3 + a_3b_1 + a_2b_4 + a_4b_2 + a_3b_5 + a_5b_3 + a_1b_1);$$

$$z_3 = a_0b_3 + a_3b_0 + \frac{1}{2}(a_1b_4 + a_4b_1 + a_2b_5 + a_5b_2 + a_1b_2 + a_2b_1); \tag{Б.7}$$

$$z_4 = a_0b_4 + a_4b_0 + \frac{1}{2}(a_1b_5 + a_5b_1 + a_1b_3 + a_3b_1 + a_2b_2);$$

$$z_5 = a_0b_5 + a_5b_0 + \frac{1}{2}(a_1b_4 + a_4b_1 + a_2b_3 + a_3b_2);$$

Суммируя множители при одинаковых косинусах, получим формулы для коэффициентов в выражении для частной суммы z (Б.7). Из этих формул видно, что слагаемые подчиняются определенной логике, которая следует из (Б.4). Косинус с аргументом $k\theta$ появляется в следующих случаях:

1. Если слагаемые исходной суммы (например S_1) умножаются на коэффициент с индексом 0 (например, b_0) для всех значений k .
2. Если $k = m - n$.
3. Если $k = m + n$.
4. Если $k = 2m$. Для четных значений k .

При этом рассматриваются все возможные значения $m, n \leq \hat{m}$.

Все слагаемые в формулах для коэффициентов можно разделить на две группы: слагаемые 1-ой группы, в которых участвуют собственные коэффициенты исходных групп и слагаемые, которые получаются в результате перемножения косинусов. Вследствие 2, 3 и 4 эти слагаемые состоят из блоков вида

$$a_i b_j + a_j b_i; \quad i \pm j = k$$

Эти блоки располагаются в скобках.

Рассмотрим структуру выражений в скобках в формулах для z_k :

$k = 0 \Rightarrow i = j$ – в скобках произведения коэффициентов с одинаковыми индексами.

$k = 1 \Rightarrow$ в скобках произведения коэффициентов, у которых разница $i - j = 1$ невозможна.

$k = 2 \Rightarrow$ в скобках произведения коэффициентов, у которых разница $i - j = 2$, и $a_1 b_1$ ($i + j = 1$).

$k = 3 \Rightarrow$ в скобках произведения коэффициентов, у которых разница $i - j = 3$, и появляются произведения коэффициентов, у которых $i + j = 1$.

$k = 4 \Rightarrow$ в скобках произведения коэффициентов, у которых разница $i - j = 4$ и сумма $i + j = 4$ и $a_2 b_2$ ($i + j = 4$).

$k = 5 \Rightarrow$ в скобках произведения коэффициентов, у которых $i + j = 5$. Разница номеров $i - j = 5$ невозможна.

Таким образом, с помощью (Б.7) можно сформулировать следующий алгоритм решения задачи о перемножении рядов Фурье:

1. Из рядов выделяются частные суммы (Б.1), содержащие \hat{m} слагаемых.
2. Коэффициент при $k = 0$ z_0 определяется формулой в первой строке (Б.7).
3. Остальные коэффициенты определяются суммой блоков из произведений с перестановкой индексов вида:

$$a_i b_j + a_j b_i; \quad j \geq i; \quad 0 \leq i, j \leq \hat{m}.$$

4. Для каждого коэффициента с номером k первый блок имеет вид:

$$a_0 b_k + a_k b_0$$

5. Блоки в скобках разделяются на две группы, которые отвечают структуре формулы (Б.4). Первая группа образуется при вычислении разности, а вторая при вычислении суммы индексов перемножаемых косинусов.

6. В первой группе

$$j - i = k; \Rightarrow \quad j = k + i \leq \hat{m}; \Rightarrow \quad \max i = \hat{m} - k.$$

Блоки формируются последовательно, начиная с $i = 1$ до $\max i$. При $k = \hat{m}$ эти блоки отсутствуют.

7. Во второй группе $j + i = k; \Rightarrow \quad j = k - i; \quad j > i$. Блоки формируются, пока выполняется последнее условие.

8. Если $k = 2\tilde{k}$ – четное, то добавляется слагаемое $a_{\tilde{k}} b_{\tilde{k}}$.

