

МИНИСТЕРСТВО НАУКИ И ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ
РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ

Федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение высшего образования
«Тюменский индустриальный университет»

На правах рукописи

Разов Игорь Олегович

**АНАЛИТИЧЕСКИЕ МЕТОДЫ ДИНАМИЧЕСКОГО РАСЧЕТА ТОНКОСТЕННЫХ
ТРУБОПРОВОДОВ БОЛЬШОГО ДИАМЕТРА В ВИДЕ ЦИЛИНДРИЧЕСКИХ
И ТОРОИДАЛЬНЫХ ОБОЛОЧЕК ПРИ НАЗЕМНОМ, ЧАСТИЧНО ЗАГЛУБЛЕННОМ
И ПОДЗЕМНОМ РАЗМЕЩЕНИИ**

Специальность 2.1.9. Строительная механика

Диссертация

на соискание ученой степени

доктора технических наук

Научный консультант:
доктор технических наук,
доцент Соколов В.Г.

Тюмень – 2026

ОГЛАВЛЕНИЕ

ВВЕДЕНИЕ.....	5
ГЛАВА 1. ОБЗОР ИССЛЕДОВАНИЙ ПО ТЕМЕ ДИССЕРТАЦИИ.....	18
1.1 Свободные колебания стержневых расчетных моделей.....	18
1.2 Свободные колебания оболочечных расчетных моделей.....	26
1.3 Свободные колебания неоднородных оболочек.....	34
1.4 Параметрические колебания и динамическая устойчивость стержневых и оболочечных расчетных моделей	37
1.5 Экспериментальные и численные методы определения частот свободных колебаний стержневых и оболочечных элементов	43
1.6 Описание материала оболочки, внешних нагрузок и воздействий	51
1.7 Выводы по главе 1	61
ГЛАВА 2. СВОБОДНЫЕ КОЛЕБАНИЯ ТОНКОСТЕННЫХ ЗАМКНУТЫХ ЦИЛИНДРИЧЕСКИХ ОБОЛОЧЕК В УПРУГОЙ СРЕДЕ	63
2.1 Описание расчетной модели и основные допущения геометрически нелинейного варианта полубезмоментной теории тонких цилиндрических оболочек при различных способах размещения в упругой среде.....	63
2.2 Уравнения движения цилиндрической оболочки при различных способах размещения в упругой среде	69
2.3 Определение значений предельных параметров замкнутой цилиндрической оболочки	79
2.4 Определение частот и форм свободных колебаний цилиндрической оболочки при наземном размещении на упругом основании	84
2.5 Определение частот и форм свободных колебаний цилиндрической оболочки при подземном размещении в упругой среде	100
2.6 Определение частот и форм свободных колебаний полиэтиленовой цилиндрической оболочки при наземном и подземном размещении	114
2.7 Определение частот и форм свободных колебаний цилиндрической оболочки при воздействии температуры и параметра продольной сжимающей силы	122
2.8 Колебания цилиндрической оболочки с учетом присоединённой массы и демпфирующих свойств среды	129
2.9 Выводы по главе 2	140
ГЛАВА 3. СВОБОДНЫЕ КОЛЕБАНИЯ ТОНКОСТЕННЫХ ТОРОИДАЛЬНЫХ ОБОЛОЧЕК В УПРУГОЙ СРЕДЕ	142

3.1	Описание расчетной модели и основных допущений геометрически нелинейного варианта полубезмоментной теории тонких тороидальных оболочек при различных способах размещения	142
3.2	Уравнения движения тороидальной оболочки при различных способах размещения	147
3.3	Определение значений предельных параметров замкнутой тороидальной оболочки	156
3.4	Определение частот и форм свободных колебаний тороидальной оболочки при наземном размещении на упругом основании.....	157
3.5	Определение частот и форм свободных колебаний тороидальной оболочки при подземном размещении	170
3.6	Определение частот и форм свободных колебаний полиэтиленовой тороидальной оболочки при наземном и подземном размещении.....	174
3.7	Определение частот и форм свободных колебаний тороидальной оболочки при действии продольной силы и температурного воздействия	179
3.8	Колебания тороидальной оболочки с учетом присоединённой массы и демпфирующих свойств среды	181
3.9	Выводы по главе 3	186
ГЛАВА 4. СВОБОДНЫЕ КОЛЕБАНИЯ ТОНКОСТЕННЫХ ДВУХСЛОЙНЫХ ОБОЛОЧЕК, ВЗАИМОДЕЙСТВУЮЩИХ С УПРУГОЙ СРЕДОЙ		188
4.1	Описание расчетной модели двухслойной оболочки при различных способах её размещения	191
4.2	Определение частот и форм свободных колебаний неоднородной тороидальной (двухслойной) оболочки	193
4.3	Определение значений предельных параметров замкнутой неоднородной (двухслойной) тороидальной оболочки	197
4.4	Колебания двухслойной тороидальной оболочки с учетом присоединённой массы и демпфирующих свойств среды.....	198
4.5	Выводы по главе 4	201
ГЛАВА 5. ПАРАМЕТРИЧЕСКИЕ КОЛЕБАНИЯ И ДИНАМИЧЕСКАЯ УСТОЙЧИВОСТЬ ОБОЛОЧЕК В УПРУГОЙ СРЕДЕ.....		203
5.1	Параметрические колебания и динамическая устойчивость цилиндрических оболочек при наземном и подземном размещении.....	203
5.2	Определение и анализ областей динамической неустойчивости стальных цилиндрических оболочек при наземном и подземном размещении	206

5.3	Определение и анализ областей динамической неустойчивости полиэтиленовых цилиндрических оболочек с потоком жидкости и газа при наземном и подземном размещении	214
5.4	Параметрические колебания и динамическая устойчивость тороидальных оболочек при наземном и подземном размещении	218
5.5	Определение и анализ областей динамической неустойчивости тороидальных оболочек при наземном и подземном размещении	219
5.6	Определение и анализ областей динамической неустойчивости полиэтиленовых тороидальных оболочек с потоком жидкости и газа при наземном и подземном размещении	225
5.7	Исследование параметрических колебаний и динамической устойчивости двухслойных тороидальных оболочек при подземном размещении	228
5.8	Определение и анализ областей динамической неустойчивости оболочек в упругой среде при температурном воздействии и параметре продольной сжимающей силы	231
5.9	Определение и анализ областей динамической неустойчивости цилиндрических и тороидальных оболочек с учетом сил сопротивления и демпфирующих свойств среды.....	241
5.10	Выводы по главе 5	244
ГЛАВА 6.	СРАВНЕНИЕ И СОПОСТАВЛЕНИЕ РЕШЕНИЙ, ПОЛУЧЕННЫХ В ДИССЕРТАЦИИ, С РЕШЕНИЯМИ ДРУГИХ АВТОРОВ	247
6.1	Сравнение и сопоставление решений, полученных в диссертации, с решениями других авторов по стержневой теории	247
6.2	Сравнение и сопоставление решений, полученных в диссертации, с решениями других авторов по теории оболочек	252
6.3	Сравнение и сопоставление решений, полученных в диссертации, с решениями других авторов по результатам численных расчетов с применением МКЭ.....	254
6.4	Сравнение и сопоставление решений, полученных в диссертации, с экспериментальными данными	262
6.5	Выводы по главе 6	265
	ЗАКЛЮЧЕНИЕ	266
	СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ.....	271
	ПРИЛОЖЕНИЕ А	303
	ПРИЛОЖЕНИЕ Б.....	304

ВВЕДЕНИЕ

Актуальность темы исследования. Замкнутые цилиндрические и тороидальные оболочки широко распространены в качестве расчетных моделей трубопроводов, применяемых для транспортировки жидкостей и газа в машиностроении, транспорте, авиастроении, атомной энергетике и нефтегазовой отрасли. В зависимости от условий эксплуатации трубопроводы подвергаются статическим и динамическим воздействиям и вибрациям, которые могут существенно влиять на надежность. Спектр колебаний трубопровода представляет собой сложный комплекс взаимодействия свободных, вынужденных, параметрических, автоколебательных процессов. Повышение ресурса трубопроводов в значительной степени связано с устранением вредных колебаний, приводящих к нарушению изоляционных покрытий, коррозионному растрескиванию, усталостному разрушению тела труб и потере устойчивости с образованием «арочного выброса» или сплющивания поперечного сечения. С позиции статических расчетов решения получены достаточно полно, однако при выполнении динамических расчетов появляются новые задачи, требующие оперативных решений, связанных в первую очередь с определением динамических характеристик трубопроводов, а именно спектра частот свободных колебаний. Он зависит от параметров системы, геометрических характеристик, условий закрепления, нагрузок и воздействий. Наиболее точное определение спектра частот свободных колебаний позволит корректно спроектировать параметры трубопровода, выполнить отстройку системы от резонанса и подобрать эксплуатационные режимы.

В современных условиях сухопутная прокладка магистральных трубопроводов может быть надземной, наземной и подземной. В зависимости от типа прокладки взаимодействие с упругой средой может происходить по узкой полосе контакта, например при наземном размещении, и по всей внешней поверхности трубопровода при подземном размещении. Следовательно, в расчетах необходимо использовать такие модели, которые наиболее полно отражают

реальные особенности эксплуатации рассматриваемых конструкций. Расчеты, выполняемые по СП и другим нормативным документам, как правило, базируются на стержневой теории затрагивают отдельные аспекты надежности при эксплуатации трубопроводов и носят упрощенный характер. По этой расчетной модели не удастся учесть некоторые важные факторы, свойственные реальным тонкостенным трубопроводам, а именно деформацию поперечного сечения и влияние внутреннего рабочего давления на динамические характеристики и устойчивость трубопровода. Наиболее точной расчетной моделью для тонкостенных трубопроводов является цилиндрическая и тороидальная оболочка, для прямолинейных и криволинейных участков соответственно, которая в отличие от стержневой модели учитывает влияние внутреннего рабочего давления и деформацию поперечного сечения.

Как показывает практика, широкое применение находят два типа труб – однородные и неоднородные (многослойные). Вторые применяются для защиты от агрессивных сред (биметаллические трубы), механических воздействий (защитные покрытия) и дополнительного утяжеления (балластирующие покрытия). В зависимости от материалов слоев спектр частот свободных колебаний будет различным, что может вносить существенные погрешности при расчетах.

Помимо статического воздействия, оболочки подвержены динамическим воздействиям и вибрациям от пульсирующих потоков жидкостей и газов. Нестационарное воздействие пульсирующих потоков приводит к возникновению еще более опасного вида резонанса – параметрического резонанса. Его опасность заключается в возникновении целых областей динамической неустойчивости. При определенных сочетаниях между частотой возмущающей силы и частотами свободных колебаний системы малое начальное возмущение приводит к развитию колебаний большой амплитуды. Обычный резонанс характеризуется возрастанием амплитуды колебаний по линейному закону, а параметрический резонанс – по экспоненциальному. Поэтому определение частот свободных колебаний и динамической устойчивости тонкостенных трубопроводов является важной и актуальной задачей.

Настоящая работа посвящена формированию расчетной модели тонкостенного трубопровода большого диаметра при наземном, частично заглубленном и подземном размещении в виде замкнутой цилиндрической или тороидальной (однослойной и двухслойной) оболочки, соответствующей реальным условиям эксплуатации, что позволяет сформировать аналитические методы определения частот и форм свободных и параметрических колебаний для прогнозирования обычного и параметрического резонанса при стационарных и нестационарных внешних нагрузках и воздействиях.

Степень разработанности темы исследований

Динамический расчет участков трубопроводов с позиции стержневой теории по определению частот свободных колебаний был рассмотрен авторами: С.П. Тимошенко, Я.Г. Пановко, В.В. Болотин, В.И. Феодосьев, Т.Е. Смит, Дж. Герман, Х. Эшли, Дж. Хевиленд, Н.А. Алфутов, Г.В. Хаузнер, А.П. Ковревский, Р. Лонг, В.В. Лалин, П.А. Джонджоров, С.В. Челомей, В.А. Светлицкий и др.

Большой вклад в развитие теории колебаний оболочечных конструкций внесли: М.А. Ильгамов, М.П. Пайдусис, А.С. Вольмир, Б.К. Михайлов, В.В. Карпов, Э.И. Иванюта, С.Н. Кукуджанов, В.П. Ильин, О.Б. Халецкая, В.Г. Соколов, А.А. Семенов и др. В работах М.П. Пайдусиса, А.С. Вольмира, Г.В. Хаузнера частоты свободных колебаний цилиндрической оболочки определены с использованием уравнений В. Флюгге. В.П. Ильиным и О.Б. Халецкой разработан новый алгоритм по определению в аналитическом виде частот и форм свободных колебаний на основании геометрически нелинейной теории цилиндрических оболочек с учетом тангенциальных и радиальных сил инерции, а также внутреннего рабочего давления.

Исследования параметрических колебаний и динамической устойчивости с позиции стержневой теории рассмотрены в работах: А.А. Андропова, М.А. Леонтовича, В.А. Гастьева, И.И. Гольденבלата, Н.А. Картвелишвили, А.В. Индейкина, В.Н. Челомея, О.Д. Ониашвили, А.Н. Маркова, В.В. Болотина, А.С. Вольмира, Б.З. Брачковского, М.П. Пайдусиса и др.

Вопрос исследования колебаний и динамической устойчивости цилиндрических и тороидальных оболочек как расчетных схем тонкостенных трубопроводов большого диаметра, взаимодействующих с упругой средой, проработан недостаточно полно, является актуальным и находится в стадии развития.

Научная гипотеза исследования заключается в том, что повышение надежности трубопроводных систем в упругой среде может быть достигнуто за счет разработки усовершенствованных расчетных моделей и методов динамического расчета, учитывающих реальные условия эксплуатации, что позволит минимизировать резонансные явления и оптимизировать проектные решения.

Объектом исследования являются цилиндрические и тороидальные (однослойные и двухслойные) замкнутые оболочки конечной длины при наземном, частично заглубленном и подземном размещении.

Предметом исследования являются свободные, параметрические колебания и динамическая устойчивость оболочек в упругой среде.

Цель и задачи исследования

Цель исследования – разработка аналитических методов динамического расчета однослойных и двухслойных тонкостенных трубопроводов большого диаметра при наземном, частично заглубленном и подземном размещении, позволяющих прогнозировать обычный и параметрических резонанс в зависимости от условий эксплуатации.

Для достижения сформированной цели проведены научные исследования по разработке аналитических методов расчета тонкостенных трубопроводов большого диаметра в виде замкнутых цилиндрических и тороидальных (однослойных и двухслойных) оболочек, взаимодействующих с упругой средой для расчета:

- 1) частот и форм свободных колебаний;
- 2) параметрических колебаний и динамической устойчивости.

Задачи исследования:

1. Разработать расчетную модель тонкостенного трубопровода большого диаметра в виде замкнутой цилиндрической или тороидальной (однослойной

и двухслойной) оболочки при наземном, частично заглубленном и подземном размещении с учетом эксплуатационных нагрузок и температурного воздействия;

2. На основе геометрически нелинейной полубезмоментной теории оболочек среднего изгиба сформировать и решить систему уравнений движения в перемещениях для замкнутых цилиндрических и тороидальных (однослойных и двухслойных) оболочек, обеспечивающую аналитическое определение частот и форм свободных колебаний с учётом сформированной расчетной модели;

3. Разработать аналитический метод определения частот и форм свободных колебаний тонкостенных прямолинейных и криволинейных (однослойных и двухслойных) трубопроводов большого диаметра с учетом влияния упругого основания при наземной, частично заглубленной и подземной схемах размещения при заданных нагрузках и температурном воздействии;

4. Получить аналитические решения, описывающие влияние равномерного нагрева/охлаждения на частоты и формы свободных колебаний цилиндрических и тороидальных оболочек, а также исследовать влияние входящих в них параметров;

5. Определить и проанализировать влияние продольной сжимающей силы на динамические характеристики прямолинейных (цилиндрические оболочки) и криволинейных (тороидальные оболочки) участков трубопроводов с установлением критических значений, приводящих к потере статической устойчивости;

6. Установить критерии применимости оболочечных и стержневых моделей для определения наименьших частот свободных колебаний тонкостенных трубопроводов большого диаметра в зависимости от геометрии, материала и условий эксплуатации;

7. Выполнить комплексное исследование влияния геометрических параметров (параметра тонкостенности h/r , длины L/r , радиуса кривизны R/r), коэффициента упругого отпора k_s , угла вдавливания θ , параметра продольной сжимающей силы P , внутреннего давления p , на частотный спектр и области динамической неустойчивости для стальных и полиэтиленовых оболочек при различных схемах размещения;

8. Разработать аналитический метод оценки динамической устойчивости тонкостенных цилиндрических и тороидальных оболочек при различных схемах размещения, основанный на применении уравнений Матье и построении модифицированных диаграмм Айнса–Стретта.

Научная новизна исследования заключается в следующем:

1. Разработана расчетная модель тонкостенного трубопровода большого диаметра в виде замкнутой цилиндрической или тороидальной (однослойной и двухслойной) оболочки при наземном, частично заглубленном и подземном размещении с учетом эксплуатационных нагрузок и температурного воздействия;

2. На основе геометрически нелинейного варианта полубезмоментной теории получены и решены в аналитическом виде дифференциальные уравнения движения в перемещениях элемента срединной поверхности цилиндрических и тороидальных оболочек, где впервые одновременно учитывается совместное влияние внутреннего и внешнего давления, демпфирующих свойств окружающей среды, скорости потока транспортируемой жидкости, присоединенной массы, продольной сжимающей силы, температурного воздействия, сил инерции, а также упругого отпора окружающей среды на внешнюю стенку оболочки;

3. Разработан аналитический метод определения частот и форм свободных колебаний тонкостенных прямолинейных и криволинейных (однослойных и двухслойных) трубопроводов большого диаметра, отличающийся учетом влияния упругого основания при наземной, частично заглубленной и подземной схемах размещения при заданных нагрузках и температурном воздействии;

4. Установлены и обоснованы критерии применимости оболочечных и стержневых моделей для определения наименьших частот свободных колебаний тонкостенных трубопроводов большого диаметра в виде безразмерных параметров L^* и R^* , позволяющие выбирать расчетную схему в зависимости от геометрии, материала и условий эксплуатации;

5. Разработан аналитический метод оценки статической устойчивости тонкостенных прямолинейных и криволинейных (однослойных и двухслойных) трубопроводов большого диаметра на основе критерия динамической

устойчивости, позволяющий, в отличие от ранее полученных решений, определять критические значения параметра продольной сжимающей силы и внешнего давления при наземной, частично заглубленной и подземной схемах размещения;

6. Установлены общие принципы учета влияния геометрических параметров и условий взаимодействия с упругой средой (угла вдавливания, коэффициента отпора среды, схемы размещения) на частотный спектр колебаний цилиндрических и тороидальных оболочек в зависимости от нагрузок и температурного воздействия;

7. Разработан аналитический метод оценки динамической устойчивости тонкостенных цилиндрических и тороидальных оболочек при различных схемах прокладки, основанный на применении уравнений Матье и построении модифицированных диаграмм Айнса–Стретта, позволяющий прогнозировать параметрический резонанс и обосновывать безопасные режимы эксплуатации трубопроводов большого диаметра;

8. Установлены общие принципы учета влияния геометрических параметров, нагрузок и температурного воздействия на формирование и расположение областей динамической неустойчивости прямолинейных и криволинейных (однослойных и двухслойных) тонкостенных трубопроводов большого диаметра.

Теоретическая и практическая значимость работы. *Теоретическая значимость* заключается в развитии расчетных моделей и методов динамического расчета с позиции геометрически нелинейного варианта полубезмоментной теории цилиндрических и тороидальных (однослойных и двухслойных) оболочек, позволяющих определять частоты и формы свободных и параметрических колебаний, а также исследовать динамическую устойчивость оболочек при взаимодействии с упругим основанием при наземном, частично заглубленном и подземном размещении, что обеспечивает переход от частных случаев к комплексным методам расчета.

Полученные решения вносят вклад в развитие строительной механики трубопроводов и могут найти применение не только в нефтегазовой отрасли, но и в таких областях, как авиастроение и атомная энергетика.

Практическая значимость работы заключается в применении полученных методов расчета для определения частот и форм свободных колебаний, статической и динамической устойчивости тонкостенных трубопроводов большого диаметра, взаимодействующих с упругой грунтовой средой, позволяющих выполнить поверочные расчеты на стадии проектирования и эксплуатации, в случае, например, замены устаревшего оборудования на новое, более производительное. Наиболее точное определение спектра частот свободных колебаний позволит произвести отстройку системы от резонанса, тем самым повысить надежность конструкций и предотвратить аварийные ситуации. Установлены общие принципы и критерии выбора расчётной схемы, представленные в виде безразмерных параметров L^* и R^* . Эти критерии, основанные на сопоставлении частот колебаний, полученных по стержневой и оболочечной теориям, позволяют обоснованно выбирать уровень детализации модели, что является вкладом в общие принципы расчёта конструкций.

Практическая значимость работы подтверждается поддержкой гранта Президента Российской Федерации для государственной поддержки молодых российских ученых – кандидатов наук №МК-2681.2022.4 на тему «Аналитические методы определения динамических характеристик тонкостенных трубопроводов большого диаметра в среде «труба–грунт» при стационарных и нестационарных воздействиях» (руководитель Разов И.О.), а также выполнением государственного задания № 7.4794.2017/БЧ, 2017–2019 г., «Динамический расчет тонкостенных магистральных трубопроводов большого диаметра при полуподземной прокладке» (руководитель Соколов В.Г., исполнитель Разов И.О.).

Методология и методы исследования. Диссертационная работа выполнена с применением современных методов нелинейной строительной механики и математики, в том числе метода разделения переменных и двойных тригонометрических рядов Фурье. Решения, полученные в диссертации, основаны на подходе, предложенном В.З. Власовым – В.В. Новожиловым, В.П. Ильиным и другими учеными. Контроль решений осуществляется при помощи MathCAD 15.

Область исследования соответствует паспорту научной специальности 2.1.9 – Строительная механика, п.2 – «Линейная и нелинейная механика конструкций, зданий и сооружений, разработка физико-математических моделей их расчета»; п.3 – «Аналитические методы расчета зданий, сооружений и их элементов на прочность, жесткость, устойчивость при статических, динамических, температурных нагрузках и других воздействиях»; п.12 – «Исследование и моделирование нагрузок и воздействий на здания и сооружения».

Личный вклад автора. Все результаты диссертационной работы принадлежат лично автору. Во всех работах, опубликованных в соавторстве, автору в равной степени принадлежат постановка задач и формулировка основных положений, определяющих научную новизну исследований.

Положения, выносимые на защиту:

1. Расчетная модель тонкостенного трубопровода большого диаметра в виде замкнутой цилиндрической или тороидальной (однослойной и двухслойной) оболочки при наземном, частично заглубленном и подземном размещении с учетом эксплуатационных нагрузок и температурного воздействия;

2. Аналитический метод определения частот и форм свободных колебаний прямолинейных и криволинейных участков трубопроводов большого диаметра с потоком жидкости и газа, подверженных комбинированному влиянию заданных нагрузок и температурного воздействия, для наземного, частично заглубленного и подземного размещения в виде:

- а) цилиндрической однослойной оболочки;
- б) тороидальной однослойной оболочки;
- в) тороидальной двухслойной оболочки;

3. Аналитический метод оценки статической устойчивости тонкостенных трубопроводов большого диаметра на основе критерия динамической устойчивости, позволяющий определять критические значения параметра продольной сжимающей силы и внешнего давления с учётом деформации поперечного сечения и взаимодействия с упругой средой;

4. Аналитический метод оценки динамической устойчивости тонкостенных трубопроводов при различных схемах прокладки, основанный на применении уравнений Матье и построении модифицированных диаграмм Айнса–Стретта для расчетной модели в виде:

- а) цилиндрической однослойной оболочки;
- б) тороидальной однослойной оболочки;
- в) тороидальной двухслойной оболочки;

5. Области динамической неустойчивости, построенные при помощи диаграмм Айнса–Стретта, для расчетной модели участка тонкостенного магистрального трубопровода большого диаметра в виде цилиндрической или тороидальной (однослойной и двухслойной) оболочки, от действия нестационарного потока жидкости и газа при заданных нагрузках и температурном воздействии.

Степень достоверности и апробация результатов. *Степень достоверности результатов* проведенных исследований обоснована: применением апробированных методов строительной механики и вычислительной математики; в работе получены решения при помощи известных и апробированных методов, применяемых в строительной механике. Частные случаи полученных в диссертации решений хорошо согласуются с решениями других авторов и верифицируются численными расчетами в ANSYS; обеспечена обоснованностью методологии исследования, ее соответствием поставленной проблеме и глубокой проработкой научной литературы по теме диссертации. Контроль вычислений и аналитических преобразований производился при помощи Mathcad 15.

Апробация работы. Международная научно-практическая конференция «Актуальные проблемы архитектуры, строительства, энергоэффективности и экологии», г. Тюмень, 27–29 апреля 2016 г.; Международная научно-практическая конференция студентов, аспирантов, молодых ученых и специалистов «Энергосбережение и инновационные технологии в топливно-энергетическом комплексе», г. Тюмень, 22 декабря 2016 г.; Международная научно-практическая конференция студентов, аспирантов и молодых ученых «Новые технологии –

нефтегазовому региону», г. Тюмень, 24–28 апреля 2017 г.; Международная научно-практическая конференция молодых исследователей им. Д. И. Менделеева, г. Тюмень, 21–24 октября 2017 г.; Международная научно-практическая конференция «Нефть и Газ Западной Сибири», г. Тюмень, 02–03 ноября 2017 г.; Международная конференция «Рассохинские чтения», г. Ухта, 07–08 февраля 2019 г.; VIII Международная научно-техническая конференция «Газотранспортные системы: настоящее и будущее (GTS-2019)», г. Москва, 23–25 октября 2019 г.; «II Международная научно-практическая конференция «Арктика: Современные подходы к производственной и экологической безопасности в нефтегазовом секторе», г. Тюмень, 27 ноября 2020; VI Международная научно-практическая конференция «Технологии, организация и управление в строительстве – 2020», г. Москва, 10–11 декабря 2020; 8-я Международная научно-техническая конференция «Современные методы и приборы контроля качества и диагностики состояния объектов», г. Могилев, 29–30 сентября 2022 г.; 10-я Юбилейная Международная научно-практическая конференция «Интеллектуальное месторождение: инновационные технологии от пласта до магистральной трубы», г. Сочи, 03–08 октября 2022 г.; IV Всероссийская научно-практическая конференция «Инновационное развитие техники и технологий наземного транспорта», г. Екатеринбург, 16 декабря 2022 г.; XII Международная научная конференция «Задачи и методы компьютерного моделирования конструкций и сооружений» («Золотовские чтения»), г. Москва, 19–20 сентября 2024 г.; LXXVIII Международная научно-практическая конференция «Архитектура – Строительство – Транспорт – Экономика», г. Санкт-Петербург, 21–22 ноября 2024 г.; II Отраслевая конференция «Нефтегазовая инфраструктура на многолетнемерзлых грунтах», г. Санкт-Петербург, 20–21 ноября 2024 г.; IX Международный симпозиум «Актуальные проблемы компьютерного моделирования конструкций и сооружений», г. Пенза, 21–24 мая 2025 г.

Публикации. Основные научные результаты диссертации опубликованы в 41 научной работе, в том числе: 19 – в рецензируемых научных изданиях, рекомендованных ВАК РФ, 7 – в научных изданиях, индексируемых

в международной базе данных Scopus, издана одна монография. Общий объем опубликованных работ составляет 25,54 п.л. (в т. ч. авторских – 15,55 п.л.).

Структура и объем диссертации. Диссертация состоит из введения, шести глав, заключения, приложений и списка литературы, включающего 320 наименований. Общий объем диссертации составляет 304 страницы машинописного текста. Работа содержит 329 рисунков, 92 таблицы, 2 приложения.

Во введении обосновывается актуальность темы диссертации, изложены цели и задачи исследования, отмечены научная новизна, теоретическая и практическая значимость работы. Также приведен краткий обзор литературных источников по теме исследования.

В первой главе диссертации приводится обзор литературных источников, посвященный теме исследования и методам определения динамических характеристик стержневых и оболочечных систем при помощи как аналитических решений, так и численных методов расчетов и экспериментальных данных. Приведено описание внешних нагрузок и воздействий, оказываемых на замкнутые цилиндрические и тороидальные (однородные и неоднородные) оболочки, взаимодействующие с упругой средой.

Вторая глава посвящена вопросам определения частот и форм свободных колебаний тонкостенной замкнутой **цилиндрической** оболочки, взаимодействующей с упругой средой. Описывается расчетная модель при наземном, частично заглубленном и подземном её размещении. Сформированы основные уравнения и допущения геометрически нелинейного варианта полубезмоментной теории однородных **цилиндрических** оболочек, которые зависят от способа их размещения в упругой среде и расчетной модели. Расчеты выполнены для стальных и полиэтиленовых (ПЭ) оболочек, определен и исследован спектр частот и форм свободных колебаний, в том числе с учетом сил сопротивления и демпфирующих свойств среды.

Третья глава посвящена вопросам определения частот и форм свободных колебаний тонкостенной замкнутой однородной **тороидальной** оболочки, взаимодействующей с упругой средой. Описывается расчетная модель при

наземном, частично заглубленном и подземном её размещении. Сформированы основные уравнения геометрически нелинейного варианта полубезмоментной теории однородных *тороидальных* оболочек, которые зависят от способа их размещения в упругой среде и сформированной расчетной модели. Расчеты выполнены для стальных и полиэтиленовых оболочек, определен и исследован спектр частот и форм свободных колебаний, в том числе с учетом сил сопротивления и демпфирующих свойств среды.

Четвертая глава посвящена получению аналитических решений для **двухслойной тороидальной оболочки** при наземном, частично заглубленном и подземном размещении, которые зависят от способа их размещения в упругой среде и сформированной расчетной модели. Сформирована и решена система уравнений движения в перемещениях с получением аналитического решения для определения и анализа спектра значений частот и форм свободных колебаний, замкнутых неоднородных тороидальных оболочек в упругой среде.

Пятая глава посвящена параметрическому резонансу *цилиндрических* и *тороидальных* (однослойных и двухслойных) оболочек в упругой среде с учётом влияния сил сопротивления и демпфирующих свойств среды, при помощи построения областей динамической неустойчивости для различных схем размещения оболочки и сформированной расчетной модели.

В шестой главе произведено сравнение и сопоставление частных случаев решений, полученных в диссертации, с известными решениями других авторов по стержневой и оболочечной теории, численным методам расчета и экспериментальным данным.

Автор выражает глубокую благодарность коллективу кафедры «Строительная механика» и базовой кафедры АО «Мостострой-11» Тюменского индустриального университета за поддержку в процессе исследований, научному консультанту профессору Соколову Владимиру Григорьевичу за заботу и постоянное внимание к работе над диссертацией.

ГЛАВА 1. ОБЗОР ИССЛЕДОВАНИЙ ПО ТЕМЕ ДИССЕРТАЦИИ

1.1 Свободные колебания стержневых расчетных моделей

Наиболее полный анализ источников был выполнен в работе [183], где был ранее опубликован текст: «Динамический расчет стержневых систем является предметом обширных исследований, как в Российской Федерации, так и за рубежом. Эти исследования отражены в работах [20, 22, 36, 53, 57, 59, 116, 134, 213, 218, 251, 252, 253] и касаются колебаний и устойчивости стержневых систем, представляющих собой расчетные модели трубопроводов, балок и других элементов конструкций».

«В строительстве трубопроводных систем до 80-х годов XX века применялись трубы диаметром менее 1000 мм, с относительной толщиной стенки к радиусу $h/R = 1/5 - 1/10$. Такие трубопроводы, согласно трудам [156, 157, 217] и нормативным документам, таким как ПНАЭ Г-7-002–86, СТО Газпром 2-2.1-459–2010, принято рассчитывать с позиции классической стержневой теории. Так, в ПНАЭ Г-7-002–86 частоты свободных изгибных колебаний трубопроводов, рекомендуется определять как стержень с заданными граничными условиями по формуле» [183]:

$$\omega_i = \frac{\alpha_i^2}{l^2} \sqrt{\frac{EI}{(m+m_0)}}, \quad (1)$$

где ω_i – круговая частота, соответствующая i -й форме колебаний балки (трубопровода), l – длина трубопровода между опорами, E – модуль упругости материала трубопровода, I – момент инерции поперечного сечения трубы, m , m_0 – погонные массы трубы и содержащегося в ней продукта соответственно, α_i – коэффициент, значения которого определяются в зависимости от условий закрепления концов и формы колебаний, i – форма колебаний при $i = 1, 2, 3 \dots$

Для многопролетных *надземных* трубопроводов, частоты свободных колебаний для i -й формы следует определять согласно справочным данным [27, 104], по формуле [183]

$$\lambda_i = \frac{1}{2\pi} \cdot \frac{\alpha_i^2}{l^2} \sqrt{\frac{EI}{m}}, \quad (2)$$

где $\lambda_i = \frac{\omega_i}{2\pi}$; α_i – коэффициенты, зависящие от условий закрепления концов трубопроводов, числа пролетов, формы колебаний и определяемые при помощи таблиц и графиков [27].

Согласно ГОСТ Р 55431–2013 приводится пункт 6.3.1: «Собственные формы и частоты колебаний технической системы (ТС) рассчитывают в целях выявления характера колебаний отдельных участков ТС и определения оптимального расположения точек для измерения виброперемещений при последующем обследовании вибрационного состояния ТС. Для формирования матриц собственных векторов и матриц усилий/напряжений следует использовать также результаты расчета собственных характеристик ТС»; пункт 6.3.3: «Для расчета форм и частот собственных колебаний ТС простой геометрической формы и оценки собственных форм и частот колебаний отдельных участков ТС сложной пространственной конфигурации допускается использовать аналитические методы расчета собственных форм и частот».

В приложении А СТО Газпром 2-2.1-459–2010 согласно А.5.8.3 «Собственные частоты изгибных вертикальных и горизонтальных колебаний перехода с учетом подвижной нагрузки определяют по формулам»:

$$\omega_{n.\text{верт}}^2 = \frac{n^4 \pi^4}{l^4} \frac{EI_x}{m+m_0} + \frac{n^2 \pi^2}{l^2(m+m_0)} (H_k + 2k_1 H_b - m_0 V^2) + 64 \frac{f_0}{l(m+m_0)} \frac{g}{\pi^2}; \quad (3)$$

$$\omega_{n.\text{верт}}^2 = \frac{n^4 \pi^4}{l^4} \frac{EI_y}{m+m_0} + \frac{n^2 \pi^2}{l^2(m+m_0)} (H_k k_2 + 2H_b - m_0 V^2) + \frac{g}{h^*},$$

где $n = 1, 2, 3 \dots$;

EI_x, EI_y – изгибные жесткости поперечного сечения трубопровода в вертикальной и горизонтальной плоскости;

H_k – полный распор висячей системы;

H_b – распор в одном горизонтальном ветровом канате;

k_1, k_2 – коэффициенты, учитывающие влияние распора в канате на деформацию в направлении, перпендикулярном плоскости каната;

V – скорость подвижной нагрузки относительно движущегося поперечного сечения трубопровода;

f_0 – стрела провиса каната;

g – ускорение свободного падения;

h^* – расстояние от оси поперечного сечения трубопровода до точки крепления каната на пилоне.

Далее С.П. Тимошенко [213] была решена задача по определению частот свободных колебаний стержня на упругом основании. Автором в уравнении изгибных колебаний было учтено влияние упругого основания в виде коэффициента постели грунта k , определяемого в соответствии с гипотезой Фусса–Винклера

$$EI \frac{\partial^4 y}{\partial x^4} + ky + \rho F \frac{\partial^2 y}{\partial t^2} = 0, \quad (4)$$

где k – коэффициент постели грунта;

y – прогиб;

ρ – плотность материала трубы;

F – площадь поперечного сечения;

x – продольная координата вдоль нейтральной оси;

t – время.

В результате преобразований частота свободных колебаний стержня на упругом основании имеет вид

$$p_i = \frac{i^2 \pi^2 a}{l^2} \sqrt{1 + \frac{k_{\pi} l^4}{EI i^4 \pi^4}} \quad (5)$$

где p_i – частота свободных колебаний i -й формы; $a^2 = \frac{EI}{\rho F}$; k_{π} – коэффициент постели. Полученное С.П. Тимошенко решение (5) широко используется в нормативных документах и применяется для определения собственных частот наземных трубопроводов.

В случае наличия талых и многолетнемерзлых грунтов коэффициент постели определяется согласно СТО Газпром 2-2.1-459–2010:

– для талых грунтов по формуле:

$$k_{\pi} = \frac{0,12\eta_s E_s}{1 - \nu_s^2} k_s \sqrt{\frac{D}{\bar{L}}}, \quad (6)$$

$$k_s = 1 - e^{-\left(\frac{2H_a}{D}\right)}, \quad (7)$$

где η_s – коэффициент снижения модуля деформации грунта засыпки по сравнению с грунтом ненарушенной структуры;

E_s – модуль деформации грунта ненарушенной структуры;

ν_s – коэффициент поперечной деформации грунта;

k_s – коэффициент учета высоты грунта засыпки над трубой;

D – наружный диаметр трубопровода номинальный;

\bar{L} – единичная длина трубопровода ($\bar{L} = 1$ м);

H_a – расстояние от поверхности грунта до оси трубы;

e – основание Неперовых логарифмов;

– для ММГ вычисляют по формуле

$$k_{\pi} = \frac{R_f \bar{L}}{s_u}, \quad (8)$$

где R_f – расчетное давление на мерзлый грунт (сопротивление мерзлого грунта нормальному давлению);

s_u – предельно допустимая совместная осадка (деформация) основания и сооружения (трубопровода).

Научная проблема, связанная с влиянием скоростных параметров транспортируемой среды на спектр собственных частот колебаний линейных надземных трубопроводных систем, была сформулирована в результате анализа аварии на Трансарабском магистральном трубопроводе в середине XX века. Впервые систематизированно исследованная в рамках теоретико-экспериментального подхода данная задача получила научное обоснование в фундаментальной работе Х. Эшли и Дж. Хавиленда, опубликованной в 1950 году. Их исследование заложило основы для динамического анализа трубопроводов с учётом гидродинамических взаимодействий, сохранив релевантность для современных инженерных приложений [240]. Данный текст раздела был ранее опубликован в работе [138]: «Полученное в этой статье решение для шарнирно

опёртого на концах прямолинейного участка трубопровода было уточнено В.И. Феодосьевым [217] с помощью метода Бубнова–Галёркина. Полученная им формула для квадрата частоты собственных колебаний до сих пор имеет практическое применение в ПНАЭ Г-7-002–86»:

$$\omega_n^2 = \frac{n^4 \pi^4}{l^4} \frac{EI}{(m + m_0)} \left(1 - \frac{U^2 m_0 l^2}{n^2 \pi^2 EI} \right), \quad (9)$$

где U – скорость протекающей жидкости.

Из этой формулы следует, что скорость потока жидкости снижает частоты собственных колебаний трубопровода.

«В дальнейшем этой проблеме было уделено большое внимание [24, 140, 244, 263, 277 и др.], учитывались дополнительные факторы, уточнялись решения другими методами, приводились данные экспериментальных исследований. Так, в работе В.В. Болотина [24] учтено влияние внутреннего давления, в работе [156] Дж. Хаузнер, решая эту задачу аналитическим методом, подтвердил результат (9). В работе Р. Лонга [277] приведены результаты экспериментальных исследований. В обширной статье С.С. Чена [244] затрагиваются вопросы устойчивости трубопроводов, связанных с потоком жидкости» [138].

В большинстве отмеченных работах рассматриваются участки трубопроводов с шарнирным типом закрепления. Решения выполнялись методом Бубнова–Галёркина, где применялись аппроксимирующие функции вида $\sin \alpha_n z$.

В последующем были выполнены фундаментальные исследования динамических характеристик криволинейных трубопроводных систем на основе стержневой модели. Фундаментальное исследование В.С. Ушакова [216] содержит вывод нелинейного дифференциального уравнения пространственных колебаний сегмента трубопровода, где реализован кинематический подход к описанию взаимодействия потока с упругими стенками. В работе аналитически определены собственные частоты колебаний в криволинейной плоскости оси трубопровода с учетом геометрической нелинейности, вызванной конечными перемещениями.

Исследование динамических характеристик криволинейных элементов трубопроводных систем получило значительное развитие в 1970-х годах благодаря

работам канадских учёных Д.С. Уивера, Т. Анни [317], И. Хилла, С. Девиса [262], а также американского исследователя С.С. Чена [246]. Особый вклад внесли фундаментальные исследования М.П. Пайдуссиса [291, 292 и др.], систематизировавшего подходы к анализу упругих колебаний трубопроводов с проточной средой. В данных работах рассматривались криволинейные участки трубопроводов с переменным центральным углом в диапазоне от 0 до 360°, при этом анализ проводился для двух типов граничных условий: шарнирного закрепления по концам и жёсткого защемления. Задача идентификации спектра собственных частот решалась преимущественно численно-аналитическим методом Бубнова–Галёркина с использованием полиномиальных базисных функций для аппроксимации прогибов. Результаты исследований, представленные в виде графических зависимостей и табличных данных, позволили установить параметрическую зависимость частотных характеристик от геометрических параметров (центрального угла, соотношения радиуса трубы и радиуса кривизны), кинематических условий (скорости транспортируемой среды) и типов закрепления. Ключевой вывод, полученный в рамках стержневой теории, заключается в следующем: увеличение скорости потока жидкости приводит к снижению собственных частот колебаний криволинейных участков, тогда как рост кривизны оси трубопровода вызывает их увеличение. Эти закономерности стали основой для современных методик расчёта динамической устойчивости трубопроводных систем.

Комплексное теоретико-экспериментальное исследование изгибных колебательных мод криволинейных трубопроводных элементов с внутренним потоком жидкости в рамках стержневой теории было выполнено Ацуси Ватари [316]. Особенностью работы являлся анализ участков с несимметричными краевыми условиями: жёсткое защемление на одном конце и свободное опирание на другом. Автор применил метод Бубнова–Галёркина, используя в качестве базисных функций фундаментальные решения для балок Эйлера–Бернулли, что позволило повысить точность аппроксимации прогибов в условиях неоднородных граничных ограничений. Работа расширила понимание

динамического поведения трубопроводов с асимметричной кинематикой опор, актуализируя необходимость учёта пространственной конфигурации при проектировании систем с неуравновешенными нагрузками. Получено трансцендентное характеристическое уравнение

$$\operatorname{ch}\lambda_n \cdot \cos \lambda_n = -1$$

и определены первые его три корня: 1,875; 4,694 и 7,855. Показано, что результаты экспериментов удовлетворительно согласуются с теоретическими данными.

В работах отечественных исследователей В.С. Дерябина и П.Д. Доценко [74, 77, 79] рассматривались криволинейные участки трубопроводов с шарнирно опёртыми и защемлёнными концами. «Задача определения частот собственных колебаний с учётом скорости потока жидкости решалась по стержневой теории с применением метода Бубнова–Галёркина и аппроксимирующих функций в виде полиномов, удовлетворяющих граничным условиям. Аналогичные решения приведены в работах В.А. Светлицкого [191, 192] и др. Ни одна из приведённых здесь работ не содержит аналитических выражений вида (9), пригодных для определения частот собственных колебаний криволинейных участков трубопроводов при динамических расчётах» [138].

Текст данного подраздела ранее был опубликован в работе [183]: «Анализ аварий, произошедших в Средней Азии [2], показал, что в случае изменения температуры транспортируемого газа с 34 °С до 48 °С наблюдалось выпучивание трубопровода и образование "арочного выброса". Такое явление вызвано действием продольных сжимающих сил, действующих на трубопровод. Процесс аркообразования может быть вызван не только температурными деформациями, но и в том числе смещением опор и изменением физико-механических свойств грунта».

Частоты свободных изгибных колебаний в плоскости кривизны криволинейных участков надземных трубопроводов, продольные оси которых очерчены по дуге окружности радиуса R , определяются в рамках теории стержней по формулам для круговых арок [197, 104, 160]. Для криволинейных участков заполненного надземного трубопровода кругового очертания с шарнирно

неподвижными закреплениями концов или с заземленными концами круговая частота свободных изгибных колебаний в плоскости кривизны определяется по формуле

$$\omega_i = \frac{K_i}{R^2 \varphi^2} \sqrt{\frac{EIk_0}{m + m_0}}, \quad (10)$$

где R – радиус оси криволинейного участка;

φ – центральный угол в радианах;

K_i – коэффициент, значение которого зависит от условий закрепления концов участка и от формы колебаний;

k_0 – коэффициент понижения изгибной жесткости кривой трубы.

Аналізу свободных колебаний криволинейных трубопроводов на основании теории стержней посвящены работы П.Д. Доценко [78, 79].

В работе В.В. Болотина [24] была решена задача определения частот и форм свободных колебаний надземного трубопровода, обжатого продольной силой, вызванной смещением опор, недостаточной компенсацией температурных деформаций и т.д. Полученное автором решение представляется в виде

$$\omega_i = \frac{i^2 \pi^2}{l^2} \sqrt{\frac{EI}{(m+m_0)} \left(1 - \frac{Fl^4}{i^2 \pi^2 EI}\right)}, \quad (11)$$

где F – продольная сила.

Используя критерий динамической устойчивости, когда $\omega_i = 0$, величина критической сжимающей силы, при которой система теряет устойчивость, принимает вид

$$F_{кр} = \frac{i^2 \pi^2 EI}{l^2}. \quad (12)$$

Проблема устойчивости стержневых систем, взаимодействующих с упругим основанием, остаётся актуальной в строительной механике в связи с широким распространением таких расчётных моделей в инженерной практике. Фундаментальное решение, полученное Н.А. Алфутовым [5] для стержня на упругом основании, послужило теоретической базой для статического расчёта наземных трубопроводов. Данный метод позволяет определять критические параметры продольных сжимающих нагрузок с учётом реакции упругой среды,

моделируемой в рамках гипотезы Винклера. Результаты Алфутова, основанные на энергетическом критерии устойчивости и вариационных принципах, до сих пор применяются в нормативных документах для оценки устойчивости трубопроводов в грунтовых средах, что подчёркивает их практическую значимость. Ключевым преимуществом подхода является учет коэффициента постели основания в дифференциальном уравнении изгиба, что позволяет учитывать пространственную работу системы при потере устойчивости. Выражение, учитывающее влияние коэффициента постели на параметр критической продольной сжимающей силы, представлено в виде

$$\bar{P}_n = n^2 + \frac{kl^4}{n^2\pi^4EI}, \quad (13)$$

где $\bar{P}_n = \frac{F}{F_3}$; $F_3 = \frac{\pi^2EI}{l^2}$.

Позднее П.П. Бородавкин, А.М. Синюков получили в работе [27] выражение для расчетов *подземных* трубопроводов, полученная формула для определения критической сжимающей силы имеет вид

$$F_{кр} = \frac{\pi^2EI}{l^2} (n^2 + \eta/n^2), \quad (14)$$

где $\eta = \frac{k_0Dl^4}{\pi^2EI}$;

k_0 – коэффициент постели;

D – наружный диаметр.

1.2 Свободные колебания оболочечных расчетных моделей

Анализ динамического поведения трубопроводных систем традиционно опирается на упрощения стержневой теории, что в современных условиях эксплуатации трубопроводов диаметром свыше 1000 мм является приближенным. Основные ограничения классического подхода связаны с невозможностью учета двух ключевых факторов: геометрической нелинейности, проявляющейся в деформации поперечного сечения (овализации) под совместным влиянием внутреннего давления и изгибающих моментов в окружном направлении, и гидродинамического взаимодействия, определяющего влияние скорости и давления транспортируемой среды на устойчивость и колебательные процессы.

Для труб с соотношением диаметра к толщине стенки $r/h > 50$, характерным для магистральных систем, стержневая модель не позволяет адекватно оценить частотно-модальный состав колебаний при параметрическом возбуждении или критические параметры потери устойчивости с учётом геометрических изменений сечения. В этой связи актуальным становится применение уточнённых моделей на основе теории тонких замкнутых оболочек, таких как уравнения Власова–Новожилова с учётом гидродинамических слагаемых. Эти подходы учитывают нелинейные деформации контура сечения, учитывают влияние внутреннего давления в уравнениях движения и позволяют прогнозировать аномальные резонансные режимы, связанные с овализацией. Переход к оболочечным моделям подтверждается как экспериментальными исследованиями (например, данными ASME по трубам диаметром 1200 мм), так и требованиями стандартов (EN 13480-3:2017), регламентирующими расчёт тонкостенных конструкций в условиях циклических нагрузок. Современные методы, основанные на теории оболочек, обеспечивают более высокую точность прогнозирования динамических характеристик, что критически важно для обеспечения надёжности и безопасности трубопроводных систем большого диаметра в сложных эксплуатационных условиях.

Проблеме колебаний цилиндрических оболочек посвящён значительный массив исследований, базирующихся на фундаментальных уравнениях В. Флюгге [224]. Эти уравнения представляют собой систему трёх дифференциальных уравнений движения в перемещениях, описывающих динамическое поведение оболочки под действием изгибных нагрузок. Для случая шарнирного закрепления концевых сечений применение метода Фурье для разложения полей перемещений по окружным и продольным координатам сводит задачу к характеристическому кубическому уравнению относительно квадрата круговой частоты ω . Такой подход позволяет определить спектр собственных частот свободных изгибных колебаний, однако его реализация требует учёта сложной связи между деформационными параметрами (радиальное,

тангенциальное и осевое перемещения) и геометрическими характеристиками оболочки (толщина, радиус кривизны, длина). Решение Флюгге имеет вид

$$a_3\omega^6 + a_2\omega^4 + a_1\omega^2 + a_0 = 0. \quad (15)$$

Уравнения В. Флюгге, несмотря на теоретическую строгость, не нашли широкого применения в инженерной практике из-за высокой вычислительной сложности их решений. Альтернативой стали упрощённые модели, разработанные В.З. Власовым [40], Х.М. Муштари [143] и Л.Х. Доннелом [254]. Эти уравнения, объединённые под названием теории Доннела–Муштари–Власова (или теории пологих оболочек), существенно снижают трудоёмкость расчётов за счёт пренебрежения тангенциальными составляющими сил инерции. Однако, как показали исследования Э.И. Иванюты и Р.Н. Финкельштейна [84], такое допущение приводит к завышению собственных частот колебаний оболочек. Количественная оценка погрешности, выполненная на основе сравнения с точными решениями, выявила расхождение до 25 % в случаях, когда тангенциальные инерционные эффекты играют значимую роль (например, при высокочастотных колебаниях или малой толщине стенки). Это ограничивает применимость упрощённых моделей в задачах, требующих высокой точности, таких как расчёт резонансных режимов или анализ устойчивости тонкостенных конструкций.

Одними из первых исследований, посвященных учету влияния внутреннего рабочего давления на частоты свободных колебаний цилиндрической оболочки, были работы В.Е. Бреславского [30], С.Н. Кукуджанова [129–133] и др. Исследование С.Н. Кукуджанова, опубликованное в статье [132], касается проблеме свободных колебаний цилиндрических оболочек и их динамической устойчивости. Полученное им выражение для квадрата частоты свободных колебаний имеет вид

$$\omega_{mn}^2 = \frac{Egh_v^2}{\gamma R^2} \frac{m^4(m^2 - 1)(m^2 - 1 + p^*) + \alpha_n^4/h_v^2}{m^2(m^2 + 1)}, \quad (16)$$

где $h_v = \frac{h}{R\sqrt{12(1-\nu^2)}}$;

$$p^* = 12(1-\nu^2) \frac{p}{E} \left(\frac{R}{h}\right)^3;$$

$$\alpha_n = \frac{n\pi R}{l};$$

p^* – нормальное внутреннее давление;

γ – удельный вес материала трубы;

g – ускорение свободного падения;

m, n – волновое число в окружном и продольном направлении;

R – радиус срединной поверхности.

Дальнейшее развитие методов определения частот свободных колебаний трубопроводных систем, основанных на теории цилиндрических оболочек, связано с применением полубезмоментной теории Власова–Новожилова [148]. В данной модели предполагается, что изгибающие моменты M_1 , действующие в продольном направлении, пренебрежимо малы по сравнению с моментами M_2 , действующими в поперечном направлении. Это допущение позволяет существенно упростить расчётную схему для тонкостенных трубопроводов средней и большой длины, которые преобладают в инженерной практике. Экспериментальная валидация подтвердила адекватность такой модели, особенно в случаях, когда преобладают поперечные формы колебаний.

Основу метода составляют дифференциальные уравнения четвёртого порядка, описывающие динамическое равновесие оболочки. В отличие от классической моментной теории, «требующей задания четырёх граничных условий на каждом краю, полубезмоментный подход ограничивается двумя условиями на каждом из закреплений. Это снижает вычислительную сложность задачи, сохраняя при этом достаточную точность для анализа длинных трубопроводов» [207]. Например, при шарнирном закреплении концов система уравнений сводится к спектральной задаче для определения собственных частот, что делает метод удобным для параметрических исследований и инженерных приложений.

В работе [183] было отмечено: «Наиболее полное решение задачи о свободных колебаниях трубопроводов с позиции цилиндрических оболочек с учетом влияния внутреннего рабочего давления, геометрических характеристик, а также всех составляющих сил инерции в продольном, окружном и радиальном направлении было получено В.П. Ильиным и О.Б. Халецкой [89, 97] на основании

геометрически нелинейного варианта полубезмоментной теории оболочек Власова–Новожилова [4, 40, 148]. Выражение для определения частоты свободных колебаний трубопровода с шарнирным типом закрепления при различных волновых числах $m, n = 1, 2, 3, \dots$ в окружном и продольном направлении имеет вид»:

$$\omega_{mn}^2 = \frac{Egh_v^2 \lambda_n^4 + m^4(m^2 - 1)(m^2 - 1 \pm p^*)}{\gamma R^2 (\lambda_n^2 h_v + m^4 + m^2)}, \quad (17)$$

где $\lambda_n = \frac{n\pi R}{l\sqrt{h_v}}$; $p^* = \frac{pR}{Ehh_v^2}$; $h_v = h/R\sqrt{12(1 - \nu^2)}$.

Знак плюс в числителе (17) у параметра p^* соответствует внутреннему давлению, знак минус – внешнему. Отличие этой формулы от (16) состоит в том, что здесь учтены все силы инерции, включая тангенциальные $\lambda_n^2 h_v$.

Проблематика взаимодействия оболочечных конструкций с жидкостной средой остаётся одной из ключевых в динамике трубопроводных систем. Фундаментальные исследования в этой области, выполненные В.В. Болотиним [23] и Ю.Н. Новичковым [147], заложили основы для анализа гидродинамических эффектов в замкнутых цилиндрических оболочках. Позднее работы И.С. Фанга [257], И.А. Харингса [260] и Р.И. Ниордсона [288] экспериментально и теоретически подтвердили, что внутриконтурное давление транспортируемой среды оказывает двойной эффект: увеличивает жёсткость трубопровода за счёт гидростатического нагружения и повышает спектр собственных частот колебаний.

М.А. Ильгамовым [88] проведён анализ свободных колебаний цилиндрических оболочек с потоком жидкости на основе полубезмоментной теории, где тангенциальные составляющие сил инерции были исключены из рассмотрения. Этот подход, упрощающий связь между гидродинамическими и конструкционными параметрами, позволил получить аналитические решения для длинных трубопроводов, однако, как показано в исследованиях Э.И. Иванюты [86], приводит к локальным погрешностям до 15 % в оценке частот при высоких скоростях потока.

Наиболее комплексные результаты получены в работах М.П. Пайдуссиса и И.П. Дениса [293, 294], где рассмотрена устойчивость оболочек

с установившимся потенциальным потоком жидкости при комбинированных граничных условиях (шарнирном закреплении, упругой заделке). Авторами применён метод Бубнова–Галёркина с аппроксимацией прогибов полиномами Лежандра, что позволило учесть нелинейные эффекты взаимодействия. Аналогичный подход использован в исследовании [312], где пренебрегли тангенциальными инерционными силами, ограничив область применимости результатов случаями с малыми отношениями скорости потока к критической $V/V_{cr} < 0.3$.

В дальнейшем В.Г. Соколовым и А.А. Ефимовым [201] на основании геометрически нелинейного варианта полубезмометной теории оболочек было получено выражение для квадрата частоты свободных колебаний подводных прямолинейных участков трубопроводов, которое позволяет учесть влияние внутреннего рабочего давления, внешнего гидростатического давления, а также всех составляющих сил инерции, включая тангенциальные

$$\omega_{mn}^2 = \frac{\lambda_n^4 + m^4(m^2 - 1)(m^2 - 1 - Gq_0) - G\rho_0\Phi_{mn}U^2h_v\lambda_n^2m^4}{G\rho R h(\lambda_n^2 h_v + m^4 + m^2) + G\rho_0\Phi_{mn}R^2m^4}, \quad (18)$$

где $G = R/Ehh_n^2$; $\lambda_n = \frac{n\pi R}{L\sqrt{h_v}}$; $q_0 = q - p_0$;

q – внешнее гидростатическое давление;

p_0 – внутреннее рабочее давление.

В уравнении (18) по сравнению с (17) дополнительно учтено влияние скорости и присоединенной массы протекающей жидкости.

В исследовании И.О. Разова и В.Г. Соколова [203] получено решение для определения квадрата частоты свободных колебаний наземных трубопроводов с учетом двух ключевых факторов: реакции упругого основания, распределенного по сектору контакта, и влияния продольной сжимающей силы. Авторами разработана уточненная математическая модель, интегрирующая контактные условия по поверхности сопряжения «труба–грунт» через линейно-упругий закон Винклера. Это позволило проанализировать устойчивость и колебательные характеристики прямолинейных участков в условиях комбинированных нагрузок, что существенно

расширило теоретическую базу расчетов трубопроводных систем наружной прокладки.

Выражение имеет вид

$$\omega_{mn}^2 = \frac{\lambda_n^4 + m^4(m^2 - 1)(m^2 - 1 + p^*) + k^*m^4 - \lambda_n^4 m^4 P/n^2 - \lambda_n^2 \rho_0^* \Phi_{mn} V^2 m^4 h_v}{rh\rho^*(\lambda_n^2 h_v + m^4 + m^2) + r^2 \rho_0^* \Phi_{mn} m^4} \quad (19)$$

здесь $k^* = \frac{r^2 k}{\pi E h h_v^2} |z_m|$; k – коэффициент постели подстилающего слоя грунта или коэффициент упругого отпора грунта; $P = \frac{F}{F_0}$ – параметр продольной сжимающей силы.

Вопросы колебания не только оболочек, но и пластин на упругом и вязко-упругом основании также имеют важное значение, здесь можно отметить работы М.В. Шитиковой и её соавторов [230, 231].

В работе [207] было отмечено: «Свободные колебания *криволинейных* участков трубопроводов большого диаметра исследовались большей частью на основании теории тороидальных оболочек. Таких решений опубликовано гораздо меньше, чем для прямолинейных участков. Кроме того, большинство этих работ относится к тороидальным оболочкам, замкнутым по обеим координатам тора, и их результаты нельзя использовать для *криволинейных* участков трубопроводов».

Работа В. А. Васильева [38] посвящена анализу влияния геометрических параметров на частоты собственных колебаний газового тора, помещенного в жидкость. В работе рассматриваются различные аспекты, такие как гидростатическое давление и акустические характеристики, которые оказывают значительное влияние на динамическое поведение системы. Исследование включает в себя математическое моделирование, позволяющее вычислить частоты колебаний в зависимости от радиуса осевой окружности и радиуса поперечного сечения. Результаты показывают, что увеличение радиуса осевой окружности приводит к снижению частоты собственных колебаний, что может быть критически важным для проектирования акустических приборов, работающих под водой. Также автор подчеркивает, что наличие воздушного объема вблизи прибора может влиять на суммарное звуковое поле, что требует дополнительного учета при

разработке таких устройств. В работе предлагаются рекомендации по оптимизации конструкции приборов для улучшения их акустических характеристик. Р. С. Мин, Дж. Пан, М. П. Нортон в работе [282] исследуют свободные вибрации тороидальных оболочек с различными условиями закрепления. В статье рассматриваются как симметричные, так и антисимметричные режимы колебаний, что позволяет получить полное представление о динамическом поведении тороидальных конструкций. Авторы используют линейную теорию тонких оболочек для анализа, что позволяет точно предсказать частоты и формы колебаний. Результаты показывают, что увеличение радиуса оболочки приводит к изменению частот колебаний, а также к изменению форм колебаний, что имеет важное значение для проектирования конструкций в различных инженерных приложениях. Кроме того, в работе подчеркивается, что условия закрепления значительно влияют на динамические характеристики оболочек, что необходимо учитывать при проектировании. Авторы также обсуждают возможные практические применения полученных результатов в области механики и материаловедения.

В диссертации В.Г. Соколова [207] ранее было опубликовано: «Так, в статье В.С. Гонткевича [63] на основании общего подхода получено кубическое уравнение вида (15), которое решается приближенным методом. Влияние внутреннего давления на частоты свободных колебаний тороидальной оболочки исследовалось в статье А.В. Булыгина [31]. В работе К. Федергофера исследуются осесимметричные колебания тороидальной оболочки. Той же проблеме посвящен ряд работ Мак-Гиля [283, 284, 285]. Тороидальная оболочка рассматривается здесь на основе линейной теории упругости, и решение получено методом конечных разностей. Показано, что свободная частота оболочки увеличивается по мере увеличения кривизны оси тора. Полученное решение для слабо искривленного участка трубопровода О.Б. Халецкой [225] с применением допущений полубезмоментной теории оболочек в предельном случае при нулевой кривизне приводит к аналитическому выражению вида (17) для прямолинейного трубопровода».

1.3 Свободные колебания неоднородных оболочек

Развитие техники трубопроводного транспорта, химической и нефтеперерабатывающей промышленности связано с применением труб из различных металлов и композиционных материалов, двух-, трех- и многослойных оболочек. Применение таких труб обусловлено повышением надежности эксплуатации в условиях агрессивных жидкостей и газов. Использование биметаллических оболочек даёт высокий экономический эффект с точки зрения расхода дорогостоящих металлов.

В биметаллических трубах основной слой обеспечивает прочность и жесткость конструкции, а плакирующий слой, толщина которого может варьироваться от 5 до 50 % общей толщины, обеспечивает стойкость трубопровода к агрессивному воздействию.

Теория расчета многослойных оболочек строится на двух следующих подходах [155]:

- для вывода уравнений движения принимаются кинематические гипотезы для каждого слоя, при этом порядок системы уравнений зависит от числа слоёв;
- вывод уравнений движения осуществляется с использованием гипотез, принимаемых для пакета слоёв в целом. Для представления этих гипотез вводятся допущения о характере распределения перемещений или напряжений по толщине пакета, порядок системы уравнений при этом не зависит от числа слоёв.

Каждый из подходов имеет свои преимущества и недостатки.

Применение гипотез по первому подходу позволяет с высокой точностью описывать поведение многослойных конструкций и тем самым отражает в большей степени реальную картину деформирования, чем при использовании гипотез для пакета слоёв в целом. Однако при расчете оболочек, состоящих из большого числа слоёв, возможности расчета ограничиваются трудностями вычислительного характера. Поэтому у большинства авторов вывод уравнений многослойных оболочек реализован на основе второго подхода.

Основные уравнения теории многослойных оболочек были получены С.А. Амбарцумяном [6,7], В.В. Болотиным и Ю.Н. Новичковым [26],

Э.И. Григолюком [69] и другими авторами. В работе [6] излагается метод расчета двухслойных ортотропных оболочек. В монографии [7] делается обобщение теории анизотропных оболочек, включающей теорию анизотропных многослойных оболочек. В основу этой теории положена гипотеза недеформируемых нормалей для всего пакета слоёв оболочки. Уравнение движения ортотропных многослойных цилиндрических оболочек на основе [7] получено в работе [265].

Выводу геометрически нелинейных уравнений движения упругой многослойной оболочки посвящена работа М.С. Герштейна [56], где уравнения для многослойных оболочек регулярной структуры выводятся на основе второй схемы с помощью вариационного принципа. Применение операции энергетического сглаживания приводит к формулировке вариационного принципа сглаживания Гамильтона-Остроградского динамики многослойных оболочек, рассматриваемых как сплошные оболочки с внутренними моментами. Из условия стационарности функционала следуют основные уравнения для многослойных оболочек. Полученные уравнения могут быть использованы для решения различных задач о колебаниях, волнах и динамическом выпучивании [26, 46] многослойных оболочек.

В работе [155] проведено сопоставление результатов экспериментальных и теоретических исследований многослойных оболочек. Следует, что использование гипотез деформирования, общих для всего пакета в целом, не принимая во внимание деформации поперечного сдвига и других особенностей многослойных оболочек, связанных с существенными различиями физико-механических свойств отдельных слоёв, накладывает ограничения на применение большинства вариантов теории многослойных оболочек, особенно при динамическом воздействии. Задаче о свободных колебаниях многослойных труб посвящена работа [56]. Здесь уравнения движения для расчетной схемы в виде цилиндрической оболочки записаны с учетом шарнирных граничных условий. Решения этих уравнений, выраженных в перемещениях, определяются в виде радиального перемещения приближенным выражением:

$$w(\xi, \theta, t) = f_1(t) \sin \lambda_0 \xi \cdot \cos \theta + f_2(t) \sin \lambda_0 \xi \cdot \cos 2\theta, \quad (20)$$

где $\lambda_0 = \frac{n\pi r}{L}$; $f_1(t)$ и $f_2(t)$ – функции времени.

При решении уравнения методом Бубнова–Галеркина в работе [96] на основании геометрически нелинейного варианта полубезмоментной теории оболочек В.П. Ильиным [96] получено выражение для определения квадрата частоты свободных колебаний биметаллических труб.

В целом в открытой литературе работы, посвященные вопросам колебаний и динамической устойчивости, встречаются редко, в основном работы посвящены определению напряженно-деформированного состояния [6] и исследованию статической устойчивости. Одним из первых общие уравнения для тонких биметаллических пластин и оболочек получил Д.Ю. Панов [155]. Эти уравнения были использованы для исследования устойчивости биметаллической оболочки при нагреве, однако основной результат получен только для случая, когда коэффициенты Пуассона материалов одинаковые.

Общие теории расчета тонких упругих биметаллических оболочек разработаны Э.Н. Григолюком [68]. Теория разработана на основании гипотез Кирхгоффа–Лява для оболочек любой формы, подверженных действию произвольных нагрузок и нагреву при малых перемещениях и упругих деформациях, описываемых законом Гука. В этой работе отмечено, что применение гипотез Кирхгоффа–Лява ограничивается отношением модулей упругости материалов слоёв, где соотношение модулей упругости не превышает 10–15. Аналогичный вопрос рассматривается в работе В.И. Королева [124], где излагается метод расчета двухслойных пластин и оболочек с нейтральной поверхностью, принимаемой в качестве исходной. При этом нейтральной поверхностью называется недеформируемая при изгибе поверхность (слой). В работе [124] предлагается также приближенная теория расчета биметаллических оболочек на внешнюю нагрузку, в соответствии с которой при расчете используются обычные соотношения теории однородных оболочек при замене в них коэффициента Пуассона приведенным значением, а жесткости на растяжение и изгиб – соответствующими приведенными жесткостями. Отмечается, что задача упрощается при одинаковых коэффициентах Пуассона материалов слоёв. В монографии В.И. Королёва [124] проведён анализ

собственных колебаний биметаллических цилиндрических оболочек, выполненный на основе разработанной системы дифференциальных уравнений в частных производных, описывающих малые деформации двухслойных конструкций. Уравнения сформированы в перемещениях, что позволяет учитывать нелинейные эффекты взаимодействия между слоями, включая контактные напряжения и диссипативные процессы. Для случая шарнирного закрепления торцевых сечений автором получено характеристическое кубическое уравнение относительно квадрата круговой частоты ω^2 , решение которого определяет спектр собственных частот колебаний двухслойной оболочки.

1.4 Параметрические колебания и динамическая устойчивость стержневых и оболочечных расчетных моделей

Эксплуатационный опыт подтверждает, что трубопроводные системы подвержены комплексным динамическим воздействиям, включая вибрационные нагрузки, возникающие вследствие работы перекачивающего оборудования, гидродинамических ударов и внешних сейсмических колебаний. В экстремальных эксплуатационных условиях такие воздействия инициируют критические деградационные процессы: нарушение целостности изоляционных покрытий, коррозионное растрескивание металла (КРН) и усталостное разрушение [101]. Спектр колебаний трубопровода характеризуется многофакторным взаимодействием свободных, вынужденных и параметрических форм колебаний, чья структура определяется геометрическими параметрами (длиной, толщиной стенки, кривизной), внутренним давлением, продольными сжимающими силами, скоростью транспортируемой среды и упругими характеристиками грунтового основания.

Особую опасность представляет параметрический резонанс, при котором система теряет устойчивость не только при точечном совпадении собственных ω и возмущающих γ частот, но и в непрерывных областях значений параметров – зонах динамической неустойчивости. В этих режимах амплитуда колебаний экспоненциально нарастает даже при малых внешних возмущениях, что ведёт

к катастрофическим деформациям. Такой феномен обусловлен модуляцией жёсткости системы под действием периодических изменений параметров (например, пульсаций давления или температурных градиентов).

Физическая природа параметрического резонанса впервые была экспериментально зафиксирована Ф. Мельде в 1859 г. при исследовании колебаний струны с вибрирующей опорой, а теоретическое обоснование предоставлено Дж. Стрэттом (лордом Рэлеем) в рамках линейной теории упругости. Современные исследования показывают, что в трубопроводных системах зоны динамической неустойчивости могут быть идентифицированы через анализ матрицы уравнений движения, а их минимизация требует оптимизации геометрических параметров и демпфирующих свойств конструкции. Для многих механических систем проблема динамической устойчивости математически сводится к решению однородного дифференциального уравнения второго порядка с периодическими коэффициентами, т.е. к уравнению Матье:

$$f''_{(t)} + a(1 - b \cos \gamma t)f_{(t)} = 0, \quad (21)$$

где a и b – постоянные параметры; γ – частота возбуждения.

Устойчивость периодических решений уравнений, описывающих параметрические колебания, определяется соотношением параметров a , b и γ , характеризующих периодическое возмущение $f(t)$. При критических комбинациях этих параметров решения теряют устойчивость, что проявляется в экспоненциальном росте амплитуд колебаний – феномене параметрического резонанса. Классический подход к оценке динамической устойчивости основан на построении модифицированных диаграмм Айнса–Стретта, которые разделяют пространство параметров (a, b) на области устойчивости и неустойчивости. Границы областей динамической неустойчивости найдены давно, так как диаграмма Айнса–Стретта построена еще в начале 30-х годов прошлого столетия [15]. Эти диаграммы позволяют, не решая уравнения Матье (21), а лишь найдя его коэффициенты, определить, устойчивая или неустойчива система. Поэтому основная трудность исследования динамической устойчивости механической системы состоит в составлении уравнения Матье, т.е. определении параметров a и b .

Впервые задача динамической устойчивости шарнирно закрепленного стержня, нагруженного периодически изменяющейся осевой силой

$$F(t) = F_0(1 + \mu \cos \gamma t), \quad (22)$$

была решена в 1924 году Н.М. Беляевым [15]. Им было получено уравнение Матье в виде

$$f''(t) + \omega^2(1 - \delta \cos \gamma t)f(t) = 0, \quad (23)$$

где ω – частота свободных колебаний стержня, нагруженного постоянной силой F_0 ;

δ – коэффициент возбуждения, определяемый формулой

$$\delta = \frac{\mu}{\frac{F_{кр}}{F_0} - 1}, \quad F_{кр} = \frac{\pi^2 EI}{l^2}; \quad (24)$$

μ – параметр пульсации, изменяющийся в пределах от 0 до 0,5;

E – модуль упругости материала стержня;

I – минимальный момент инерции поперечного сечения стержня;

$F_{кр}$ – критическая сила Эйлера для шарнирно опертого стержня.

Текст данного подраздела был опубликован ранее в работе [183] «Зоны неустойчивости решения уравнения (23) определяются как область параметрического резонанса (или области динамической неустойчивости системы) при соотношении частот $\omega = \frac{\gamma}{2}i$, где $i = 1, 2, 3 \dots$ »

«Основная область неустойчивости называется главной и реализуется при $i = 1$. Остальные области $i = 2, 3, \dots$ соответствуют второстепенным областям, имеющим значительно меньшую ширину, и перекрываются главной областью. В работе [19] была получена формула для верхней и нижней границ главной области» [183]:

$$1 - \frac{\delta_{mn}}{2} < \left(\frac{2\omega_{mn}}{\gamma}\right)^2 < 1 + \frac{\delta_{mn}}{2}. \quad (25)$$

Последующее развитие исследований динамической устойчивости конструкций при параметрических нагрузках связано с работами Н.М. Крылова и Н.Н. Боголюбова [126], которые первыми проанализировали устойчивость стержневых систем с нетривиальными граничными условиями (жёсткое защемление, упругая заделка), расширив классическую постановку задачи. А.А. Андронов и М.А. Леонтович [8] выполнили детальное исследование

вторичных зон динамической неустойчивости, возникающих в стержнях при учёте внутреннего трения, что позволило уточнить границы резонансных режимов в упругих системах.

Особое место в этом направлении занимает работа О.Д. Онашвили [152], где впервые систематически изучена динамическая устойчивость цилиндрических оболочек под действием периодических параметрических возмущений. Автором установлено, что учёт геометрической нелинейности и овализации поперечного сечения приводит к смещению и деформированию областей неустойчивости по сравнению с классическими решениями для стержней. Это подчёркивает необходимость разработки специализированных критериев устойчивости для оболочечных конструкций, взаимодействующих с агрессивными средами или потоками жидкости.

Проблема параметрических колебаний трубопроводов с транспортируемой жидкостью, исследуемая в рамках стержневой теории, привлекала значительное внимание учёных благодаря своей практической значимости. Одним из пионерных исследований в этой области стала работа И.И. Гольденבלата [59], посвящённая анализу вертикальных сдвоенных трубопроводов с противоположно направленными потоками жидкости. Автором было показано, что при достижении критических скоростей потока прямолинейная конфигурация системы теряет устойчивость, что заложило основу для изучения динамических критериев в подобных системах.

Более прикладной подход реализован в трудах Н.А. Картвелишвили [107], где рассмотрена задача о параметрических колебаниях горизонтального трубопровода с пульсирующим потоком жидкости. На основе уравнения Матье (20) автор исследовал частотные характеристики, соответствующие зонам динамической неустойчивости. Ключевой вывод работы заключается в том, что пульсации скорости потока выступают параметрическим возмущением, инициирующим поперечные колебания трубы. Это подтверждает необходимость учёта нестационарности гидродинамических нагрузок при проектировании трубопроводных систем.

Ниже приведен текст из ранее опубликованной мною монографии [183]: «Последующие работы в этой области [108, 109, 117, 141, 150, 113, 234] были направлены на уточнение решений и исследования различных аспектов задачи о динамической устойчивости трубы – стержня с нестационарным потоком жидкости». «Так, например, в статьях М.С. Натанзона [145], В.П. Катаева [108, 109] приведено обоснование геометрически нелинейного подхода для исследования амплитуд колебаний внутри областей динамической неустойчивости» [183]. Вопросам определения частот колебаний и динамической устойчивости посвящены работы П.А. Вельмисова [32, 33, 34].

Параметрические колебания и вопросы динамической устойчивости прямолинейных трубопроводов при нестационарных потоках жидкости стали предметом фундаментальных исследований в работах С.С. Чженя и М.П. Пайдуссиса [291–294]. В рамках стержневой модели эти авторы получили системы связанных дифференциальных уравнений типа Матье–Хилла, решение которых требовало применения численных методов, включая подход С.С. Хсу [264]. Результаты расчетов продемонстрировали расширение главных и второстепенных областей динамической неустойчивости с ростом скорости потока, однако ограниченность стержневой модели, не учитывающей деформации поперечного сечения (эффект Кармана), существенно сужает возможности качественного анализа полученных решений.

Современные исследования тонкостенных трубопроводов большого диаметра базируются на теории тонкостенных оболочек. Пионерная работа Э.И. Григолюка (1953) по параметрическим колебаниям цилиндрических оболочек под действием пульсирующих осевых нагрузок заложила методологическую основу для последующих исследований [70]. Ключевым достижением стало описание механизма параметрической регенерации, когда диссипативные потери компенсируются энергией модулирующего воздействия через строго определенные временные интервалы $T/2$.

Параметрические колебания и проблемы динамической устойчивости тонкостенных конструкций при нестационарных гидродинамических воздействиях

получили фундаментальное развитие в работах ведущих специалистов механики деформируемого тела. Систематизация общей теории динамической устойчивости упругих систем, выполненная В.В. Болотиным [20], заложила основу для анализа широкого класса задач, включая колебания цилиндрических оболочек под периодическими нагрузками. В монографии Болотина подробно рассмотрены дифференциальные уравнения типа Матье–Хилла с периодическими коэффициентами, методы построения областей динамической неустойчивости с использованием характеристических показателей, а также влияние параметров модуляции на границы устойчивости. Для цилиндрических оболочек с пульсирующим потоком жидкости ключевые результаты получены А.С. Вольмиром, который на базе теории потенциальных течений вывел систему связанных уравнений, где пульсирующее давление $P(t) = P_0(1+m\cos\theta t)$ и прогиб оболочки w связаны через операторы $L1$ и $L2$. Решение этой системы методом гармонического баланса позволяет определить критические значения параметра модуляции m_{cr} . Исследования М.П. Пайдуссиса [291–294] расширили классическую теорию за счет учета нестационарности поля скоростей жидкости, анализа взаимодействия изгибных и крутильных форм колебаний, а также численного моделирования на базе методов конечных разностей. Однако упрощенные модели, игнорирующие нелинейные эффекты деформации (эффект Кармана), распределенный характер массово-инерционных характеристик и температурные напряжения в материале, приводят к завышению критических скоростей потока на 15–20 % по сравнению с экспериментальными данными.

В современных исследованиях динамической устойчивости тонкостенных трубопроводов большого диаметра с пульсирующим потоком жидкости ключевым достижением стало преодоление ограничений классического подхода, основанного на стержневой теории. Традиционные модели, такие как работы С.С. Чженя и М.П. Пайдуссиса, приводили к системам неразделяющихся дифференциальных уравнений Матье–Хилла, требующих численных методов решения и частного анализа для каждого конкретного случая. Однако в работах В.П. Ильина, В.Г. Соколова [90, 94] и А.А. Ефимова [201] предложен принципиально новый подход, основанный на

геометрически нелинейном варианте полубезмоментной теории цилиндрических оболочек. В этих работах получена разделяющаяся система дифференциальных уравнений Матье, построены и проанализированы диаграммы Айнса–Стретта, модифицированные для практического применения.

1.5 Экспериментальные и численные методы определения частот свободных колебаний стержневых и оболочечных элементов

В монографии А.С. Вольмира [42] представлено решение задачи определения частот свободных изгибных колебаний цилиндрической оболочки, шарнирно закрепленной по торцам, с учётом воздействия движущейся жидкости. Исследование выполнено численными методами на базе линейных уравнений динамики оболочек, сформулированных В. Флюгге [224]. В рамках моделирования автором были исключены тангенциальные составляющие инерционных сил, что позволило редуцировать размерность задачи, а гидродинамическое взаимодействие описано в рамках теории потенциального течения несжимаемой идеальной жидкости.

В анализ динамической устойчивости трубопроводных систем с внутренними потоками значительный вклад внесли Д.С. Уивер и Т.Е. Анни [317]. Как показали их исследования, модальный анализ свободных колебаний шарнирно опёртого прямолинейного трубопровода, моделируемого тонкостенной оболочкой, требует совместного рассмотрения уравнений Флюгге [224] и классической гидродинамической теории. Для упрощения задачи было введено допущение о пренебрежении тангенциальными инерционными компонентами.

Система дифференциальных уравнений решалась вариационно-проекционным методом Бубнова–Галёркина с использованием модифицированных функций Бесселя в качестве базисных, удовлетворяющих граничным условиям шарнирного опирания. Однако, как отмечено в работе, получение замкнутого аналитического решения для собственных частот оказалось невозможным из-за нелинейного характера гидродинамических связей.

В работе [207] отмечено: «Результаты решения для конкретных оболочек представлены в виде графиков типа рис. 1.1, где показана зависимость безразмерного параметра частоты свободных колебаний оболочки $c = \frac{\omega}{\omega_0}$ от безразмерного параметра скорости потока жидкости $V^* = \frac{V}{\omega_0 L}$, где V – скорость потока в м/с, ω – частота оболочки, определенная полученным решением; ω_0 – основная частота, определяемая соотношением»

$$\omega_0 = \frac{\pi^2}{L^2} \left(\frac{D}{\rho h} \right)^{\frac{1}{2}}, \quad D = \frac{Eh^3}{12(1-\nu^2)}.$$

Один из таких графиков при значениях волновых чисел $m = 5$ и $n = 1$ показан на рис. 1.1 для стальной цилиндрической оболочки с относительными размерами $\frac{h}{R} = \frac{1}{100}$, $\frac{L}{R} = 2$ и с протекающим со скоростью $V = \text{const}$ потоком воды.

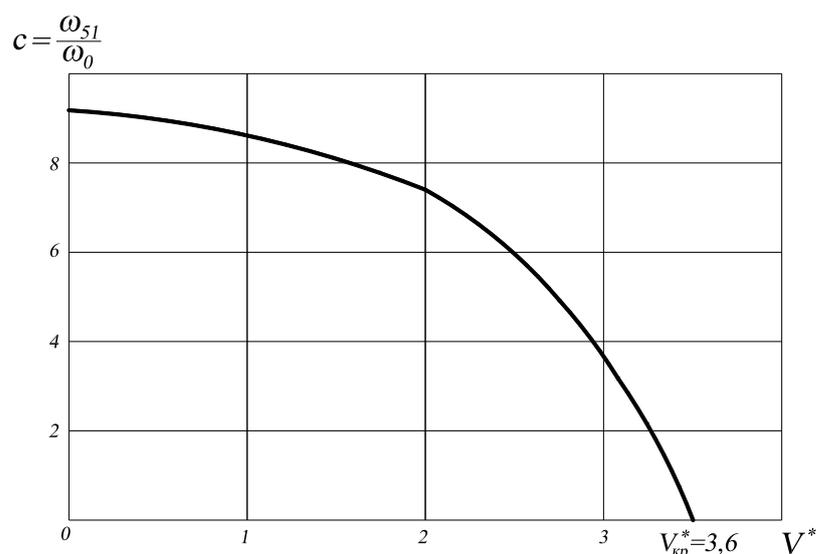


Рисунок 1.1 – График зависимости безразмерной частоты c от параметра V^* скорости потока жидкости по данным Уивера и Анни [317]

W. Gottenberg в работе [258] приводит экспериментальное исследование вибраций круглой цилиндрической оболочки, проведенное с целью определения динамических характеристик конструкции, аналогичной оболочке твердотопливного ракетного двигателя. Описывается разработанный аппарат, который позволяет бесконтактно измерять моды вибрации цилиндра и получать линейные значения перемещений. Представлены результаты, показывающие взаимосвязь между частотой и узловыми линиями в цилиндре, а также влияние

внутреннего давления на частоты колебаний. В работе сравниваются экспериментальные данные с теорией Тимошенко и другими подходами к расчету вибрационных характеристик. Методика включает использование электромагнитных полей для возбуждения колебаний и высококачественных конденсаторных микрофонов для регистрации перемещений стенок цилиндра. Результаты экспериментов показывают аномальную зависимость между конфигурацией форм и частотой, что подтверждают ранее проведенные исследования. Также отмечается, что метод позволяет проводить количественные измерения радиальных перемещений с точностью до 5 %.

Учеными М. Chiba и N. Yamaki в работе [250] представлено экспериментальное исследование свободных колебаний цилиндрической оболочки с зажатым и свободным концом, частично заполненной жидкостью. Для эксперимента использовались два полиэфирных цилиндра с радиусом 100 мм и различной длиной, а также изменяемым уровнем заполнения водой от 0 до 1,0 с шагом 0,25. Испытания проводились с помощью двух малых эксайтеров, расположенных на диаметрально противоположных позициях, и регистрации резонансных ответов оболочки с использованием бесконтактного прибора. Полученные результаты продемонстрировали хорошее согласование между теоретическими и экспериментальными данными по собственным частотам и соответствующим волновым числам для низших значений. Также исследовались изменения формы колебания в зависимости от окружного волнового числа и объема жидкости, которые также подтвердили теоретические ожидания.

А. Kairov в работе [267] приводит экспериментальное исследование свободных колебаний закрытых цилиндрических оболочек, изготовленных из стали 18ХНВА. Оболочки имели радиус 75 мм, длину 170 мм и толщину 0,6 мм и были ослаблены одним или двумя диаметрально противоположными отверстиями. Для анализа использовалась методика голографической интерферометрии, что позволило определить естественные частоты и формы колебаний. Эксперименты проводились на специально сконструированном стенде, где оболочки поддерживались на нижней базе в круглом сплошном дисковом креплении

(рис. 1.2, 1.3). Результаты показали, что наличие отверстий приводит к снижению естественной частоты колебаний, что связано с локальными вибрациями вблизи краев отверстий. Изменение размеров и профиля отверстий также влияет на спектр частот, незначительно снижая базовую частоту колебаний.

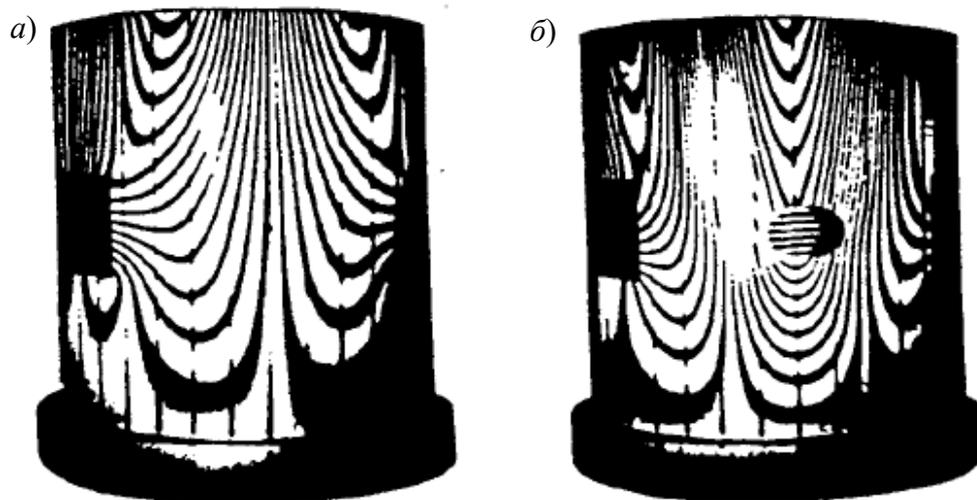


Рисунок 1.2 – Интерферограмма изгибных колебаний оболочек с отверстием

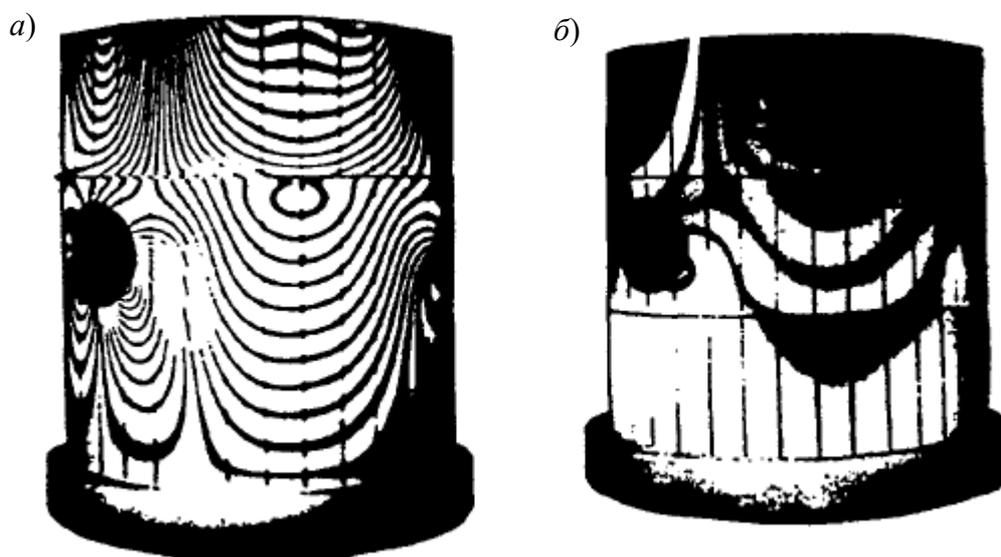


Рисунок 1.3 – Интерферограмма изгибных колебаний оболочек с отверстием

Укрепление краев отверстий приводит к увеличению частоты колебаний на 11 % и изменению формы вибраций. Полученные данные подтверждают, что наличие отверстий существенно влияет на значения собственных частот и форму колебаний оболочек, а также на распределение внутренних напряжений и деформаций.

В статье С. А. Бочкарёва [242] представлено численное моделирование собственных колебаний вертикальных цилиндрических оболочек, частично заполненных неподвижной сжимаемой жидкостью и размещённых на упругом основании Пастернака. Исследование охватывает как однородные, так и неоднородные упругие среды, что позволяет анализировать влияние различных комбинаций коэффициентов постели на динамические характеристики конструкции. В работе используются классическая теория оболочек и уравнения Эйлера, что обеспечивает высокую точность в описании поведения как оболочки, так и жидкости. Уравнения движения сводятся к системе обыкновенных дифференциальных уравнений, которые решаются методом ортогональной прогонки Годунова, что гарантирует численную устойчивость и точность вычислений. Результаты исследования показывают, что с увеличением уровня заполнения оболочек жидкостью влияние упругого основания на частотный спектр конструкции значительно уменьшается. Также проведено сравнение полученных частот с известными решениями, что подтверждает достоверность разработанного алгоритма и его применимость в практических задачах. В статье представлены зависимости минимальных частот колебаний от уровня жидкости для различных условий закрепления оболочки, что имеет важное значение для проектирования конструкций, подверженных динамическим нагрузкам.

В работах В.А. Пшеничкиной представлены решения динамических задач конструкций, включая совместную работу со свайно-грунтовым массивом, с верификацией на основе конечно-элементных и стержневых моделей. Путём вероятностного моделирования и полнофакторного эксперимента выявлен наиболее значимый грунтовый слой, оказывающий определяющее влияние на распределение резонансных частот системы «сооружение–основание». Установлено, что статистическая изменчивость характеристик грунта даже в пределах одного слоя существенно влияет на амплитудно-частотную характеристику всей системы.

В исследовании А. Kumar и В. Patel [272] рассматривается нелинейное динамическое поведение консольной цилиндрической оболочки, подвергнутой

гармоническому возбуждению. Эксперименты проводились с использованием электромагнитного шейкера и высокоскоростных камер для визуализации вибраций, что позволило получить детальные данные о динамическом отклике оболочки. Результаты показали наличие явления бегущей волны, а также участие высших гармоник, что указывает на сложные нелинейные эффекты в системе. Наблюдалось смягчение нелинейности, которое увеличивалось с ростом амплитуды возбуждения, что подтверждает важность учета нелинейных характеристик при анализе вибраций. Сравнение экспериментальных данных с численными моделями, выполненными в ANSYS, продемонстрировало хорошее согласие, что подтверждает надежность используемых методов. Исследование также выявило, что бегущие волны проявляются в определенном диапазоне частот для режимов с числом волн в окружном направлении $m = 3$ и 5 . Далее в работе Д. Пермякова [296] исследуются частоты и формы свободных колебаний цилиндрической оболочки с использованием как расчетных, так и экспериментальных методов. Автор применяет конечно-элементный анализ для определения расчетных частот, а экспериментальные данные получены методом импульсного возбуждения. Результаты показывают, что относительное расхождение между расчетными и экспериментальными частотами не превышает 8 %, что свидетельствует о высокой точности модели. Использование критерия модальной уверенности (MAC) позволяет оценить совпадение расчетных и экспериментальных мод, несмотря на наличие начальных несовершенств в конструкции. Исследование также выявляет узлы оболочки с максимальной разницей в откликах, что указывает на влияние геометрических дефектов на динамические характеристики. Корректировка расчетных мод в окружном направлении улучшает значения MAC-критерия, что подтверждает важность учета начальных несовершенств. Для контроля полученных значений были использованы формулы В.Е. Бреславского [30] и О.Д. Ониашвили [151]:

$$W_q = \sqrt{\frac{B}{\rho h r^2} \frac{(1-\mu^2)\lambda^4 + \bar{k}(\lambda^2 + m^2)^4}{\lambda^2 + m^2(1+2\lambda^2) + m^4}}, \quad (26)$$

где $\lambda = \frac{n\pi r}{L}$; $B = \frac{Eh}{1-\mu^2}$; $\bar{k} = \frac{h^2}{12r^2}$;

E – модуль упругости материала оболочки;

h – толщина стенки;

ρ – плотность;

r – радиус срединной поверхности оболочки;

μ – коэффициент Пуассона;

m – волновое число в окружном;

n – в продольном направлении.

В работе А. Zirpo и М. Barbieri [320] исследуются нелинейные динамические характеристики полимерной цилиндрической оболочки с верхней массой под осевым гармоническим возбуждением (рис. 1.4). Эксперименты проводились в контролируемой среде при различных температурах и амплитудах возбуждения. Авторы изучают влияние температуры на динамику оболочки, выявляя, что высокая температура приводит к более сложному поведению оболочки. Результаты показывают, что температура значительно влияет на области неустойчивости и величину измеряемой кинематической величины. Работа подчеркивает важность учета тепловых эффектов при анализе динамики оболочек, что имеет значение для их применения в инженерных задачах, особенно в условиях, когда температура может варьироваться. Далее С. Ross, Т. Johns и R. Stanton в работе [302] выполняют теоретическое и экспериментальное исследование вибраций трех цилиндрических оболочек под внешним водяным давлением.

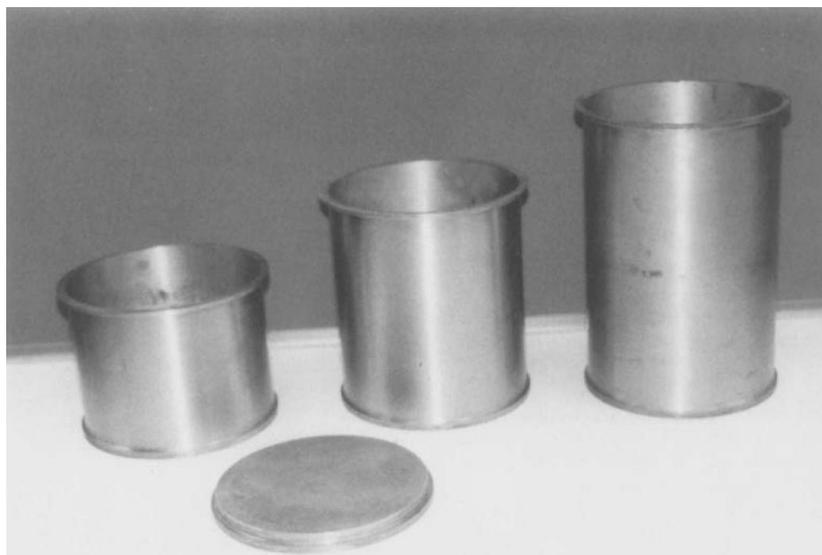


Рисунок 1.4 – Модели цилиндрических оболочек

Теоретическое исследование основано на методе конечных элементов, где оболочка моделируется с помощью усеченного тонкостенного конусного элемента, а окружающая жидкость – с помощью восьмиузлового изопараметрического квадрата. Сравнение теории и эксперимента показывает хорошее согласование результатов, что подтверждает, что резонансные частоты уменьшаются с увеличением внешнего давления. Работа подчеркивает важность учета внешнего давления при анализе динамического поведения цилиндрических оболочек, что имеет практическое значение для проектирования конструкций, подверженных гидродинамическим нагрузкам. Авторы М. Амабили, Р. Гарзиера и А. Негри в своей работе [238] исследуют динамику круговых цилиндрических оболочек, заполненных водой, под воздействием гармонического возбуждения. В ходе экспериментов были изучены две стальные оболочки, демонстрирующие нелинейные свойства, включая мягкую нелинейность около 4 % при амплитуде колебаний, равной двум толщинам оболочки. Исследование показало, что из-за геометрических несовершенств в образцах не наблюдались ожидаемые волновые процессы, что привело к разделению частот основных мод. Сравнение экспериментальных данных с теоретическими моделями подтвердило их согласованность. Авторы подчеркивают важность учета нелинейных эффектов в инженерных приложениях, особенно в контексте взаимодействия жидкости и структуры оболочки. В работе А. Shah [304] проведен анализ вибраций изотропной цилиндрической оболочки, погруженной в жидкость и размещенной на упругих основаниях Винклера и Пастернака (рис. 1.5).

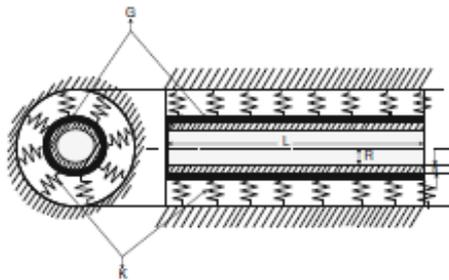


Рисунок 1.5 – Цилиндрическая оболочка на упругом основании

Используя теорию тонких оболочек Лава, авторы исследуют влияние жидкости и упругих оснований на собственные частоты погруженных оболочек.

Результаты подтверждают, что присутствие жидкости и упругих оснований значительно влияет на динамические характеристики оболочек. Работа вносит вклад в понимание поведения цилиндрических оболочек в сложных условиях эксплуатации, что может быть полезно для проектирования конструкций в отраслях, таких как строительство и аэрокосмическая техника.

Сравнительный анализ частотных характеристик криволинейных элементов трубопроводов с транспортируемой средой был проведён на основе данных, представленных в работе S.S. Chen [244]. В данном исследовании, основанном на стержневой теории, рассматривалась динамика стальной трубы с шарнирно закреплёнными концами, относительной кривизной $r/R=1/10$ и параметром тонкостенности $h/r=1/70$. Для первой формы колебаний ($m=1, n=1$) на рис. 5 работы [239] приведены зависимости безразмерной частоты Ω от скорости потока v в диапазоне 0–500 м/с.

Как отмечено в работе [207]: «Расхождение в результатах при $v = 0$ составило 6 %, при $v = 1–15$ %. Результаты, вычисленные по (6.14), оказались ниже показанных на рисунке 1.6 в связи с тем, что в работе [244] не учтена присоединительная масса жидкости».