В качестве примера рассмотрим случай $\hat{m} = 5$ и составим формулу для коэффициентов с номерами $k = 1, 2, 3$:

$$z_1 = a_1 b_0 + \frac{1}{2}(a_1 b_2 + a_2 b_1 + a_2 b_3 + a_3 b_2 + a_3 b_4 + a_4 b_3 + a_5 b_4 + a_4 b_5);$$

$$z_2 = a_2 b_0 + \frac{1}{2}(a_1 b_3 + a_3 b_1 + a_2 b_4 + a_4 b_2 + a_3 b_5 + a_5 b_3 + a_1 b_1)$$

$$z_3 = a_3 b_0 + \frac{1}{2}(a_1 b_4 + a_4 b_1 + a_2 b_5 + a_5 b_2 + a_1 b_2 + a_2 b_1)$$

Радиальные перемещения удовлетворяющие граничным условиям шарнирного закрепления, и условию периодичности по окружной координате θ имеют вид:

$$w = \sum_m \sum_n f(t) \sin(\lambda_n \xi) \cos(m\theta) = f(t) \sum_m \sum_n \sin(\lambda_n \xi) \cos(m\theta) =$$

$$= f(t) \sum_m a_m \cos(m\theta); \quad a_m = \sum_n \sin(\lambda_n \xi); \quad m, n = 1, 2, 3, \dots$$

Для приближенного вычисления a_m используем метод среднего арифметического частных сумм [101].

Ряд Фурье для импульсной функции имеет вид:

$$\Psi(\theta) = \frac{k_s R}{\pi} \left[\frac{\varphi_0^3}{3} + \sum_{m=1}^{\infty} \beta_m \cos m\theta \right]; \quad (Б.8)$$

$$\beta_m = (-1)^m m^{-3} \left[2\varphi_m \cos \varphi_m - (\varphi_m^2 - 2) \sin \varphi_m \right]; \quad \varphi_m = m\varphi_0.$$

Таким образом, решение задачи сводится к перемножению рядов. Введем две частные суммы:

$$S_1 = \sum_m a_m \cos(m\theta); \quad m = 1, 2, 3, \dots \quad a_0 = 0.$$

$$S_2 = b_0 + \sum_m b_m \cos(m\theta); \quad b_0 = \frac{\varphi_0^3}{3}; \quad b_m = \beta_m.$$

Далее:

$$Z = S_1 S_2 = z_0 + \sum_{k=1}^{\hat{m}} z_k \cos k\theta.$$

Дифференцирование суммы сводится к дифференцированию слагаемых [101]:

$$\frac{\partial}{\partial \theta} Z = - \sum_{k=1}^{\hat{m}} z_k k \sin k\theta. \quad \frac{\partial^2}{\partial \theta^2} Z = - \sum_{k=1}^{\hat{m}} z_k k^2 \cos k\theta.$$

В дальнейшем перейдем к обозначению $k = m$.

Тогда

$$\frac{R}{Eh} \frac{\partial^2}{\partial \theta^2} (\Psi(\theta) w(\xi, \theta, t)) = \frac{kR^2}{\pi Eh} f(t) \sum_{m=1}^{\infty} m^2 z_m \cos m\theta, \quad (Б.9)$$

Слагаемое (Б.9) после преобразований, и приравнивания коэффициентов при одинаковых тригонометрических функция включено в уравнения движения (2.32) и (3.8).

Далее произведем расчет частоты свободных колебаний наземного газопровода при $p_0 = 2 \text{ МПа}$; $L/R = 10$; $D = 1420 \text{ мм}$; $h = 14 \text{ мм}$; $P = 0,05$; $k = 0,5 \cdot 10^7 \text{ Н/м}^3$:

1) При $m=1, n=1$ формула (2.35) примет вид:

$$\omega_{11}^2 = \frac{\tilde{\lambda}_1^4 + k^* - \tilde{\lambda}_1^4 P}{\rho^* R \cdot h(\tilde{\lambda}_1^2 h_{\tilde{\nu}} + 2)}$$

$$\tilde{\lambda}_n = \frac{n\pi R}{L\sqrt{h_{\tilde{\nu}}}}, \text{ где } h_{\tilde{\nu}} = \frac{h}{R\sqrt{12(1-\tilde{\nu}^2)}}, \tilde{\nu} - \text{коэффициент Пуассона (0,3 для стали)}$$

$$h_{\tilde{\nu}} = \frac{h}{R\sqrt{12(1-\tilde{\nu}^2)}} = \frac{1,4\text{см}}{71\text{см}\sqrt{12(1-0,09)}} = 0,00597$$

$$\tilde{\lambda}_n = \frac{n\pi R}{L\sqrt{h_{\tilde{\nu}}}} = \frac{3,14 * 71\text{см}}{710\text{см} * 0,0772} = 4,067,$$

$$\rho^* = \rho \frac{R}{Ehh_{\tilde{\nu}}^2} = \frac{7,85 * 10^{-5} \frac{\text{Н}}{\text{см}^4} c^2 * 71\text{см}}{2 * 10^7 \text{Н} / \text{см}^2 * 1,4\text{см} * 0,00003564} = 5,591 * 10^{-6} \frac{c^2}{\text{см}^2},$$

$$P = \frac{F}{F_3} = 0,05,$$

$$k^* = \frac{kR^2}{\pi Ehh_{\tilde{\nu}}^2} z_1,$$

$$|z_1| = a_1 b_0 + \frac{1}{2} (a_1 b_2 + a_2 b_1 + a_2 b_3 + a_3 b_2 + a_3 b_4 + a_4 b_3 + a_5 b_4 + a_4 b_5).$$