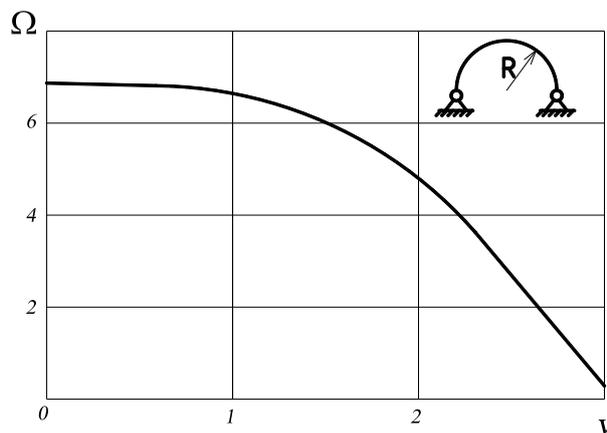


Рисунок 1.6 – Зависимость безразмерного параметра частоты Ω от безразмерного параметра скорости жидкости v (см. рис. 5 в статье С.С. Чжэня [175])

1.6 Описание материала оболочки, внешних нагрузок и воздействий

В зависимости от области применения и транспортируемых сред замкнутые оболочки представляют собой расчетные модели различных сооружений и их элементов. Это могут быть трубопроводы, ёмкости и прочие конструкции, в том

числе конструкции специального назначения. Такие заданные модели имеют свои физико-механические характеристики и спектр нагрузок и воздействий, оказываемых на оболочку. Рассмотрим их более подробно.

Геометрия и материал оболочки. В расчетные модели замкнутых тонкостенных цилиндрических и тороидальных оболочек конечной длины закладывается однородный, изотропный, упругий материал. Оболочка обладает толщиной стенки h , радиусом срединной поверхности R , конечной длиной l . В данной работе рассматриваются оболочки $\frac{h}{R} \leq \frac{1}{20}$, средней длины и длинные $5 \leq \frac{l}{R} \leq 15$.

Для выполнения тестовых расчетов принимаются следующие физико-механические характеристики:

1) **Сталь.** Модуль упругости стали $E_{st} = 2 \cdot 10^5$ МПа; коэффициент Пуассона стали $\nu_{st} = 0,3$; плотность $\rho_{st} = 7,9$ т/м³;

2) **Полиэтилен.** Модуль упругости полиэтилена $E_{пэ} = 1400$ МПа; коэффициент Пуассона полиэтилена $\nu_{пэ} = 0,43$; плотность полиэтилена $\rho_{пэ} = 0,95$ т/м³.

Геометрические параметры рассматриваемых расчетных моделей оболочек представлены на рисунках 1.7–1.9.

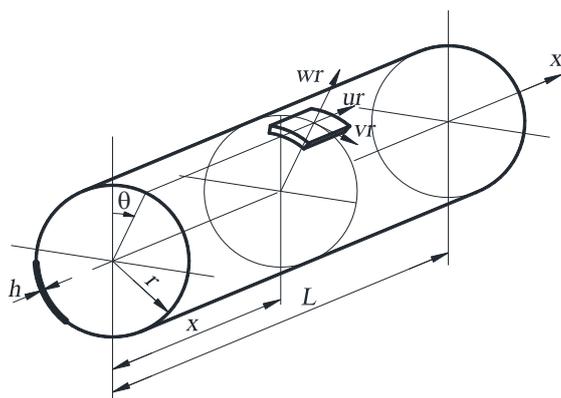


Рисунок 1.7 – Расчётная модель однослойной замкнутой цилиндрической оболочки ($u=U/r$, $v=V/r$, $w=W/r$)

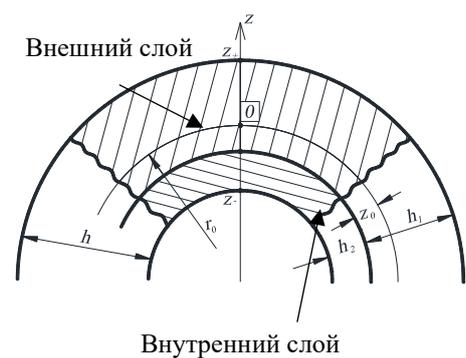


Рисунок 1.8 – Поперечное сечение двухслойной тороидальной оболочки

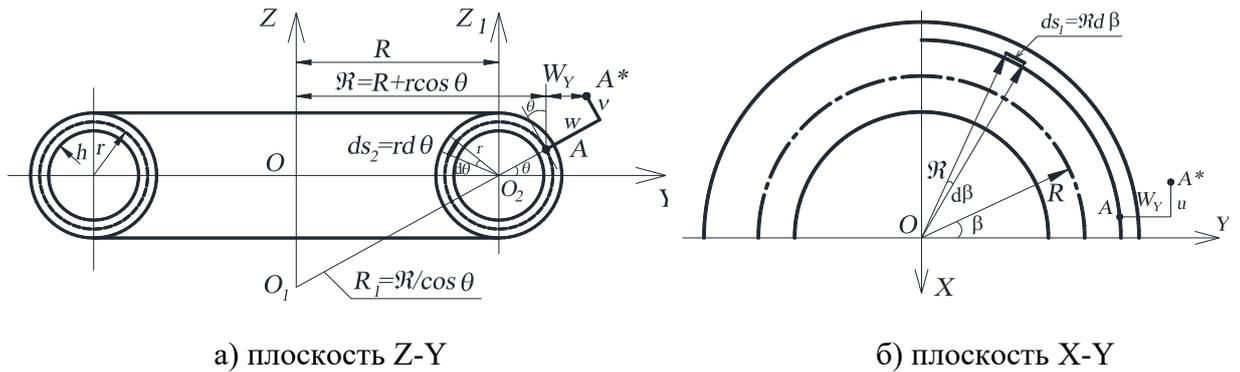


Рисунок 1.9 – Расчетная модель однослойной замкнутой оболочки в тороидальных координатах при $\beta=\pi$

Нагрузки и воздействия

Оболочки в период эксплуатации подвергаются разного рода статическим и динамическим воздействиям. К статическим можно отнести собственный вес конструкции и транспортируемой среды, внутреннее давление, давление окружающей среды и реакции упругого основания и опор.

К динамическим нагрузкам относят пульсацию нестационарного внутреннего рабочего давления и продольной сжимающей силы, а также вибрации оборудования и другие источники возмущений.

Продольная сила учитывается в виде её параметра P , т.е. отношения действительной продольной силы к критической продольной силе, при которой происходит потеря устойчивости. Действие данной нагрузки появляется от смещения опор, просадки грунта на соседних участках и недостаточной компенсации температурных деформаций в теле оболочки (трубы), а также других техногенных факторов.

Температурное воздействие. В зависимости от области применения цилиндрические и тороидальные оболочки могут подвергаться влиянию нагрева или охлаждения, как со стороны внешней среды, так и со стороны перекачиваемого продукта.

Температурное воздействие заменяется «температурной» нагрузкой, и расчет на изменение температуры сводится к определению равномерного расширения и деформации. При изменении термоупругих свойств только по толщине стенки, оболочка при нагреве/охлаждении получает равномерное расширение/сокращении

от постоянного усилия T_t , градиент изменения температуры по слоям оболочки не рассматривается. Представим усилие T_t в виде

$$T_t = -Eh\varepsilon_t, \quad (27)$$

где α_m – коэффициент линейного расширения материала оболочки, $^{\circ}\text{C}^{-1}$;

$\varepsilon_t = \alpha_m \Delta T$; $\Delta T = T - T_0$, где T – внутренняя температура; T_0 – внешняя температура, $^{\circ}\text{C}$.

Распределённое давление грунта. Взаимодействие деформируемой оболочки с окружающим грунтовым массивом моделируется путём введения распределённой контактной нагрузки q_{si} , действующей в оппозитном направлении относительно внутреннего рабочего давления. В рамках линеаризованного подхода данная нагрузка аппроксимируется равномерно распределённым давлением, интенсивность которого количественно определяется на основе физико-механических характеристик грунтового основания (модуля деформации, коэффициента Пуассона, плотности). Для случая включения оболочки в упругую среду радиально-направленный отпор среды задаётся в соответствии с гипотезой Фусса–Винклера, где контактное давление пропорционально нормальным перемещениям оболочки с учётом упругих констант грунта [114].

На рисунке 1.10 введены следующие обозначения: θ – безразмерная координата в окружном направлении;

H – толщина обжимаемого слоя;

γ – объёмный вес среды (грунта);

β – коэффициент бокового давления среды;

d_1 – внешний диаметр поперечного сечения оболочки, с учетом толщины h ;

p_0 – внутреннее давление;

G – вес оболочки с транспортируемым продуктом, уравнивает разницу между верхним и нижним давлением [204].

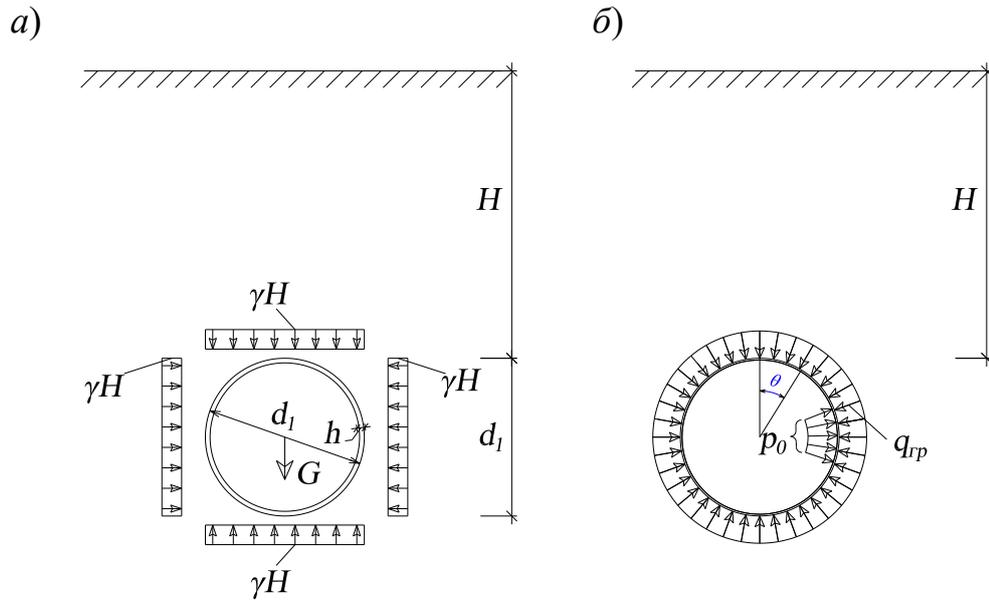


Рисунок 1.10 – Распределение давления среды на оболочку: *a* – действующее давления грунта; *б* – эквивалентное давление

Пренебрегая тангенциальной составляющей, описанной при помощи тригонометрической функции распределенной радиальной нагрузки, представим в виде

$$q_{s0} = \gamma H(2 - \alpha_1 \cos \theta - \alpha_2 \cos 2\theta), \quad (28)$$

где коэффициенты $\alpha_1=0,75$ и $\alpha_2=0,25$ определяются подбором, $\alpha_1 > \alpha_2$ – исходя из действующей эпюры давления. Иллюстрация распределения давления представлена на рисунке 1.11 и 1.12.

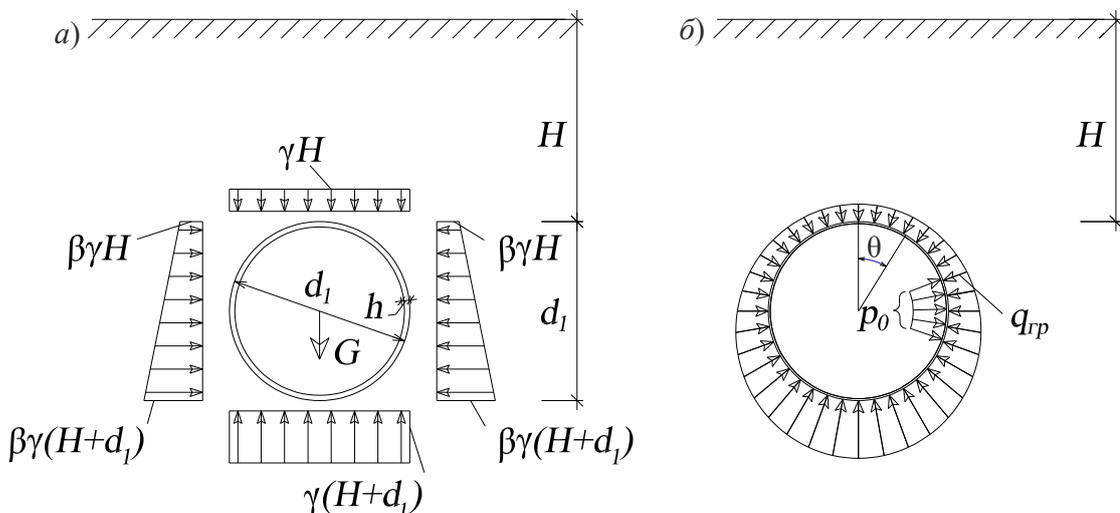


Рисунок 1.11 – Эпюры давления грунта: *a* – действующая; *б* – радиальная

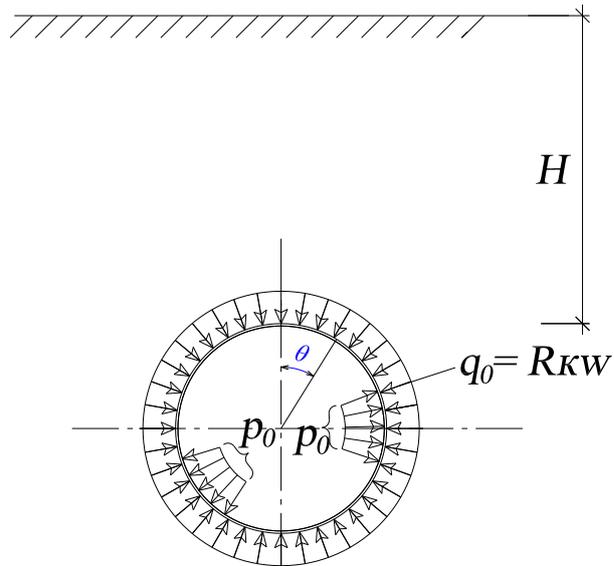
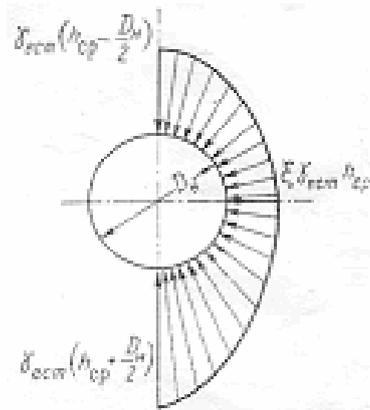


Рисунок 1.12 – Радиальный отпор грунта и внутреннее рабочее давление p_0 , действующее на стенку трубы

В работе Г.К. Клейна [114] также рассматривается вариант учета внешнего давления среды (грунта) в виде



$$q_{si}^{mn} = \gamma_{ест} \cdot H \cdot (\cos^2 \alpha + \xi_0 \cdot \sin^2 \alpha). \quad (29)$$

Для иллюстрации покажем три случая взаимодействия трубопровода с упругим основанием (рис. 1.13-1.15):

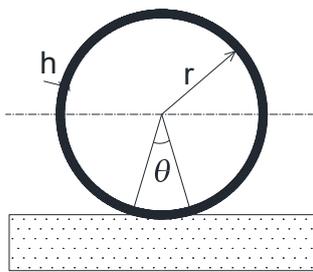


Рисунок 1.13 – Наземное размещение

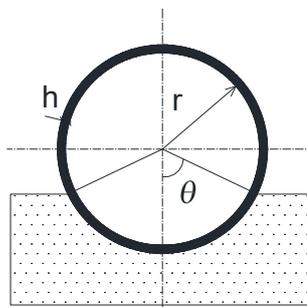


Рисунок 1.14 – Частично заглубленное размещение

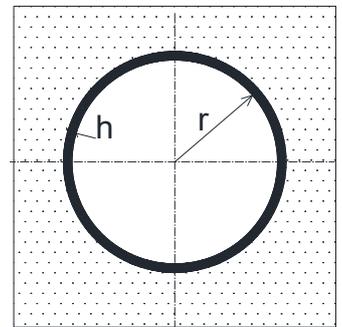


Рисунок 1.15 – Подземное размещение

Реакция упругого отпора грунта. Влияние упругого отпора среды q_0 , вызванное деформацией поперечного сечения трубы, учтено с использованием модели Фусса–Винклера в зависимости от коэффициента упругого отпора κ , предложенное Галёркиным. Отпор грунта принимается радиальным (рис. 1.12)

$$q_0 = R\kappa w, \quad (30)$$

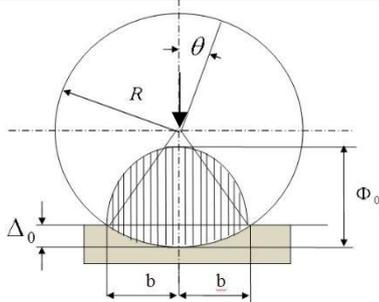
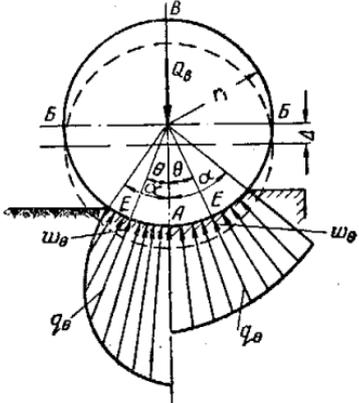
где κ – коэффициент упругого отпора грунта, когда труба подвергается действию внутреннего давления [104], представим его в виде:

$$\kappa = \frac{E_0}{r(1 + \nu_0)}; \quad (31)$$

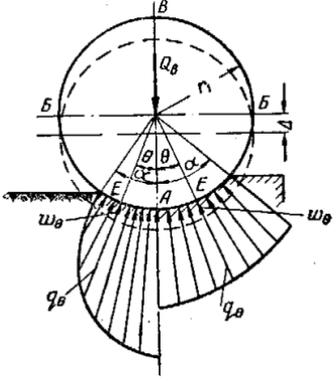
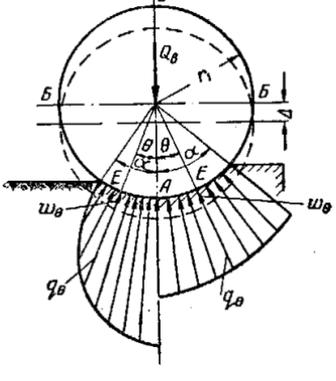
$w = W/r$ – радиальное перемещение срединной поверхности оболочки, отнесенное к радиусу r .

При размещении на упругом основании на оболочку действует давление на контактной поверхности, распределённое по параболической зависимости (таблица 1.1).

Таблица 1.1 – Распределение внешнего давления на оболочку при наземном и частично заглубленном размещении

№ модели	Чертеж	Функция q	Источник
H1		<p>При $\alpha < \frac{\pi}{2}$</p> $\Phi(\theta) = \frac{k_s r}{2} (\alpha^2 - \theta^2),$ $\alpha = \sqrt[3]{\frac{3Q_B}{2k_s r^2}};$ $\Delta_0 = r(1 - \cos \alpha) = r\alpha^2/2,$ $Q_B \cong 2k_s r^2 \alpha^3/3$	[173]
H2		<p>При $\alpha < \frac{\pi}{2}$</p> $q_{\theta}^{r_0} = k_s \cdot w_{\theta} = \frac{3Q_B(\cos\theta - \cos\alpha) \cdot \cos\theta}{r(3 \cdot \sin\alpha + \sin^3\alpha - 3\alpha \cdot \cos\alpha)},$ $Q_B = \frac{k_s \cdot r^2 \Delta (3\sin\alpha + \sin^3\alpha - 3\alpha \cos\alpha)}{3},$ $\Delta = \frac{3Q_B}{k_s \cdot r^2 (3\sin\alpha + \sin^3\alpha - 3\alpha \cos\alpha)}$	[114]

Окончание таблицы 1.1

№ модели	Чертеж	Функция q	Источник
НЗ	 <p style="text-align: center;">слева</p>	<p style="text-align: center;">При $\alpha = \frac{\pi}{2}$</p> $q_{\theta}^{\text{го}} = \frac{3 \cdot Q_B \cdot \cos^2 \theta}{4r},$ $Q_B = \frac{k_s \cdot r^2 \Delta (3 \sin \alpha + \sin^3 \alpha - 3 \alpha \cos \alpha)}{3},$ $\Delta = \frac{3Q_B}{k_s \cdot r^2 (3 \sin \alpha + \sin^3 \alpha - 3 \alpha \cos \alpha)}$	[114]
Н4	 <p style="text-align: center;">справа</p>	$q_{\theta}^{\text{жф}} = \frac{2 \cdot Q_B \cdot \cos \theta}{\pi r},$ $Q_B = \frac{k \cdot r \cdot \Delta (\sin 2\alpha + 2\alpha)}{2},$ $\Delta = \frac{2Q_B}{kr (\sin 2\alpha + 2\alpha)},$	[114]

В таблице α – угол вдавливания оболочки в упругое основание, θ – центральный угол.

Присоединенная масса грунтовой среды. Динамическое взаимодействие цилиндрической оболочки с упругой средой при колебательных процессах требует учёта совместной работы конструкции и присоединённой массы грунтового массива. При формулировке дифференциальных уравнений движения элемента срединной поверхности оболочки необходимо включать в расчётную модель инерционные составляющие, обусловленные участием грунтового основания в колебательном процессе.

Учёт присоединённой массы грунта представляет собой особенность динамического расчёта подземных конструкций, эксплуатируемых в условиях нелинейно-деформируемых сред. Как показали исследования в области геотехнической механики, данный параметр приобретает критическую значимость при проектировании объектов в обводнённых грунтах с низкой несущей способностью, где преобладают неконсервативные гидродинамические эффекты. Для мягкопластичных грунтов текучей консистенции расчётные перемещения

целесообразно определять с введением ненулевой присоединённой массы ($\mu_{bj} \neq 0$) при одновременном пренебрежении упругим отпором основания ($k_s = 0$). Такое допущение обусловлено доминированием инерционных сил над упругими в условиях квазижидкого поведения грунтовой матрицы.

Напротив, в массивах плотных скальных пород, характеризующихся высокими модулями деформации, динамический отклик конструкции преимущественно определяется упругими силами взаимодействия «основание–сооружение». Как отмечено в EN 1997-1, в подобных случаях присоединённая масса грунта, вследствие её пренебрежимо малой величины ($\mu_{bj} \rightarrow 0$), может быть исключена из расчётной схемы без существенной потери точности. Это позволяет редуцировать математическую модель [14], переходя к аналитическим решениям на основе теорий упругого полупространства.

Присоединенная масса обводнённых грунтов с коэффициентом упругого отпора $k_s < 4$ МПа/м в данной работе учитывается на основании [159]

$$\mu_{bj} = \kappa_{bj} \mu_b, \quad (32)$$

где κ_{bj} – безразмерный коэффициент присоединенной массы, определяемый по формуле [50]

$$\kappa_{bj} = \frac{1}{\sqrt{m^2 + \lambda_0^2} \left(1 + \frac{\lambda_0^2}{2(m^2 + \lambda_0^2)^{3/2}} \right)}, \quad (33)$$

здесь R – радиус оболочки, $\lambda_0 = \frac{n\pi R}{L}$;

n – число продольных полуволн;

L – длина участка;

m – число волн в окружном направлении оболочки;

$\mu_b = \frac{\rho_{гр} \pi R^2}{2}$ – присоединенная масса грунта, приходящаяся на единицу длины

оболочки при подземном размещении (для бестраншейной прокладки);

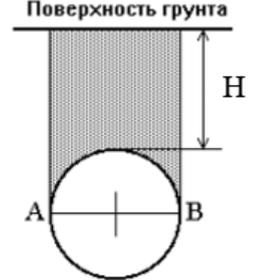
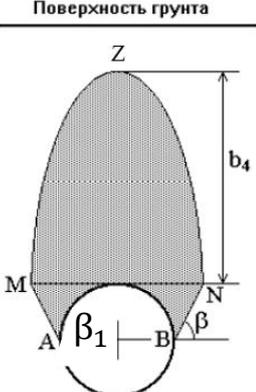
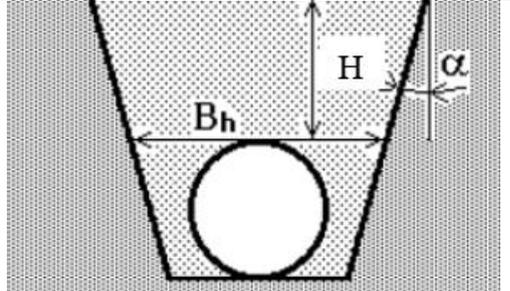
$\rho_{гр} \pi R^2$ – при полном окружении упругой средой по всему периметру;

$\rho_{гр} R^2 \varphi_0$ – для наземной прокладки (по полосе контакта);

$\rho_{гр}$ – плотность грунта, окружающего оболочку.

Давление от обратной засыпки зависит от варианта размещения оболочки в упругой среде (грунте) и представлено в виде трех моделей (табл. 1.2), описывающих внешнее давление от обратной засыпки q_{si} , согласно работам [27, 114].

Таблица 1.2 – Распределение внешнего давления на трубу при подземном размещении

№ модели	Чертеж	Функция q_{si}
П1		$q_{s1} = \gamma_s \cdot (H + 0,1073 \cdot D),$ <p>где γ_s – удельный вес среды (грунта), кН/м³; D – внешний диаметр оболочки, мм; H – глубина заложения, м</p>
П2		$q_{s2} = \gamma_s \cdot b_4$ <p>Размер свода определяется выражением</p> $d = D \cdot [1 + \tan^2 \beta_1],$ $\beta_1 = 45^\circ - \frac{\varphi_1}{2}$ <p>d – основание свода естественного равновесия,</p> $b_4 = \frac{d}{2 \cdot \tan \varphi_1}$
П3		$q_{s3} = \gamma_s \cdot (k_{тр} H + 0,1073 \cdot D),$ $k_{тр} = \frac{B_c}{H} \cdot \frac{1 - 2 \cdot \frac{C}{\gamma_s} \cdot B_c}{2 \cdot \xi \cdot f} \cdot \eta_2;$ $\eta_2 = \left[1 - \exp \left(-\xi \cdot f \cdot \frac{2 \cdot H}{B_c} \right) \right];$ $B_c = B_h + H \cdot \tan(\alpha)$

Демпфирующее действие грунтовой среды «учитывается на основании допущении о сопротивлении среды, пропорциональном скорости перемещения конструкции в данной среде, эта гипотеза выражается в пропорциональности силы сопротивления среды $q_{ср}$ к скорости радиального перемещения точки срединной поверхности оболочки» [208]:

$$q_{ср} = -\eta \cdot \frac{\partial w}{\partial t}, \quad (34)$$

где w – радиальная составляющая перемещения, отнесенная к радиусу поперечного сечения оболочки. Знак минус показывает, что сила сопротивления действует в направлении, противоположном скорости [208], η – (Па·с) динамический коэффициент вязкости.

Динамические нагрузки и воздействия. В более сложном случае, помимо статических нагрузок, на оболочки дополнительно действуют динамические нагрузки от воздействия нестационарного внутреннего рабочего давления, изменяющегося по закону $P(t)$

$$p(t) = p_0(1 + \mu \cos \gamma t). \quad (35)$$

Нестационарное давление приводит к возбуждению стационарную продольную сжимающую силу и коэффициент упругого отпора среды, которые определяются выражениями:

$$F(t) = F(1 + \mu \cos \gamma t); \quad (36)$$

$$\kappa(t) = \kappa_s(1 + \mu \cos \gamma t), \quad (37)$$

«а для оболочек с жидкостью дополнительно и скорость потока протекающей жидкости:

$$V(t) = V_0(1 + \mu \cos \gamma t), \quad (38)$$

где p_0 – внутреннее рабочее давление; γ – частота возбуждения, соответствующая характеристикам перекачивающей станции; $\mu \leq 0,5$ – коэффициент возбуждения; F – продольная сжимающая сила; κ_s – коэффициент упругого отпора среды» [183].

1.7 Выводы по главе 1

В рамках анализа существующих решений для определения динамических характеристик трубопроводных систем выделяются две наиболее распространенные теории: стержневая и оболочечная. Каждая из них имеет свои преимущества и недостатки, что определяет их применение в различных условиях.

Стержневая теория наиболее применима для труб диаметром менее 1000 мм, при соотношении толщины стенки к радиусу h/r более $1/20$, где внутреннее рабочее давление и деформация поперечного сечения не имеют такого существенного влияния, как для тонкостенных элементов.

Теория тонких цилиндрических и тороидальных оболочек нашла свое применение с появлением новых тонкостенных конструкций, выполненных из современных сталей, сплавов и полимерных материалов. Такие тонкостенные конструкции чувствительны к перепаду рабочего давления, что приводит к росту жесткости рассматриваемого участка и собственной частоты. Существуют различные варианты теории тонких оболочек – моментная, полубезмоментная и безмоментная. В частности, доктором технических наук, профессором, членом-корреспондентом РААСН В.П. Ильиным применена геометрически нелинейная полубезмоментная теория оболочек в задачах расчета участков тонкостенных трубопроводов большого диаметра и совершенствуется по сей день его учениками и последователями. В данной главе произведен комплексный обзор источников научной литературы по вопросам колебаний, статической и динамической устойчивости стержневых и оболочечных моделей российских и зарубежных ученых, получивших решения как в аналитическом виде, так и при помощи программных комплексов, основанных на методе конечных элементов. Анализ доступной литературы показал, что среди имеющейся открытой литературы отсутствует единая методика расчета частот свободных колебаний цилиндрических и тороидальных оболочек в упругой среде.

Таким образом, цели и задачи данной работы направлены на совершенствование расчетных моделей тонкостенных магистральных трубопроводов большого диаметра в виде цилиндрических и тороидальных оболочек конечной длины, взаимодействующих с окружающей упругой средой, а также на формирование методов динамического расчета для определения частот и форм свободных колебаний оболочек при наземном, частично заглубленном и подземном размещении, позволяющих, в том числе, исследовать динамическую устойчивость при нестационарных воздействиях, с учетом совместного влияния внутреннего и внешнего давления, параметра продольной сжимающей силы, упругого отпора среды, температурного воздействия, присоединенной массы и скорости потока протекающей жидкости, присоединенной массы и демпфирующих свойств среды, а также инерционных сил в продольном, окружном и радиальном направлении.

ГЛАВА 2. СВОБОДНЫЕ КОЛЕБАНИЯ ТОНКОСТЕННЫХ ЗАМКНУТЫХ ЦИЛИНДРИЧЕСКИХ ОБОЛОЧЕК В УПРУГОЙ СРЕДЕ

2.1 Описание расчетной модели и основные допущения геометрически нелинейного варианта полубезмоментной теории тонких цилиндрических оболочек при различных способах размещения в упругой среде

В зависимости от области применения оболочки могут быть размещены как на упругом основании, так и в упругой среде, в том числе в грунте. Выбор каждого типа размещения обусловлен технико-экономическим обоснованием и природно-климатическими условиями строительства. Расчетная модель цилиндрической оболочки в упругой среде, включая грунт, представляет собой важный аспект инженерного анализа, позволяющий оценить поведение конструкций под воздействием внешних нагрузок. При размещении оболочки в упругой среде необходимо учитывать механические свойства материала оболочки, такие как модуль Юнга и коэффициент Пуассона, которые влияют на деформацию и динамические характеристики. Различные способы размещения оболочки могут включать полное погружение в упругую среду, частичное заглубление или размещение на упругом основании.

Каждый из этих способов требует индивидуального подхода к расчету, поскольку распределение напряжений и деформаций будет существенно различаться. Например, при полном погружении в упругую среду оболочка испытывает значительное боковое давление, что требует учета взаимодействия с окружающей средой. В случае частичного заглубления необходимо учитывать влияние как грунта, так и внешних факторов, таких как климатические условия и динамические нагрузки.

Важно также учитывать возможные сценарии эксплуатации, включая временные нагрузки и изменения температуры, которые могут повлиять на надежность конструкции.

Ранее в работе [183] было указано: «В качестве расчётной схемы тонкостенного трубопровода большого диаметра принята цилиндрическая

оболочка конечной длины L , радиусом срединной поверхности r и толщиной стенки h , которая подвержена влиянию постоянного внутреннего рабочего давления p_0 , скорости потока протекающей жидкости V , продольной сжимающей силы F , реакции упругого отпора грунта q_0 , распределённого давления грунта q_{si} , а также демпфирующему действию среды q_{cp} ».

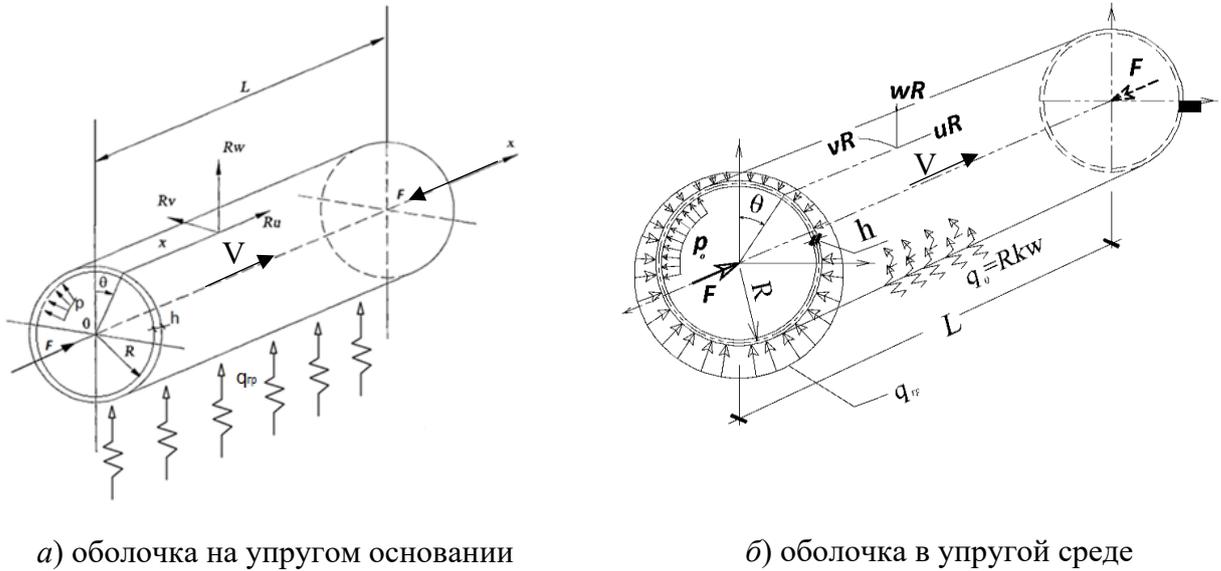


Рисунок 2.1 – Расчётная схема оболочки ($u=U/R$, $v=V/R$, $w=W/R$ – компоненты перемещений срединной поверхности оболочки, отнесенные к радиусу)

На рисунке 2.1 представлены расчетные схемы оболочки, размещенной на упругом основании (рис. 2.1, а) и в упругой среде (рис. 2.1, б).

Определение динамических характеристик тонкостенных цилиндрических оболочек конечной длины, согласно современным подходам в строительной механике, целесообразно осуществлять в рамках полубезмоментной теории оболочек, разработанной В.З. Власовым и К.З. Новожиловым [40, 148]. Как показали исследования, данная теория демонстрирует высокую адекватность при анализе конструкций средней и большой протяжённости, подверженных плавно изменяющимся поверхностным нагрузкам. Ключевое допущение метода заключается в пренебрежении изгибающими моментами M_1 в продольном направлении по сравнению с поперечными моментами M_2 . Полубезмоментная теория оболочек построена на допущениях, обоснованных для общего случая А.Л. Гольденвейзером [62], а для расчета тонкостенных труб Э.Л. Аксельрадом и В.П. Ильиным [4]. В монографии [4] также предложен геометрически

нелинейный вариант полубезмоментной теории оболочек, который позволяет учесть деформацию поперечного сечения и влияния внутреннего рабочего давления на частоты свободных колебаний.

Текст данного подраздела ранее был отражен в работе [183] и представлен в следующем виде: «В теории оболочек в расчетах также применяется безмоментная теория оболочек. Такой вариант является более простым, поскольку в нем учитываются только тангенциальные усилия, т.е. нормальные T_1 , T_2 и сдвигающие S . Точность решения, получаемого по безмоментной теории, зависит от многих факторов, например, плавности формы оболочки, плавности действующей на нее нагрузки, краевых условий и т.д. Для длинных труб – оболочек к этим факторам добавляется ещё и длина оболочки, причем с увеличением длины точность безмоментного решения снижается. Таким образом, при достаточно большой длине оболочки влияние её закрепления по торцам мало сказывается на напряженно-деформированном состоянии оболочки в средней её части, что не может предотвратить появления деформаций изгиба, вызванных изгибающими моментами M_2 . В то же время изгиб образующих моментами M_1 и кручение моментами H будут незначительными.

Предложенная В.З. Власовым [40] полубезмоментная теория цилиндрических оболочек получила в дальнейшем строгое математическое обоснование в трудах В.В. Новожилова [148]. Проведенный анализ уравнений теории оболочек позволил В.В. Новожилову получить общий принцип формирования уравнений полубезмоментной теории, который заключается в пренебрежении вторыми производными $\partial^2 f / \partial \xi^2$ по продольной координате $\xi = x/r$ по сравнению с производными по окружной координате $\partial^2 f / \partial \theta^2$, где f есть любая функция, характеризующая напряженно-деформированное состояние (НДС) оболочки (усилие, момент, перемещение, деформацию). Физический смысл этого принципа заключается в том, что характер изменения всех компонент НДС в направлении вдоль цилиндрической оболочки (по координате ξ) предполагается более плавным, чем характер их изменения в окружном направлении (по координате θ). Такой подход сохраняет все

преимущества полубезмоментной теории [40] и устраняет ряд существенных недостатков.

В работе [33] А.Л. Гольденвейзер подтвердил правомерность применения основного принципа В.В. Новожилова и установил критерий применимости полубезмоментной теории к задачам о деформации цилиндрических оболочек. Им было доказано, что НДС цилиндрической оболочки, нагруженной равномерно распределенной внешней нагрузкой, можно разделить на два состояния: основное – медленно изменяющееся по длине оболочки и местное – быстро затухающее при удалении от торцов (краевой эффект), которое быстро затухает в узкой области вблизи краевых сечений. Влиянием краевого эффекта для достаточно тонких оболочек можно пренебречь, поскольку область затухания измеряется десятками долями радиуса R срединной поверхности поперечного сечения оболочки. Следовательно, для таких оболочек следует рассматривать только основное НДС, которое описывается полубезмоментной теорией оболочек» [183].

Как показано в монографии Э.Л. Аксельрада, В.П. Ильина [4] для расчета труб-оболочек, выполненных из однородного, изотропного материала с модулем упругости E , коэффициентом Пуассона $\tilde{\nu}$, и согласно гипотезе Кирхгофа–Лява, принимаются следующие допущения:

1) относительные удлинения ε_2 в окружном направлении поперечных сечений оболочки, определяемые по общей теории оболочек соотношением [4]

$$\varepsilon_2 = \frac{\partial v}{\partial \theta} + w = 0; \quad (39)$$

2) относительный сдвиг срединной поверхности оболочки $\tilde{\omega}$ считается малым по сравнению с ее углами поворота в поперечном и продольном направлениях [4]:

$$\tilde{\omega} = \frac{\partial v}{\partial \xi} + \frac{\partial u}{\partial \theta} = 0; \quad (40)$$

3) угол поворота касательной к средней линии поперечного сечения оболочки ϑ_2 , изменения кривизны в продольном \aleph_1 и \aleph_2 поперечном

направлениях, а также кручение срединной поверхности оболочки τ выражаются через компоненты перемещения u, v, w по общим соотношениям теории оболочек [4]:

$$\vartheta_2 = \frac{\partial w}{\partial \theta} - v, \quad \aleph_1 = -\frac{1}{r} \frac{\partial^2 w}{\partial \xi^2}, \quad \aleph_2 = -\frac{1}{r} \frac{\partial \vartheta_2}{\partial \theta}, \quad (41)$$

$$\varepsilon_1 = \varepsilon_0 + \frac{\partial u}{\partial \xi}, \quad \varepsilon_0 = \frac{F}{EA}, \quad \tau = -\frac{1}{R} \frac{\partial \vartheta_2}{\partial \xi};$$

4) соотношения между усилиями и деформациями имеют вид [4]:

$$T_1 = Eh(\varepsilon_1 - \varepsilon_t), \quad M_2 = D\aleph_2, \quad (42)$$

$$T_2 = -\tilde{\nu}Eh\varepsilon_1, \quad M_1 = \tilde{\nu}D\aleph_2,$$

сдвигающие усилия $S = \frac{Eh}{2(1+\tilde{\nu})} \tilde{\omega}$,

где ε_t – температурная деформация оболочки;

5) в уравнениях равновесия, общей теории оболочек можно упустить величины поперечных сил Q_1 и величину крутящего момента H в последнем уравнении моментов, как это принято в работе [4].

В данной работе приняты следующие обозначения:

M_1 и M_2 – изгибающие моменты в продольном и поперечном (кольцевом) направлениях;

T_1 и T_2 – продольные и кольцевые тангенциальные усилия;

\aleph_2 – изменение кривизны координатной линии θ срединной поверхности;

ε_1 и ε_2 – относительные удлинения в направлении безразмерных ортогональных координат $\xi = x/r$ и θ , где x – продольная координата вдоль оси оболочки;

τ – кручение срединной поверхности вдоль оболочки;

$D = \frac{Eh^3}{12(1-\nu^2)}$ – цилиндрическая жесткость;

u, v, w – отнесенные к радиусу r тангенциальные (вдоль координат ξ и θ) и радиальные перемещения точек срединной поверхности оболочки соответственно.

При выводе формул геометрически нелинейного варианта полубезмоментной теории цилиндрических оболочек [4] используются

соотношения нелинейной теории оболочек среднего изгиба Муштари–Галимова [143], в соответствии с которой наибольшие значения перемещения w в радиальном направлении соизмеримы с толщиной стенки оболочки h , но малы по сравнению с радиусом R . Квадраты углов поворота по [143] принимаются малыми по сравнению с единицей:

$$1 + \frac{1}{2}\vartheta_2^2 \approx 1; 1 + \frac{1}{2}\left(\frac{\partial w}{\partial \xi}\right)^2 + \frac{1}{2}\left(\frac{\partial v}{\partial \xi}\right)^2 \approx 1, \quad (43)$$

где ϑ_2 – угол поворота касательной к средней линии контура поперечного сечения, а кривизна деформированного поперечного сечения оболочки определяется выражением

$$\frac{1}{R_2^*} = \frac{1}{r} + \varkappa_2 = \frac{1}{r} \left(1 - \frac{\partial \vartheta_2}{\partial \theta}\right), \quad (44)$$

где R_2 – радиус кривизны средней линии поперечного сечения оболочки в деформированном состоянии.

Кривизна оболочки в деформированном состоянии в продольном направлении:

$$\frac{1}{R_1^*} = -\frac{1}{r} \frac{\partial^2 w}{\partial \xi^2} \quad (45)$$

С учетом допущений (39)–(43) и значений параметров Ламе $A_1 = l$, $A_2 = r$ для цилиндрических оболочек в деформированном состоянии получим уравнение равновесия элемента из общих уравнений нелинейной теории оболочек среднего изгиба Муштари–Галимова [143]:

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial T_1}{\partial \xi} + \frac{\partial S}{\partial \theta} + rQ_2\tau = -rX_1, \\ \frac{\partial T_2}{\partial \theta} + \frac{\partial S}{\partial \xi} + \frac{R}{R_2^*}Q_2 = -rX_2, \\ \frac{\partial Q_2}{\partial \theta} - \frac{r}{R_2^*}T_2 - \frac{r}{R_1^*}T_1 = -rX_3, \\ \frac{\partial M_1}{\partial \xi} + \frac{\partial H}{\partial \theta} - rQ_1 = 0, \\ \frac{\partial M_2}{\partial \theta} - \frac{\partial H}{\partial \xi} - rQ_2 = 0, \end{array} \right. \quad (46)$$

где усилия и моменты, приходящиеся на единицу длины сечения, обозначенные индексом 1, действуют в продольном направлении, индексом 2 – в кольцевом:

T_i – нормальные усилия;

Q_i – поперечные усилия;

$S_1 = S_2 = S$ – сдвигающие усилия;

M_i – изгибающий момент;

X_1, X_2, X_3 – тангенциальные и нормальные составляющие внешней нагрузки.

Система уравнений (46) является системой геометрически нелинейных дифференциальных уравнений, так как содержит нелинейный член с кручением τ в первом уравнении, а также кривизны $1/R_2^*$, определяемые по (44) во втором, и $1/R_1^*$ в третьем уравнении, определяемым по (45), являются кривизнами оболочки в деформированном состоянии.

2.2 Уравнения движения цилиндрической оболочки при различных способах размещения в упругой среде

Для решения задачи о свободных колебаниях тонкостенной цилиндрической оболочки большого диаметра, взаимодействующей с упругой средой, руководствуясь принципом Д'аламбера, X_1, X_2, X_3 представлены в виде:

$$\begin{aligned} X_1 &= -rh\rho_0 \frac{\partial^2 u}{\partial t^2}; \quad X_2 = -rh\rho_0 \frac{\partial^2 v}{\partial t^2}; \\ X_3 &= -rh\rho_0 \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} + p_0 - q_{si} - K_{si}w + \mu_{bj} \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} - \eta \frac{\partial w}{\partial t}, \end{aligned} \quad (47)$$

где X_1 – инерционная составляющая материала оболочки в продольном направлении;

X_2 – в окружном направлении;

X_3 – в радиальном направлении;

ρ_0 – плотность материала оболочки;

r – радиус срединной поверхности оболочки;

h – толщина стенки оболочки;

p_0 – внутреннее рабочее давление;

q_{si} – внешнее давление от обратной засыпки внешней среды;

μ_{bj} – присоединенная масса среды;

η – динамическая вязкость;

K_{si} – зависит от способа прокладки;

для случая *наземного* размещения оболочки $K_{s1} = \Psi(\theta)$ – радиальное давление среды на внешнюю поверхность трубы, распределенное по узкой полосе, МПа;

для случая *подземного* размещения $K_{s2} = k \cdot r$ – радиальный упругий отпор среды, МПа;

k_s – коэффициент упругого отпора среды, МПа/м по модели Фусса–Винклера.

Функция для описания внешнего давления упругой среды, распределенной по полосе контакта на внешнюю поверхность оболочки $\Psi(\theta)$ имеет вид

$$\Psi(\theta) = \frac{kr}{\pi} \left[\frac{\varphi_0^3}{3} + \sum_{m=1}^{\infty} \beta_m \cos m \theta \right], \quad (48)$$

$$\beta_m = (-1)^m m^{-3} [2\varphi_m \cos \varphi_m - (\varphi_m^2 - 2) \sin \varphi_m]; \quad \varphi_m = m\varphi_0, \quad m = 1, 2, 3 \dots$$

Присоединенная масса среды определяется выражением

$$\mu_{bj} = \kappa_{bj} \mu_b, \quad (49)$$

где μ_b – присоединенная масса среды; κ_{bj} – безразмерный коэффициент присоединенной массы среды, учитывающий тон колебаний

$$\kappa_{bj} = 1/\sqrt{m^2 + \lambda_0^2} (1 + \lambda_0^2/2(m^2 + \lambda_0^2)^{3/2}). \quad (50)$$

Для оболочки с жидкостью дополнительно учтем влияние гидродинамического давления жидкости на внутреннюю стенку трубы q_v , тогда X_3 представим в виде

$$X_3 = -rh\rho_0 \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} + p_0 - q_{si} + q_v - K_{si}w + \mu_{bj} \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} - \eta \frac{\partial w}{\partial t}, \quad (51)$$

$$\text{где } q_v = -\rho_v \Phi_{mn} \left(r^2 \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} + V^2 \frac{\partial^2 w}{\partial \xi^2} \right), \quad (52)$$

где $\rho_v \Phi_m$ – присоединенная масса жидкости; V – скорость потока протекающей жидкости;

$\Phi_{mn} = \frac{I_m(\lambda_0)}{\lambda_0 I'_m(\lambda_0)}$, $I_m(\lambda_0)$ и $I'_m(\lambda_0)$ – модифицированные функции Бесселя первого рода порядка m (m – волновое число в окружном направлении) и их производные.

Ранее в работе [183] были построены наглядные графики для графического определения значений функции Бесселя в виде, представленном на рис. 2.2.

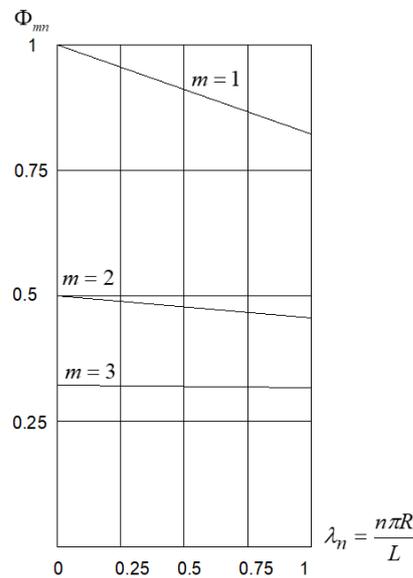


Рисунок 2.2 – Графики функции $\Phi_{mn}(\lambda_n)$ [183]

Ввиду того что оболочки могут размещаться в средах, имеющих динамическую вязкость, является целесообразным изучить влияние демпфирующих свойств таких сред на динамические характеристики оболочки.

Демпфер учтён на основании допущения о сопротивлении среды, пропорциональном скорости перемещения элемента срединной поверхности в данной среде, в зависимости от коэффициента динамической вязкости среды (η):

$$-\eta \frac{\partial w}{\partial t}, \quad (53)$$

где w – радиальное перемещение, отнесенное к радиусу оболочки;

q_s – давление внешней среды на оболочку в соответствии с моделями внешнего давления среды на оболочку, представленную в разделе 1.6.

Чтобы получить уравнение движения в усилиях, необходимо исключить из (46) все усилия, кроме M_2 и T_1 . Для этого продифференцируем первое уравнение по $\frac{\partial}{\partial \xi}$:

$$\frac{\partial^2 T_1}{\partial \xi^2} + \frac{\partial^2 S}{\partial \xi \partial \theta} + r \frac{\partial Q_2}{\partial \xi} \tau + r \frac{\partial X_1}{\partial \xi} = 0; \quad (54)$$

второе – по $\frac{\partial}{\partial \theta}$ и умножим его на минус единицу:

$$-\frac{\partial^2 T_2}{\partial \theta^2} - \frac{\partial^2 S}{\partial \xi \partial \theta} - \frac{r}{R_2^*} \frac{\partial Q_2}{\partial \theta} - r \frac{\partial X_2}{\partial \theta} = 0; \quad (55)$$

и третье – по $\frac{\partial^2}{\partial \theta^2}$ дважды и умножим его на минус $\frac{R_2^*}{r}$:

$$\begin{aligned} \frac{\partial Q_2}{\partial \theta} - \frac{r}{R_2^*} T_2 - \frac{r}{R_1^*} T_1 &= -r X_3, \quad (56) \\ -\frac{R_2^*}{r} \cdot \frac{\partial^3 Q_2}{\partial \theta^3} + \frac{R_2^*}{r} \cdot \frac{r}{R_2^*} \frac{\partial^2 T_2}{\partial \theta^2} + \frac{R_2^*}{r} \cdot \frac{r}{R_1^*} \frac{\partial^2 T_1}{\partial \theta^2} - \frac{R_2^*}{r} \cdot r \frac{\partial^2 X_3}{\partial \theta^2} &= 0. \end{aligned}$$

Из последнего уравнения выразим

$$Q_2 = \frac{1}{r} \left(\frac{\partial M_2}{\partial \theta} - \frac{\partial H}{\partial \xi} \right). \quad (57)$$

Путём подстановки (57) в (54)–(56) и учитывая 5-е допущение Кирхгофа–Лява, получим

$$\left\{ \begin{aligned} \frac{\partial^2 T_1}{\partial \xi^2} + \frac{\partial^2 S}{\partial \xi \partial \theta} + \frac{\partial}{\partial \xi} \left(\tau \frac{\partial M_2}{\partial \theta} \right) + r \frac{\partial X_1}{\partial \xi} &= 0; \\ -\frac{\partial^2 T_2}{\partial \theta^2} - \frac{\partial^2 S}{\partial \xi \partial \theta} - \frac{1}{R_2^*} \frac{\partial}{\partial \theta} \left(\frac{\partial M_2}{\partial \theta} \right) - r \frac{\partial X_2}{\partial \theta} &= 0; \\ -\frac{R_2^*}{r^2} \cdot \frac{\partial^3}{\partial \theta^3} \left(\frac{\partial M_2}{\partial \theta} \right) + \frac{R_2^*}{R_2^*} \cdot \frac{\partial^2 T_2}{\partial \theta^2} + \frac{R_2^*}{R_1^*} \cdot \frac{\partial^2 T_1}{\partial \theta^2} - R_2^* \frac{\partial^2 X_3}{\partial \theta^2} &= 0. \end{aligned} \right. \quad (58)$$

Складывая (58), получим

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 T_1}{\partial \xi^2} + \frac{\partial^2 S}{\partial \xi \partial \theta} + \frac{\partial}{\partial \xi} \left(\tau \frac{\partial M_2}{\partial \theta} \right) + r \frac{\partial X_1}{\partial \xi} - \frac{\partial^2 T_2}{\partial \theta^2} - \frac{\partial^2 S}{\partial \xi \partial \theta} - \frac{\partial}{\partial \theta} \left(\frac{1}{R_2^*} \frac{\partial M_2}{\partial \theta} \right) - r \frac{\partial X_2}{\partial \theta} - \\ - \frac{1}{r^2} \cdot \frac{\partial^3}{\partial \theta^3} \left(R_2^* \frac{\partial M_2}{\partial \theta} \right) + \frac{\partial^2 T_2}{\partial \theta^2} + \frac{\partial^2}{\partial \theta^2} \left(\frac{R_2^*}{R_1^*} T_1 \right) - \frac{\partial^2}{\partial \theta^2} (R_2^* X_3) &= 0. \end{aligned} \quad (59)$$

После преобразований получим уравнение движения в усилиях

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 T_1}{\partial \xi^2} + \frac{\partial}{\partial \xi} \left(\tau \frac{\partial M_2}{\partial \theta} \right) - \frac{1}{r^2} \cdot \frac{\partial^3}{\partial \theta^3} \left(R_2^* \frac{\partial M_2}{\partial \theta} \right) - \frac{\partial}{\partial \theta} \left(\frac{1}{R_2^*} \frac{\partial M_2}{\partial \theta} \right) + \\ + \frac{\partial^2}{\partial \theta^2} \left(\frac{R_2^*}{R_1^*} T_1 \right) + r \frac{\partial X_1}{\partial \xi} - r \frac{\partial X_2}{\partial \theta} - \frac{\partial^2}{\partial \theta^2} (R_2^* X_3) = 0, \end{aligned} \quad (60)$$

где $\xi = \frac{x}{R}$ – безразмерная координата цилиндрической оболочки в продольном направлении;

R_1^*, R_2^* – радиусы кривизны оболочки в деформированном состоянии (индекс 1 обозначает продольное направление, индекс 2 – окружное);

ϑ_2 – угол поворота касательной к срединной линии поверхностного сечения в деформированном состоянии;

τ – кручение срединной поверхности;

T_1 – продольное нормальное усилие.

Используя соотношения между усилиями и деформациями, деформациями и перемещениями (41), (42), получим

$$\begin{aligned} Eh \frac{\partial^3 u}{\partial \xi^3} - \frac{D}{r^2} \frac{\partial^4 \vartheta_2}{\partial \xi^3 \partial \theta} + \frac{D}{r^3} \frac{\partial^3}{\partial \theta^3} \left(R_2^* \frac{\partial^2 \vartheta_2}{\partial \theta \partial \xi} \right) + \frac{D}{r} \frac{\partial}{\partial \theta} \left(\frac{1}{R_2^*} \frac{\partial^2 \vartheta_2}{\partial \theta \partial \xi} \right) + \\ + Eh \frac{\partial^2}{\partial \theta^2} \left(\frac{R_2^*}{R_1^*} (\varepsilon_0 - \varepsilon_t) + \frac{\partial u R_2^*}{\partial \xi R_1^*} \right) - r^2 h \rho_0 \left(\frac{\partial^3 u}{\partial \xi \partial t^2} + \frac{\partial^3 v}{\partial \theta \partial t^2} \right) - \\ - \frac{\partial^2}{\partial \theta^2} \left(R_2^* \left(-r h \rho_0 \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} + p_0 - q_{si} - q_v - K_{si} w + \mu_{bj} \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} - \eta \frac{\partial w}{\partial t} \right) \right) = 0, \end{aligned} \quad (61)$$

подставляя в (61) соотношения (44), (45) и учитывая, что

$$R_2^* = \frac{1}{\frac{1}{R_2^*}} = \frac{1}{\frac{1}{r} \left(1 - \frac{\partial \vartheta_2}{\partial \theta} \right)} = r \frac{1}{1 - \frac{\partial \vartheta_2}{\partial \theta}} = r \left(1 + \frac{\partial \vartheta_2}{\partial \theta} \right)$$

и поделив каждый член на Eh , выражение приобретает вид

$$\begin{aligned} \frac{\partial^3 u}{\partial \xi^3} - \frac{D}{r^2 Eh} \frac{\partial^4 \vartheta_2}{\partial \xi^3 \partial \theta} + \frac{D}{r^2 Eh} \frac{\partial^3}{\partial \theta^3} \left(\frac{\partial^2 \vartheta_2}{\partial \theta \partial \xi} + \frac{\partial^3 \vartheta_2}{\partial \theta^2 \partial \xi} \right) + \frac{D}{r^2 Eh} \frac{\partial}{\partial \theta} \left(\frac{\partial^2 \vartheta_2}{\partial \theta \partial \xi} - \frac{\partial^3 \vartheta_2}{\partial \theta^2 \partial \xi} \right) - \\ - \frac{\partial^2}{\partial \theta^2} \left(\frac{\partial^2 w}{\partial \xi^2} (\varepsilon_0 - \varepsilon_t) \right) - \frac{r^2 h \rho_0}{Eh} \left(\frac{\partial^3 u}{\partial \xi \partial t^2} - \frac{\partial^3 v}{\partial \theta \partial t^2} \right) - \\ - \frac{R}{Eh} \frac{\partial^2}{\partial \theta^2} \left(-r h \rho_0 \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} + p_0 - q_{si} + q_v - K_{si} w + \mu_{bj} \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} - \eta \frac{\partial w}{\partial t} \right) = 0. \end{aligned} \quad (62)$$

Введем обозначение $h_v = \frac{h}{r \sqrt{12(1-\nu^2)}}$ и преобразуем выражение (62), сохранив

только нелинейные члены относительно неизвестных функций. Проведя

соответствующие математические преобразования, получим линеаризованное дифференциальное уравнение движения элемента срединной поверхности в перемещениях, которое содержит четыре неизвестных функции координат u , v , w , ϑ_2

$$\begin{aligned}
& \frac{\partial^3 u}{\partial \xi^3} - h_v^2 \frac{\partial^3}{\partial \theta^3} \left(\frac{\partial^2 \vartheta_2}{\partial \theta^2} + \vartheta_2 \right) - 2 \frac{\partial^2}{\partial \theta^2} \left(\frac{\partial^2 w}{\partial \xi^2} (\varepsilon_0 - \varepsilon_t) \right) - \\
& - \frac{R^2 h}{Eh} \rho_0 \left(\frac{\partial^3 u}{\partial \xi \partial t^2} - \frac{\partial^3 v}{\partial \theta \partial t^2} - \frac{\partial^4 w}{\partial \theta^2 \partial t^2} \right) - p_0 \frac{r}{Eh} \frac{\partial^3 \vartheta_2}{\partial \theta^3} + q_{si} \frac{r}{Eh} \frac{\partial^3 \vartheta_2}{\partial \theta^3} - \\
& - \mu_{bj} \frac{r}{Eh} \frac{\partial^4 w}{\partial \theta^2 \partial t^2} + \rho_v \Phi_{mn} \frac{r}{Eh} \left(R^2 \frac{\partial^4 w}{\partial \theta^2 \partial t^2} + V^2 \frac{\partial^4 w}{\partial \theta^2 \partial \xi^2} - \frac{r}{Eh} K_{si} \frac{\partial^2 w}{\partial \theta^2} + \right. \\
& \left. + \frac{r}{Eh} \eta \frac{\partial^3 w}{\partial \theta^2 \partial t} \right) = 0.
\end{aligned} \tag{63}$$

Присоединяя к (63) соотношения полубезмоментной теории оболочек $\left(\frac{\partial v}{\partial \theta} + w = 0 ; \frac{\partial v}{\partial \xi} + \frac{\partial u}{\partial \theta} = 0 ; \vartheta_2 = \frac{\partial w}{\partial \theta} - v \right)$, получим полную систему дифференциальных уравнений, состоящую из четырех уравнений.

Для решения поставленной задачи принимаем шарнирный тип закрепления по концам трубопровода, представленный выражениями

$$\begin{aligned}
& v \left\{ \xi = 0, \xi = \frac{L}{r} = 0 \right\}, \\
& \vartheta_2 \left\{ \xi = 0, \xi = \frac{L}{r} = 0 \right\}, \\
& w \left\{ \xi = 0, \xi = \frac{L}{r} = 0 \right\}, \\
& \frac{\partial^2 w}{\partial \xi^2} \left\{ \xi = 0, \xi = \frac{L}{r} = 0 \right\}.
\end{aligned} \tag{64}$$

Опираясь на метод разделяющихся переменных, относительное радиальное перемещение w представлено в виде двойного ряда Фурье

$$w = \sum_m \sum_n b_{mn} \varphi(t) \sin(\lambda_n \xi) \cos(m\theta), \tag{65}$$

где b_{mn} – амплитуда колебаний; $\sin(\lambda_n \xi)$ – описывает граничные условия по концам оболочки; $\cos(m\theta)$ – описывает периодичность в окружном направлении; m , n – волновые числа в окружном и продольном направлении; $\lambda_n = \frac{n\pi R}{L}$.

Остальные компоненты перемещений и угол поворота ϑ_2 определяются из соотношений полубезмоментной теории оболочек (39)–(41):

$$\begin{aligned} u &= \sum_m \sum_n b_{mn} \frac{\lambda_n}{m^2} \varphi(t) \cos(\lambda_n \xi) \cos(m\theta), \\ v &= \sum_m \sum_n b_{mn} \frac{1}{m} \varphi(t) \sin(\lambda_n \xi) \sin(m\theta), \\ \vartheta_2 &= - \sum_m \sum_n b_{mn} \frac{m^2 - 1}{m} \varphi(t) \sin(\lambda_n \xi) \sin(m\theta). \end{aligned} \quad (66)$$

Вычислим соответствующие производные от (65), (66) для подстановки их в (63) и запишем в виде

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 w}{\partial \theta^2} &= -m^2 \sum_m \sum_n b_{mn} \varphi(t) \sin(\lambda_n \xi) \cos(m\theta), \\ \frac{\partial^4 w}{\partial \theta^2 \partial t^2} &= -m^2 \sum_m \sum_n b_{mn} \varphi''(t) \sin(\lambda_n \xi) \cos(m\theta), \\ \frac{\partial^4 w}{\partial \theta^2 \partial \xi^2} &= m^2 \lambda_n^2 \sum_m \sum_n b_{mn} \varphi(t) \sin(\lambda_n \xi) \cos(m\theta), \\ \frac{\partial^3 u}{\partial \xi^3} &= -\frac{\lambda_n^4}{m^2} \sum_m \sum_n b_{mn} \varphi(t) \sin(\lambda_n \xi) \cos(m\theta), \\ \frac{\partial^3 u}{\partial \xi \partial t^2} &= -\frac{\lambda_n^2}{m^2} \sum_m \sum_n b_{mn} \varphi''(t) \sin(\lambda_n \xi) \cos(m\theta), \\ \frac{\partial^3 v}{\partial \theta \partial t^2} &= - \sum_m \sum_n b_{mn} \varphi''(t) \sin(\lambda_n \xi) \cos(m\theta), \\ \frac{\partial^5 \vartheta_2}{\partial \theta^5} &= m^4 (m^2 - 1) \sum_m \sum_n b_{mn} \varphi(t) \sin(\lambda_n \xi) \cos(m\theta), \\ \frac{\partial^3 \vartheta}{\partial \theta^3} &= -m^2 (m^2 - 1) \sum_m \sum_n b_{mn} \varphi(t) \sin(\lambda_n \xi) \cos(m\theta), \\ \frac{\partial^2 \vartheta_2}{\partial \theta^2} &= m(m^2 - 1) \sum_m \sum_n b_{mn} \varphi(t) \sin(\lambda_n \xi) \sin(m\theta), \\ \frac{\partial \vartheta}{\partial \theta} &= (m^2 - 1) \sum_m \sum_n b_{mn} \varphi(t) \sin(\lambda_n \xi) \cos(m\theta). \end{aligned} \quad (67)$$

Учитывая, что свободные колебания оболочки реализуются по гармоническому закону, функцию $\varphi(t)$ представим в виде

$$\varphi(t) = \sin \omega_{mn} t, \quad \varphi''(t) = -\omega_{mn}^2 \sin \omega_{mn} t, \quad (68)$$

где ω_{mn} – частота свободных изгибных колебаний; $m, n = 1, 2, 3$ – волновые числа в окружном и в продольном направлении.

Подставляя ранее вычисленные производные (67), с учетом (68) в уравнение (63) и приравнявая коэффициенты при одинаковых тригонометрических функциях $\sin(\omega t)$ при $m, n = 1, 2, 3, \dots$, получим бесконечную систему однородных линейных алгебраических уравнений относительно неизвестных амплитудных значений b_{mn} радиальной составляющей перемещения w . Коэффициенты при неизвестных в этих уравнениях обозначим a_{ij} :

$$\begin{cases} \text{при } m = 1 & a_{1,1}b_1 + a_{1,2}b_2 + a_{1,3}b_3 = 0, \\ \text{при } m = 2 & a_{2,1}b_1 + a_{2,2}b_2 + a_{2,3}b_3 + a_{2,4}b_4 = 0, \\ \text{при } m = 3 & a_{3,1}b_1 + a_{3,2}b_2 + a_{3,3}b_3 + a_{3,4}b_4 + a_{3,5}b_5 = 0. \end{cases} \quad (69)$$

Полученную систему линейных однородных алгебраических уравнений запишем в виде

$$a_{m,m-2}b_{m-2,n} + a_{m,m-1}b_{m-1,n} + a_{m,m}b_{m,n} + a_{m,m+1}b_{m+1,n} + a_{m,m+2}b_{m+2,n} = 0, \quad (70)$$

где $m = 1, 2, 3, \dots$; $m \pm 1 > 0$; $m \pm 2 > 0$, а коэффициенты a_{ij} определяются выражениями

$$\begin{aligned} a_{m,m} &= A_{m,n} - B_{m,n}\omega_{mn}^2; \\ a_{m,m\pm 1} &= -\frac{m^5(m \pm 2)}{2}q_{s0}^*; \\ a_{m,m\pm 2} &= -\frac{m^4[(m \pm 2)^2 - 1]}{2}q_{s0}^*; \end{aligned} \quad (71)$$

$$\begin{aligned} A_{m,n} &= \tilde{\lambda}_n^4 + m^4(m^2 - 1)(m^2 - 1 + p^* - q_{si}^*) + k_{si}^*m^4 - \tilde{\lambda}_n^4m^4Pn^{-2} + \\ &+ \tilde{\lambda}_n^2m^4T^* - \tilde{\lambda}_n^4\rho_v^*\Phi_{mn}V^2m^4h_v; \end{aligned}$$

$$B_{m,n} = \rho^*Rh \left(\tilde{\lambda}_n^2h_v + m^2 + m^4 \right) + \mu_{bj}^*m^4 + \rho_v^*\Phi_{mn}R^2m^4,$$

где $G = \frac{r}{Eh \cdot h_v^2} p^* = p_0G$, $\rho^* = \rho_0G$, $\tilde{\lambda}_n = \frac{n\pi r}{L\sqrt{h_v}}$, $\mu_{bj}^* = \mu_{bj}G$, $P = \frac{F}{F_3}$, $\rho_v^* = \rho_vG$, $q_{si}^* = q_{si}G$;

$$\mu_{bj}^* = \mu_{bj}G;$$

$$k_{s1}^* = \frac{kGr}{\pi} |z_m| - \text{параметр упругого основания (для случая наземного}$$

и частично заглубленного размещения оболочки);

z_m – коэффициент, зависящий от геометрических характеристик вдавливания трубы в упругую среду;

$k_{s2}^* = k_s Gr$ – параметр упругого отпора среды (для случая *подземного* размещения оболочки);

q_{si} – определяется в зависимости от модели размещения оболочки в упругой среде (П1, П2, П3).

Полученную систему однородных линейных уравнений (70) представим в матричной форме:

$$A \times B = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} & \dots & a_{1p} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} & \dots & a_{2p} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} & \dots & a_{3p} \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} & a_{44} & \dots & a_{3p} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & a_{n3} & a_{n4} & \dots & a_{np} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} b_{n1} \\ b_{n2} \\ b_{n3} \\ b_{n4} \\ b_{n5} \\ b_{np} \end{bmatrix}. \quad (72)$$

Поскольку решение этой однородной системы линейных алгебраических уравнений отлично от нуля, так как величины амплитудных значений радиального перемещения срединной поверхности оболочки $b_{mn} \neq 0$, определитель коэффициентов однородной системы $|A|$ должен равняться нулю:

$$|A| = \begin{vmatrix} A_{1n} - B_{1n}\omega^2 & a_{12} & a_{13} & a_{14} & \dots & a_{1p} \\ a_{21} & A_{2n} - B_{2n}\omega^2 & a_{23} & a_{24} & \dots & a_{2p} \\ a_{31} & a_{32} & A_{3n} - B_{3n}\omega^2 & a_{34} & \dots & a_{3p} \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} & A_{4n} - B_{4n}\omega^2 & \dots & a_{3p} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & a_{n3} & a_{n4} & \dots & A_{pn} - B_{mn}\omega^2 \end{vmatrix} \cdot \frac{1}{B_{1n}B_{2n}B_{3n}B_{4n} \dots B_{mn}} = 0. \quad (73)$$

После преобразований определитель (73) принимает вид характеристического уравнения матрицы A

$$|A - \lambda| = \begin{vmatrix} d_{11} - \lambda & d_{12} & d_{13} & d_{14} & \dots & d \\ d_{21} & d_{22} - \lambda & d_{23} & d_{24} & \dots & d_{2p} \\ d_{31} & d_{32} & d_{33} - \lambda & d_{34} & \dots & d_{3p} \\ d_{41} & d_{42} & d_{43} & d_{44} - \lambda & \dots & d_{3p} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ d_{n1} & d_{n2} & d_{n3} & d_{n4} & \dots & d_{pp} - \lambda \end{vmatrix} = 0, \quad (74)$$

где $d_{m,m} = \frac{a_{m,m}}{B_{m,n}}$; $d_{m,m\pm 1} = \frac{a_{m,m\pm 1}}{B_{m,n}}$; $d_{m,m\pm 2} = \frac{a_{m,m\pm 2}}{B_{m,n}}$; $\lambda = \omega^2$.

Коэффициенты $A_{m,n}$, $B_{m,n}$, $a_{m,m+1}$, $a_{m,m+2}$ определяются по формулам (71).

Раскрыв определитель, получим характеристическое уравнение. Дальнейшее решение сводится к задаче нахождения собственных чисел относительно λ , где λ – квадрат круговой частоты собственных колебаний.

Проведем анализ влияния побочных коэффициентов, полученные значения сведем в таблицу 2.1.

Таблица 2.1 – Сравнение собственных частот цилиндрической оболочки с жидкостью при учете побочных коэффициентов и без них

Определитель	$p_0=2$ МПа, $P=0,1$; $H=2,0$ м; $h/R=1/40$, $k_s=10$ МПа/м; $V=5$ м/с								
	$L=10r$			$L=15r$			$L=20r$		
	Частота, Гц								
	$\omega_{1,1}$	$\omega_{2,1}$	$\omega_{3,1}$	$\omega_{1,1}$	$\omega_{2,1}$	$\omega_{3,1}$	$\omega_{1,1}$	$\omega_{2,1}$	$\omega_{3,1}$
С побочными коэффициентами	<u>43,92</u>	<u>30,61</u>	<u>58,14</u>	<u>24,59</u>	<u>32,21</u>	<u>60,77</u>	<u>19,50</u>	<u>32,47</u>	<u>61,20</u>
Без побочных коэффициентов	<u>43,92</u>	30,58	58,12	24,59	32,18	60,75	19,50	32,43	61,18
Расхождение результатов, %	0	0,07	0,03	0	0,08	0,03	0	0,1	0,02

Анализ результатов расчета частот с побочными коэффициентами показал их вклад менее 1 % в конечный результат, в этой связи в дальнейшем задача определения собственных чисел сводится к следующему виду

$$|A - \lambda| = \begin{vmatrix} d_{11} - \lambda & 0 & 0 & 0 \\ 0 & d_{22} - \lambda & 0 & 0 \\ 0 & 0 & d_{33} - \lambda & 0 \\ 0 & 0 & 0 & d_{44} - \lambda \end{vmatrix} = 0. \quad (75)$$

В результате раскрытия определителя характеристическое уравнение для определения частот свободных колебаний может быть представлено в виде

$$(d_{11} - \lambda)(d_{11} - \lambda) \dots (d_{11} - \lambda) = 0. \quad (76)$$

Таким образом, частотное уравнение (76) распадается на p независимых уравнений. Из каждого такого уравнения можно определить частоту свободных колебаний при любых волновых числах m и n .

Полагая, что $\lambda = \omega^2$, получим выражение для определения квадрата частоты свободных колебаний ω_{mn}^2 замкнутой цилиндрической оболочки в упругой среде

$$\omega_{mn}^2 = \frac{\tilde{\lambda}_n^4 + m^4(m^2 - 1)(m^2 - 1 + p^* - q_{si}^*) + k_{si}^* m^4 - \tilde{\lambda}_n^4 m^4 P n^{-2} + \tilde{\lambda}_n^2 m^4 T^* - \tilde{\lambda}_n^4 \rho_v^* \Phi_{mn} V^2 m^4 h_v}{\rho^* \cdot r \cdot h(\tilde{\lambda}_n^2 h_v + m^2 + m^4) + \mu_b^* m^4 + \rho_v^* \Phi_{mn} r^2 m^4}, \quad (77)$$

где $P = \frac{F}{F_{кр}}$ – безразмерный параметр продольной сжимающей силы; $F_{кр}$ – критическая продольная сжимающая сила, при которой происходит потеря устойчивости; $\tilde{\lambda}_n = \frac{n\pi r}{L\sqrt{h_v}}$, $T^* = 2\alpha_m \Delta T / h_v$.

Для цилиндрической оболочки с потоком газа (без жидкости) при ρ_v^* и V равном нулю выражение принимает вид

$$\omega_{mn}^2 = \frac{\tilde{\lambda}_n^4 + m^4(m^2 - 1)(m^2 - 1 + p^* - q_{si}^*) + k_{si}^* m^4 - \tilde{\lambda}_n^4 m^4 P n^{-2} + \tilde{\lambda}_n^2 m^4 T^*}{\rho^* \cdot r \cdot h(\tilde{\lambda}_n^2 h_v + m^2 + m^4) + \mu_{bj}^* m^4}. \quad (78)$$

Полученное выражение (77) позволяет определить широкий спектр частот по оболочечным формам при волновых числах m и $n=1, 2, 3, \dots$, с учетом совместного влияния внутреннего давления, параметра продольной сжимающей силы, давления внешней среды (в зависимости от рассматриваемой модели) и упругого отпора среды, температурного воздействия, скорости потока протекающей жидкости, присоединенной массы внешней среды и жидкости при различных значениях геометрических характеристик оболочки.

В процессе преобразования уравнения движения на данный момент упущено слагаемое $\frac{r}{Eh} \eta \frac{\partial^3 w}{\partial \theta^2 \partial t}$, учитывающее влияние демпфирующих свойств и сил сопротивления среды. Данный вопрос более детально будет рассмотрен в разделе 2.8.

2.3 Определение значений предельных параметров замкнутой цилиндрической оболочки

Определение значений предельных параметров замкнутой цилиндрической оболочки является важной задачей в области механики и инженерного проектирования. Критический параметр продольной сжимающей силы представляет собой величину нагрузки, при которой оболочка теряет свою статическую устойчивость. Это состояние, известное как потеря устойчивости, может привести к резкому изменению формы конструкции и её разрушению.

Критическая величина продольной сжимающей силы определяется на основе свойств материала, геометрии оболочки и условий её закрепления. При достижении критического значения сжимающей силы оболочка начинает деформироваться, что может проявляться в виде выпучивания или других форм неустойчивости. Важно отметить, что критическая сила зависит не только

от механических характеристик материала, но и от внешних факторов, таких как температура и воздействие окружающей среды.

Для более точного расчета критических параметров используются различные методы анализа, включая линейный и нелинейный подходы. Эти методы позволяют оценить предельные состояния оболочки и разработать рекомендации по их проектированию с учетом возможных рисков.

В качестве примера покажем возможные варианты потери устойчивости (рис. 2.3 и 2.4).

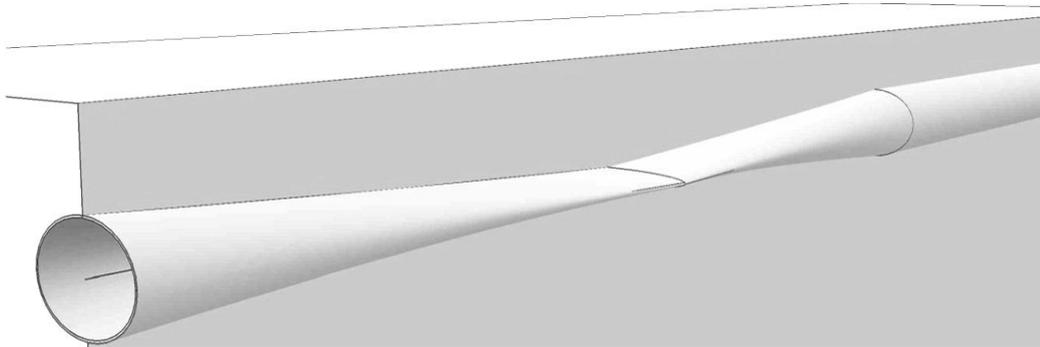


Рисунок 2.3 – Сплющивание поперечного сечения трубопровода в виде оболочки конечной длины

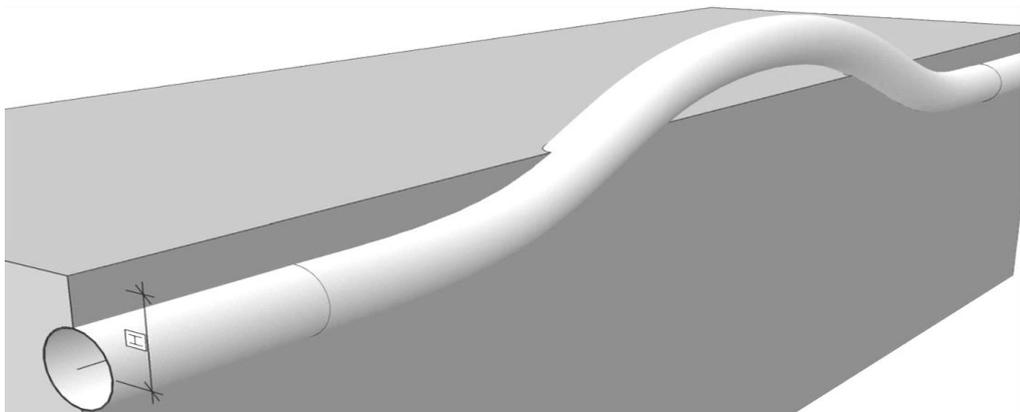


Рисунок 2.4 – Потеря устойчивости с образованием «арочного выброса»

Используя динамический критерий устойчивости, при которой частота собственных колебаний обращается в ноль $\omega_{m1} = 0$, из формул (77) и (78) можно определить величину критического параметра $P_{кр}$ или значение сжимающей силы $F_{кр}$. После преобразования получим выражения в виде:

– для цилиндрической оболочки с газом

$$P_{кр} = \frac{\tilde{\lambda}_n^4 + m^4(m^2 - 1)(m^2 - 1 + p^* - q_{si}^*) + k_{si}^* m^4 - \tilde{\lambda}_n^4 m^4 P n^{-2} + \tilde{\lambda}_n^2 m^4 T^*}{\tilde{\lambda}_n^4 m^4 n^{-2}}; \quad (79)$$

– для цилиндрической оболочки с жидкостью

$$P_{кр} = \frac{\tilde{\lambda}_n^4 + m^4(m^2 - 1)(m^2 - 1 + p^* - q_{si}^*) + k_{si}^* m^4 - \tilde{\lambda}_n^4 m^4 P n^{-2} + \tilde{\lambda}_n^2 m^4 T^* - \tilde{\lambda}_n^4 \rho_v^* \Phi_{mn} V^2 m^4 h_v}{\tilde{\lambda}_n^4 m^4 n^{-2}}. \quad (80)$$

По этим формулам, подставляя соответствующие значения геометрических характеристик и нагрузок участка цилиндрической оболочки, можно определить величину $P_{кр}$ и значение критической силы, приводящей к потере статической устойчивости. При этом следует иметь в виду, что рассматриваемый участок теряет устойчивость как тонкостенный элемент с учетом деформации поперечного сечения, а не как короткая цилиндрическая оболочка при осевом сжатии, теряющая устойчивость за счет местного смятия стенок оболочки.

Критическое внешнее давление на оболочку q_{sigr}

В зависимости от глубины заложения цилиндрической оболочки величина внешней нагрузки увеличивается и при достижении критических значений может привести к местной потере устойчивости рассматриваемого участка, в связи с чем необходимо определить максимальное внешнее давление, которое определяется также на основании ранее описанного критерия динамической устойчивости:

– для цилиндрической оболочки с газом

$$q_{sigr} = \frac{\tilde{\lambda}_n^4 + k_{si}^* m^4 - \tilde{\lambda}_n^4 m^4 P n^{-2} + \tilde{\lambda}_n^2 m^4 T^*}{m^4(m^2 - 1)} + (m^2 - 1 + p^*); \quad (81)$$

– для цилиндрической оболочки с жидкостью

$$q_{sigrV} = \frac{\tilde{\lambda}_n^4 + k_{si}^* m^4 - \tilde{\lambda}_n^4 m^4 P n^{-2} + \tilde{\lambda}_n^2 m^4 T^* - \tilde{\lambda}_n^4 \rho_v^* \Phi_{mn} V^2 m^4 h_v}{m^4(m^2 - 1)} + (m^2 - 1 + p^*). \quad (82)$$

Критерий применимости теории цилиндрических оболочек

Как было отмечено ранее в работе [183]: «Анализ частот свободных изгибных колебаний цилиндрических оболочек показал, что при некотором параметре длины трубы l^* значения наименьших частот, рассчитанных при $m=1$ и при $m=2$, совпадают. При этом длина l^* зависит от параметра тонкостенности трубы,

внутреннего рабочего давления, коэффициента упругого отпора среды и параметра продольной сжимающей силы». «Определение параметра длины l^* позволяет получить критерий применимости теории оболочек для выявления наименьших частот свободных колебаний» [310]. Для получения формулы l^* приравняем правые части формулы (77) при $m=1$ и $m=2$. В результате после применения аналитического преобразования в среде MathCAD 15 получим формулу в следующем виде

$$L_{kr} = \sqrt[4]{\frac{A_L}{B_L}}, \quad (83)$$

$$\begin{aligned} \text{Где } A_L = & \left(V^2 h v \cdot \rho_v \cdot \Phi_{21} + P - \frac{1}{16} \right) \mu n_1 + [(-V^2 \cdot h v) \cdot \rho_v \Phi_{11} + 1 - P] \cdot \mu n_2 + \left| \left(\frac{5V^2 h v}{4} \right) \cdot \rho_v \cdot (h \cdot r \cdot \rho_{st}) + \right. \\ & \left. + \left(P r^2 - \frac{r^2}{16} \right) \cdot \rho_v \right| \cdot \Phi_{11} + [2V^2 h v \rho_v (h \cdot r \cdot \rho_{st}) + (r^2 - P r^2) \cdot \rho_v] \Phi_{21} + \left(\frac{3P}{4} + \frac{9}{8} \right) (h \cdot r \cdot \rho_{st}); \\ B_L = & (T \lambda n^2 + k_1 + 3p - 3q_{s1} + 9\eta_0) \cdot \mu n_1 + (-T \lambda n^2 - k_1) \cdot \mu n_2 + \left(\frac{3T \lambda n^2}{4} + \frac{3k}{4} + 6p - 6q_{s1} + 18\eta_0 \right) (h \cdot r \cdot \rho_{st}) + \\ & + (k_1 r^2 \rho_v + 3p r^2 \rho_v - 3q_{s1} r^2 \rho_v + 9r^2 \eta_0 \rho_v + T r^2 \lambda n^2 \rho_v) \Phi_{11} + (-T \rho_v r^2 \lambda n^2 - k_1 \rho_v r^2) \Phi_{21}. \end{aligned}$$

Однако такую формулу сложно назвать удобной для использования, в связи с чем необходимо произвести оценку вклада каждого слагаемого в конечный результат. Для этого проведем тестовые вычисления при следующих значениях: $h/r=1/40$; $P=0,3$; $\Delta T=50$ °C; $k=20$ МПа/м; $\rho_v=0,87$ т/м³; $\rho_{st}=0,87$ т/м³; $p_0=2$ МПа; $V=3$ м/с; $\rho_{\text{среды}}=1,5$ т/м³. В результате подстановки значений в общую формулу L^* для цилиндрической оболочки с потоком жидкости равна 13,022.

Поочередно будем обнулять слагаемые в формуле (83), полученные значения сведем в таблицу 2.2.

Таблица 2.2 – Оценка влияния слагаемых в формуле (83)

№ п/п	Исследуемый параметр	Величина L^*	Отклонение от $L^* = 13,022$, %
1	V	13,022	0
2	$\rho_{\text{среды}}$	13,036	0,1
3	T	13,114	0,7
4	ρ_v	13,179	1,2
5	k	13,683	4,8
6	$\rho_{\text{среды}} + V$	13,051	0,2
7	p_0	15,913	18,2
8	P	12,326	5,6

Анализ полученных в таблице 2.2 значений показывает, что ввиду малости влияния присоединенной массы среды и скорости потока протекающей жидкости на конечное значение L^* , эти слагаемые можно упустить (отклонение 0,2 %). Таким образом, после преобразования получим две формулы, позволяющие определить величину L^* :

– для цилиндрической оболочки с жидкостью

$$L^* = \frac{l}{r} = \frac{\pi}{\sqrt{h_v}} \sqrt[4]{\frac{(P - 0,0625)r^2 \rho_v^* \Phi_{11} + (1 - P)r^2 \rho_v^* \Phi_{21} + (0,75P + 1,125)r h \rho^*}{6 \cdot [0,125(T^* \lambda_n^2 + k_{si}^*) + p^* - q_{si}^*] r h \rho^* + [k_{si}^* + 3(p^* - q_{si}^*) + T^* \lambda_n^2] r^2 \rho_v^* \Phi_{11}}}; \quad (84)$$

– для цилиндрической оболочки с газом

$$L^* = \frac{l}{r} = \frac{\pi}{\sqrt{h_v}} \sqrt[4]{\frac{(0,75P + 1,125)}{6 \cdot [0,125(T^* \lambda_n^2 + k_{si}^*) + p^* - q_{si}^*]}}. \quad (85)$$

Формулы (84), (85) позволяют определить границу применимости решений для определения частот свободных колебаний цилиндрических оболочек.

Проиллюстрируем графики частот, определяемых по формулам (77) и (78), на рисунках 2.5 и 2.6.

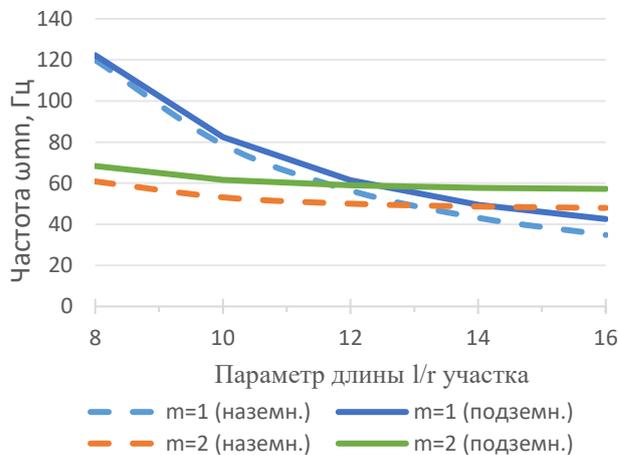


Рисунок 2.5 – Зависимость частот свободных колебаний цилиндрической оболочки с потоком газа ω_{21} и ω_{11} от волновых чисел $m=2$ и $m=1$ и различных значениях L/r , при $h/r=1/40$; $\Delta T=50$ °С; $k=20$ МПа/м; $\rho_v=0,87$ т/м³; $\rho_{st}=7,85$ т/м³; $p_0=2$ МПа

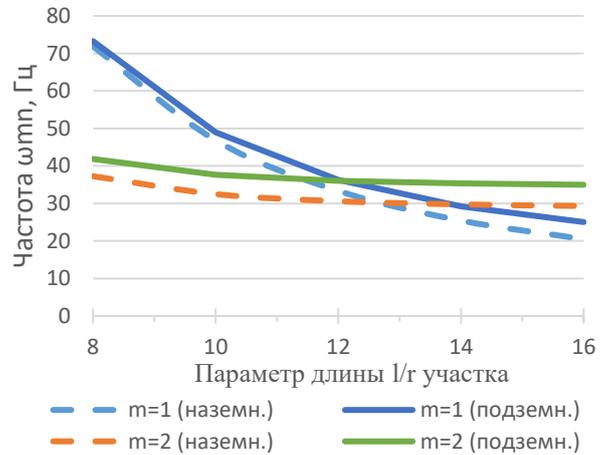


Рисунок 2.6 – Зависимость частот свободных колебаний цилиндрической оболочки с потоком жидкости ω_{21} и ω_{11} от волновых чисел $m=2$ и $m=1$ и различных значениях L/r , при $h/r=1/40$; $\Delta T=50$ °С; $k=20$ МПа/м; $\rho_v=0,87$ т/м³; $\rho_{st}=7,85$ т/м³; $p_0=2$ МПа

Анализ полученных значений показывает, что при $L/r < L^*$ минимальные частоты определяются при $m=2$, что соответствует оболочечной форме колебаний, с образованием двух полуволн в окружном направлении, а при $L/r > L^*$, при $m=1$,

с образованием одной полуволны в окружном направлении, без деформации, только перемещение. Деформации оболочки в зависимости от m представим на рисунке 2.7.

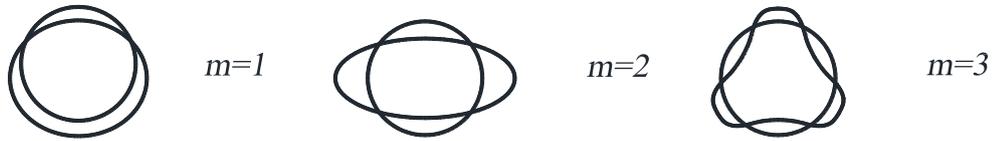


Рисунок 2.7 – Деформация оболочки в окружном направлении

Проведенный анализ показывает применимость формул (84), (85) для определения параметра L^* и дальнейшего эффективного определения частот свободных колебаний цилиндрической оболочки при любом способе размещения.

2.4 Определение частот и форм свободных колебаний цилиндрической оболочки при наземном размещении на упругом основании

Для проведения тестовых расчетов по полученным формулам зададимся следующими вводными: материал оболочки сталь, соотношение толщины стенки к радиусу h/r от 1/30 до 1/50, длина l/r от 8 до 12, коэффициент упругого отпора k_s от 1 до 30 МПа/м, параметр продольной сжимающей силы P от 0 до 1, внутреннее давление p_0 от 0 до 8 МПа, скорость потока протекающей жидкости V до 5 м/с, в качестве жидкости будем принимать воду и углеводороды, например нефть с плотностью 730–1000 кг/м³.

Определимся с терминологией в рамках этого и последующих разделов диссертации. Оболочку или трубы на упругом основании будем считать *наземным размещением*, а оболочку или трубу в упругой среде *подземным размещением*. Оболочку или трубу с потоком газа будем считать *газопроводом*, с потоком нефти – *нефтепроводом*, с потоком воды – *водопроводом*.

В целях изучения влияния упругого основания грунта необходимо оценить его влияние на внешнюю стенку оболочки–трубы. Согласно разделу 1.6 внешнее давление, распределенное по полосе контакта, может быть представлено разными зависимостями.

Рассмотрим случай, когда угол вдавливания меньше чем $\pi/2$, тогда решения представим в виде Н1 и Н2, обозначенных в разделе 1.6 в таблице 1.1.

Таблица 1.1 – Распределение внешнего давления на оболочку при наземном и частично заглубленном размещении

№ модели	График распределения внешнего давления на оболочку	Функция q	Источник
Н1		<p>При $\alpha < \frac{\pi}{2}$</p> $\Phi(\theta) = \frac{k_s r}{2} (\alpha^2 - \theta^2),$ $\alpha = \sqrt[3]{\frac{3Q_B}{2k_s r^2}};$ $\Delta_0 = r(1 - \cos \alpha) = r\alpha^2/2,$ $Q_B \cong 2k_s r^2 \alpha^3/3$	[173]
Н2		<p>При $\alpha < \frac{\pi}{2}$</p> $q_\theta^{ro} = k_s \cdot w_\theta = \frac{3Q_B(\cos\theta - \cos\alpha) \cdot \cos\theta}{r(3 \cdot \sin\alpha + \sin^3\alpha - 3\alpha \cdot \cos\alpha)},$ $Q_B = \frac{k_s \cdot r^2 \Delta (3\sin\alpha + \sin^3\alpha - 3\alpha \cos\alpha)}{3};$ $\Delta = \frac{3Q_B}{k_s \cdot r^2 (3\sin\alpha + \sin^3\alpha - 3\alpha \cos\alpha)}$	[114]

Произведем расчет при различных вариантах коэффициента упругого отпора и представим полученные результаты в виде графиков на рисунках 2.8, 2.9.

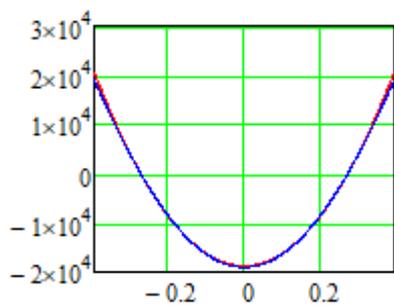


Рисунок 2.8 – Распределение давления грунта по узкой полосе в зависимости от угла вдавливания α , по модели Н1 и Н2 при $k_s = 1$ МПа/м

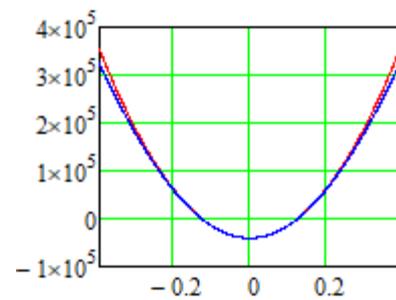
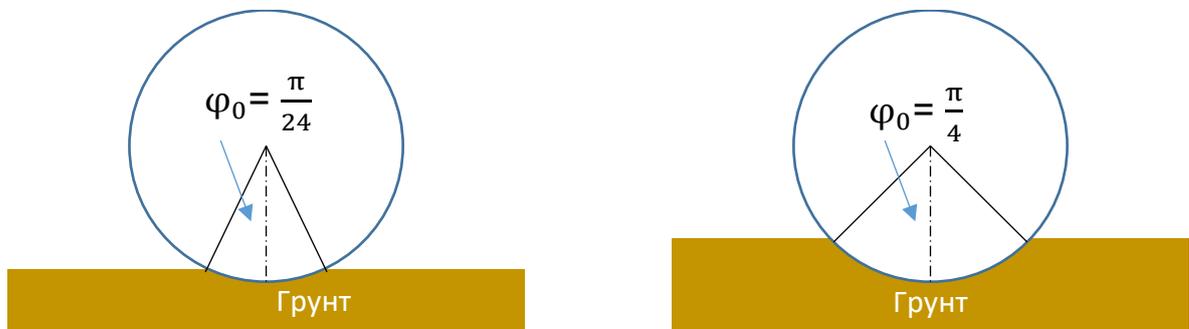


Рисунок 2.9 – Распределение давления грунта по узкой полосе в зависимости от угла вдавливания α , по модели Н1 и Н2 при $k_s = 10$ МПа/м

Анализ полученных графиков показывает минимальные расхождения между результатами, в этой связи в дальнейшем будем использовать решения,

полученные в работе [173], которые уже учтены в слагаемом k_{si}^* в числителе формулы (77), полученной в разделе 2.2. Знак минус в данном случае необходим для иллюстрации эпюры распределения давления выпуклостью вниз. Данные графики построены для сектора вдавливания от $-\frac{\pi}{4}$ до $\frac{\pi}{4}$, что равно общей угловой длине в 45° .

Проведем оценку влияния сектора вдавливания оболочки в упругое основание на частоты свободных колебаний при различных значениях параметра тонкостенности h/r . Рассмотрим диапазон значений от $\frac{\pi}{4}$ до $\frac{\pi}{24}$. Для удобства дальнейших обозначений примем $\alpha = \varphi_0$. Иллюстрацию сектора вдавливания представим на рисунке 1.10.



а) Сектор вдавливания трубы в грунт $\varphi_0 = \frac{\pi}{24}$ б) Сектор вдавливания трубы в грунт $\varphi_0 = \frac{\pi}{4}$

Рисунок 2.10 – Сектор вдавливания трубы в упругую среду

Для вычисления частот свободных колебаний по формулам (77), (78) необходимо вычислить коэффициент z_m в слагаемом $k_{s1}^* = \frac{k_s Gr}{\pi} |z_m|$ по методу, приведенному в работе [183]. Для удобства проиллюстрируем значение коэффициентов в виде графиков в зависимости от угловой длины (рис. 2.11).