В таблице Б.1 выполнен расчет параметров контактной поверхности.

Таблица Б.1

$k = 0,5 * 10^7 \text{ Н/м}^3$						
Диаметр D , мм	Масса кН/м	$Q_{\text{общ}}$, кН/м	Параметры контактной поверхности			
			φ_0	b , мм	Δ_0 , мм	Φ_0 , кН/м ²
1420	4,85	4,85	0,142	100,78	7,20	36,00

$$\beta_0 = -0,00096; \beta_1 = -0,563; \beta_2 = 0,070; \beta_3 = -0,021; \beta_4 = 0,009; \beta_5 = -0,005, a_m = 1$$

$$|z_1| = 0,00034 + \frac{1}{2} (0,070 - 0,563 - 0,021 + 0,070 + 0,009 - 0,021 + 0,009 - 0,005) = 0,224$$

$$k^* = \frac{kR^2}{\pi Ehh_{\tilde{\nu}}^2} z_1 = \frac{5 \text{ Н} / \text{см}^3 * 71^2 \text{ см}^2}{3,14 * 2 * 10^7 \text{ Н} / \text{см}^2 * 1,4\text{см} * 0,00003564} * 0,224 = 16,08 * 0,224 = 3,61,$$

$$\omega_{11}^2 = \frac{\lambda_n^4 + k^* - \lambda_n^4 P}{\rho^* R \cdot h(\lambda_n^2 h_\nu + 2)} = \frac{273,58 + 3,61 - 13,68}{5,591 * 10^{-6} \frac{c^2}{cm^2} * 71cm * 1,4cm * (16,52 * 0,00597 + 2)} = 227163 \frac{1}{c^2}.$$

$$\omega_{11} = \sqrt{227163} = 476,61 \frac{1}{c}.$$

Для перевода в круговую частоту делим на 2π

$$\omega_{11} = 476,61 \frac{1}{c} / 2\pi = 75,89 \text{ Гц}$$

2) При $m=2, n=1$ формула (2.35) примет вид:

$$\omega_{21}^2 = \frac{\lambda_1^4 + 48(3 + p^*) + 16k^* - 16\lambda_1^4 P / n^2}{\rho^* R \cdot h(\lambda_1^2 h_\nu + 20)},$$

$$p^* = p_0 \frac{R}{Ehh_\nu^2} = \frac{200H / cm^2 * 71cm}{2 * 10^7 H / cm^2 * 1,4cm * 0,00003564} = 14,23,$$

$$|z_2| = a_2 b_0 + \frac{1}{2}(a_1 b_3 + a_3 b_1 + a_2 b_4 + a_4 b_2 + a_3 b_5 + a_5 b_3 + a_1 b_1),$$

$$\beta_0 = -0,00096; \beta_1 = -0,563; \beta_2 = 0,070; \beta_3 = -0,021; \beta_4 = 0,009; \beta_5 = -0,005,$$

$$|z_2| = 0,00096 + \frac{1}{2}(-0,021 - 0,563 + 0,009 + 0,070 - 0,005 - 0,021 - 0,563) = 0,546.$$

$$k^* = \frac{kR^2}{\pi Ehh_\nu^2} z_2 = \frac{5H / cm^3 * 71^2 cm^2}{3,14 * 2 * 10^7 H / cm^2 * 1,4cm * 0,00003564} * 0,546 = 16,08 * 0,546 = 8,78,$$

$$\omega_{2n}^2 = \frac{273,58 + 48(3 + 14,23) + 16 * 8,78 - 16 * 273,58 * 0,05}{5,591 * 10^{-6} \frac{c^2}{cm^2} * 71cm * 1,4cm * (16,52 * 0,00597 + 20)} = 84763,2 \frac{1}{c^2},$$

$$\omega_{2n}^2 = \sqrt{84763,2} \frac{1}{c^2} = 291,14 \frac{1}{c} / 2\pi = 45,46 \text{ Гц}.$$