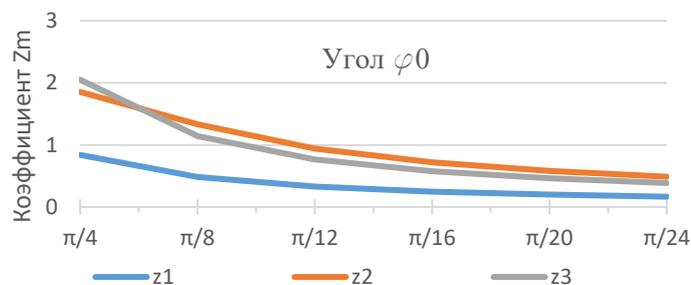


Рисунок 2.11 – Значение коэффициента z_m в зависимости от φ_0

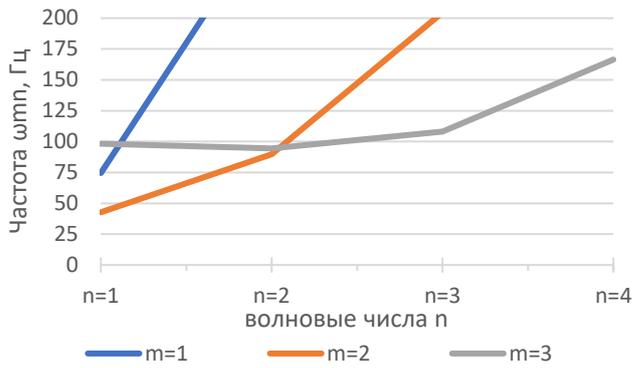


Рисунок 2.12 – Зависимость частот свободных колебаний наземной цилиндрической оболочки с газом от волновых чисел m и n при $p_0= 2$ МПа; $h/R=1/30$; $L/R=10$; $k_s = 10$ МПа/м; $P=0,1$

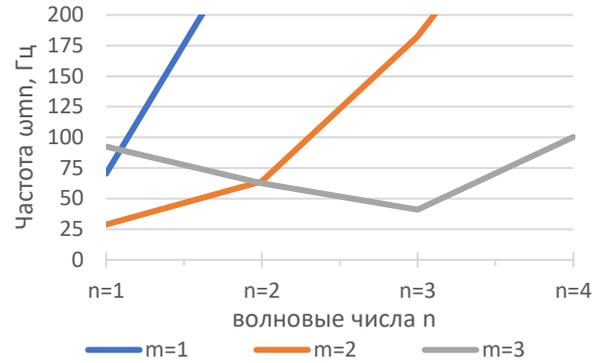


Рисунок 2.13 – Зависимость частот свободных колебаний наземной цилиндрической оболочки с жидкостью от волновых чисел m и n при $p_0=2$ МПа; $h/R=1/30$; $L/R=10$; $k_s = 10$ МПа/м; $P=0,2$

Таблица 2.3 – Зависимость частот свободных изгибных колебаний ω_{m1} цилиндрической оболочки на упругом основании от параметра тонкостенности h/r , внутреннего рабочего давления p_0 и коэффициента упругого отпора k_s

Угловой охват $2\varphi_0$	ω_{21}	$L=10r, h/r=1/30$ (труба 1420×23,7 мм), $p_0=4$ МПа; $P=0,1$		
		Коэф. упругого отпора $k_s = 1$ МПа/м	Коэф. упругого отпора $k_s = 10$ МПа/м	Коэф. упругого отпора $k_s = 30$ МПа/м
$2 \cdot \pi/4$	ω_{21}	49,59	55,08	65,65
$2 \cdot \pi/8$		49,41	53,43	61,42
$2 \cdot \pi/12$		49,27	52,16	58,06
$2 \cdot \pi/16$		49,20	51,42	56,05
$2 \cdot \pi/20$		49,15	50,96	54,76
$2 \cdot \pi/24$		49,12	50,63	53,86

Анализ построенных диаграмм на рисунках 2.12 и 2.13 показывает, что минимальные частоты реализуются при $m=2$ и $n=1$, что соответствует оболочечной форме колебаний.

Далее определим частоту ω_{21} при различной угловой длине сектора вдавливания, полученные значения частот сведем в таблицу 2.3 и проиллюстрируем в виде графиков на рисунке 2.14.

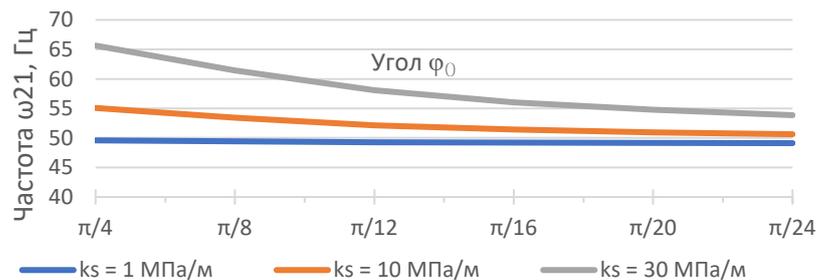


Рисунок 2.14 – Зависимость частот свободных колебаний наземной цилиндрической оболочки с газом от угловой длины φ_0 при $p_0= 4$ МПа; $h/R=1/30$; $L/R=10$; $k_s= 1,10,30$ МПа/м; $P=0,1$

Как следует из графиков на рисунке 2.14, с увеличением сектора вдавливания влияние упругого основания усиливается, что свидетельствует об увеличении значений частот на графиках, и тем больше рост, чем выше значение k_s .

Определим спектр частот свободных колебаний цилиндрической оболочки для трех первых наиболее важных для динамических расчетов гармоник $\omega_{11}, \omega_{21}, \omega_{31}$ – при наземном размещении, при различных значениях волновых чисел m и n , по формуле (78), и представим полученные значения в таблице 2.4 и в виде графиков на рисунках 2.15, 2.16. Следует отметить, что расчет выполняется в технической частоте в Гц, для перехода от круговой частоты 1/с необходимо частоту ω_{mn} поделить на 2π .

Таблица 2.4 – Зависимость частот свободных изгибных колебаний ω_{m1} наземного газопровода от параметра длины участка L/r , параметра продольной сжимающей силы P и коэффициента упругого отпора k_s

$h/R=1/30$ (труба 1420×23,7 мм); $p_0=0$ (безнапорная)										
Коэф. упругого отпора k_s , МПа/м	ω_{m1}	$L=8r$			$L=10r$			$L=12r$		
		$P=0$	$P=0,05$	$P=0,1$	$P=0$	$P=0,05$	$P=0,1$	$P=0$	$P=0,05$	$P=0,1$
$k_s=1$	ω_{11}	118,97	115,96	112,87	77,22	75,27	73,27	54,11	52,75	51,36
	ω_{21}	50,02	35,96	9,20	39,89	33,08	24,46	35,66	32,12	28,14
	ω_{31}	89,88	81,92	73,10	87,71	84,46	81,07	87,32	85,75	84,16
$k_s=3$	ω_{11}	119,13	116,13	113,05	77,49	75,54	73,55	54,50	53,15	51,76
	ω_{21}	50,69	36,89	12,36	40,74	34,11	25,83	36,61	33,18	29,35
	ω_{31}	90,31	82,39	73,62	88,16	84,92	81,55	87,76	86,21	84,62
$k_s=5$	ω_{11}	119,30	116,30	113,22	77,75	75,82	73,83	54,88	53,54	52,17
	ω_{21}	51,36	37,80	14,85	41,58	35,11	27,13	37,55	34,21	30,05
	ω_{31}	90,73	82,86	74,14	88,60	85,37	82,03	88,21	86,66	85,08
$k_s=10$	ω_{11}	119,72	116,73	113,66	78,41	76,49	74,53	55,83	54,51	53,16
	ω_{21}	52,99	39,99	19,76	43,61	37,48	30,14	39,78	36,64	33,21
	ω_{31}	91,79	84,01	75,43	89,69	86,51	83,20	89,30	87,78	86,22
$k_s=20$	ω_{11}	120,54	117,57	114,53	79,72	77,83	75,90	57,67	56,40	55,10
	ω_{21}	56,10	44,03	27,02	47,40	41,83	35,41	43,91	41,09	38,06
	ω_{31}	93,86	86,27	77,94	91,84	88,73	85,51	91,46	89,97	88,45
$k_s=30$	ω_{11}	121,36	118,42	115,39	81,00	79,15	77,25	59,46	58,23	56,97
	ω_{21}	59,05	47,73	32,71	50,91	45,77	39,98	47,68	45,10	42,36
	ω_{31}	95,89	88,47	80,37	93,93	90,90	87,76	93,57	92,11	90,63

Окончание таблицы 2.4

Коэф. упругого отпора k_s , МПа/м	ω_{m1}	$L=8r$			$L=10r$			$L=12r$		
		$P=0$	$P=0,05$	$P=0,1$	$P=0$	$P=0,05$	$P=0,1$	$P=0$	$P=0,05$	$P=0,1$
$p_0=4$ МПа										
$k_s=1$	ω_{11}	118,97	115,96	112,87	77,22	75,27	73,27	54,11	52,75	51,36
	ω_{21}	65,61	55,65	43,45	58,5	54,1	49,3	55,73	53,54	51,25
	ω_{31}	115,76	109,7	103,28	114,94	112,47	109,95	114,64	113,46	112,26
$k_s=3$	ω_{11}	119,14	116,13	113,05	77,49	75,54	73,55	54,5	53,15	51,76
	ω_{21}	66,14	56,26	44,24	59,09	54,73	49,99	56,35	54,18	51,92
	ω_{31}	116,1	110,05	103,65	115,27	112,82	110,3	114,98	113,8	112,61
$k_s=5$	ω_{11}	119,3	116,31	113,23	77,75	75,82	73,83	54,88	53,54	52,17
	ω_{21}	66,65	56,87	45,01	59,67	55,36	50,68	56,96	54,81	52,58
	ω_{31}	116,43	110,41	104,03	115,61	113,16	110,66	115,32	114,14	112,95
$k_s=10$	ω_{11}	119,73	116,74	113,67	78,41	76,49	74,53	55,83	54,51	53,16
	ω_{21}	67,93	58,36	46,88	61,1	56,89	52,35	58,46	56,37	54,2
	ω_{31}	117,27	111,28	104,96	116,45	114,02	111,53	116,16	114,99	113,81
$k_s=20$	ω_{11}	120,56	117,6	114,55	79,72	77,83	75,9	57,67	56,4	55,1
	ω_{21}	70,42	61,24	50,42	63,86	59,85	55,55	61,34	59,35	57,3
	ω_{31}	118,92	113,02	106,8	118,11	115,71	113,27	117,83	116,67	115,51
$k_s=30$	ω_{11}	121,39	118,45	115,43	81	79,15	77,25	59,46	58,23	56,97
	ω_{21}	72,82	63,99	53,72	66,51	62,66	58,57	64,1	62,2	60,24
	ω_{31}	120,54	114,73	108,61	119,75	117,39	114,97	119,47	118,33	117,18

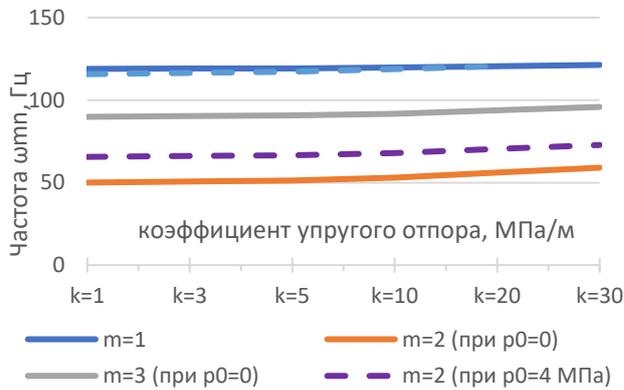


Рисунок 2.15 – Частоты свободных колебаний газопровода при окружных волновых числах m и значений коэффициента упругого отпора среды k_s при $p_0=0$ и 4 МПа; $h/R=1/30$; $L/R=8$; $P=0$

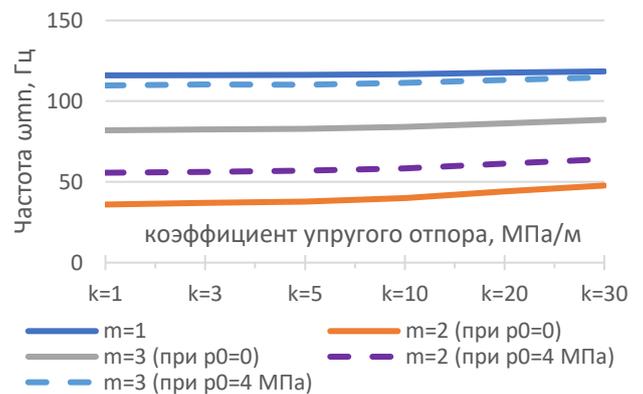


Рисунок 2.16 – Частоты свободных колебаний газопровода при окружных волновых числах m и значений коэффициента упругого отпора среды k_s при $p_0=0$ и 4 МПа; $h/R=1/30$; $L/R=8$; $P=0,05$

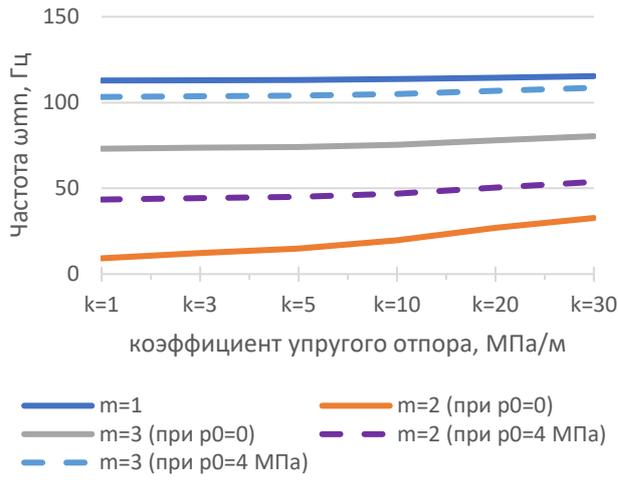


Рисунок 2.17 – Частоты свободных колебаний газопровода при окружных волновых числах m и значений коэффициента упругого отпора среды k_s при $p_0=0$ и 4 МПа; $h/R=1/30$; $L/R=8$; $P=0,1$

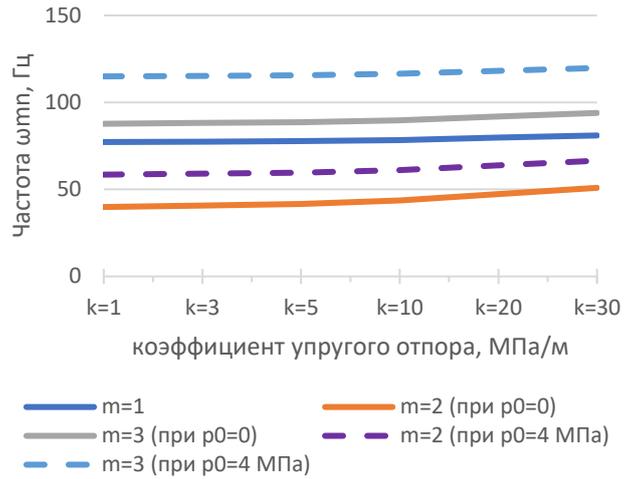


Рисунок 2.18 – Частоты свободных колебаний газопровода при окружных волновых числах m и значений коэффициента упругого отпора среды k_s при $p_0=0$ и 4 МПа; $h/R=1/30$; $L/R=10$; $P=0$

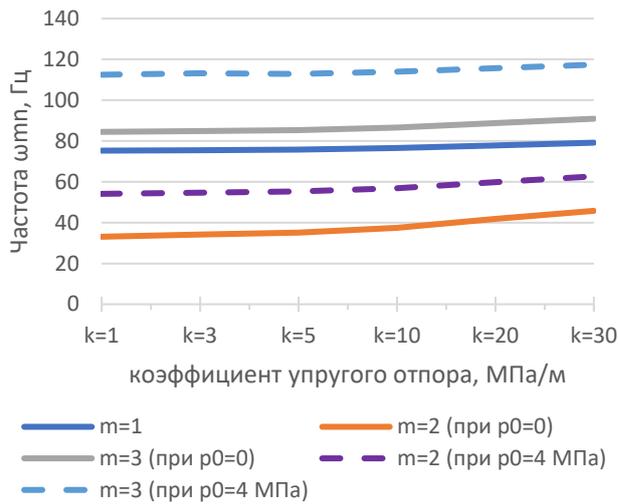


Рисунок 2.19 – Частоты свободных колебаний газопровода при окружных волновых числах m и значений коэффициента упругого отпора среды k_s при $p_0=0$ и 4 МПа; $h/R=1/30$; $L/R=10$; $P=0,05$

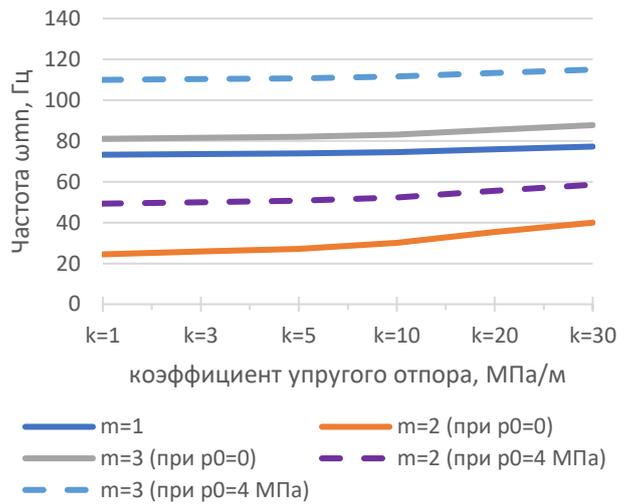


Рисунок 2.20 – Частоты свободных колебаний газопровода при окружных волновых числах m и значений коэффициента упругого отпора среды k_s при $p_0=0$ и 4 МПа; $h/R=1/30$; $L/R=10$; $P=0,1$

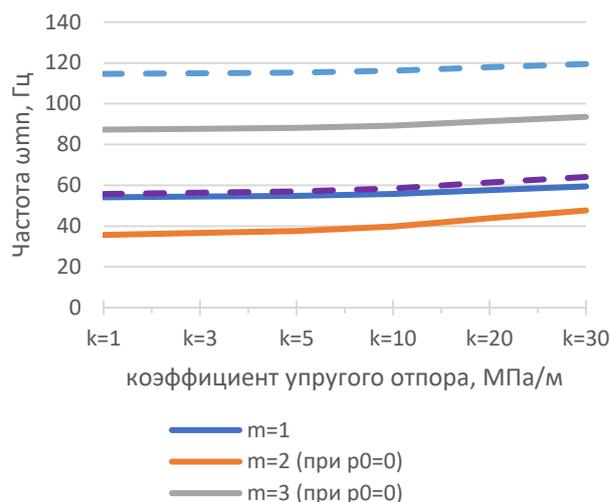


Рисунок 2.21 – Частоты свободных колебаний газопровода при окружных волновых числах m и значений коэффициента упругого отпора среды k_s при $p_0=0$ и 4 МПа; $h/R=1/30$; $L/R=12$; $P=0$

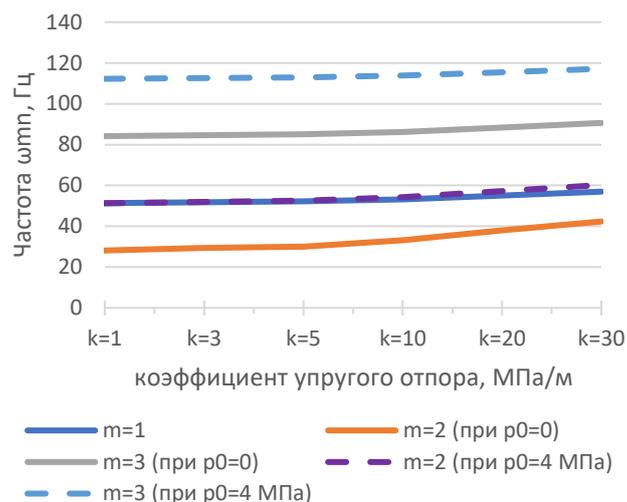


Рисунок 2.22 – Частоты свободных колебаний газопровода при окружных волновых числах m и значений коэффициента упругого отпора среды k_s при $p_0=0$ и 4 МПа; $h/R=1/30$; $L/R=12$; $P=0,1$

Для анализа значений частот свободных колебаний цилиндрической оболочки при наземном размещении, представленных в таблицах, можно выделить несколько ключевых аспектов, касающихся поведения оболочки под воздействием различных условий. Во-первых, минимальная частота реализуется при ω_{21} , что соответствует оболочечной форме колебаний, с образованием двух полуволн в окружном и одной в продольном направлении. Во-вторых, влияние коэффициента упругого отпора оказывает существенное влияние на рост значений оболочечных форм колебаний не только ω_{21} , но и ω_{31} .

В таблице 2.4 рассматриваются два случая, напорный (при $p_0=4$ МПа) и безнапорный ($p_0=0$), рассмотрим более подробно каждый из них.

Безнапорная оболочка ($p_0=0$)

Анализ полученных значений частот показывает высокую чувствительность оболочки к росту значений коэффициента упругого отпора грунта k_s , особенно с увеличением значений параметра продольной сжимающей силы P . Например, при $P=0$, $L/r=8$ увеличение коэффициента k_s от 1 до 30 МПа/м приводит к увеличению ω_{21} с 50,02 до 59,05, а при $P=0,1$ – с 9,20–32,71, что составляет 255 % против 18 % в первом случае. Такой эффект подтверждает важность учета влияния упругого основания, увеличивающего жесткость участка, при определении собственных частот

цилиндрической оболочки при наземном размещении, особенно в случае воздействия параметра продольной сжимающей силы. Наряду с продольной силой существенное влияние на весь спектр частот оказывает параметр длины участка L/r .

С увеличением длины участка от $L=8r$ до $L=12r$ частоты заметно снижаются, что говорит о влиянии инерционных сил рассматриваемого участка. Так, например, частоты ω_{11} при $k_s=10$ МПа/м, $P=0$ снижаются с 119,72 до 55,83 на 114 %, ω_{21} – с 52,99 до 39,78 на 33 %, ω_{31} – с 91,79 до 89,30 на 2,7 %.

Оболочка с внутренним давлением $p_0=4$ МПа

Анализ полученных значений частот для оболочки, подверженной действию внутреннего давления, выявил, что влияние упругого основания несколько снижается ввиду того, что оболочка с учетом внутреннего давления обладает дополнительной жёсткостью, вызванной действием этого давления. Выпишем значения частот, полученных при тех же воздействиях, что и в безнапорном случае, но уже с учетом внутреннего давления $p_0=4$ МПа. Например, при $P=0$, $L/r=8$ увеличение коэффициента k_s от 1 до 30 МПа/м приводит к увеличению ω_{21} с 65,61 до 72,82 Гц, а при $P=0,1$ – с 43,45 до 53,72 Гц, что составляет 23,63 % против 11 % в первом случае. Как следует из расчетов, постоянно действующее внутреннее рабочее давление приводит к существенному увеличению жесткости рассматриваемого участка цилиндрической оболочки и влияние упругого основания снижается, в том числе с учетом параметра продольной сжимающей силы P .

Определим теперь влияние параметра длины участка на спектр частот оболочки. С увеличением длины участка от $L=8r$ до $L=12r$, частоты также заметно снижаются, как и в безнапорном случае. Так, например, частоты ω_{11} при $k_s=10$ МПа/м, $P=0$ снижаются с 119,72 до 55,83 Гц на 214 %, ω_{21} – с 67,93 до 58,46 Гц на 16,20 %, ω_{31} – с 117,27 до 116,16 Гц на 1 %. Анализ полученных значений показал, что тенденция изменения частот сохраняется, как и в безнапорном случае, что говорит об исключительном влиянии геометрических характеристик на тенденцию изменения частот.

Далее определим минимальные частоты ω_{21} в зависимости от внутреннего давления p_0 , параметра тонкостенности h/r и коэффициента упругого отпора k_s .

Полученные значения сведем в таблицу 2.5 и проиллюстрируем в виде графиков на рисунках 2.23–2.28.

Таблица 2.5 – Зависимость частот свободных изгибных колебаний ω_{m1} наземного газопровода от параметра тонкостенности h/r , внутреннего рабочего давления p_0 , и коэффициента упругого отпора k_s

$L=10r, P=0,1$										
Коэф. упругого отпора k_s (МПа/м)	ω_{m1}	$h/r=1/30$ (труба 1420×23,7мм)			$h/r=1/40$ (труба 1420×17,7мм)			$h/r=1/50$ (труба 1420×14,2 мм)		
		$p_0=0$ МПа	$p_0=4$ МПа	$p_0=6$ МПа	$p_0=0$ МПа	$p_0=4$ МПа	$p_0=6$ МПа	$p_0=0$ МПа	$p_0=4$ МПа	$p_0=6$ МПа
$k=1$	ω_{21}	24,46	49,30	57,84	14,00	51,47	62,25	4,61	55,49	67,88
$k=3$		25,83	49,99	58,44	16,98	52,36	62,99	11,68	56,51	68,72
$k=5$		27,13	50,68	59,03	19,51	53,23	63,72	15,86	57,52	69,55
$k=10$		30,14	52,35	60,47	24,73	55,36	65,51	23,23	59,97	71,59
$k=20$		35,41	55,55	63,26	32,77	59,38	68,94	33,40	64,60	75,51
$k=30$		39,98	58,57	65,93	39,19	63,15	72,21	41,12	68,91	79,23
$k=1$	ω_{21}	–	37,91	48,51	–	40,69	53,69	–	45,67	60,12
$k=3$		–	38,81	49,22	–	41,81	54,54	–	46,92	61,07
$k=5$		–	39,69	49,91	–	42,90	55,38	–	48,13	62,01
$k=10$		–	41,81	51,61	–	45,52	57,43	–	51,03	64,29
$k=20$		16,15	45,75	54,85	9,00	50,34	61,32	11,07	56,39	68,62
$k=30$		24,62	49,37	57,91	23,30	54,73	64,98	26,43	61,28	72,70

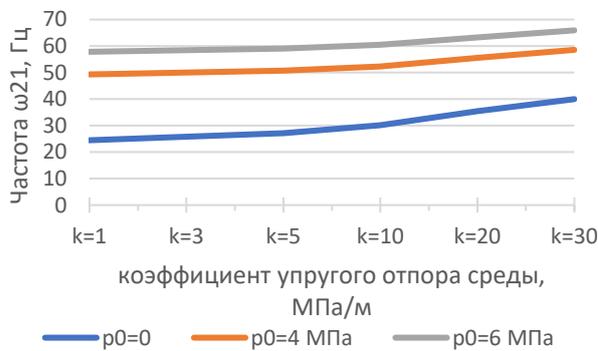


Рисунок 2.23 – Минимальные частоты ω_{21} газопровода при различных значениях k_s при $p_0=0, 4, 6$ МПа; $h/R=1/30$; $L/R=10$; $P=0,1$

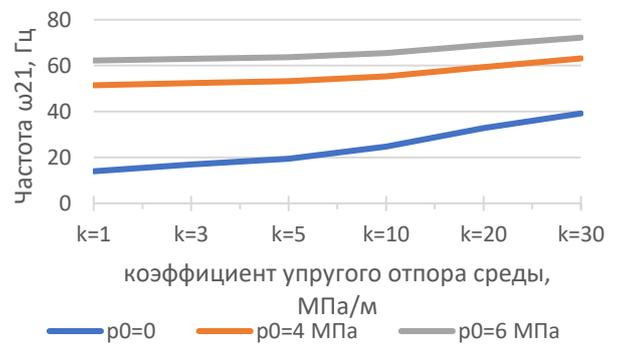


Рисунок 2.24 – Минимальные частоты ω_{21} газопровода при различных значениях k_s при $p_0=0, 4, 6$ МПа; $h/R=1/40$; $L/R=10$; $P=0,1$

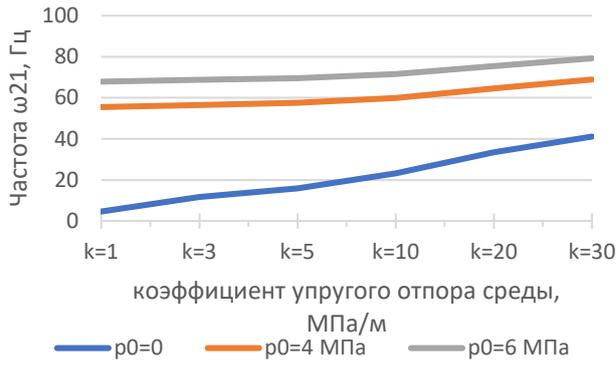


Рисунок 2.25 – Минимальные частоты ω_{21} газопровода при различных значениях k_s при $p_0=0, 4, 6$ МПа; $h/R=1/50$; $L/R=10$; $P=0,1$

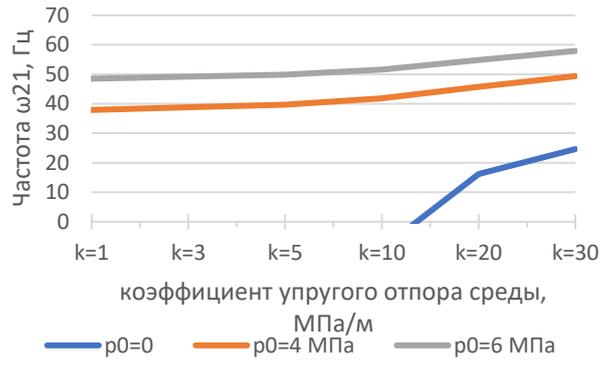


Рисунок 2.26 – Минимальные частоты ω_{21} газопровода при различных значениях k_s при $p_0=0, 4, 6$ МПа; $h/R=1/30$; $L/R=10$; $P=0,2$

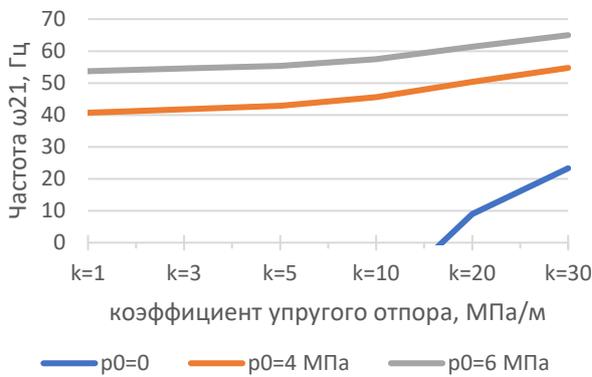


Рисунок 2.27 – Минимальные частоты ω_{21} газопровода при различных значениях k_s при $p_0=0, 4, 6$ МПа; $h/R=1/40$; $L/R=10$; $P=0,2$

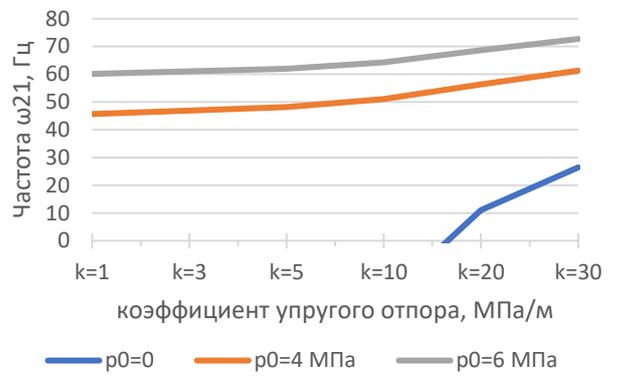


Рисунок 2.28 – Минимальные частоты ω_{21} газопровода при различных значениях k_s при $p_0=0, 4, 6$ МПа; $h/R=1/50$; $L/R=10$; $P=0,2$

Анализ значений, сведенных в таблицу 2.5, показал ряд закономерностей, полученных в результате изменения геометрических характеристик и характеристик упругого основания и параметра продольной сжимающей силы, а именно:

– при уменьшении соотношений h/r с $1/30$ до $1/50$ снижение частот ω_{21} при $k_s=10$ МПа/м, $p_0=0$ и $P=0,1$ составляет 29,7 %, с 30,14 до 23,23 Гц, а при $k_s=1$ МПа/м – 430 %, с 24,43 до 4,61 Гц. Из полученных значений следует, что более тонкостенная оболочка больше подвержена действию параметра продольной сжимающей силы, так как обладает меньшей жесткостью. С ростом значений k_s жесткость увеличивается и снижение частот уже становится не таким резким – 29,7 % против 430 %;

– внутреннее рабочее давление оказывает существенное влияние на рост значений частот ω_{21} , так, например, при $k_s=1$ МПа/м, $P=0,1$, $h/r=1/30$ и изменении внутреннего давления с 0 до 6 МПа рост значений составляет 136 %, а для $h/r=1/50$ – 1372 %, что говорит о существенно влиянии внутреннего давления на более тонкостенные оболочки;

– параметр продольной сжимающей силы также оказывает существенное влияние на значения частот. как и внутреннее давление, только в отличие от давления продольная сжимающая сила уменьшает собственные частоты оболочки. Сильнее всего этому влиянию подвержены низконапорные тонкостенные цилиндрические оболочки, где за счет низкой жесткости происходит резкое уменьшение частот и даже обращение их в ноль.

Далее произведем расчет частот по формуле (77) для случая наземного *нефтепровода* с учетом присоединенной массы и скорости потока протекающей жидкости. Сведем полученные значения в таблицу 2.6 и проиллюстрируем в виде графиков на рисунках 2.29, 2.36.

Таблица 2.6 – Зависимость частот свободных изгибных колебаний ω_{m1} наземного *нефтепровода* от параметра длины участка L/r , параметра продольной сжимающей силы P и коэффициента упругого отпора k_s

$h/R=1/30$ (труба 1420×23,7 мм); $p_0=0$ (безнапорная); $V=5$ м/с										
Коэф. упругого отпора k_s , МПа/м	ω_{m1}	$L=8r$			$L=10r$			$L=12r$		
		$P=0$	$P=0,05$	$P=0,1$	$P=0$	$P=0,05$	$P=0,1$	$P=0$	$P=0,05$	$P=0,1$
$k_s=1$	ω_{11}	77,49	75,53	73,52	49,92	48,66	47,37	34,83	33,96	33,06
	ω_{21}	33,05	23,64	5,04	26,47	21,95	16,22	23,66	21,31	18,67
	ω_{31}	63,52	57,75	51,33	62,72	60,40	57,97	62,44	61,32	60,18
$k_s=3$	ω_{11}	77,6	75,64	73,63	50,09	48,84	47,55	35,08	34,21	33,32
	ω_{21}	33,51	24,28	7,47	27,04	22,63	17,13	24,29	22,01	19,47
	ω_{31}	63,83	58,09	51,72	63,04	60,72	58,32	62,76	61,65	60,51
$k_s=5$	ω_{11}	77,71	75,76	73,75	50,26	49,01	47,73	35,33	34,47	33,58
	ω_{21}	33,96	24,89	9,28	27,59	23,29	17,99	24,91	22,69	20,23
	ω_{31}	64,14	58,43	52,10	63,36	61,05	58,66	63,07	61,97	60,84
$k_s=10$	ω_{11}	77,99	76,04	74,04	50,69	49,45	48,18	35,94	35,09	34,22
	ω_{21}	35,06	26,38	12,73	28,94	24,87	20,00	26,39	24,31	22,03
	ω_{31}	64,91	59,28	53,05	64,14	61,86	59,50	63,86	62,77	61,66

Окончание таблицы 2.6

Коэф. упругого отпора k_s , МПа/м	ω_{m1}	$L=8r$			$L=10r$			$L=12r$		
		$P=0$	$P=0,05$	$P=0,1$	$P=0$	$P=0,05$	$P=0,1$	$P=0$	$P=0,05$	$P=0,1$
$k_s=20$	ω_{11}	78,53	76,6	74,61	51,54	50,32	49,07	37,13	36,31	35,47
	ω_{21}	37,16	29,11	17,72	31,46	27,76	23,49	29,13	27,26	25,25
	ω_{31}	66,43	60,93	54,89	65,67	63,45	61,15	65,40	64,34	63,25
$k_s=30$	ω_{11}	79,07	77,15	75,18	52,37	51,17	49,94	38,28	37,48	36,67
	ω_{21}	39,15	31,61	21,59	33,79	30,38	26,53	31,64	29,92	28,10
	ω_{31}	67,91	62,55	56,68	67,17	65,00	62,76	66,91	65,87	64,81
$p_0=4 \text{ МПа}$										
$k_s=1$	ω_{11}	77,49	75,53	73,52	49,92	48,66	47,37	34,83	33,96	33,06
	ω_{21}	43,58	36,95	28,84	38,83	35,91	32,72	36,98	35,53	34,01
	ω_{31}	82,79	78,46	73,86	82,19	80,43	78,63	81,98	81,13	80,28
$k_s=3$	ω_{11}	77,60	75,64	73,63	50,09	48,84	47,55	35,08	34,21	33,32
	ω_{21}	43,92	37,36	29,36	39,22	36,33	33,18	37,39	35,95	34,45
	ω_{31}	83,03	78,71	74,13	82,44	80,68	78,88	82,22	81,38	80,52
$k_s=5$	ω_{11}	77,71	75,76	73,75	50,26	49,01	47,73	35,33	34,47	33,58
	ω_{21}	44,27	37,76	29,88	39,61	36,74	33,63	37,8	36,37	34,89
	ω_{31}	83,27	78,96	74,4	82,68	80,93	79,13	82,46	81,62	80,77
$k_s=10$	ω_{11}	77,99	76,04	74,04	50,69	49,45	48,18	35,94	35,09	34,22
	ω_{21}	45,12	38,76	31,12	40,56	37,76	34,75	38,79	37,4	35,96
	ω_{31}	83,87	79,59	75,07	83,28	81,54	79,76	83,07	82,23	81,39
$k_s=20$	ω_{11}	78,53	76,60	74,61	51,54	50,32	49,07	37,13	36,31	35,47
	ω_{21}	46,77	40,67	33,47	42,39	39,73	36,87	40,7	39,39	38,02
	ω_{31}	85,05	80,83	76,38	84,47	82,75	81,00	84,26	83,43	82,60
$k_s=30$	ω_{11}	79,07	77,15	75,18	52,37	51,17	49,94	38,28	37,48	36,67
	ω_{21}	48,37	42,50	35,67	44,15	41,60	38,88	42,53	41,27	39,97
	ω_{31}	86,21	82,05	77,67	85,64	83,95	82,22	85,43	84,62	83,80

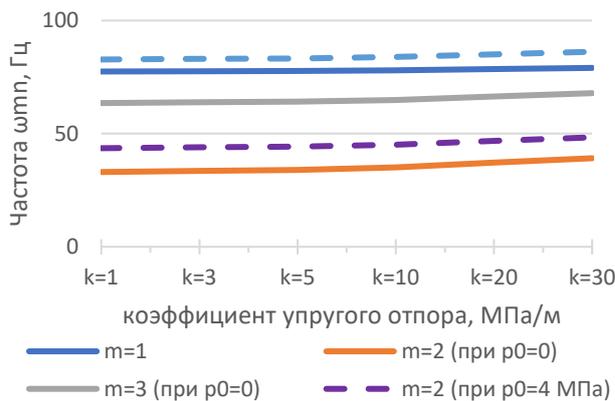


Рисунок 2.29 – Зависимость частот свободных колебаний нефтепровода от волновых чисел m и значений коэффициента упругого отпора среды k_s при $p_0=0$ и 4 МПа; $h/R=1/30$; $L/R=8$; $P=0$

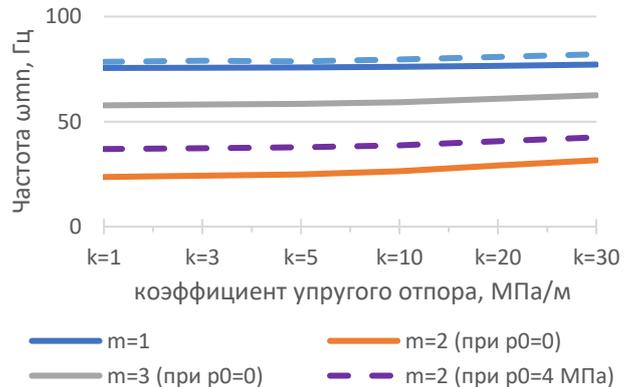


Рисунок 2.30 – Зависимость частот свободных колебаний нефтепровода от волновых чисел m и значений коэффициента упругого отпора среды k_s при $p_0=0$ и 4 МПа; $h/R=1/30$; $L/R=8$; $P=0,05$

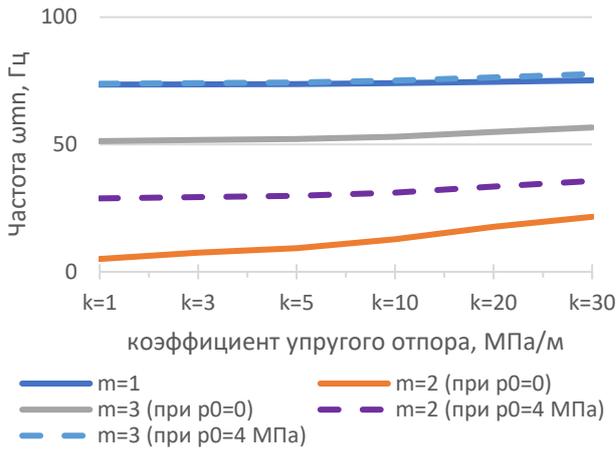


Рисунок 2.31 – Зависимость частот свободных колебаний нефтепровода от волновых чисел m и значений коэффициента упругого отпора среды k_s при $p_0=0$ и 4 МПа; $h/R=1/30$; $L/R=8$; $P=0,1$

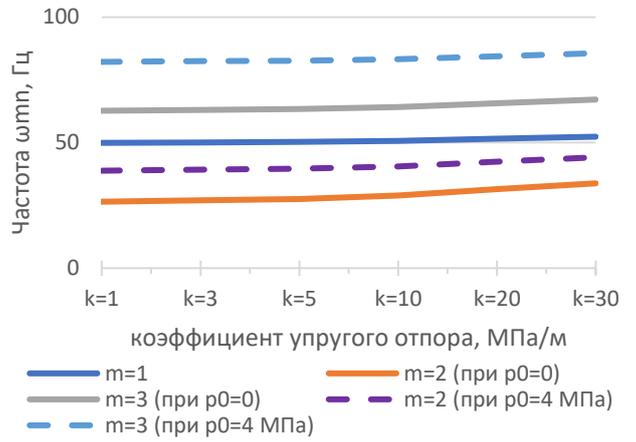


Рисунок 2.32 – Зависимость частот свободных колебаний нефтепровода от волновых чисел m и значений коэффициента упругого отпора среды k_s при $p_0=0$ и 4 МПа; $h/R=1/30$; $L/R=10$; $P=0$

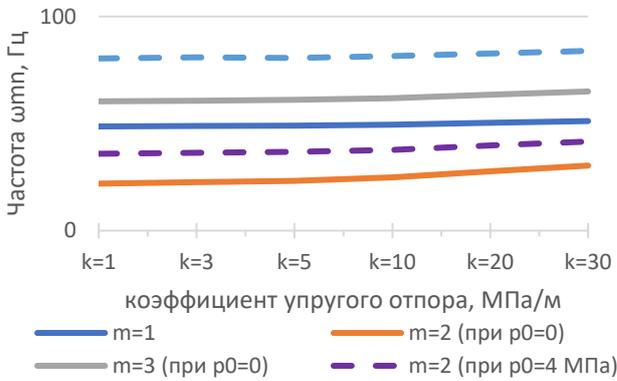


Рисунок 2.33 – Зависимость частот свободных колебаний нефтепровода от волновых чисел m и значений коэффициента упругого отпора среды k_s при $p_0=0$ и 4 МПа; $h/R=1/30$; $L/R=10$; $P=0,05$

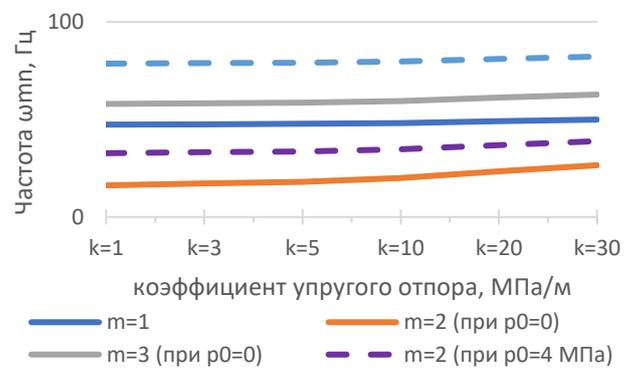


Рисунок 2.34 – Зависимость частот свободных колебаний нефтепровода от волновых чисел m и значений коэффициента упругого отпора среды k_s при $p_0=0$ и 4 МПа; $h/R=1/30$; $L/R=10$; $P=0,1$

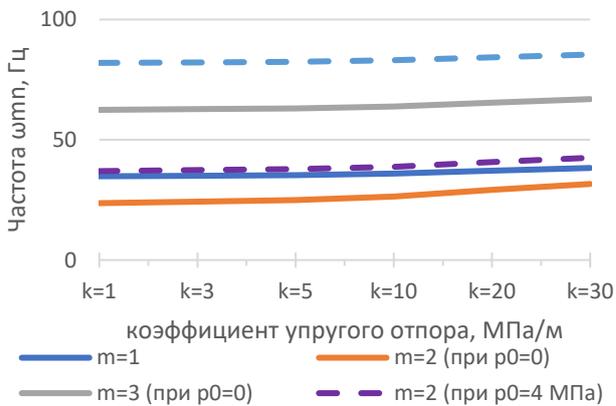


Рисунок 2.35 – Зависимость частот свободных колебаний нефтепровода от волновых чисел m и значений коэффициента упругого отпора среды k_s при $p_0=0$ и 4 МПа; $h/R=1/30$; $L/R=12$; $P=0$

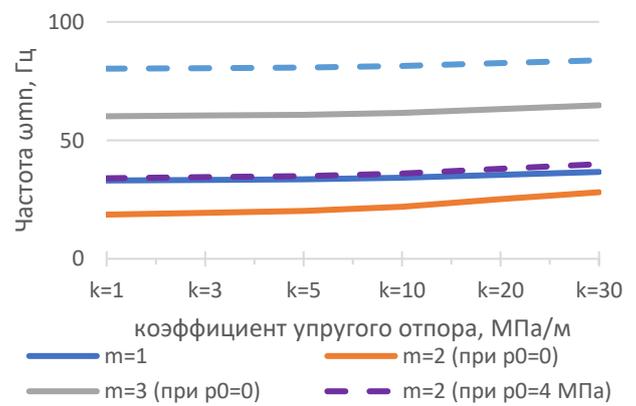


Рисунок 2.36 – Зависимость частот свободных колебаний нефтепровода от волновых чисел m и значений коэффициента упругого отпора среды k_s при $p_0=0$ и 4 МПа; $h/R=1/30$; $L/R=12$; $P=0,1$

Аналогично случаю оболочки с потоком газа произведен анализ частот, полученных для цилиндрической оболочки с учетом присоединенной массы и скорости потока протекающей жидкости.

Безнапорная оболочка ($p_0=0$)

Анализ полученных значений частот показывает высокую чувствительность оболочки к росту значений коэффициента упругого отпора грунта k_s , особенно с увеличением значений параметра продольной сжимающей силы P . Например, при $P=0$, $L/r=8$ увеличение коэффициента k_s от 1 до 30 МПа/м приводит к увеличению ω_{21} с 33,05 до 39,15, а при $P=0,1$ – с 5,04 до 21,59, что составляет 328 % против 18 % в первом случае. В случае отсутствия действия продольной сжимающей силы тенденция изменения частот аналогична оболочке с газом, однако при увеличении P до 0,1 оболочка с жидкостью более восприимчива к влиянию упругого основания. Ввиду большего веса оболочка с жидкостью вдавливается в основание сильнее, чем оболочка с газом, следовательно, и влияние упругого основания больше, 328 % против 255 % для газопровода.

Одним из существенных отличий нефтепровода от газопровода является то, что за счет влияния присоединенной массы жидкости определяемые частоты на 50 и более процентов ниже.

В результате анализа параметра длины участка тенденции изменения частот аналогичны оболочке с газом, частоты ω_{11} при $k_s=10$ МПа/м, $P=0$ снижаются с 77,99 до 35,94 на 117 %, ω_{21} – с 35,06 до 26,39 на 33 %, ω_{31} – с 64,91 до 63,86 на 1,6 %.

Оболочка с внутренним давлением $p_0=4$ МПа

Выпишем значения частот, полученных при тех же воздействиях, что и в безнапорном случае, но уже с учетом внутреннего давления $p_0=4$ МПа. Например, при $P=0$, $L/r=8$ увеличение коэффициента k_s от 1 до 30 МПа/м приводит к увеличению ω_{21} с 43,58 до 48,37 Гц, а при $P=0,1$ – с 28,84 до 35,67 Гц, что составляет 23,68 % против 11 % в первом случае.

Таблица 2.7 – Зависимость частот свободных изгибных колебаний ω_{m1} наземного нефтепровода от параметра тонкостенности h/r , внутреннего рабочего давления p_0 и коэффициента упругого отпора k_s

$L=10r, P=0,1, V=5$ м/с										
Коэф. упругого отпора k_s , МПа/м	ω_{m1}	$h/r=1/30$ (труба 1420×23,7 мм)			$h/r=1/40$ (труба 1420×17,7 мм)			$h/r=1/50$ (труба 1420×14,2 мм)		
		$p_0=0$ МПа	$p_0=4$ МПа	$p_0=6$ МПа	$p_0=0$ МПа	$p_0=4$ МПа	$p_0=6$ МПа	$p_0=0$ МПа	$p_0=4$ МПа	$p_0=6$ МПа
$k=1$	ω_{21}	16,22	32,72	38,39	8,46	31,31	37,88	2,34	31,40	38,43
$k=3$		17,13	33,18	38,79	10,29	31,85	38,33	6,51	31,99	38,90
$k=5$		17,99	33,63	39,18	11,83	32,39	38,77	8,91	32,56	39,38
$k=10$		20,00	34,75	40,14	15,02	33,68	39,86	13,10	33,95	40,53
$k=20$		23,49	36,87	41,99	19,92	36,13	41,95	18,88	36,57	42,75
$k=30$		26,53	38,88	43,76	23,83	38,43	43,95	23,26	39,01	44,86
$L=10r, P=0,2, V=5$ м/с										
Коэф. упругого отпора k_s , МПа/м	ω_{m1}	$h/r=1/30$ (труба 1420×23,7 мм)			$h/r=1/40$ (труба 1420×17,7 мм)			$h/r=1/50$ (труба 1420×14,2 мм)		
		$p_0=0$ МПа	$p_0=4$ МПа	$p_0=6$ МПа	$p_0=0$ МПа	$p_0=4$ МПа	$p_0=6$ МПа	$p_0=0$ МПа	$p_0=4$ МПа	$p_0=6$ МПа
$k=1$	ω_{21}	-13,21	25,16	32,20	–	24,75	32,67	–	25,84	34,03
$k=3$		-12,01	25,75	32,66	–	25,43	33,19	–	26,55	34,57
$k=5$		-10,67	26,34	33,13	–	26,10	33,70	–	27,23	35,10
$k=10$		-6,14	27,74	34,26	–	27,69	34,94	–	28,88	36,39
$k=20$		4,53	30,36	36,41	6,23	30,62	37,31	6,16	31,92	38,85
$k=30$		16,32	32,77	38,44	14,15	33,30	39,54	14,92	34,69	41,16

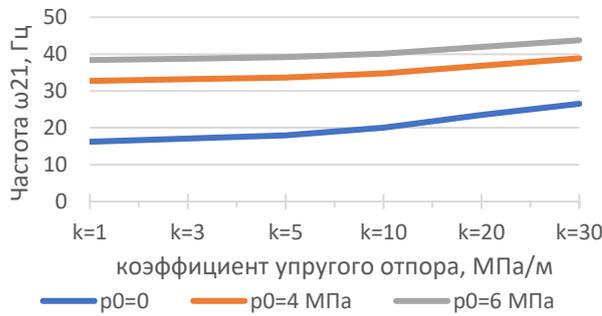


Рисунок 2.37 – Минимальные частоты ω_{21} нефтепровода при различных значениях k_s при $p_0=0, 4, 6$ МПа; $h/R=1/30$; $L/R=10$; $P=0,1$

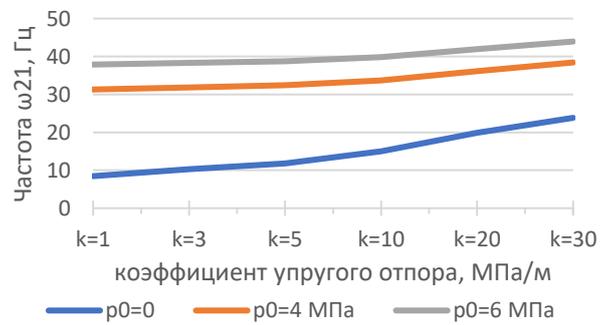


Рисунок 2.38 – Минимальные частоты ω_{21} нефтепровода при различных значениях k_s при $p_0=0, 4, 6$ МПа; $h/R=1/40$; $L/R=10$; $P=0,1$

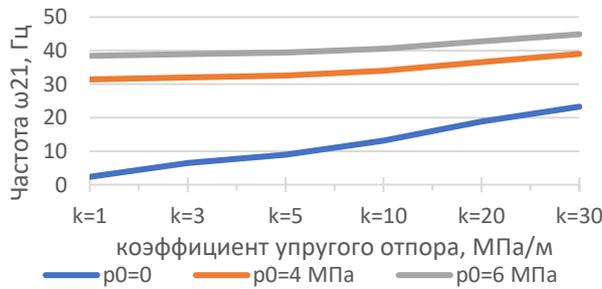


Рисунок 2.39 – Минимальные частоты ω_{21} нефтепровода при различных значениях k_s при $p_0=0, 4, 6$ МПа; $h/R=1/50$; $L/R=10$; $P=0,1$

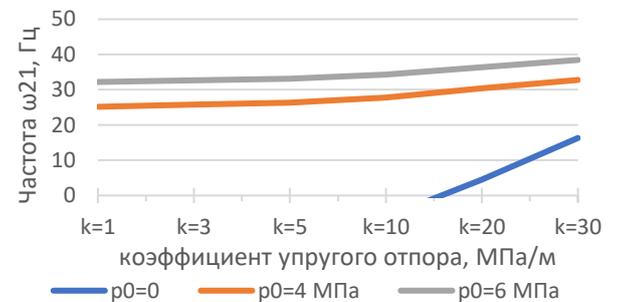


Рисунок 2.40 – Минимальные частоты ω_{21} нефтепровода при различных значениях k_s при $p_0=0, 4, 6$ МПа; $h/R=1/30$; $L/R=10$; $P=0,2$

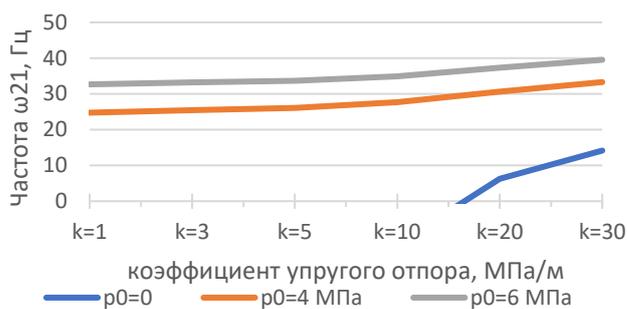


Рисунок 2.41 – Минимальные частоты ω_{21} нефтепровода при различных значениях k_s при $p_0=0, 4, 6$ МПа; $h/R=1/40$; $L/R=10$; $P=0,2$

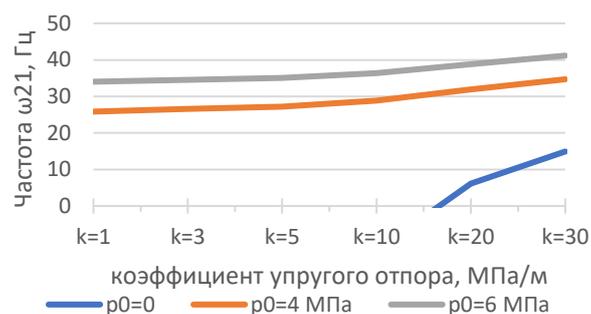


Рисунок 2.42 – Минимальные частоты ω_{21} нефтепровода при различных значениях k_s при $p_0=0, 4, 6$ МПа; $h/R=1/50$; $L/R=10$; $P=0,2$

Анализ значений, сведенных в таблицу 2.7, показал ряд закономерностей, полученных в результате изменения геометрических характеристик и характеристик упругого основания и параметра продольной сжимающей силы, а именно:

– при уменьшении соотношений h/r с $1/30$ до $1/50$ снижение частот ω_{21} при $k_s=10$ МПа/м, $p_0=0$ и $P=0,1$ составляет 52,67% с 20,00 до 13,10 Гц, а при $k_s=1$ МПа/м – 593% с 16,22 до 2,34 Гц. Из полученных значений следует, что более тонкостенная оболочка больше подвержена влиянию присоединенной массы, за счет меньшей жесткости падение частот более выражено чем для газопровода 593% против 430%;

– внутреннее рабочее давление оказывает существенное влияние на рост значений частот ω_{21} , так, например, при $k_s=1$ МПа/м, $P=0,1$, $h/r=1/30$ и изменении внутреннего давления с 0 до 6 МПа рост значений составляет 136%, а для $h/r=1/50$ – 1542%, что говорит о существенном влиянии внутреннего давления на более тонкостенные оболочки.

2.5 Определение частот и форм свободных колебаний цилиндрической оболочки при подземном размещении в упругой среде

В данном разделе рассмотрим влияние упругого отпора среды при подземном размещении оболочки, отличие от наземного размещения заключается в слагаемом k_{si}^* , которое для случая подземного размещения имеет вид

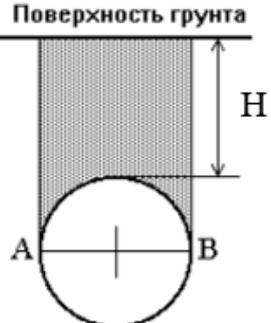
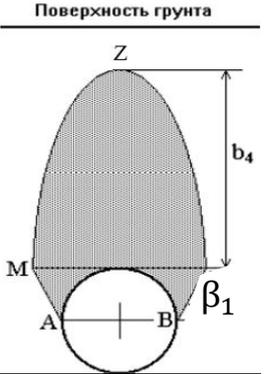
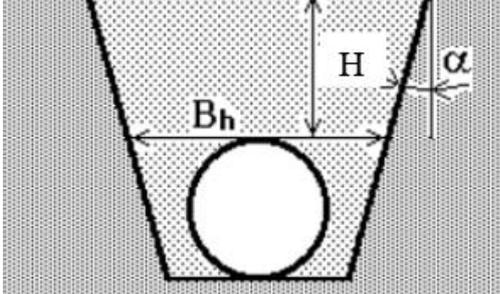
$$k_{s2}^* = k_s Gr.$$

К тому же в формуле (77) и (78) будем учитывать влияние внешнего давления, вызванного, например, обратной засыпкой грунта. В зависимости

от моделей внешнее давление может быть описано различными зависимостями и, например, как указано в разделе 1.6, представлять собой три варианта.

Рассмотрим более подробно каждый из них и определим фактическое значение давления грунта с учетом его физико-механических свойств и сведем полученные значения в таблицу 2.8 и графики на рисунках 2.43, 2.44.

Таблица 2.8 – Распределение внешнего давления грунта на оболочку при подземном размещении

№ модели	График распределения внешнего давления на оболочку по полосе контакта	Функция q_{si}
П1		$q_{s1} = \gamma_s \cdot (H + 0,1073 \cdot D),$ $\gamma_s - \text{удельный вес среды (грунта), кН/м}^3;$ $D - \text{внешний диаметр оболочки, мм};$ $H - \text{глубина заложения, м}$
П2		$q_{s2} = \gamma_s \cdot b_4,$ <p>Размер свода определяется выражением</p> $d = D \cdot [1 + \tan^2 \beta_1],$ $\beta_1 = 45^\circ - \frac{\varphi_1}{2};$ <p>d – основание свода естественного равновесия;</p> $b_4 = \frac{d}{2 \cdot \tan \varphi_1}$
П3		$q_{s3} = \gamma_s \cdot (k_{тр} H + 0,1073 \cdot D),$ $k_{тр} = \frac{B_c}{H} \cdot \frac{1 - 2 \cdot \frac{C}{\gamma_s} \cdot B_c}{2 \cdot \xi \cdot f} \cdot \eta_2;$ $\eta_2 = \left[1 - \exp \left(-\xi \cdot f \cdot \frac{2 \cdot H}{B_c} \right) \right];$ $B_c = B_h + H \cdot \tan(\alpha)$

Представленные модели П1 и П3 имеют отношение к открытой траншейной прокладке, а модель П2 – для случая бестраншейной прокладки, где в зависимости от грунтовой среды формируется свод обрушения d . Данная формула правомерна в случае, когда свод обрушения меньше глубины заложения оболочки.

Произведем тестовые расчеты и определим величину внешнего давления на оболочку (трубу) в зависимости от внешнего диаметра и глубины заложения, удельный вес грунта принимаем $\gamma_s = 14,7 \text{ кН/м}^3$, $\varphi_1 = 21^\circ$, $\alpha_1 = 66^\circ$, $c = 11 \text{ кПа}$.

Полученные значения сведем в таблицу 2.9.

Таблица 2.9 – Определение внешнего давления грунта от обратной засыпки

Глубина H , м	q_{s1} , кПа			q_{s2} , кПа			q_{s3} , кПа		
	1020	1220	1420	1020	1220	1420	1020	1220	1420
1	16	17	17	–	–	–	12	12	13
2	31	31	32	–	–	–	24	25	25
3	46	46	46	29	34	40	37	37	38
4	60	61	61	29	34	40	50	50	51
5	75	75	76	29	34	40	63	63	64

Анализ значений, полученных для трех моделей внешнего давления грунтовой среды, показал хорошую численную сопоставимость. Как следует из значений таблицы 2.9 при глубине заложения до 2 метров в таблице отсутствуют значения величины давления, это объясняется тем, что согласно выполненным тестовым расчетам, свод обрушения для заданных характеристик среды составил 2,1 метра. Данное решение применимо для случая бестраншейной прокладки трубопроводов, когда дюкер трубопровода может иметь глубину залегания более 5 метров.

Для дальнейших расчетов, как для наиболее невыгодного случая, примем модель q_{s1} с наибольшими значениями внешнего давления грунта. Как следует из расчетов, величина давления в зависимости от изменения диаметра оболочки от 1020 до 1420 мм изменяется несущественно, не более 5 %.

Определим спектр частот свободных колебаний цилиндрической оболочки при подземном размещении при различных значениях волновых чисел m и n и представим полученные значения в таблице 2.10 и в виде графиков на рис. 2.43, 2.52.

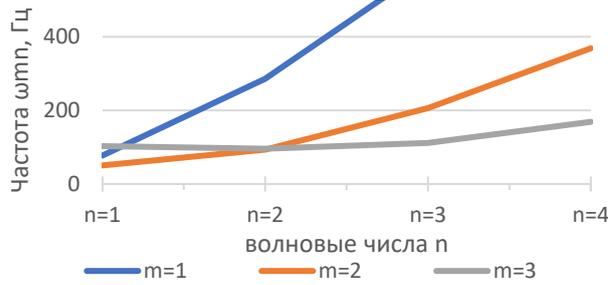


Рисунок 2.43 – Зависимость частот свободных колебаний подземной цилиндрической оболочки с газом от волновых чисел m и n при $p_0=2$ МПа; $h/R=1/30$; $L/R=12$; $k_s = 10$ МПа/м; $P=0,1$

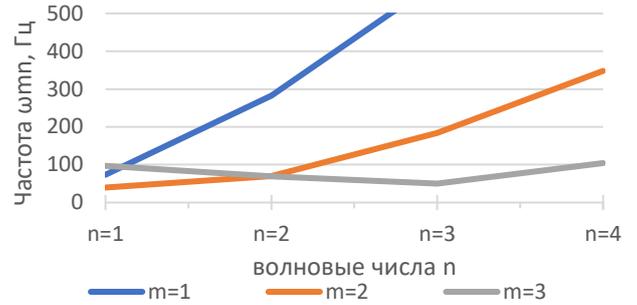


Рисунок 2.44 – Зависимость частот свободных колебаний подземной цилиндрической оболочки с жидкостью от волновых чисел m и n при $p_0=2$ МПа; $h/R=1/30$; $L/R=12$; $k_s = 10$ МПа/м; $P=0,1$

Анализ построенных диаграмм показывает, что минимальные частоты, как и в случае с наземным размещением, реализуются при $m=2$ и $n=1$.

Изучим влияние внешних воздействий и геометрических характеристик на частоты свободных колебаний оболочки при подземном размещении, для динамических расчетов гармоник $\omega_{11}, \omega_{21}, \omega_{31}$. Полученные по формуле (78) значения частот сведем в таблицы, 2.11 и проиллюстрируем в виде графиков на рисунках 2.45–2.58.

Таблица 2.10 – Зависимость частот свободных изгибных колебаний ω_{m1} подземного газопроводов от параметра длины участка L/r , параметра продольной сжимающей силы P и коэффициента упругого отпора k_s

$h/R=1/30$ (труба 1420×23,7мм); $p_0=0$ (безнапорная)										
Коэф. упругого отпора k_s , МПа/м	ω_{m1}	$L=8r$			$L=10r$			$L=12r$		
		$P=0$	$P=0,05$	$P=0,1$	$P=0$	$P=0,05$	$P=0,1$	$P=0$	$P=0,05$	$P=0,1$
$k_s=1$	ω_{11}	119,15	116,14	113,06	77,5	75,56	73,57	54,53	53,18	51,79
	ω_{21}	50,52	36,65	11,62	40,8	34,18	25,92	36,68	33,25	29,43
	ω_{31}	89,28	81,26	72,36	88,19	84,95	81,58	87,79	86,24	84,66
$k_s=3$	ω_{11}	119,68	116,69	113,62	78,34	76,42	74,45	55,72	54,4	53,05
	ω_{21}	52,61	39,49	18,74	43,38	37,22	29,81	39,53	36,37	32,91
	ω_{31}	90,64	82,75	74,03	89,56	86,38	83,07	89,18	87,65	86,09
$k_s=5$	ω_{11}	120,2	117,23	114,17	79,16	77,26	75,31	56,89	55,6	54,27
	ω_{21}	54,63	42,14	23,82	45,81	40,02	33,25	42,19	39,24	36,06
	ω_{31}	91,98	84,22	75,67	90,92	87,78	84,53	90,54	89,03	87,50
$k_s=10$	ω_{11}	121,51	118,57	115,55	81,18	79,33	77,44	59,71	58,48	57,23
	ω_{21}	59,37	48,13	33,28	51,38	46,3	40,59	48,19	45,64	42,93
	ω_{31}	95,25	87,78	79,6	94,23	91,2	88,08	93,86	92,41	90,93

Окончание таблицы 2.10

Коэф. упругого отпора k_s , МПа/м	ω_{m1}	$L=8r$			$L=10r$			$L=12$		
		r								
		$P=0$	$P=0,05$	$P=0,1$	$P=0$	$P=0,05$	$P=0,1$	$P=0$	$P=0,05$	$P=0,1$
$k_s=20$	ω_{11}	124,08	121,2	118,25	85,09	83,32	81,52	64,99	63,86	62,71
	ω_{21}	67,87	58,29	46,78	61,03	56,81	52,26	58,38	56,29	54,12
	ω_{31}	101,47	94,49	86,95	100,51	97,68	94,77	100,17	98,81	97,43
$k_s=30$	ω_{11}	126,61	123,78	120,9	88,82	87,13	85,41	69,87	68,82	67,76
	ω_{21}	75,41	66,92	57,18	69,34	65,66	61,77	67,03	65,22	63,36
	ω_{31}	107,33	100,75	93,72	106,43	103,76	101,02	106,11	104,82	103,53
$p_0=4$ МПа										
$k_s=1$	ω_{11}	119,15	116,14	113,06	77,5	75,56	73,57	54,53	53,18	51,79
	ω_{21}	66,17	56,31	44,29	59,13	54,77	50,04	56,39	54,23	51,97
	ω_{31}	116,12	110,08	103,68	115,3	112,84	110,33	115,01	113,82	112,63
$k_s=3$	ω_{11}	119,68	116,69	113,62	78,34	76,42	74,45	55,72	54,40	53,05
	ω_{21}	67,79	58,19	46,67	60,94	56,72	52,16	58,29	56,19	54,02
	ω_{31}	117,17	111,18	104,85	116,35	113,92	111,43	116,07	114,89	113,71
$k_s=5$	ω_{11}	120,2	117,23	114,17	79,16	77,26	75,31	56,89	55,60	54,27
	ω_{21}	69,36	60,02	48,93	62,69	58,6	54,20	60,12	58,09	55,99
	ω_{31}	118,21	112,28	106,01	117,4	114,99	112,53	117,12	115,96	114,78
$k_s=10$	ω_{11}	121,51	118,57	115,55	81,18	79,33	77,44	59,71	58,48	57,23
	ω_{21}	73,16	64,37	54,17	66,87	63,05	58,99	64,48	62,59	60,64
	ω_{31}	120,77	114,97	108,86	119,98	117,62	115,21	119,70	118,57	117,42
$k_s=20$	ω_{11}	124,08	121,2	118,25	85,09	83,32	81,52	64,99	63,86	62,71
	ω_{21}	80,2	72,28	63,37	74,54	71,13	67,55	72,41	70,73	69,02
	ω_{31}	125,73	120,17	114,34	124,98	122,71	120,41	124,71	123,62	122,52
$k_s=30$	ω_{11}	126,61	123,78	120,9	88,82	87,13	85,41	69,87	68,82	67,76
	ω_{21}	86,68	79,4	71,39	81,49	78,38	75,15	79,55	78,03	76,48
	ω_{31}	130,51	125,16	119,57	129,78	127,6	125,39	129,53	128,48	127,42

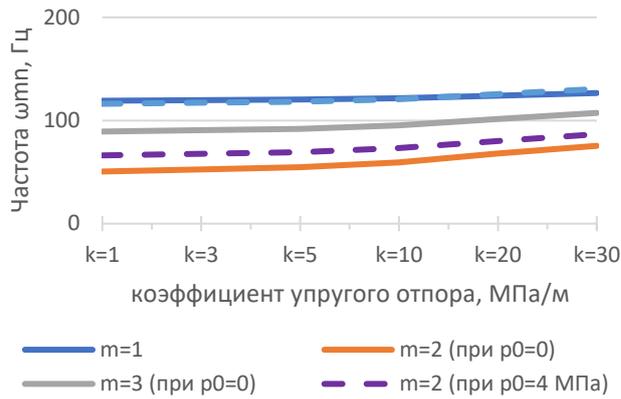


Рисунок 2.45 – Частоты свободных колебаний газопровода при окружных волновых числах m и значениях коэффициента упругого отпора среды k_s при $p_0=4$ МПа; $h/r=1/30$; $L/r=8$; $P=0$

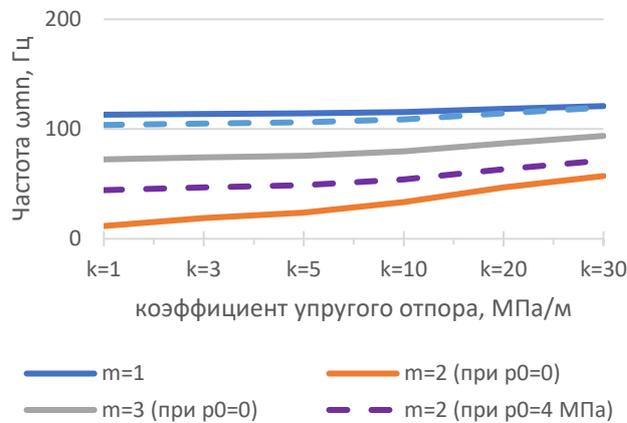


Рисунок 2.47 – Частоты свободных колебаний газопровода при окружных волновых числах m и значениях коэффициента упругого отпора среды k_s при $p_0=4$ МПа; $h/r=1/30$; $L/r=8$; $P=0,1$

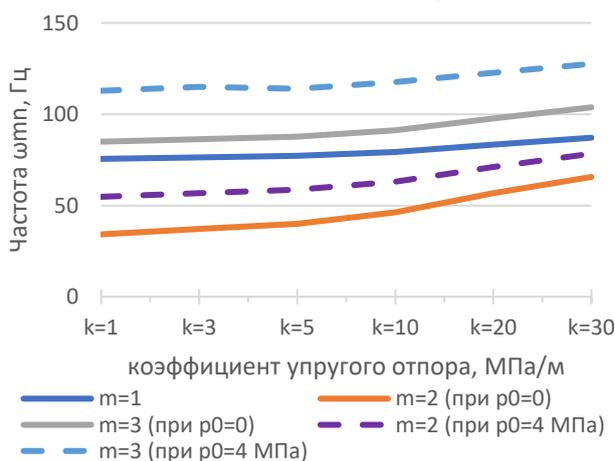


Рисунок 2.49 – Частоты свободных колебаний газопровода при окружных волновых числах m и значениях коэффициента упругого отпора среды k_s при $p_0=4$ МПа; $h/r=1/30$; $L/r=10$; $P=0,05$

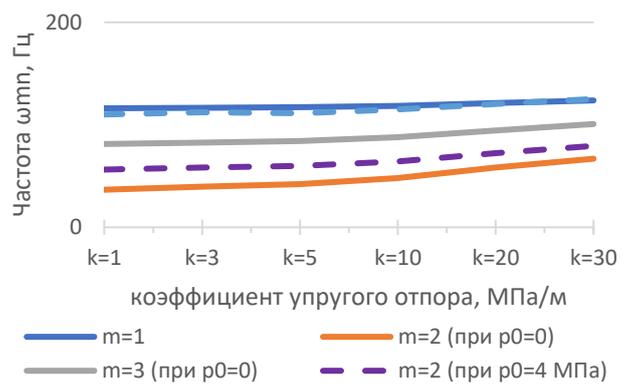


Рисунок 2.46 – Частоты свободных колебаний газопровода при окружных волновых числах m и значениях коэффициента упругого отпора среды k_s при $p_0=4$ МПа; $h/r=1/30$; $L/r=8$; $P=0,05$

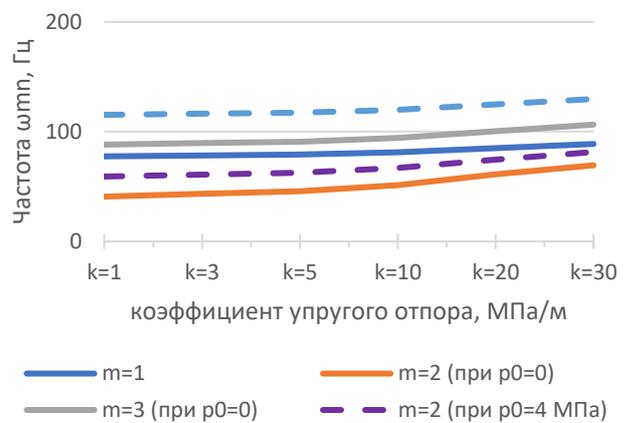


Рисунок 2.48 – Частоты свободных колебаний газопровода при окружных волновых числах m и значениях коэффициента упругого отпора среды k_s при $p_0=4$ МПа; $h/r=1/30$; $L/r=10$; $P=0$

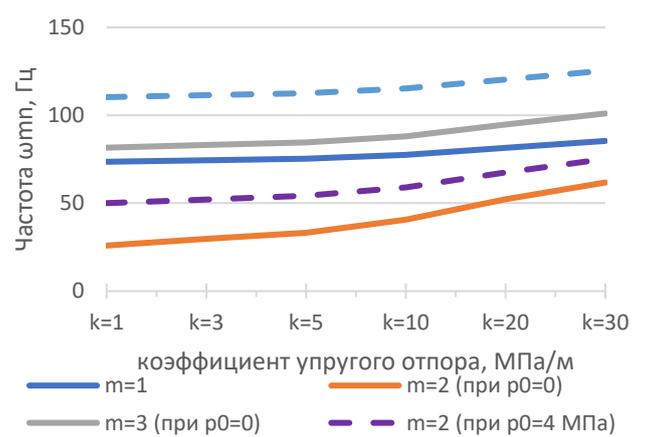


Рисунок 2.50 – Частоты свободных колебаний газопровода при окружных волновых числах m и значениях коэффициента упругого отпора среды k_s при $p_0=4$ МПа; $h/R=1/30$; $L/r=10$; $P=0,1$

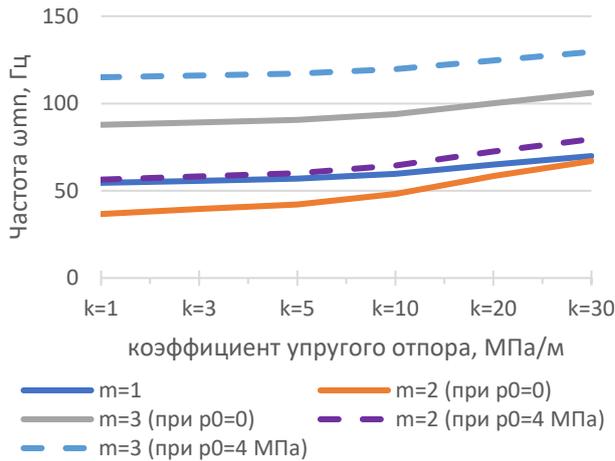


Рисунок 2.51 – Частоты свободных колебаний газопровода при окружных волновых числах m и значений коэффициента упругого отпора среды k_s при $p_0=4$ МПа; $h/r=1/30$; $L/r=12$; $P=0$

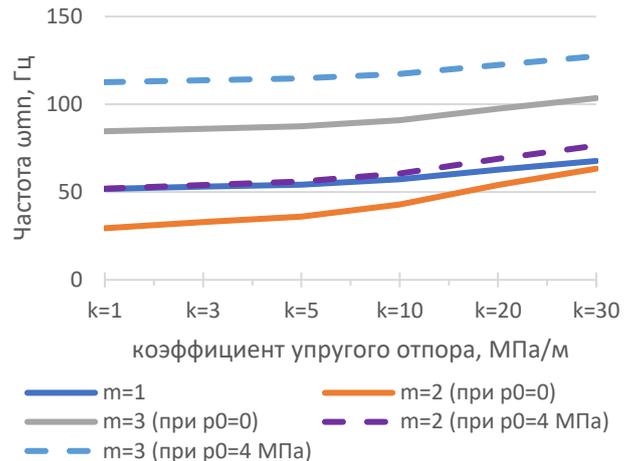


Рисунок 2.52 – Частоты свободных колебаний газопровода при окружных волновых числах m и значений коэффициента упругого отпора среды k_s при $p_0=4$ МПа; $h/r=1/30$; $L/r=12$; $P=0,05$

Таблица 2.11 – Зависимость частот свободных изгибных колебаний ω_{m1} подземного газопроводов от параметра тонкостенности h/r , внутреннего рабочего давления p_0 и коэффициента упругого отпора k_s

$L=10r, P=0,1$										
Коэф. упругого отпора k_s , МПа/м	ω_{m1}	$h/r=1/30$ (труба 1420×23,7 мм)			$h/r=1/40$ (труба 1420×17,7 мм)			$h/r=1/50$ (труба 1420×14,2 мм)		
		$p_0=0$ МПа	$p_0=4$ МПа	$p_0=6$ МПа	$p_0=0$ МПа	$p_0=4$ МПа	$p_0=6$ МПа	$p_0=0$ МПа	$p_0=4$ МПа	$p_0=6$ МПа
$k=1$	ω_{21}	25,92	50,04	58,48	17,17	52,42	63,04	12,03	56,59	68,78
$k=3$		29,81	52,16	60,30	24,19	55,12	65,30	22,50	59,70	71,36
$k=5$		33,25	54,20	62,08	29,59	57,69	67,49	29,47	62,65	73,85
$k=10$		40,59	58,99	66,30	40,01	63,67	72,67	42,10	69,50	79,74
$k=20$		52,26	67,55	74,02	55,25	74,20	82,05	59,85	81,48	90,38
$k=30$		61,77	75,15	81,01	67,11	83,41	90,46	73,42	91,91	99,88
$L=10r, P=0,2$										
$k=1$	ω_{21}	–	38,87	49,27	–	41,89	54,60	–	47,00	61,14
$k=3$		–	41,57	51,42	–	45,22	57,20	–	50,71	64,03
$k=5$		–	44,10	53,49	–	48,33	59,68	–	54,16	66,80
$k=10$		25,59	49,87	58,33	24,66	55,33	65,48	27,93	61,95	73,25
$k=20$		41,70	59,75	66,98	45,38	67,17	75,76	50,88	75,14	84,71
$k=30$		53,13	68,22	74,63	59,25	77,22	84,79	66,32	86,34	94,78

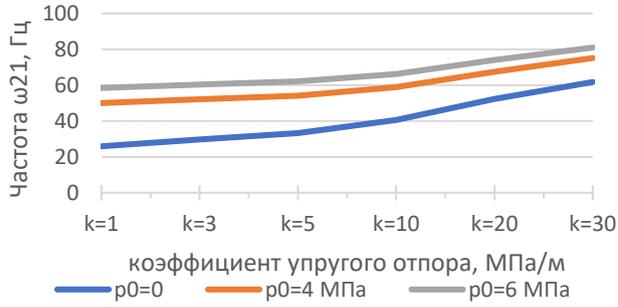


Рисунок 2.53 – Минимальные частоты ω_{21} газопровода при различных значениях k_s при $p_0=0, 4, 6$ МПа; $h/r=1/30$; $L/r=10$; $P=0,1$

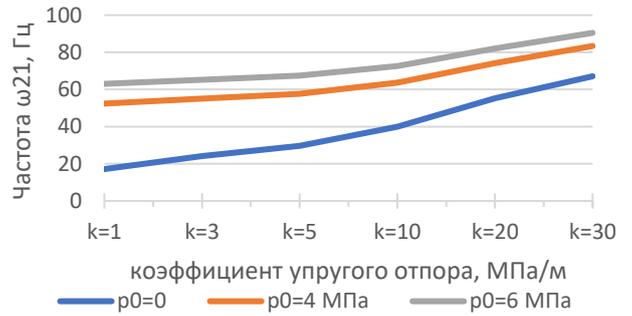


Рисунок 2.54 – Минимальные частоты ω_{21} газопровода при различных значениях k_s при $p_0=0, 4, 6$ МПа; $h/r=1/40$; $L/r=10$; $P=0,1$

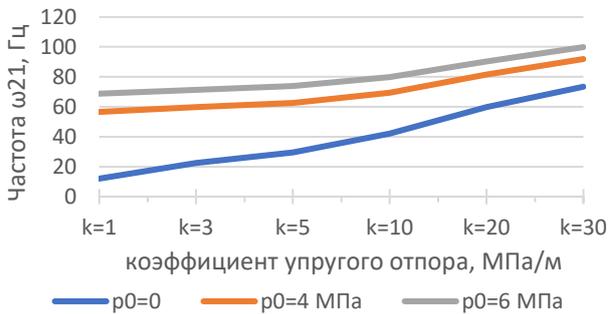


Рисунок 2.55 – Минимальные частоты ω_{21} газопровода при различных значениях k_s при $p_0=0, 4, 6$ МПа; $h/r=1/50$; $L/r=10$; $P=0,1$

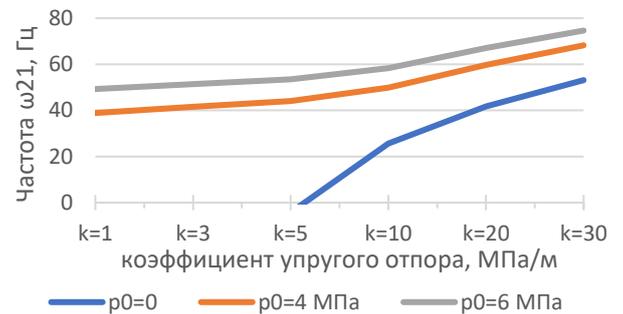


Рисунок 2.56 – Минимальные частоты ω_{21} газопровода при различных значениях k_s при $p_0=0, 4, 6$ МПа; $h/r=1/30$; $L/r=10$; $P=0,2$

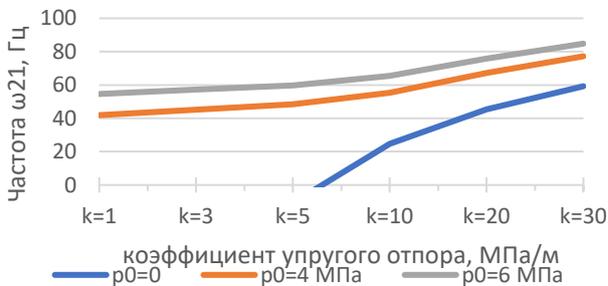


Рисунок 2.57 – Минимальные частоты ω_{21} газопровода при различных значениях k_s при $p_0=0, 4, 6$ МПа; $h/r=1/40$; $L/r=10$; $P=0,2$

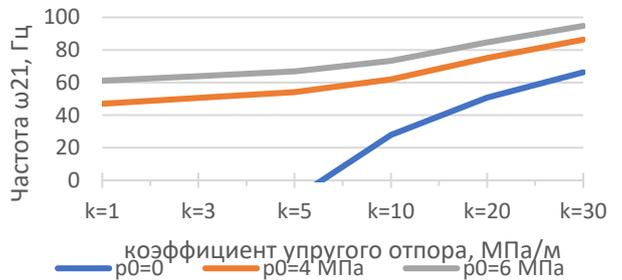


Рисунок 2.58 – Минимальные частоты ω_{21} газопровода при различных значениях k_s при $p_0=0, 4, 6$ МПа; $h/r=1/50$; $L/r=10$; $P=0,2$

Аналогично с наземной оболочкой определим значения частот для случая подземной цилиндрической оболочки по формуле (77). Полученные значения сведем в таблицу 2.12 и проиллюстрируем в виде графиков на рисунках 2.59–2.72.

Таблица 2.12 – Зависимость частот свободных изгибных колебаний ω_{m1} подземного нефтепровода от параметра длины участка L/r , параметра продольной сжимающей силы P и коэффициента упругого отпора k_s

$h/R=1/30$ (труба 1420×23,7мм); $p_0=0$ (безнапорная)										
Коэф. упругого отпора k_s , МПа/м	ω_{m1}	$L=8r$			$L=10r$			$L=12r$		
		$P=0$	$P=0,05$	$P=0,1$	$P=0$	$P=0,05$	$P=0,1$	$P=0$	$P=0,05$	$P=0,1$
$k_s=1$	ω_{11}	77,61	75,65	73,64	50,10	48,85	47,56	35,10	34,23	33,34
	ω_{21}	33,54	24,32	7,61	27,08	22,68	17,19	24,34	22,06	19,52
	ω_{31}	63,85	58,11	51,74	63,06	60,75	58,34	62,78	61,67	60,54
$k_s=3$	ω_{11}	77,95	76,01	74,01	50,64	49,40	48,13	35,87	35,02	34,15
	ω_{21}	34,93	26,21	12,39	28,79	24,70	19,78	26,23	24,13	21,83
	ω_{31}	64,82	59,18	52,94	64,05	61,77	59,40	63,77	62,68	61,56
$k_s=5$	ω_{11}	78,30	76,36	74,37	51,17	49,95	48,69	36,62	35,79	34,94
	ω_{21}	36,27	27,97	15,77	30,40	26,56	22,06	27,99	26,04	23,92
	ω_{31}	65,78	60,23	54,11	65,02	62,78	60,45	64,74	63,67	62,57
$k_s=10$	ω_{11}	79,15	77,23	75,26	52,48	51,29	50,06	38,44	37,65	36,84
	ω_{21}	39,43	31,95	22,08	34,10	30,73	26,94	31,98	30,28	28,48
	ω_{31}	68,12	62,77	56,93	67,38	65,22	62,98	67,12	66,08	65,03
$k_s=20$	ω_{11}	80,83	78,95	77,03	55,01	53,86	52,70	41,84	41,11	40,37
	ω_{21}	45,07	38,71	31,06	40,51	37,71	34,69	38,74	37,35	35,91
	ω_{31}	72,57	67,57	62,18	71,88	69,86	67,77	71,63	70,66	69,67
$k_s=30$	ω_{11}	82,47	80,63	78,75	57,42	56,33	55,21	44,98	44,31	43,62
	ω_{21}	50,09	44,44	37,97	46,03	43,59	41,00	44,48	43,28	42,04
	ω_{31}	76,76	72,06	67,03	76,11	74,20	72,24	75,88	74,96	74,03
$p_0=4$ МПа										
$k_s=1$	ω_{11}	77,61	75,65	73,64	50,10	48,85	47,56	35,10	34,23	33,34
	ω_{21}	43,95	37,39	29,40	39,25	36,36	33,21	37,42	35,98	34,48
	ω_{31}	83,05	78,73	74,15	82,45	80,70	78,90	82,24	81,39	80,54
$k_s=3$	ω_{11}	77,95	76,01	74,01	50,64	49,40	48,13	35,87	35,02	34,15
	ω_{21}	45,02	38,64	30,98	40,45	37,65	34,62	38,68	37,29	35,84
	ω_{31}	83,80	79,52	74,99	83,21	81,47	79,69	83,00	82,16	81,31
$k_s=5$	ω_{11}	78,30	76,36	74,37	51,17	49,95	48,69	36,62	35,79	34,94
	ω_{21}	46,07	39,86	32,49	41,61	38,90	35,97	39,89	38,55	37,15
	ω_{31}	84,55	80,30	75,82	83,96	82,23	80,47	83,75	82,92	82,08
$k_s=10$	ω_{11}	79,15	77,23	75,26	52,48	51,29	50,06	38,44	37,65	36,84
	ω_{21}	48,59	42,75	35,97	44,39	41,85	39,15	42,78	41,53	40,24
	ω_{31}	86,38	82,23	77,86	85,80	84,12	82,39	85,60	84,79	83,97
$k_s=20$	ω_{11}	80,83	78,95	77,03	55,01	53,86	52,70	41,84	41,11	40,37
	ω_{21}	53,27	48,01	42,08	49,48	47,22	44,84	48,05	46,94	45,80
	ω_{31}	89,93	85,95	81,78	89,38	87,76	86,11	89,18	88,40	87,62
$k_s=30$	ω_{11}	82,47	80,63	78,75	57,42	56,33	55,21	44,98	44,31	43,62
	ω_{21}	57,58	52,74	47,42	54,09	52,03	49,88	52,79	51,78	50,75
	ω_{31}	93,34	89,51	85,52	92,81	91,25	89,67	92,62	91,87	91,12

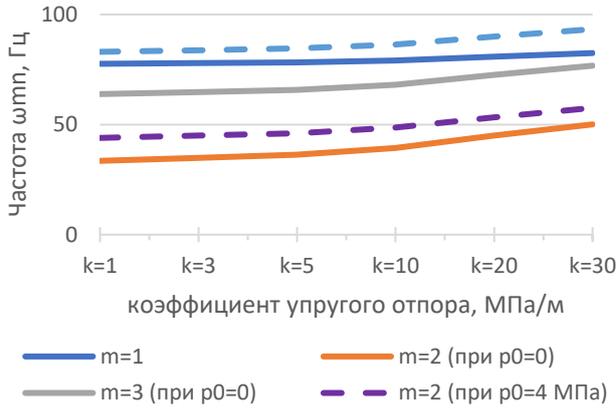


Рисунок 2.59 – Зависимость частот свободных колебаний нефтепровода от волновых чисел m и значений коэффициента упругого отпора среды k_s при $\rho_0=0$ и 4 МПа; $h/r=1/30$; $L/r=8$; $P=0$

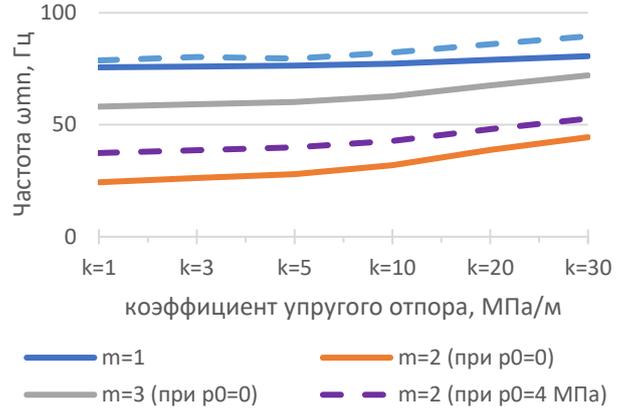


Рисунок 2.60 – Зависимость частот свободных колебаний нефтепровода от волновых чисел m и значений коэффициента упругого отпора среды k_s при $\rho_0=0$ и 4 МПа; $h/r=1/30$; $L/r=8$; $P=0,05$

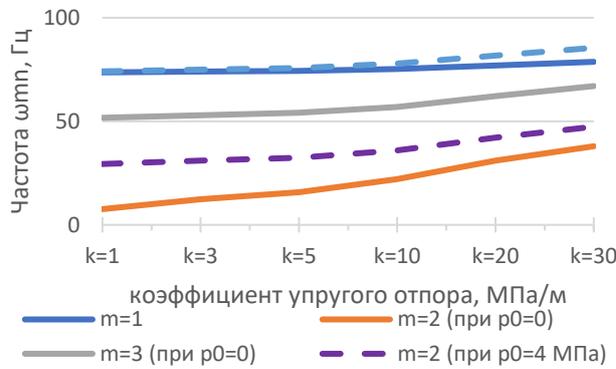


Рисунок 2.61 – Зависимость частот свободных колебаний нефтепровода от волновых чисел m и значений коэффициента упругого отпора среды k_s при $\rho_0=0$ и 4 МПа; $h/r=1/30$; $L/r=8$; $P=0,1$

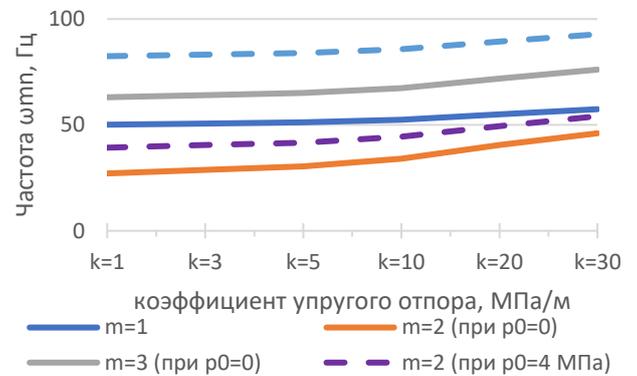


Рисунок 2.62 – Зависимость частот свободных колебаний нефтепровода от волновых чисел m и значений коэффициента упругого отпора среды k_s при $\rho_0=0$ и 4 МПа; $h/r=1/30$; $L/r=10$; $P=0$

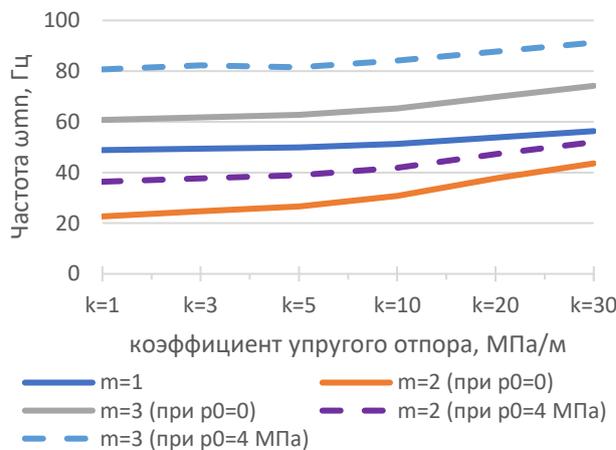


Рисунок 2.63 – Зависимость частот свободных колебаний нефтепровода от волновых чисел m и значений коэффициента упругого отпора среды k_s при $\rho_0=0$ и 4 МПа; $h/r=1/30$; $L/r=10$; $P=0,05$

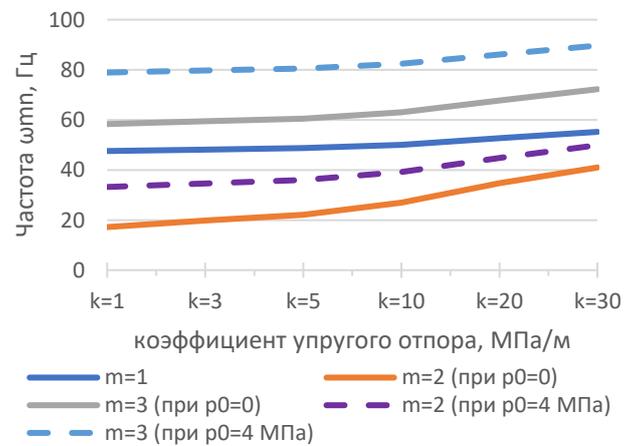


Рисунок 2.64 – Зависимость частот свободных колебаний нефтепровода от волновых чисел m и значений коэффициента упругого отпора среды k_s при $\rho_0=0$ и 4 МПа; $h/r=1/30$; $L/r=10$; $P=0,1$

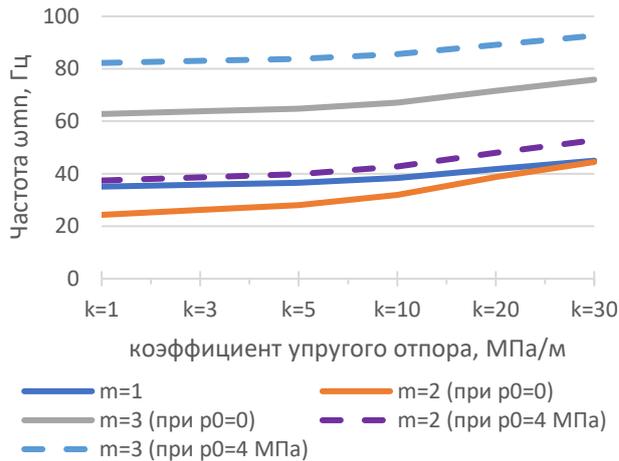


Рисунок 2.65 – Зависимость частот свободных колебаний нефтепровода от волновых чисел m и значений коэффициента упругого отпора среды k_s при $p_0=0$ и 4 МПа; $h/r=1/30$; $L/r=12$; $P=0$

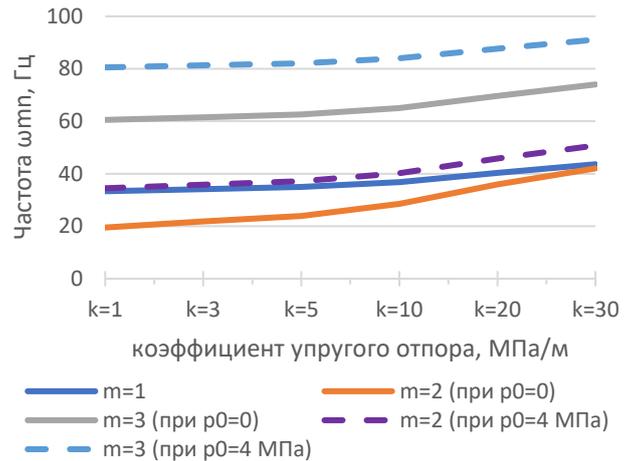


Рисунок 2.66 – Зависимость частот свободных колебаний нефтепровода от волновых чисел m и значений коэффициента упругого отпора среды k_s при $p_0=0$ и 4 МПа; $h/R=1/30$; $L/r=12$; $P=0,1$

Таблица 2.13 – Зависимость частот свободных изгибных колебаний ω_{m1} подземного нефтепровода от параметра тонкостенности h/r , внутреннего рабочего давления p_0 и коэффициента упругого отпора k_s

$L=10r, P=0,1$										
Коэф. упругого отпора k_s (МПа/м)	ω_{m1}	$h/r=1/30$ (труба 1420x23,7мм)			$h/r=1/40$ (труба 1420x17,7мм)			$h/r=1/50$ (труба 1420x14,2 мм)		
		$p_0=0$ МПа	$p_0=4$ МПа	$p_0=6$ МПа	$p_0=0$ МПа	$p_0=4$ МПа	$p_0=6$ МПа	$p_0=0$ МПа	$p_0=4$ МПа	$p_0=6$ МПа
$k=1$	ω_{21}	17,19	33,21	38,82	10,40	31,89	38,36	6,71	32,03	38,94
$k=3$	ω_{21}	19,78	34,62	40,03	14,69	33,54	39,74	12,69	33,79	40,40
$k=5$		22,06	35,97	41,20	17,98	35,10	41,07	16,65	35,47	41,81
$k=10$		26,94	39,15	44,01	24,34	38,74	44,22	23,82	39,34	45,15
$k=20$		34,69	44,84	49,14	33,62	45,15	49,93	33,88	46,13	51,17
$k=30$		41,00	49,88	53,78	40,84	50,76	55,06	41,57	52,04	56,56
$L=10r, P=0,2$										
$k=1$	ω_{21}	–	25,80	32,70	–	25,48	33,22	–	26,60	34,61
$k=3$		–	27,59	34,13	–	27,51	34,80	–	28,69	36,25
$k=5$		7,00	29,27	35,50	-6,67	29,40	36,32	-6,43	30,65	37,81
$k=10$		16,97	33,10	38,72	14,98	33,66	39,85	15,77	35,07	41,47
$k=20$		27,67	39,66	44,46	27,61	40,88	46,10	28,79	42,54	47,96
$k=30$		35,26	45,29	49,54	36,05	47,00	51,61	37,54	48,89	53,67

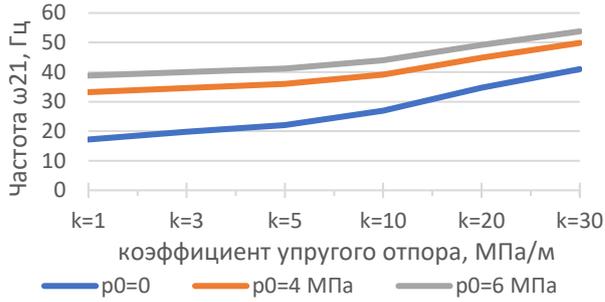


Рисунок 2.67 – Минимальные частоты ω_{21} нефтепровода при различных значениях k_s при $p_0=0, 4, 6$ МПа; $h/R=1/30$; $L/R=10$; $P=0,1$

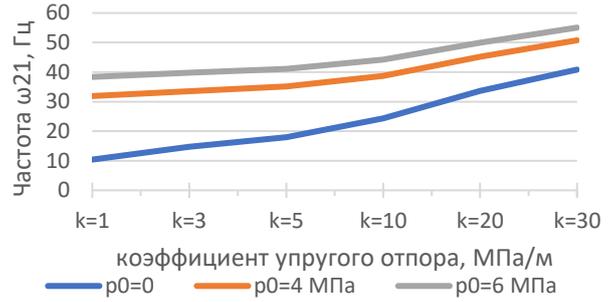


Рисунок 2.68 – Минимальные частоты ω_{21} нефтепровода при различных значениях k_s при $p_0=0, 4, 6$ МПа; $h/R=1/40$; $L/R=10$; $P=0,1$

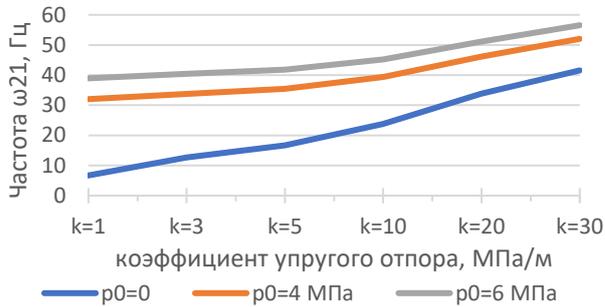


Рисунок 2.69 – Минимальные частоты ω_{21} нефтепровода при различных значениях k_s при $p_0=0, 4, 6$ МПа; $h/R=1/50$; $L/R=10$; $P=0,1$

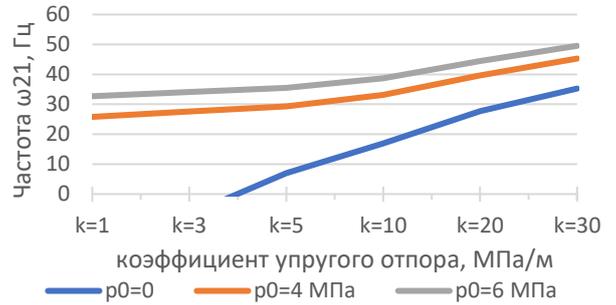


Рисунок 2.70 – Минимальные частоты ω_{21} нефтепровода при различных значениях k_s при $p_0=0, 4, 6$ МПа; $h/R=1/30$; $L/R=10$; $P=0,3$

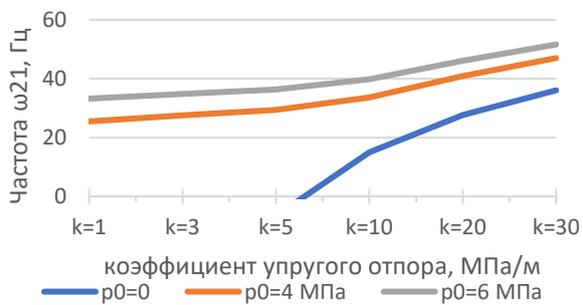


Рисунок 2.71 – Минимальные частоты ω_{21} нефтепровода при различных значениях k_s при $p_0=0, 4, 6$ МПа; $h/R=1/40$; $L/R=10$; $P=0,3$

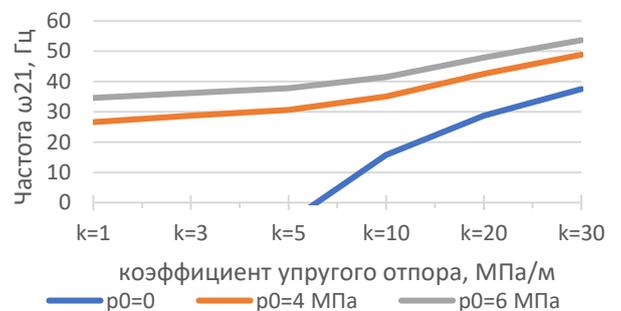


Рисунок 2.72 – Минимальные частоты ω_{21} нефтепровода при различных значениях k_s при $p_0=0, 4, 6$ МПа; $h/R=1/50$; $L/R=10$; $P=0,3$

Для понимания влияния среды при наземной и подземной прокладке проиллюстрируем полученные ранее значения в таблице 2.7 и 2.11 в виде графиков на рисунках 2.73–2.76 для оболочки с параметром тонкостенности $h/r=1/40$.

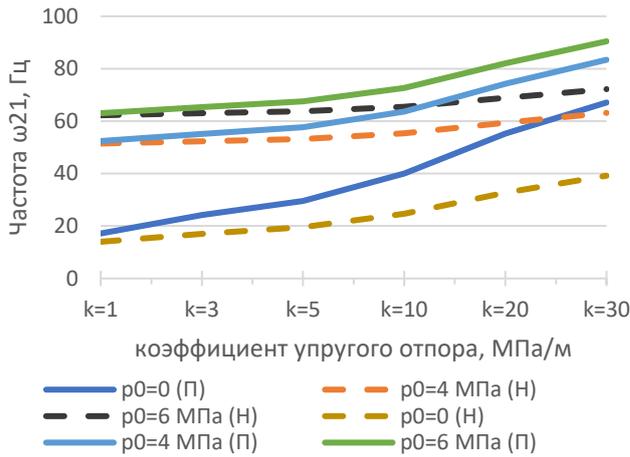


Рисунок 2.73 – Минимальные частоты ω_{21} газопровода при различных значениях k_s при $p_0=0, 4, 6$ МПа; $h/R=1/40$; $L/R=10$; $P=0,1$; для случая наземного (Н) и подземного (П) размещения

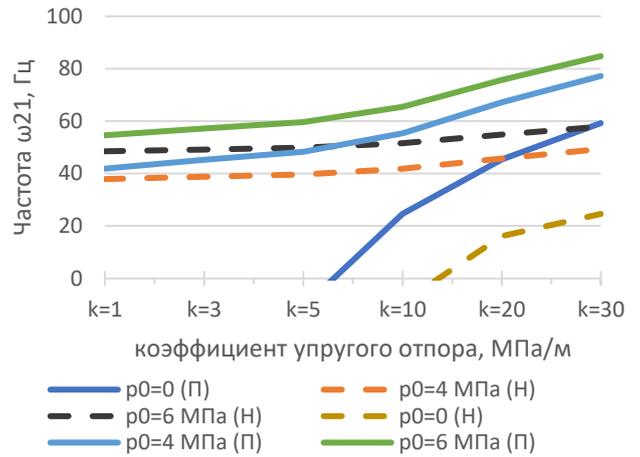


Рисунок 2.74 – Минимальные частоты ω_{21} газопровода при различных значениях k_s при $p_0=0, 4, 6$ МПа; $h/R=1/40$; $L/R=10$; $P=0,2$; для случая наземного (Н) и подземного (П) размещения

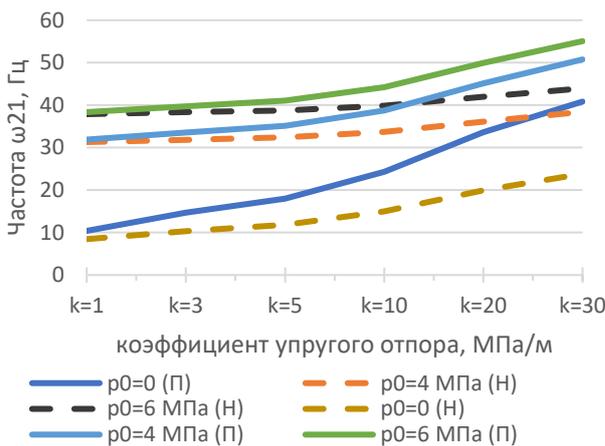


Рисунок 2.75 – Минимальные частоты ω_{21} нефтепровода при различных значениях k_s при $p_0=0, 4, 6$ МПа; $h/R=1/40$; $L/R=10$; $P=0,1$; для случая наземного (Н) и подземного (П) размещения

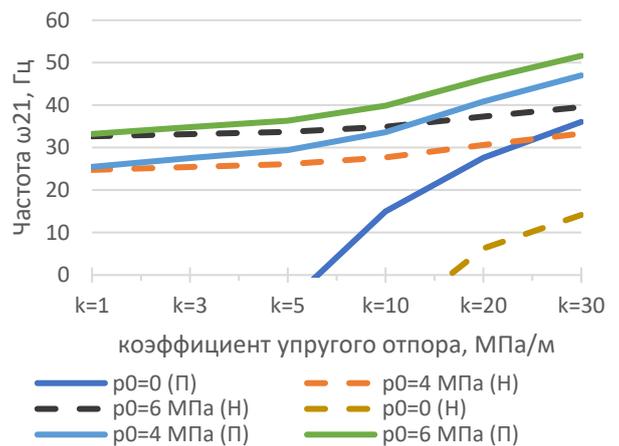


Рисунок 2.76 – Минимальные частоты ω_{21} нефтепровода при различных значениях k_s при $p_0=0, 4, 6$ МПа; $h/R=1/40$; $L/R=10$; $P=0,2$; для случая наземного (Н) и подземного (П) размещения

Выполним анализ частот свободных колебаний подземной цилиндрической оболочки в упругой среде, сформированный в таблице 2.10–2.12. Как и в случае с наземной оболочкой, рассмотрим два случая напорный и безнапорный.

Безнапорная оболочка ($p_0=0$)

Анализ полученных значений частот показывает ещё большую чувствительность оболочки к росту значений коэффициента упругого отпора грунта k_s . Например, для газопровода при $P=0$, $L/r=8$ увеличение коэффициента k_s

от 1 до 30 МПа/м приводит к увеличению ω_{21} с 50,52 до 75,41, а при $P=0,1$ – с 11,62 до 57,18, что составляет 392 % против 49 % в первом случае. В случае нефтепровода при $P=0$, $L/r=8$ увеличение коэффициента k_s от 1 до 30 МПа/м приводит к увеличению ω_{21} с 33,54 до 50,09, а при $P=0,1$ – с 7,61 до 37,97, что составляет 399 % против 49 % в первом случае. Как следует из расчетов, при нахождении оболочки в упругой среде частоты свободных колебаний существенно выше, чем при наземной прокладке. Несмотря на действие продольной силы, рост значений частот происходит на 49 % против 18 % при наземном исполнении, что подтверждает существенное влияние упругой среды на жесткость рассматриваемого участка.

Оболочка с внутренним давлением $p_0=4$ МПа

Выпишем значения частот, полученных при тех же воздействиях, что и в безнапорном случае, но уже с учетом внутреннего давления $p_0=4$ МПа. Например, при $P=0$, $L/r=8$ увеличение коэффициента k_s от 1 до 30 МПа/м, приводит к увеличению ω_{21} с 66,17 до 86,68 Гц, а при $P=0,1$ – с 44,29 до 71,39 Гц, что составляет 61,18 % против 31 % в первом случае. В случае подземного нефтепровода при $P=0$, $L/r=8$ увеличение коэффициента k_s от 1 до 30 МПа/м, приводит к увеличению ω_{21} с 43,95 до 57,58 Гц, а при $P=0,1$ – с 39,25 до 54,09 Гц, что составляет 37,8 % против 31 % в первом случае. Как следует из расчетов, постоянно действующее внутреннее рабочее давление приводит к существенному увеличению жесткости рассматриваемого участка цилиндрической оболочки и влияние упругого основания снижается, в том числе с учетом параметра продольной сжимающей силы P . В случае с нефтепроводом с учетом действия параметра продольной сжимающей силы рост частот происходит менее интенсивно – 37,8 %, против 61,18 % для газопровода.

Анализ значений, сведенных в таблицы 2.11–2.13, показал ряд закономерностей, полученных в результате изменения геометрических характеристик и характеристик упругого основания и параметра продольной сжимающей силы, а именно:

– при уменьшении соотношений h/r с $1/30$ до $1/50$ снижение частот ω_{21} при $k_s=10$ МПа/м, $p_0=0$ и $P=0,1$ составляет 3,7% с 40,59 до 42,10 Гц, а при $k_s=1$ МПа/м – 115,46 % с 25,92 до 12,03 Гц;

– внутреннее рабочее давление, в отличие от наземного размещения оболочки, оказывает менее существенное влияние на рост значений частот ω_{21} , так, например, при $k_s=20$ МПа/м, $P=0,1$, $h/r=1/30$ и изменении внутреннего давления с 0 до 6 МПа рост значений составляет 60,67 %, а для $h/r=1/50$ – 66,58 %, что говорит о том, что с увеличением внутреннего давления оболочка быстро увеличивает свою жесткость и окружающая оболочку среда также этому способствует, однако чем выше внутреннее давление, тем влияние упругого основания ниже;

– параметр продольной сжимающей силы, как в случае наземного и подземного газо- и нефтепровода, оказывает существенное влияние на значения частот. Так, например, с увеличением значений параметра P частоты снижаются, но чем выше давления внутри оболочки и чем жестче окружающая среда, тем влияние продольной силы меньше.

2.6 Определение частот и форм свободных колебаний полиэтиленовой цилиндрической оболочки при наземном и подземном размещении

Исследование динамических характеристик полиэтиленовых цилиндрических оболочек, включая определение частот и форм свободных колебаний, представляет собой ключевой аспект в проектировании и эксплуатации различных инженерных сооружений, таких как трубопроводы и резервуары. Полиэтилен, благодаря своим уникальным свойствам – низкой плотности и высокой коррозионной стойкости, находит широкое применение в строительстве. Однако его механические характеристики, включая модуль упругости, значительно отличаются от традиционных материалов, таких как сталь, что требует проведения дополнительного анализа его динамического поведения.

Условия эксплуатации оказывают существенное влияние на динамические характеристики конструкций: подземные оболочки подвергаются воздействию

грунтового давления и гидростатических сил, что может значительно изменить их колебательные свойства по сравнению с аналогичными наземными конструкциями. Методология исследования включает решение трансцендентных уравнений, описывающих движение оболочки и взаимодействие с внутренней средой. При этом учитываются ключевые параметры системы, такие как геометрические размеры оболочки и физико-механические свойства материала. Такой подход позволяет получить более точные результаты и минимизировать риск возникновения резонансных явлений, которые могут привести к разрушению конструкции.

При проведении расчетов принимаем следующие реальные характеристики полиэтиленовых трубопроводов, применяемых в строительстве водопроводов:

№ п/п	Диаметр, мм	Номинальное давление, МПа	Толщина стенки, мм	Плотность материала, ρ , т/м ³	Модуль упругости, МПа	Коэффициент Пуассона
1	1600	0,4	39,2	0,954	1300–1400	0,43
2	1400		34,3			

По аналогии со стальной цилиндрической оболочкой определим спектр частот свободных колебаний оболочки, выполненной из полиэтилена (ПЭ-100), при наземном и подземном размещении, при различных значениях волновых чисел m и n . Применяя формулы (77), (78), определим значения собственных частот для оболочки с потоком воды и газа и представим полученные значения в виде графиков на рисунках 2.77, 2.78.

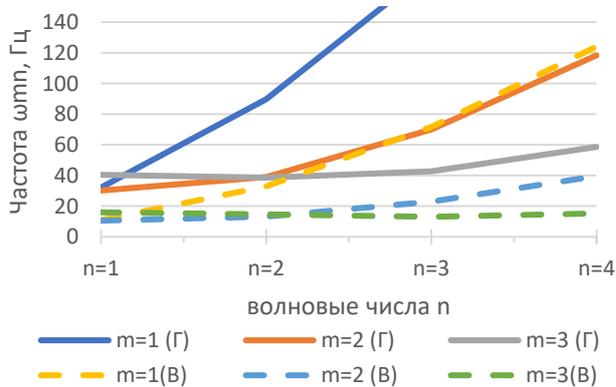


Рисунок 2.77 – Частоты свободных колебаний полиэтиленовой цилиндрической оболочки с потоком жидкости (В) и газа (Г) при наземном размещении от волновых чисел m и n при $p_0=0$; $h/r=1/20$; $L/r=8$; $k_s = 5$ МПа/м; $P=0,1$

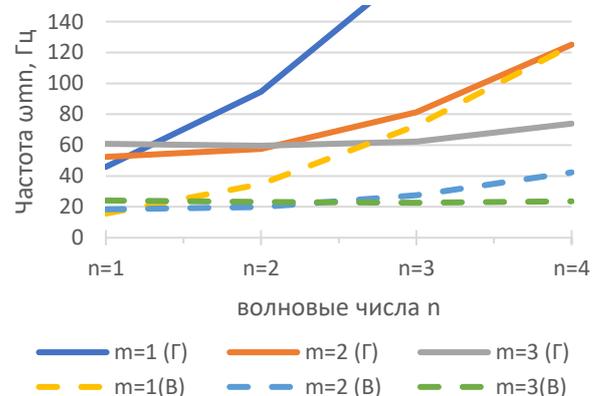


Рисунок 2.78 – Частоты свободных колебаний полиэтиленовой цилиндрической оболочки с потоком жидкости (В) и газа (Г) при наземном размещении от волновых чисел m и n при $p_0=0$; $h/r=1/20$; $L/r=8$; $k_s = 5$ МПа/м; $P=0,1$

Полученные значения показывают, что в зависимости от величины внешних воздействий минимальные частоты реализуются либо при ω_{11} без деформации поперечного сечения, либо при ω_{21} с учетом деформации, овализации поперечного сечения, однако во всех случаях минимальные значения фиксируются при $n=1$, что соответствует образованию одной полуволны в продольном направлении. На рисунках 2.77–2.78 значения получены для наземной и подземной полиэтиленовой оболочки, взаимодействующей с упругой средой. Из графиков видно, что оболочка чувствительна к увеличению значений коэффициента упругого отпора основания k_s . Так, например, для подземного участка минимальные частоты оболочки выше на 43 % в сравнении с наземным случаем.

Далее более детально изучим влияние способа размещения оболочки в упругой среде и величины коэффициента упругого отпора среды. Полученные значения сведем в таблицы 2.14, 2.15 и проиллюстрируем в виде графиков на рисунках 2.79, 2.86.

Таблица 2.14 – Зависимость частот свободных изгибных колебаний ω_{m1} наземного газо- и водопровода от параметра длины участка L/r , внутреннего давления p_0 , и коэффициента упругого отпора k_s

$h/R=1/20$ (труба 1600×39,2 мм); $P=0,1$										
Коэф. упругого отпора k_s , МПа/м	ω_{m1}	$L=6r$			$L=8r$			$L=10r$		
		$p_0=0$	$p_0=0,2$	$p_0=0,4$	$p_0=0$	$p_0=0,2$	$p_0=0,4$	$p_0=0$	$p_0=0,2$	$p_0=0,4$
Газопровод										
$k_s=1$	ω_{11}	44,88	44,88	44,88	27,23	27,23	27,23	19,30	19,30	19,30
	ω_{21}	22,06	29,79	35,90	18,48	27,29	33,88	17,38	26,58	33,33
	ω_{31}	32,57	47,71	59,09	32,08	47,39	58,85	31,94	47,31	58,79
$k_s=5$	ω_{11}	48,93	48,93	48,93	33,79	33,79	33,79	27,99	27,99	27,99
	ω_{21}	34,17	39,60	44,38	32,04	37,81	42,81	31,44	37,32	42,39
	ω_{31}	42,83	55,23	65,31	42,47	54,96	65,10	42,38	54,90	65,05
$k_s=10$	ω_{11}	53,55	53,55	53,55	40,52	40,52	40,52	36,01	36,01	36,01
	ω_{21}	44,92	49,18	53,10	43,38	47,81	51,85	42,97	47,45	51,53
	ω_{31}	52,93	63,38	72,34	52,65	63,16	72,16	52,58	63,11	72,12
$k_s=20$	ω_{11}	61,77	61,77	61,77	51,41	51,41	51,41	48,21	48,21	48,21
	ω_{21}	60,99	64,19	67,24	59,95	63,22	66,33	59,69	62,99	66,12
	ω_{31}	68,82	77,15	84,66	68,62	76,98	84,52	68,58	76,95	84,49
Водопровод (с учетом присоединенной массы воды)										
$k_s=1$	ω_{11}	14,59	14,59	14,59	8,65	8,65	8,65	6,07	6,07	6,07
	ω_{21}	7,02	9,66	11,72	6,00	8,95	11,14	5,69	8,74	10,98
	ω_{31}	12,02	17,74	22,02	11,94	17,69	21,98	11,92	17,67	21,97

Окончание таблицы 2.14

Коэф. упругого отпора k_s , МПа/м	ω_{m1}	$L=6r$			$L=8r$			$L=10r$		
		$p_0=0$	$p_0=0,2$	$p_0=0,4$	$p_0=0$	$p_0=0,2$	$p_0=0,4$	$p_0=0$	$p_0=0,2$	$p_0=0,4$
$k_s=5$	ω_{11}	15,93	15,93	15,93	10,77	10,77	10,77	8,83	8,83	8,83
	ω_{21}	11,14	12,96	14,56	10,53	12,44	14,10	10,35	12,30	13,98
	ω_{31}	15,90	20,57	24,35	15,84	20,52	24,32	15,83	20,51	24,31
$k_s=10$	ω_{11}	17,46	17,46	17,46	12,93	12,93	12,93	11,38	11,38	11,38
	ω_{21}	14,75	16,17	17,48	14,29	15,76	17,10	14,17	15,65	17,00
	ω_{31}	19,70	23,63	26,99	19,66	23,59	26,96	19,65	23,58	26,95
$k_s=20$	ω_{11}	20,18	20,18	20,18	16,43	16,43	16,43	15,25	15,25	15,25
	ω_{21}	20,11	21,18	22,19	19,78	20,87	21,90	19,69	20,78	21,82
	ω_{31}	25,67	28,80	31,61	25,64	28,77	31,59	25,63	28,76	31,58

Таблица 2.15 – Зависимость частот свободных изгибных колебаний ω_{m1} подземного газо- и водопровода от параметра длины участка L/r , внутреннего давления p_0 , и коэффициента упругого отпора k_s

$h/R=1/20$ (труба 1600×39,2 мм); $P=0,1$										
Коэф. упругого отпора k_s , МПа/м	ω_{m1}	$L=6r$			$L=8r$			$L=10r$		
		$p_0=0$	$p_0=0,2$	$p_0=0,4$	$p_0=0$	$p_0=0,2$	$p_0=0,4$	$p_0=0$	$p_0=0,2$	$p_0=0,4$
Газопровод										
$k_s=1$	ω_{11}	47,09	47,09	47,09	30,91	30,91	30,91	24,34	24,34	24,34
	ω_{21}	29,17	35,38	40,66	26,61	33,34	38,92	25,87	32,77	38,45
	ω_{31}	38,40	51,87	62,50	38,00	51,58	62,27	37,89	51,51	62,22
$k_s=5$	ω_{11}	58,39	58,39	58,39	47,05	47,05	47,05	43,40	43,40	43,40
	ω_{21}	54,67	58,23	61,57	53,47	57,12	60,54	53,16	56,84	60,29
	ω_{31}	62,50	71,56	79,60	62,27	71,38	79,45	62,22	71,34	79,42
$k_s=10$	ω_{11}	69,99	69,99	69,99	61,53	61,53	61,53	59,14	59,14	59,14
	ω_{21}	75,25	77,86	80,40	74,48	77,14	79,71	74,31	76,99	79,57
	ω_{31}	83,33	90,33	96,83	83,19	90,21	96,72	83,16	90,19	96,70
$k_s=20$	ω_{11}	88,75	88,75	88,75	83,24	83,24	83,24	82,00	82,00	82,00
	ω_{21}	104,92	106,81	108,67	104,52	106,43	108,31	104,47	106,39	108,27
	ω_{31}	114,11	119,32	124,31	114,05	119,26	124,26	114,04	119,26	124,26
Водопровод										
$k_s=1$	ω_{11}	15,32	15,32	15,32	9,84	9,84	9,84	7,67	7,67	7,67
	ω_{21}	9,45	11,55	13,32	8,72	10,96	12,81	8,51	10,79	12,67
	ω_{31}	14,23	19,30	23,30	14,16	19,26	23,26	14,15	19,24	23,25
$k_s=5$	ω_{11}	19,06	19,06	19,06	15,03	15,03	15,03	13,72	13,72	13,72
	ω_{21}	18,00	19,19	20,30	17,64	18,84	19,98	17,54	18,75	19,89
	ω_{31}	23,30	26,70	29,72	23,26	26,67	29,69	23,25	26,66	29,68

Окончание таблицы 2.15

Коэф. упругого отпора k_s , МПа/м	ω_{m1}	$L=6r$			$L=8r$			$L=10r$		
		$p_0=0$	$p_0=0,2$	$p_0=0,4$	$p_0=0$	$p_0=0,2$	$p_0=0,4$	$p_0=0$	$p_0=0,2$	$p_0=0,4$
$k_s=10$	ω_{11}	22,88	22,88	22,88	19,68	19,68	19,68	18,71	18,71	18,71
	ω_{21}	24,85	25,72	26,57	24,59	25,47	26,32	24,52	25,41	26,26
	ω_{31}	31,12	33,74	36,17	31,09	33,72	36,15	31,08	33,71	36,15
$k_s=20$	ω_{11}	29,06	29,06	29,06	26,65	26,65	26,65	25,96	25,96	25,96
	ω_{21}	34,71	35,34	35,96	34,53	35,16	35,78	34,48	35,12	35,74
	ω_{31}	42,65	44,60	46,47	42,63	44,59	46,46	42,63	44,58	46,45

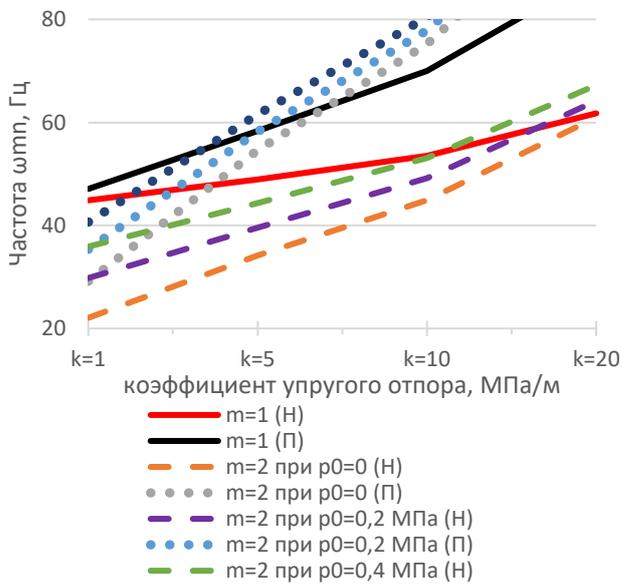


Рисунок 2.79 – Частоты свободных колебаний газопровода при наземном (Н) и подземном (П) размещении в зависимости от k_s при $m=1,2$, $n=1$, $p_0=0;0,2;0,4$ МПа; $h/R=1/20$; $L/r=6$; $P=0$

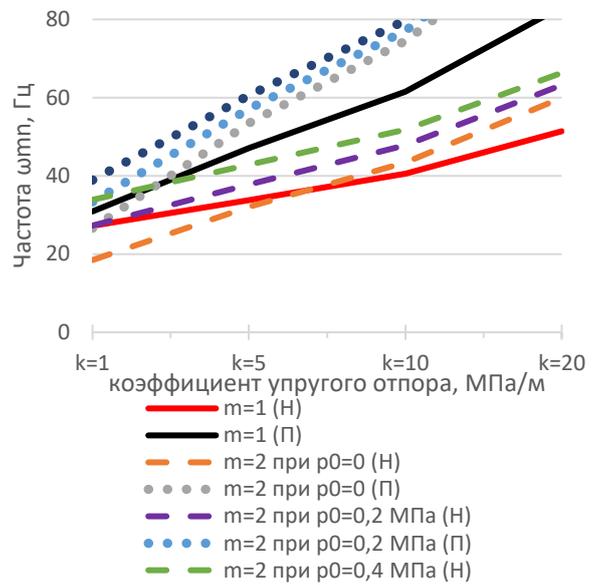


Рисунок 2.80 – Частоты свободных колебаний газопровода при наземном (Н) и подземном (П) размещении в зависимости от k_s при $m=1,2$, $n=1$, $p_0=0;0,2;0,4$ МПа; $h/R=1/20$; $L/r=8$; $P=0$

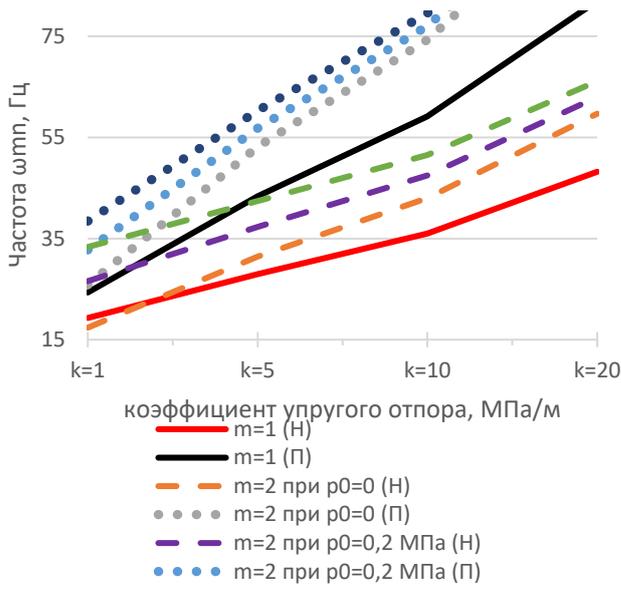


Рисунок 2.81 – Частоты свободных колебаний газопровода при наземном (Н) и подземном (П) размещении в зависимости от k_s при $m=1,2$, $n=1$, $p_0=0;0,2;0,4$ МПа; $h/r=1/20$; $L/r=10$; $P=0$

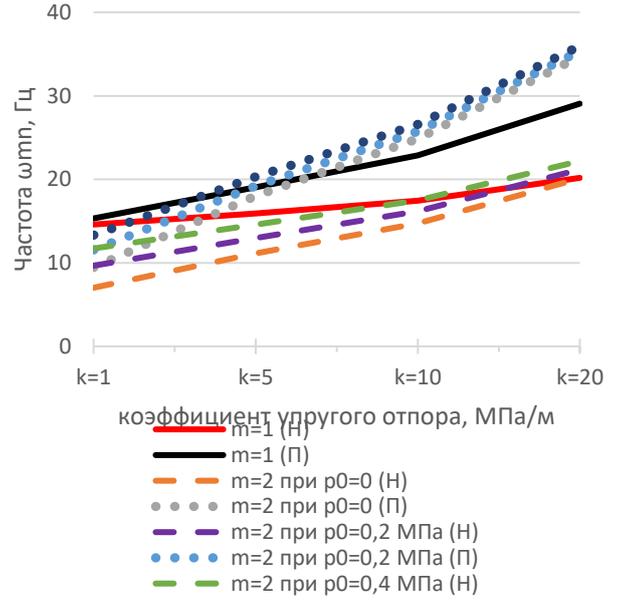


Рисунок 2.82 – Частоты свободных колебаний газопровода при наземном (Н) и подземном (П) размещении в зависимости от k_s при $m=1,2$, $n=1$, $p_0=0;0,2;0,4$ МПа; $h/R=1/20$; $L/r=6$; $P=0$

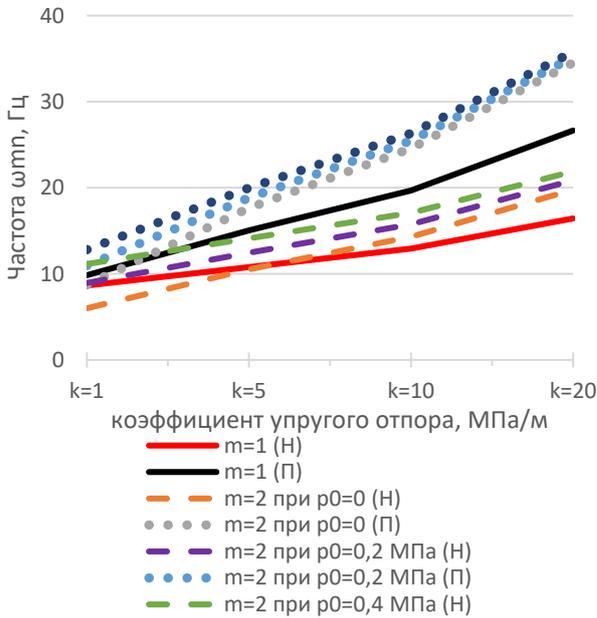


Рисунок 2.83 – Частоты свободных колебаний газопровода при наземном (Н) и подземном (П) размещении в зависимости от k_s при $m=1,2$, $n=1$, $p_0=0;0,2;0,4$ МПа; $h/r=1/20$; $L/r=8$; $P=0$

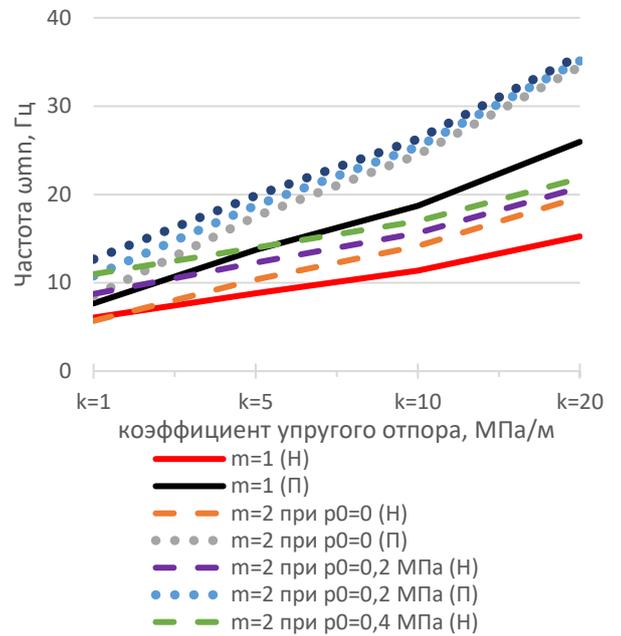


Рисунок 2.84 – Частоты свободных колебаний газопровода при наземном (Н) и подземном (П) размещении в зависимости от k_s при $m=1,2$, $n=1$, $p_0=0;0,2;0,4$ МПа; $h/r=1/20$; $L/r=10$; $P=0$

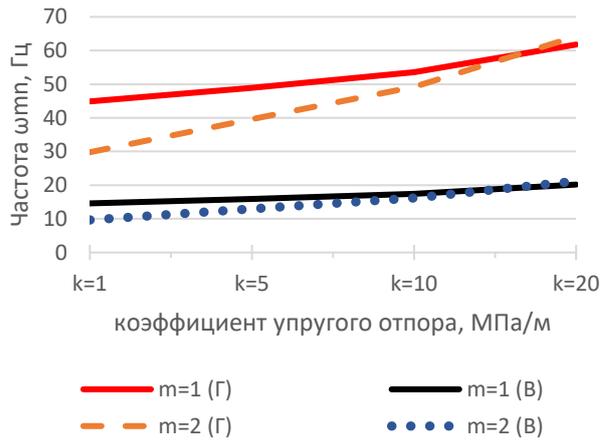


Рисунок 2.85 – Частоты свободных колебаний газопровода при наземном (Н) и подземном (П) размещении в зависимости от k_s при $m=1,2$, $n=1$, при $p_0=0,2$ МПа; $h/r=1/20$; $L/r=6$; $P=0$

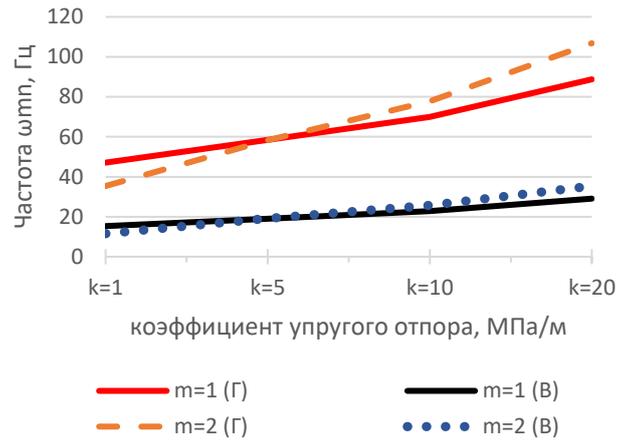


Рисунок 2.86 – Частоты свободных колебаний газопровода при наземном (Н) и подземном (П) размещении в зависимости от k_s при $m=1,2$, $n=1$, $p_0=0;0,2;0,4$ МПа; $h/r=1/20$; $L/r=6$; $P=0$

На основании проведенного исследования можно отметить влияние геометрических характеристик и внешних воздействий, остановимся на каждом из них более подробно.

Параметр длины L/r

В результате увеличения значений параметра длины рассматриваемого участка L от $6r$ до $10r$ при фиксированных остальных геометрических соотношениях и параметров внешних воздействий происходит изменение собственных частот, например:

- при $k_s=5$ МПа/м происходит уменьшение минимальных частот свободных колебаний при $m=2$ для наземного газопровода на 8,7 %, для наземного водопровода – на 7,6%. Для случая подземного газопровода изменения менее выражены – 2,84%, для водопровода – 2,62 %;

- при $k_s=20$ МПа/м происходит уменьшение минимальных частот свободных колебаний при $m=2$ для наземного газопровода на 2,1 %, для наземного водопровода – на 2,1 %. Для случая подземного газопровода изменения в частотах близки к нулю ввиду существенного увеличения жесткости по причине роста значений упругого основания.

Внутреннее давление p_0 , МПа

Внутреннее давление оказывает существенное влияние как на стальные оболочки, так и на полиэтиленовые оболочки. Ввиду меньшей жесткости полиэтиленовые оболочки более чувствительны к изменению внутреннего рабочего давления. При изменении внутреннего рабочего давления с 0 до 0,4 МПа при $L=6r$ рост частот весьма значительный, например:

– при $k_s=5$ МПа/м происходит рост минимальных частот свободных колебаний при $m=2$ для наземного газопровода на 29,88 %, для наземного водопровода – на 30,7 %. Для случая подземного газопровода изменения менее выражены – 12,62 %, для водопровода – 12,77 %.

– при $k_s=20$ МПа/м происходит уменьшение минимальных частот свободных колебаний при $m=2$ для наземного газопровода на 10,24 %, для наземного водопровода – на 10,34 %. Для подземного газопровода на 3,5 %, для наземного водопровода на 3,6 % ввиду существенного увеличения жесткости по причине равномерного обжатия оболочки со стороны внешней среды.

Влияние коэффициента упругого отпора среды k_s , МПа/м

Упругий отпор среды оказывает существенное влияние на рост значений собственных частот. С увеличением значений коэффициента k_s от 1 до 20 частоты увеличиваются более чем в три раза, что является весьма значительным при проектировании элементов конструкций, состоящих из подобных полиэтиленовых оболочек.

Рассмотрим тенденции изменения частот в зависимости от значений внутреннего давления и параметра длины участка, например для наземного

– *газопровода:*

при $p_0=0$ и $L=6r$ рост составляет 176 %, а при $p_0=0,4$ МПа – 87,20 %;

при $p_0=0$ и $L=8r$ рост составляет 224 %, а при $p_0=0,4$ МПа – 95,77 %;

при $p_0=0$ и $L=10r$ рост составляет 243 %, а при $p_0=0,4$ МПа – 98,37 %;

– *водопровода*

при $p_0=0$ и $L=6r$ рост составляет 186 %, а при $p_0=0,4$ МПа – 89,33 %;

при $p_0=0$ и $L=8r$ рост составляет 229 %, а при $p_0=0,4$ МПа – 96,58 %;

при $p_0=0$ и $L=10r$ рост составляет 246 %, а при $p_0=0,4$ МПа – 98,72 %.

Теперь рассмотрим для подземного

– *газопровода*

при $p_0=0$ и $L=6r$ рост составляет 259 %, а при $p_0=0,4$ МПа – 167 %;

при $p_0=0$ и $L=8r$ рост составляет 292 %, а при $p_0=0,4$ МПа – 178 %;

при $p_0=0$ и $L=10r$ рост составляет 304 %, а при $p_0=0,4$ МПа – 182 %;

– *водопровода*

при $p_0=0$ и $L=6r$ рост составляет 267 %, а при $p_0=0,4$ МПа – 170 %;

при $p_0=0$ и $L=8r$ рост составляет 295 %, а при $p_0=0,4$ МПа – 179 %;

при $p_0=0$ и $L=10r$ рост составляет 305 %, а при $p_0=0,4$ МПа – 182 %.

На основании полученных данных можно отметить, что при размещении оболочки в упругой среде влияние этой среды более существенно, чем при наземном размещении. Тенденция роста частот для оболочки с потоком жидкости менее выражена, чем для оболочки с газом, это объясняется большей присоединенной массой жидкости, участвующей в колебательном процессе.

С увеличением параметра длины участка тенденция роста частот увеличивается ввиду большей области контакта оболочки с упругой средой.

2.7 Определение частот и форм свободных колебаний цилиндрической оболочки при воздействии температуры и параметра продольной сжимающей силы

Исследование частот и форм свободных колебаний оболочек под воздействием температурных факторов представляет собой актуальную задачу в области динамики и устойчивости конструкций. Цилиндрические оболочки широко используются в различных отраслях, включая авиацию, космическую технику и строительные конструкции, где они подвергаются многим видам нагрузок, включая статические, динамические и температурные. В разделе 2.2 были сформированы и решены уравнения движения элемента срединной поверхности оболочки с учетом равномерного нагрева/охлаждения, что позволяет провести исследование и анализ влияния температурного воздействия на частоты

свободных колебаний цилиндрических стальных и полиэтиленовых оболочек, взаимодействующих с упругой средой.

В зависимости от области применения на оболочки могут действовать температуры в широком диапазоне, например, в газопроводах изменение температур составляет 100 °С, а главных паропроводов тепловых электростанций – плюс 400 °С и более [4].

При положительном температурном воздействии материал оболочки расширяется и при ограничении перемещений рассматриваемого участка характер действия температурной деформации очень схож с действием продольной силы, вызванной, например, просадкой грунта, смещением опор на соседних участка и другими возможными причинами. Целью данной работы не является определение фактических значений продольной силы и методов их определения. Действие продольной силы выражается в виде параметра P , что было описано в разделе 1.6, однако исследование влияния поведения оболочек под действием продольной силы является важной задачей.

В первую очередь исследуем влияние температурного воздействия на изменение частот свободных колебаний стальной и полиэтиленовой оболочки в упругой среде.

Произведем расчеты для стальной и полиэтиленовой оболочки с потоком жидкости, подверженной равномерному нагреву/охлаждению по формуле (77), полученные значения частот сведем в таблицы 2.16, 2.19 и проиллюстрируем в виде графиков на рисунках 2.87–2.98. Температурный диапазон полиэтилена выбран в пределах характеристик материала, от минус 50 до плюс 50.

Таблица 2.16 – Частоты свободных изгибных колебаний ω_{21} стальной и полиэтиленовой цилиндрической оболочки при наземном размещении от значений параметра длины участка L/r , внутреннего давления p_0 и ΔT

$h/R=1/20; P=0,1; k=10$ МПа/м;										
$\Delta T, ^\circ\text{C}$	ω_{21}	$L=6r$			$L=8r$			$L=10r$		
		$p_0=0$	$p_0=2$ МПа	$p_0=4$ МПа	$p_0=0$	$p_0=2$ МПа	$p_0=4$ МПа	$p_0=0$	$p_0=2$ МПа	$p_0=4$ МПа
Стальная оболочка, $a_m = 14 \cdot 10^6 \text{ } ^\circ\text{C}^{-1}$										
-200	ω_{21}	82,02	84,95	87,78	60,48	64,43	68,14	52,10	56,64	60,85
-100	ω_{21}	78,20	81,27	84,23	57,56	61,69	65,56	49,93	54,65	59,00
0	ω_{21}	74,20	77,43	80,53	54,47	58,82	62,87	47,65	52,58	57,09
+100	ω_{21}	69,96	73,37	76,64	51,20	55,80	60,05	45,26	50,43	55,11
+200	ω_{21}	65,45	69,09	72,54	47,70	52,61	57,10	42,74	48,18	53,06
Полиэтиленовая оболочка, $a_m = 200 \cdot 10^6 \text{ } ^\circ\text{C}^{-1}$										
		$p_0=0$	$p_0=0,2$	$p_0=0,4$	$p_0=0$	$p_0=0,2$	$p_0=0,4$	$p_0=0$	$p_0=0,2$	$p_0=0,4$
-50	ω_{21}	47,72	51,77	55,53	45,08	49,37	53,32	44,11	48,50	52,52
-20	ω_{21}	46,11	50,29	54,15	44,12	48,50	52,51	43,49	47,93	52,00
0	ω_{21}	45,01	49,28	53,21	43,47	47,91	51,97	43,06	47,55	51,65
+20	ω_{21}	43,88	48,25	52,26	42,81	47,31	51,42	42,64	47,16	51,29
+50	ω_{21}	42,12	46,66	50,80	41,80	46,40	50,58	41,99	46,58	50,76

Таблица 2.17 – Частоты свободных изгибных колебаний ω_{21} стальной и полиэтиленовой цилиндрической оболочки при подземном размещении от значений параметра длины участка L/r , внутреннего давления p_0 и ΔT

$h/R=1/20; P=0,1; k=10$ МПа/м										
$\Delta T, ^\circ\text{C}$	ω_{21}	$L=6r$			$L=8r$			$L=10r$		
		$p_0=0$	$p_0=2$ МПа	$p_0=4$ МПа	$p_0=0$	$p_0=2$ МПа	$p_0=4$ МПа	$p_0=0$	$p_0=2$ МПа	$p_0=4$ МПа
Стальная оболочка, $a_m = 14 \cdot 10^6 \text{ } ^\circ\text{C}^{-1}$										
-200	ω_{21}	84,69	87,53	90,28	64,08	67,81	71,35	56,24	60,48	64,43
-100	ω_{21}	81,00	83,97	86,84	61,32	65,22	68,89	54,24	58,61	62,69
0	ω_{21}	77,14	80,25	83,24	58,44	62,51	66,33	52,15	56,69	60,89
+100	ω_{21}	73,07	76,35	79,49	55,40	59,68	63,67	49,98	54,70	59,04
+200	ω_{21}	68,76	72,24	75,55	52,19	56,71	60,90	47,71	52,63	57,13
Полиэтиленовая оболочка, $a_m = 200 \cdot 10^6 \text{ } ^\circ\text{C}^{-1}$										
		$p_0=0$	$p_0=0,2$	$p_0=0,4$	$p_0=0$	$p_0=0,2$	$p_0=0,4$	$p_0=0$	$p_0=0,2$	$p_0=0,4$
-50	ω_{21}	77,07	79,64	82,13	75,61	78,24	80,79	75,10	77,76	80,33
-20	ω_{21}	76,09	78,69	81,21	75,04	77,70	80,26	74,74	77,41	79,99
0	ω_{21}	75,42	78,05	80,59	74,66	77,33	79,91	74,49	77,17	79,76
+20	ω_{21}	74,75	77,40	79,96	74,28	76,96	79,55	74,25	76,94	79,53
+50	ω_{21}	73,74	76,42	79,01	73,70	76,40	79,01	73,88	76,58	79,19

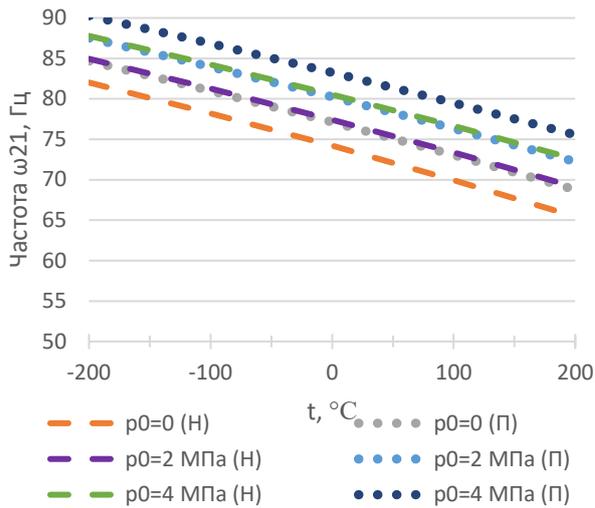


Рисунок 2.87 – Зависимость минимальных частот свободных колебаний стальной оболочки ω_{21} от значений температуры ΔT , °C при $p_0=0; 2; 4$ МПа $h/r=1/20; L/r=6; P=0$

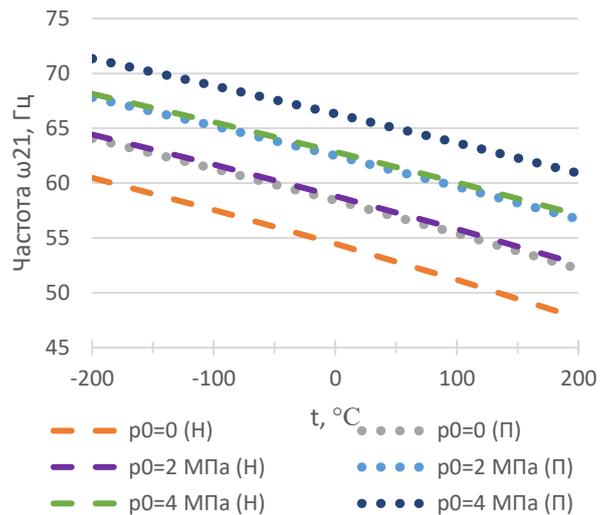


Рисунок 2.88 – Зависимость минимальных частот свободных колебаний стальной оболочки ω_{21} от значений температуры ΔT , °C при $p_0=0; 2; 4$ МПа $h/r=1/20; L/r=8; P=0$

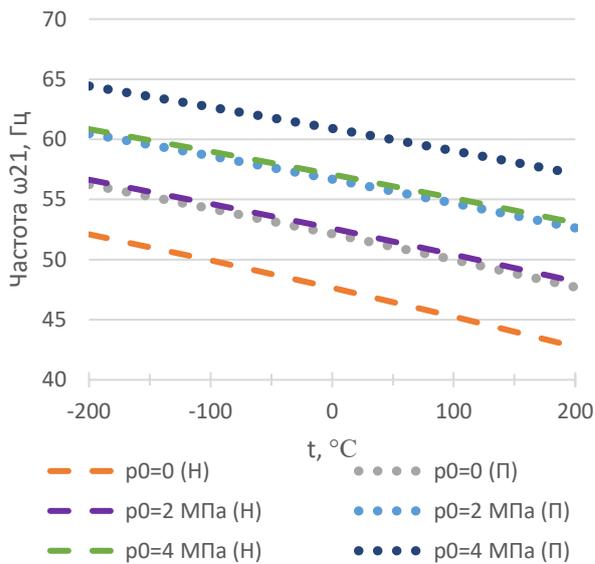


Рисунок 2.89 – Зависимость минимальных частот свободных колебаний стальной оболочки ω_{21} от значений температуры ΔT , °C при $p_0=0; 2; 4$ МПа $h/r=1/20; L/r=10; P=0$

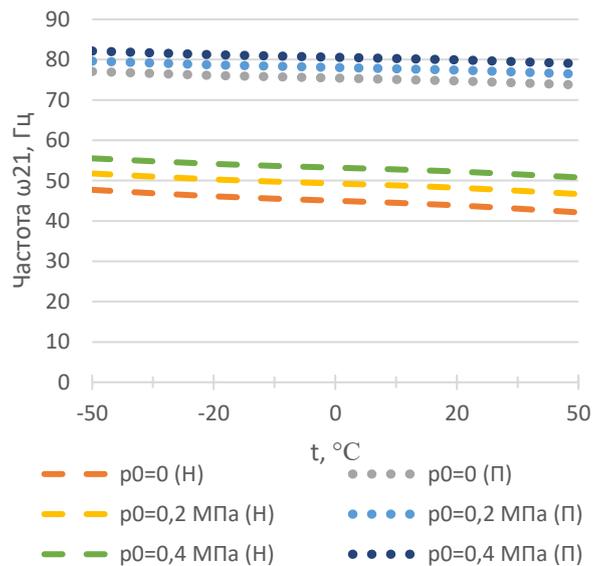


Рисунок 2.90 – Зависимость минимальных частот свободных колебаний полиэтиленовой оболочки ω_{21} от значений температуры ΔT , °C при $p_0=0; 0,2; 0,4$ МПа; $h/r=1/20; L/r=6; P=0$

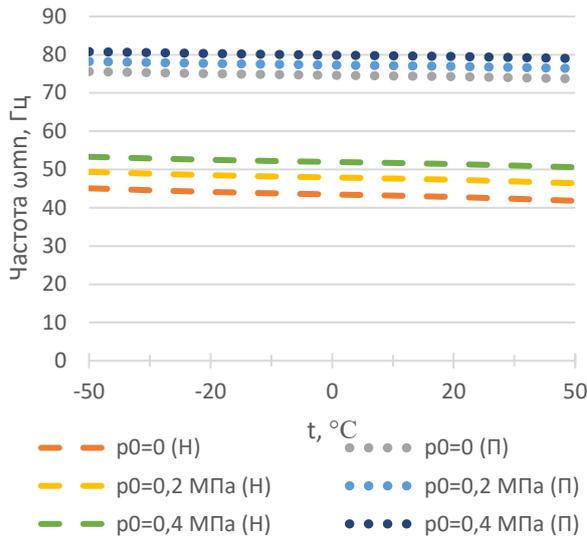


Рисунок 2.91 – Зависимость минимальных частот свободных колебаний полиэтиленовой оболочки ω_{21} от значений температуры ΔT , °C при $p_0=0; 0,2; 0,4$ МПа; $h/r=1/20; L/r=8; P=0$

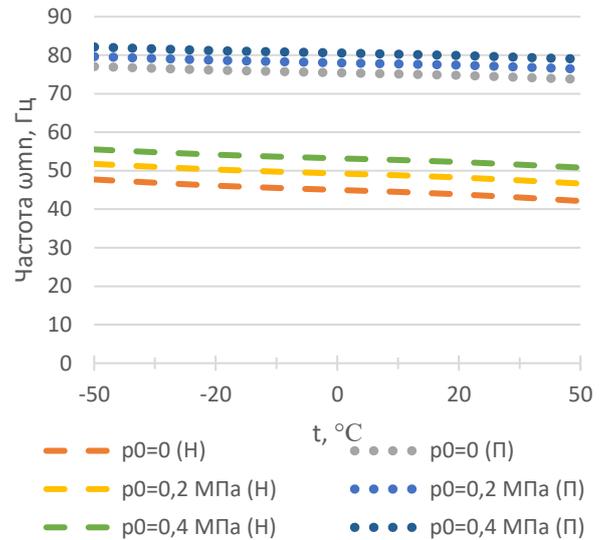


Рисунок 2.92 – Зависимость минимальных частот свободных колебаний полиэтиленовой оболочки ω_{21} от значений температуры ΔT , °C при $p_0=0; 0,2; 0,4$ МПа; $h/r=1/20; L/r=10; P=0$

Таблица 2.18 – Частоты свободных изгибных колебаний ω_{21} стальной и полиэтиленовой цилиндрической оболочки при наземном размещении от параметра длины участка L/r , внутреннего давления p_0 и P

$h/R=1/20; \Delta T=0; k=5$ МПа/м										
P	ω_{21}	$L=6r$			$L=8r$			$L=10r$		
		$p_0=2$ МПа	$p_0=4$ МПа	$p_0=6$ МПа	$p_0=0$	$p_0=2$ МПа	$p_0=4$ МПа	$p_0=0$	$p_0=2$ МПа	$p_0=4$ МПа
Стальная оболочка										
0	ω_{21}	77,51	80,59	83,56	58,93	62,95	66,73	52,70	57,17	61,32
0,05	ω_{21}	54,92	59,19	63,17	50,20	54,87	59,17	48,85	53,65	58,05
0,1	ω_{21}	5,08	22,65	31,63	39,60	45,37	50,48	44,67	49,87	54,57
0,15	ω_{21}	–	–	–	24,83	33,27	39,96	40,05	45,78	50,87
0,20	ω_{21}	–	–	–	–	12,44	25,39	34,83	41,29	46,87
Полиэтиленовая оболочка										
		$p_0=0$	$p_0=0,2$	$p_0=0,4$	$p_0=0$	$p_0=0,2$	$p_0=0,4$	$p_0=0$	$p_0=0,2$	$p_0=0,4$
0	ω_{21}	36,68	39,32	44,12	34,87	37,65	42,67	34,37	37,20	42,29
0,05	ω_{21}	34,43	37,23	42,27	34,13	36,97	42,07	34,07	36,91	42,04
0,1	ω_{21}	32,02	35,01	40,33	33,38	36,27	41,46	33,76	36,63	41,79
0,15	ω_{21}	29,42	32,65	38,30	32,60	35,56	40,84	33,45	36,34	41,54
0,20	ω_{21}	26,56	30,10	36,15	31,81	34,84	40,21	33,13	36,06	41,28

Таблица 2.19 – Частоты свободных изгибных колебаний ω_{21} стальной и полиэтиленовой цилиндрической оболочки при подземном размещении от параметра длины участка L/r , внутреннего давления p_0 и P

$h/R=1/20; k=5 \text{ МПа/м}$										
P	ω_{21}	$L=6r$			$L=8r$			$L=10r$		
		$p_0=2$ МПа	$p_0=4$ МПа	$p_0=6$ МПа	$p_0=2$ МПа	$p_0=4$ МПа	$p_0=6$ МПа	$p_0=2$ МПа	$p_0=4$ МПа	$p_0=6$ МПа
Стальная оболочка										
0	ω_{21}	80,31	83,29	86,16	62,59	66,39	69,98	56,78	60,95	64,86
0,05	ω_{21}	58,82	62,82	66,59	54,46	58,79	62,82	53,23	57,66	61,77
0,1	ω_{21}	21,65	30,92	37,99	44,88	50,04	54,72	49,42	54,16	58,52
0,15	ω_{21}	–	–	–	32,59	39,40	45,19	45,29	50,42	55,08
0,20	ω_{21}	–	–	–	18,18	28,15	33,02	40,74	46,38	51,41
Полиэтиленовая оболочка										
		$p_0=0,1$ МПа	$p_0=0,2$ МПа	$p_0=0,4$ МПа	$p_0=0,1$ МПа	$p_0=0,2$ МПа	$p_0=0,4$ МПа	$p_0=0,1$ МПа	$p_0=0,2$ МПа	$p_0=0,4$ МПа
0	ω_{21}	56,28	58,03	61,39	55,21	57,01	60,44	54,95	56,76	60,22
0,05	ω_{21}	54,84	56,64	60,07	54,75	56,56	60,02	54,76	56,57	60,04
0,1	ω_{21}	53,36	55,21	58,72	54,28	56,11	59,60	54,57	56,39	59,87
0,15	ω_{21}	51,84	53,74	57,35	53,81	55,65	59,17	54,37	56,20	59,69
0,20	ω_{21}	50,27	52,23	55,93	53,34	55,20	58,73	54,18	56,02	59,52

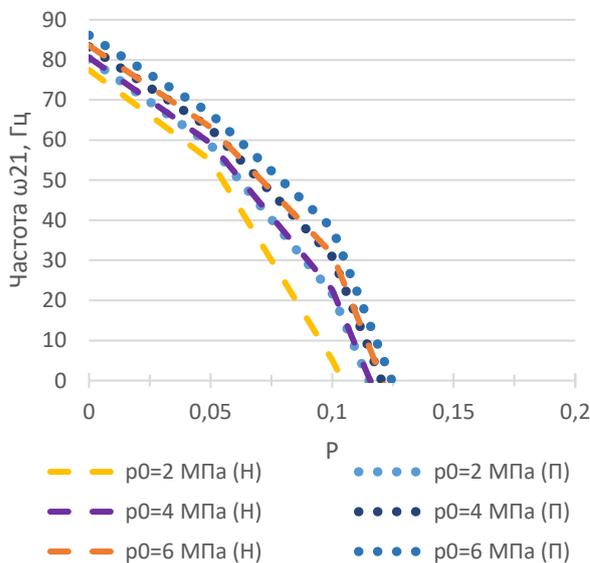


Рисунок 2.93 – Зависимость минимальных частот свободных колебаний стальной оболочки ω_{21} от значений параметра продольной сжимающей силы P , при $p_0=0; 2; 4$ МПа; $h/r=1/20; L/r=6; P=0$

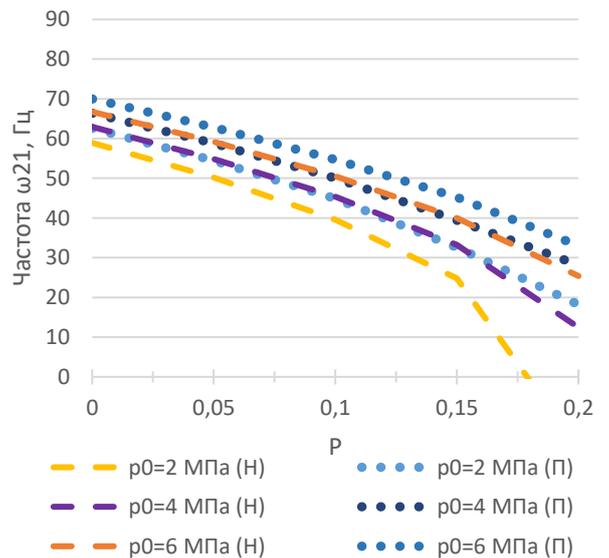


Рисунок 2.94 – Зависимость минимальных частот свободных колебаний стальной оболочки ω_{21} от значений параметра продольной сжимающей силы P , при $p_0=0; 2; 4$ МПа; $h/r=1/20; L/r=8; P=0$

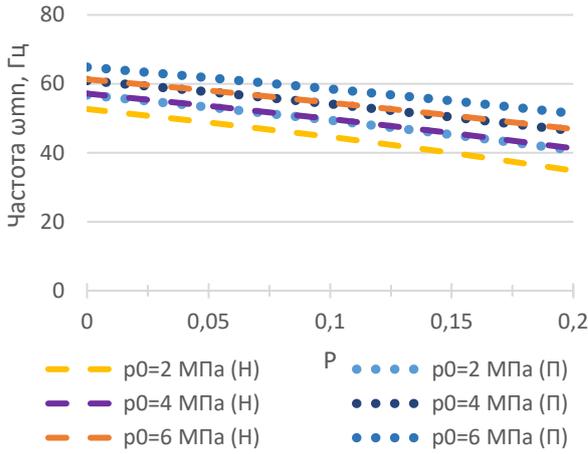


Рисунок 2.95 – Зависимость минимальных частот свободных колебаний стальной оболочки ω_{21} от значений параметра продольной сжимающей силы P , при $p_0=0; 2; 4$ МПа; $h/r=1/20; L/r=10; \Delta T=0$

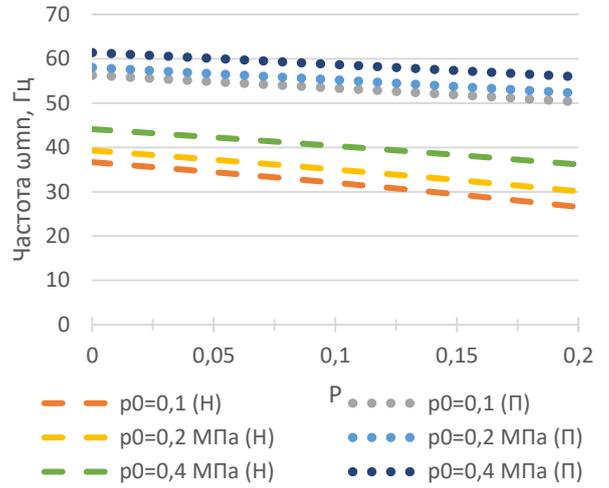


Рисунок 2.96 – Зависимость минимальных частот свободных колебаний полиэтиленовой оболочки ω_{21} от значений параметра продольной сжимающей силы P , при $p_0=0; 0,2; 0,4$ МПа; $h/r=1/20; L/r=6; \Delta T=0$

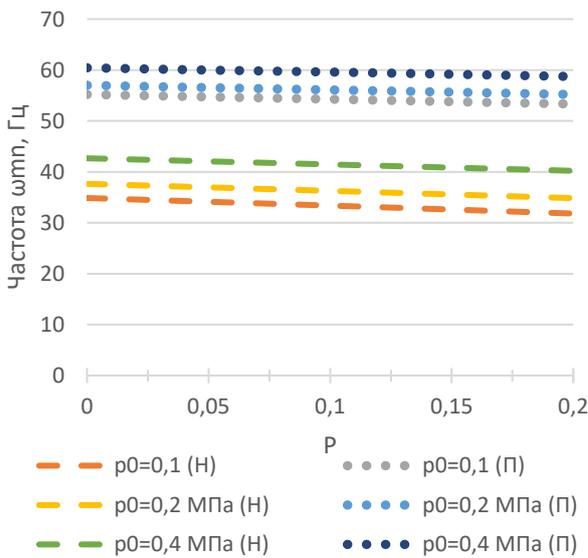


Рисунок 2.97 – Зависимость минимальных частот свободных колебаний полиэтиленовой оболочки ω_{21} от значений параметра продольной сжимающей силы P , при $p_0=0; 0,2; 0,4$ МПа; $h/r=1/20; L/r=8; \Delta T=0$

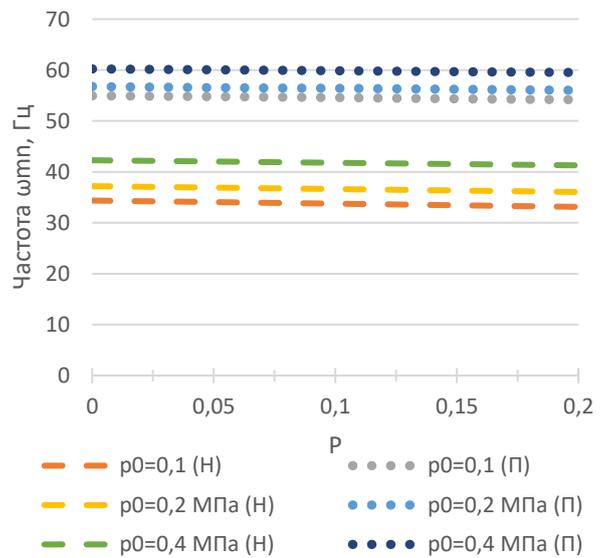


Рисунок 2.98 – Зависимость минимальных частот свободных колебаний полиэтиленовой оболочки ω_{21} от значений параметра продольной сжимающей силы P , при $p_0=0; 0,2; 0,4$ МПа; $h/r=1/20; L/r=10; \Delta T=0$

На основании проведенного исследования влияния продольной силы и температуры можно сформировать следующие выводы. Уделим особое внимание влиянию температуры на значения частот свободных колебаний, поскольку влияние параметра продольной сжимающей силы достаточно подробно рассмотрены в работе [183].

Для случая стальной оболочки при изменении температуры ΔT от -200 до $+200$ °С в зависимости от внутреннего рабочего давления и параметра длины участка L/r выявлено снижение частот, например, для наземной оболочки

– *сталь:*

при $p_0=0$ и $L=6r$ снижение составляет 25,31 %, а при $p_0=4$ МПа – 21 %;

при $p_0=0$ и $L=8r$ снижение составляет 26,79 %, а при $p_0=4$ МПа – 19,33 %;

при $p_0=0$ и $L=10r$ снижение составляет 21,89 %, а при $p_0=0,4$ МПа – 16,68 %;

– *полиэтилен:*

при $p_0=0$ и $L=6r$ снижение составляет 13,29 %, а при $p_0=0,4$ МПа – 9,33 %;

при $p_0=0$ и $L=8r$ снижение составляет 7,84 %, а при $p_0=0,4$ МПа – 5,41 %;

при $p_0=0$ и $L=10r$ снижение составляет 5,04 %, а при $p_0=0,4$ МПа – 3,46 %.

Теперь рассмотрим результаты для подземной оболочки

– *сталь:*

при $p_0=0$ и $L=6r$ снижение составляет 23,16 %, а при $p_0=4$ МПа – 19,49 %;

при $p_0=0$ и $L=8r$ снижение составляет 22,78 %, а при $p_0=4$ МПа – 17,15 %;

при $p_0=0$ и $L=10r$ снижение составляет 17,87 %, а при $p_0=0,4$ МПа – 12,77 %;

– *полиэтилен:*

при $p_0=0$ и $L=6r$ снижение составляет 4,51 %, а при $p_0=0,4$ МПа – 3,94 %;

при $p_0=0$ и $L=8r$ снижение составляет 2,59 %, а при $p_0=0,4$ МПа – 2,25 %;

при $p_0=0$ и $L=10r$ снижение составляет 1,65 %, а при $p_0=0,4$ МПа – 1,43 %.

Из выполненных расчетов следует, что более короткие оболочки сильнее подвержены влиянию температурного изменения, чем более длинные. За счет меньшей жесткости полиэтиленовые оболочки менее подвержены температурным деформациям, и, как следствие, снижение значений частот тут более плавное.

2.8 Колебания цилиндрической оболочки с учетом присоединённой массы и демпфирующих свойств среды

Динамические характеристики замкнутых цилиндрических оболочек играют ключевую роль в различных инженерных приложениях, включая строительство, авиацию и судостроение. Одним из важных факторов, влияющих на эти

характеристики, является демпфирование, которое связано с поведением грунта под нагрузкой. Учет демпфирующих свойств грунта позволяет более точно моделировать взаимодействие оболочек с основанием и предсказывать их реакцию на динамические воздействия. В условиях реальных строительных объектов динамические нагрузки могут вызывать значительные колебания, что требует тщательного анализа.

Грунт (среда) может обладать уникальными механическими свойствами, способен поглощать и рассеивать энергию колебаний, что влияет на амплитуду и частоту вибраций. Пренебрежение демпфирующими свойствами может привести к недооценке рисков и потенциальных повреждений конструкций. Поэтому важно разрабатывать методы учета этих свойств в расчетах. Современные подходы к моделированию включают экспериментальные исследования и численные методы, что позволяет получать более точные результаты. С позиции аналитических решений вопрос рассмотрен недостаточно полно и требует дальнейших исследований.

Таким образом, изучение демпфирующих свойств грунта не только улучшает понимание динамических процессов, но и способствует повышению надежности и безопасности конструкций. В данном исследовании будет рассмотрен комплексный подход к анализу влияния демпфирования на динамические характеристики замкнутых цилиндрических оболочек.

Для исследования влияния сил сопротивления среды запишем систему разделяющихся линейных однородных дифференциальных уравнений второго порядка относительно функции времени вида $\varphi''(t) + 2d_m \varphi'(t) + \omega_{mn}^2 \varphi(t) = 0$, где

$$\left[\frac{r^2 \rho_0 h m^2}{Eh} \left(\frac{\lambda_n^2}{m^2} + 1 + m^2 \right) + \mu_{bj} \frac{r}{Ehh^2} m^4 + \rho_v \Phi_{mn} r^2 m^4 \right] \varphi''(t) + \eta \frac{rm^4}{Ehh^2} \varphi'(t) + \frac{m^2 \left[\lambda_n^4 + m^4(m^2 - 1)(m^2 - 1 + p^* - q_{si}^*) + k_{si}^* m^4 - \tilde{\lambda}_n^4 m^4 P n^{-2} + \tilde{\lambda}_n^2 m^4 T^* - \tilde{\lambda}_n^4 \rho_v^* \Phi_{mn} V^2 m^4 h_v \right] h_v^2}{m^2} \varphi(t) = 0. \quad (86)$$

Поделив каждый компонент выражения (86) на $\frac{r^2 \rho_0 h m^2}{Eh} \left(\frac{\lambda_n^2}{m^2} + 1 + m^2 \right) + \mu_{bj} \frac{r}{Ehh^2} m^4 + \rho_v \Phi_{mn} r^2 m^4$, получим:

$$\begin{aligned} \varphi''(t) + \frac{\eta m^2}{r \rho_0 h \left(\frac{\lambda_n^2}{m^2} + 1 + m^2 \right) + \mu_{bj} m^2 + \rho_v \Phi_{mn} r^2 m^2} \varphi'(t) + \\ + \frac{\lambda_n^4 + m^4 (m^2 - 1) (m^2 - 1 + p^* - q_{si}^*) + k_{si}^* m^4 - \tilde{\lambda}_n^4 m^4 P n^{-2} + \tilde{\lambda}_n^2 m^4 T^* - \tilde{\lambda}_n^4 \rho_v^* \Phi_{mn} V^2 m^4 h_v}{\rho^* R h (\lambda^2 h_v + m^2 + m^4) + \mu_{bj}^* m^4 + \rho_v^* \Phi_{mn} r^2 m^4} \varphi(t) = 0, \end{aligned} \quad (87)$$

где компонент $2d$ при $\varphi'(t)$ есть коэффициент демпфирования или

$$2d_m = \frac{\eta m^2}{\left[r \rho_0 h \left(\frac{\lambda_n^2}{m^2} + 1 + m^2 \right) + \mu_{bj} m^2 + \rho_v^* \Phi_{mn} r^2 m^2 \right]},$$

а компонент при $\varphi(t)$ – квадрат частоты свободных колебаний (ω_{mn}^2) без учёта сил сопротивления среды и присоединённой массы грунта, определяемой выражением.

Решением системы уравнений (87) является квадратное уравнение вида

$$s^2 + 2d_m s + \omega_{mn}^2 = 0. \quad (88)$$

Данное уравнение имеет известное решение [113, с. 28; 226, с.93; 217, с.98] и корни этого характеристического уравнения определяются как

$$s_{1,2} = -d_m \pm \sqrt{d_m^2 - \omega_{mn}^2}. \quad (89)$$

Численное значение корней зависит от величин d_m и ω_{mn} . В случае, когда $d_m < \omega_{mn}$ корни уравнения (88) будут комплексные сопряжённые и принимают вид

$$s_{1,2} = -d_m \pm i \sqrt{\omega_{mn}^2 - d_m^2}. \quad (90)$$

Для комплексных сопряженных корней общее решение дифференциального уравнения (88) имеет вид:

$$\varphi(t) = e^{d_m t} \left(C_1 \cos \left(t \sqrt{\omega_{mn}^2 - d_m^2} \right) + C_2 \sin \left(t \sqrt{\omega_{mn}^2 - d_m^2} \right) \right). \quad (91)$$

Это выражение определяет форму колебаний демпфированной оболочки. Отсюда следует, что круговая частота свободных колебаний оболочки ω_{mn}^* с учётом сил сопротивления среды определяется как

$$\omega_{mn}^* = \sqrt{\omega_{mn}^2 - d_m^2} = \omega_{mn} \sqrt{1 - \frac{d_m^2}{\omega_{mn}^2}}. \quad (92)$$

Характер динамического отклика системы определяется величиной коэффициента демпфирования d_m :

- При $d_m=0$ реализуется периодический режим колебаний без диссипации энергии.
- При $d_m>0$ наблюдается экспоненциальное затухание колебаний, причём при $0 < d_m < \omega_{mn}$ процесс носит колебательный характер с убывающей амплитудой,

а при $d_m \geq \omega_{mn}$ – монотонный (апериодический), за исключением кратковременной переходной стадии.

- При $dm < 0$ возникает неустойчивый режим с экспоненциальным ростом амплитуды.

Критическое значение демпфирования $dm = \omega_{mn}$, соответствующее границе между колебательным и монотонным затуханием, является ключевым параметром для анализа устойчивости динамических систем [113].

В трубопроводных системах поршневых машин доминирующий вклад в энергетический спектр вносят низшие гармоники колебаний. Согласно методическим рекомендациям (п.2 РТМ 38.001–94), расчёт на динамическую устойчивость следует выполнять с учётом первых трех собственных частот каждого пролёта. Это позволяет обеспечить эффективную отстройку от резонансных режимов, снижая к минимуму риск возбуждения опасных колебаний в условиях эксплуатационных нагрузок.

Частотные характеристики, с учётом влияния демпфера и без него, определим для цилиндрической оболочки с потоком газа (газопровода), уложенного на глубину 3,0 м в обводнённом грунте или илистой почве, имеющей динамический коэффициент вязкости, который варьируется от $\eta = 0,5 \cdot 10^4$ (Па·с) до $\eta = 13,5 \cdot 10^4$ (Па·с).

Для проведения тестовых расчетов стальной и полиэтиленовой оболочки примем замкнутую цилиндрическую оболочку радиусом $r = 800$ мм с толщиной стенки $h = 39,2$ мм, длину участка обозначим как $L = 8 \cdot r$. «Коэффициент упругого отпора грунта в данном случае принимаем равным нулю, а физико-механические характеристики грунта (объемный вес $\gamma_{zp} = 1,6$ г/см³, $E = 10$ кгс/см²) – в соответствии с методическими указаниями по инженерно-геологическому обследованию болот при изысканиях автомобильных и железных дорог М:1973 (см. таблицу 2.20), коэффициент присоединённой массы грунта вычислим при $m=1$ $\kappa_{bj} = 0,94$; при $m=2$ $\kappa_{bj} = 0,49$; при $m=3$ $\kappa_{bj} = 0,33$ » [174]. Результаты расчёта сведены в таблицы 2.21–2.26.

Таблица 2.20 – Физико-механические свойства пресноводных илов

Виды ила		Природная влажность W , %	Объемный вес $\gamma_{гр}$, т/м ³	Модуль деформации E , кгс/см ²
Наименование	Определяющий признак			
Супесчаный	$1 < W < 1$	30–45	1,88–1,76	57–29
Суглинистый	$7 < W < 17$	30–60	1,89–1,65	32–12
Глинистый	$W > 17$	60–120	1,00–1,40	32–4

Таблица 2.21 – Частоты свободных колебаний цилиндрической стальной оболочки с газом (газопровод) при различных значениях внутреннего давления p_0 и коэффициента динамической вязкости η

$\eta \cdot 10^4$ (Па·с)	$H=3,0$ м; $P=0$; $L/r=8$; $k=0$ МПа/м; $h/r=1/20$								
	$p_0=2$ МПа			$p_0=4$ МПа			$p_0=6$ МПа		
	$\omega_{1,1}$	$\omega_{2,1}$	$\omega_{3,1}$	$\omega_{1,1}$	$\omega_{2,1}$	$\omega_{3,1}$	$\omega_{1,1}$	$\omega_{2,1}$	$\omega_{3,1}$
	$\omega^*_{1,1}$	$\omega^*_{2,1}$	$\omega^*_{3,1}$	$\omega^*_{1,1}$	$\omega^*_{2,1}$	$\omega^*_{3,1}$	$\omega^*_{1,1}$	$\omega^*_{2,1}$	$\omega^*_{3,1}$
0,5	55,33	31,2	71,41	55,33	33,45	75	55,33	35,55	78,43
	55,32	31,15	71,36	55,32	33,29	74,96	55,32	35,5	78,38
Разница, %	0,02	0,16	0,07	0,02	0,48	0,05	0,02	0,14	0,06
1,0	55,33	31,2	71,41	55,33	33,45	75	55,33	35,55	78,43
	55,29	30,97	71,22	55,29	33,29	74,82	55,29	35,34	78,26
Разница, %	0,07	0,74	0,27	0,07	0,48	0,24	0,07	0,59	0,22
1,5	55,33	31,2	71,41	55,33	33,45	75	55,33	35,55	78,43
	55,24	30,68	70,99	55,24	32,96	74,6	55,24	35,09	78,04
Разница, %	0,16	1,69	0,59	0,16	1,49	0,54	0,16	1,31	0,50
2,0	55,33	31,2	71,41	55,33	33,45	75	55,33	35,55	78,43
	55,17	30,26	70,66	55,17	32,57	74,28	55,17	34,72	77,74
Разница, %	0,29	3,11	1,06	0,29	2,70	0,97	0,29	2,39	0,89
2,5	55,33	31,2	71,41	55,33	33,45	75	55,33	35,55	78,43
	55,08	29,72	70,23	55,08	32,06	73,88	55,08	34,25	77,35
Разница, %	0,45	4,98	1,68	0,45	4,34	1,52	0,45	3,80	1,40
3,0	55,33	31,2	71,41	55,33	33,45	75	55,33	35,55	78,43
	54,98	29,04	67,7	54,98	31,44	73,38	54,98	33,66	76,87
Разница, %	0,64	7,44	5,48	0,64	6,39	2,21	0,64	5,61	2,03

Таблица 2.22 – Частоты свободных колебаний цилиндрической стальной оболочки с газом (газопровод) при различных значениях внутреннего давления p_0 и коэффициента динамической вязкости η

$\eta \cdot 10^4$ (Па·с)	$H=3,0$ м; $P=0$; $L/r=8$; $k=0$ МПа/м; $h/r=1/70$								
	$p_0=2$ МПа			$p_0=4$ МПа			$p_0=6$ МПа		
	$\omega_{1,1}$	$\omega_{2,1}$	$\omega_{3,1}$	$\omega_{1,1}$	$\omega_{2,1}$	$\omega_{3,1}$	$\omega_{1,1}$	$\omega_{2,1}$	$\omega_{3,1}$
	$\omega^*_{1,1}$	$\omega^*_{2,1}$	$\omega^*_{3,1}$	$\omega^*_{1,1}$	$\omega^*_{2,1}$	$\omega^*_{3,1}$	$\omega^*_{1,1}$	$\omega^*_{2,1}$	$\omega^*_{3,1}$
0,5	38,05	20,59	33,83	38,05	25,75	45,39	38,05	30,03	54,55
	38,02	20,34	33,53	38,02	25,55	45,16	38,02	29,87	54,36
Разница, %	0,08	1,23	0,89	0,08	0,78	0,51	0,08	0,54	0,35
1,0	38,05	20,59	33,83	38,05	25,75	45,39	38,05	30,03	54,55
	37,90	19,60	32,61	37,90	24,97	44,48	37,90	29,37	53,80
Разница, %	0,40	5,05	3,74	0,40	3,12	2,05	0,40	2,25	1,39
1,5	38,05	20,59	33,83	38,05	25,75	45,39	38,05	30,03	54,55

Окончание таблицы 2.22

	37,72	18,31	31,01	37,72	23,96	43,33	37,72	28,52	52,84
Разница %	0,87	12,45	9,09	0,87	7,47	4,75	0,87	5,29	3,24
2,0	38,05	20,59	33,83	38,05	25,75	45,39	38,05	30,03	54,55
	37,46	16,31	28,63	37,46	22,48	41,65	37,46	27,28	51,48
Разница %	1,58	26,24	18,16	1,58	14,55	8,98	1,58	10,08	5,96
2,5	38,05	20,59	33,83	38,05	25,75	45,39	38,05	30,03	54,55
	37,12	13,32	25,24	37,12	20,41	39,40	37,12	25,61	49,68
Разница %	2,51	54,58	34,03	2,51	26,16	15,20	2,51	17,26	9,80
3,0	38,05	20,59	33,83	38,05	25,75	45,39	38,05	30,03	54,55
	36,70	8,32	20,34	36,70	17,56	36,46	36,70	23,40	47,38
Разница %	3,68	147,48	66,32	3,68	46,64	24,49	3,68	28,33	15,13

Построим графики для минимальной частоты $\omega_{2,1}^*$ при различных значениях внутреннего рабочего давления p_0 .

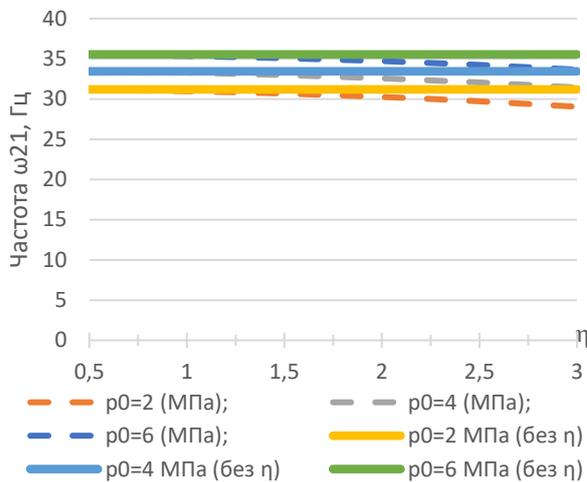


Рисунок 2.99 – Зависимость частот свободных колебаний стальной цилиндрической оболочки при $m=2$ и $n=1$; $p_0=2-6$ МПа; $h/R=1/20$; $L/r=8$; $k_s=0$ МПа/м; $P=0$

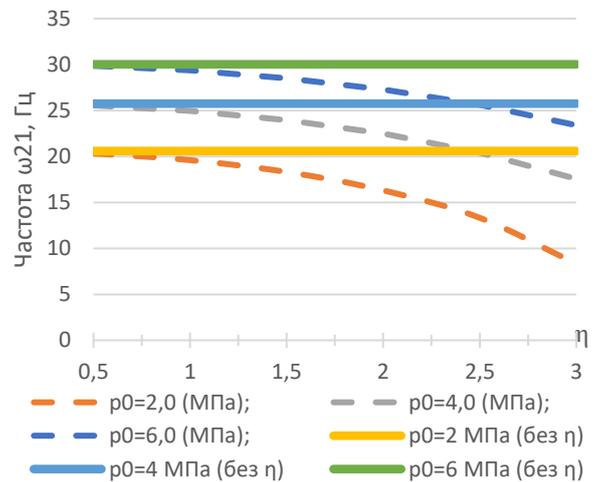


Рисунок 2.100 – Зависимость частот свободных колебаний стальной цилиндрической оболочки при $m=2$ и $n=1$; $p_0=2-6$ МПа; $h/R=1/70$; $L/r=8$; $k_s=0$ МПа/м; $P=0$

Таблица 2.23 – Частоты свободных колебаний цилиндрической полиэтиленовой оболочки с газом (газопровод) при различных значениях внутреннего давления p_0 и коэффициента динамической вязкости η

$\eta \cdot 10^4, \text{Па} \cdot \text{с}$	$H=3,0 \text{ м}; P=0; L/r=8; k=0 \text{ МПа/м}; h/r=1/20$								
	$p_0=0 \text{ МПа}$			$p_0=0,2 \text{ МПа}$			$p_0=0,4 \text{ МПа}$		
	$\omega_{1,1}$	$\omega_{2,1}$	$\omega_{3,1}$	$\omega_{1,1}$	$\omega_{2,1}$	$\omega_{3,1}$	$\omega_{1,1}$	$\omega_{2,1}$	$\omega_{3,1}$
0,5	$\omega_{1,1}^*$	$\omega_{2,1}^*$	$\omega_{3,1}^*$	$\omega_{1,1}^*$	$\omega_{2,1}^*$	$\omega_{3,1}^*$	$\omega_{1,1}^*$	$\omega_{2,1}^*$	$\omega_{3,1}^*$
	6,48	5,58	7,6	6,48	7,12	12,4	6,48	8,38	15,17
Разница %	6,18	4,95	-22,02	6,18	6,64	10,95	6,18	7,98	14
	4,85	12,73	134,51	4,85	7,23	13,24	4,85	5,01	8,36
1,0	6,48	5,58	7,6	6,48	7,12	12,4	6,48	8,38	15,17

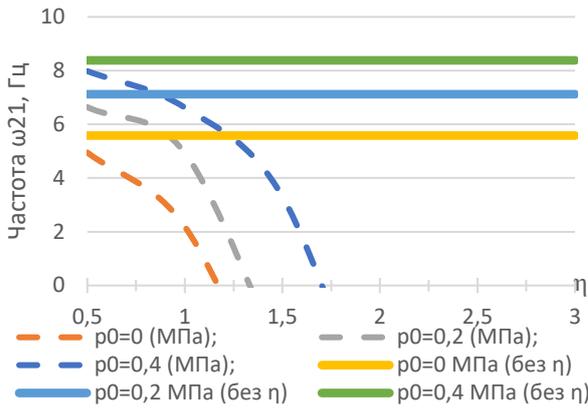


Рисунок 2.101 – Зависимость частот свободных колебаний полиэтиленовой цилиндрической оболочки при $m=2$ и $n=1$; $p_0=0-0,4$ МПа; $h/r=1/20$; $L/r=8$; $k_s=0$ МПа/м; $P=0$

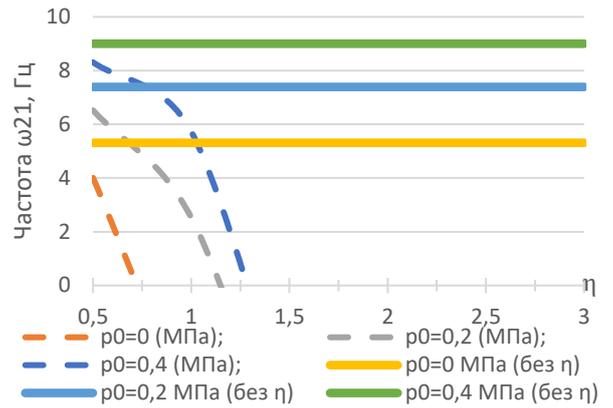


Рисунок 2.102 – Зависимость частот свободных колебаний полиэтиленовой цилиндрической оболочки при $m=2$ и $n=1$; $p_0=0-0,4$ МПа; $h/r=1/70$; $L/r=8$; $k_s=0$ МПа/м; $P=0$

Таблица 2.25 – Частоты свободных колебаний цилиндрической стальной оболочки с газом (газопровод) при различных значениях h/r и коэффициента динамической вязкости η

$\eta \cdot 10^4$ (Па·с)	$H=3,0$ м; $P=0$; $L/r=8$; $k=0$ МПа/м; $p_0=4$ МПа								
	$h/r=1/30$			$h/r=1/40$			$h/r=1/50$		
	$\omega_{1,1}$	$\omega_{2,1}$	$\omega_{3,1}$	$\omega_{1,1}$	$\omega_{2,1}$	$\omega_{3,1}$	$\omega_{1,1}$	$\omega_{2,1}$	$\omega_{3,1}$
0,5	54,00	31,14	60,52	47,96	28,44	51,25	43,69	27,17	47,61
	53,98	31,02	60,40	47,94	28,30	51,09	43,67	27,01	47,43
Разница %	0,04	0,39	0,20	0,04	0,49	0,31	0,05	0,59	0,38
1,0	54,00	31,14	60,52	47,96	28,44	51,25	43,69	27,17	47,61
	53,92	30,68	60,06	47,87	27,88	50,63	43,58	26,53	46,88
Разница %	0,15	1,50	0,77	0,19	2,01	1,22	0,25	2,41	1,56
1,5	54,00	31,14	60,52	47,96	28,44	51,25	43,69	27,17	47,61
	53,82	30,09	59,49	47,74	27,16	49,84	43,44	25,71	45,95
Разница %	0,33	3,49	1,73	0,46	4,71	2,83	0,58	5,68	3,61
2,0	54,00	31,14	60,52	47,96	28,44	51,25	43,69	27,17	47,61
	53,69	29,26	58,68	47,85	26,11	48,72	43,24	24,52	44,62
Разница %	0,58	6,43	3,14	0,23	8,92	5,19	1,04	10,81	6,70
2,5	54,00	31,14	60,52	47,96	28,44	51,25	43,69	27,17	47,61
	53,51	28,15	57,63	47,36	24,70	47,24	42,98	22,90	42,85
Разница %	0,92	10,62	5,01	1,27	15,14	8,49	1,65	18,65	11,11
3,0	54,00	31,14	60,52	47,96	28,44	51,25	43,69	27,17	47,61
	53,30	26,72	56,31	47,09	22,86	45,37	42,67	20,74	40,58
Разница %	1,31	16,54	7,48	1,85	24,41	12,96	2,39	31,00	17,32

Таблица 2.26 – Частоты свободных колебаний цилиндрической полиэтиленовой оболочки с газом (газопровод) при различных значениях h/r и коэффициента динамической вязкости η

$\eta \cdot 10^4$ (Па·с)	$H=3,0 \text{ м}; P=0; L/r=8; k=0 \text{ МПа/м}; p_0=0,2 \text{ МПа}$								
	$h/r=1/30$			$h/r=1/40$			$h/r=1/50$		
	$\omega_{1,1}$	$\omega_{2,1}$	$\omega_{3,1}$	$\omega_{1,1}$	$\omega_{2,1}$	$\omega_{3,1}$	$\omega_{1,1}$	$\omega_{2,1}$	$\omega_{3,1}$
	$\omega^*_{1,1}$	$\omega^*_{2,1}$	$\omega^*_{3,1}$	$\omega^*_{1,1}$	$\omega^*_{2,1}$	$\omega^*_{3,1}$	$\omega^*_{1,1}$	$\omega^*_{2,1}$	$\omega^*_{3,1}$
0,5	5,81	6,86	11,05	5,38	6,78	10,63	5,11	6,75	10,50
	5,65	6,35	10,36	5,19	6,25	9,90	4,91	6,21	9,75
Разница %	2,83	8,03	6,66	3,66	8,48	7,37	4,07	8,70	7,69
1,0	5,81	6,86	11,05	5,38	6,78	10,63	5,11	6,75	10,50
	5,11	4,47	7,96	4,60	4,28	7,28	4,27	4,19	7,03
Разница %	13,70	53,47	38,82	16,96	58,41	46,02	19,67	61,10	49,36
1,5	5,81	6,86	11,05	5,38	6,78	10,63	5,11	6,75	10,50
	4,07	–	–	3,38	–	–	2,90	–	–
Разница %	42,75	–	–	59,17	–	–	76,21	–	–
2,0	5,81	6,86	11,05	5,38	6,78	10,63	5,11	6,75	10,50
	1,78	–	–	–	–	–	–	–	–
Разница %	226,40	–	–	–	–	–	–	–	–
2,5	5,81	6,86	11,05	5,38	6,78	10,63	5,11	6,75	10,50
	–	–	–	–	–	–	–	–	–
Разница %	–	–	–	–	–	–	–	–	–
3,0	5,81	6,86	11,05	5,38	6,78	10,63	5,11	6,75	10,50
	–	–	–	–	–	–	–	–	–
Разница %	–	–	–	–	–	–	–	–	–

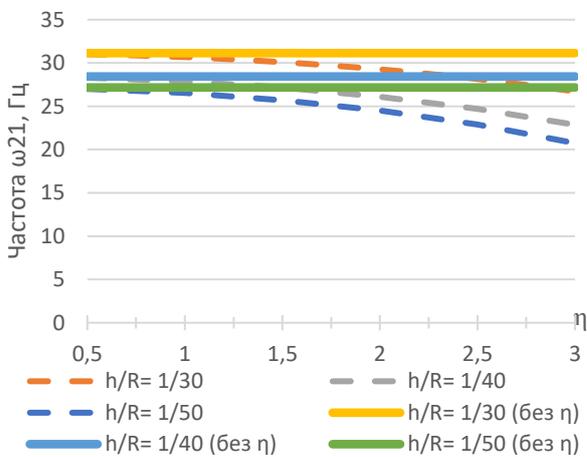


Рисунок 2.103 – Зависимость частот свободных колебаний стальной цилиндрической оболочки при $m=2$ и $n=1$; $p_0=2-6 \text{ МПа}$; $h/R=1/20$; $L/r=8$; $k_s=0 \text{ МПа/м}$; $P=0$

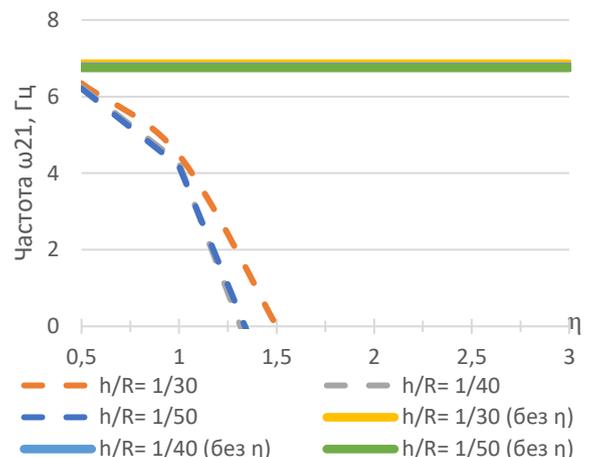


Рисунок 2.104 – Зависимость частот свободных колебаний полиэтиленовой цилиндрической оболочки при $m=2$ и $n=1$; $p_0=0-0,4 \text{ МПа}$; $h/R=1/70$; $L/r=8$; $k_s=0 \text{ МПа/м}$; $P=0$

На основании проведенного анализа полученных значений можно сформулировать следующие выводы.

Для стальной цилиндрической оболочки

При рассмотрении двух вариантов цилиндрических оболочек с соотношением толщины стенки к радиусу h/r , равной $1/20$ и $1/70$, заметны существенные отличия. При увеличении значений η от $0,5$ до $3,0 \cdot 10^4$ Па·с оболочка с h/r , равной $1/20$, за счет большей силы инерции менее восприимчива к демпфирующим свойствам окружающей среды, наибольшая разница значений реализуется при $3,0 \cdot 10^4$ Па·с и 4 МПа и составляет $6,39$ %. Для случая $h/r = 1/70$ тенденция снижения частот более выражена при $3,0 \cdot 10^4$ Па·с и 4 МПа и составляет $46,64$ %.

Для полиэтиленовой цилиндрической оболочки

При рассмотрении двух вариантов полиэтиленовых цилиндрических оболочек с соотношением толщины стенки к радиусу h/r , равной $1/20$ и $1/70$, в обоих случаях затухание колебаний с увеличением значений η от $0,5$ до $3,0 \cdot 10^4$ Па·с происходит достаточно быстро, например, уже при $1,0 \cdot 10^4$ Па·с частоты уменьшаются более чем в два раза, при дальнейшем увеличении η колебаний не происходит.

При размещении оболочки в обводненном грунте необходимо ответить на вопрос, за какое время происходит затухание колебаний. Решим систему разделяющихся линейных однородных дифференциальных уравнений вида $\varphi''(t) + 2d_m \varphi'(t) + \omega_{mn}^2 \varphi(t) = 0$ относительно времени t в MathCAD 15 при помощи решателя «Odesolve». Рассмотрим случай стальной оболочки и построим график зависимости перемещения от времени при различных значениях геометрических характеристик и внешних воздействиях.

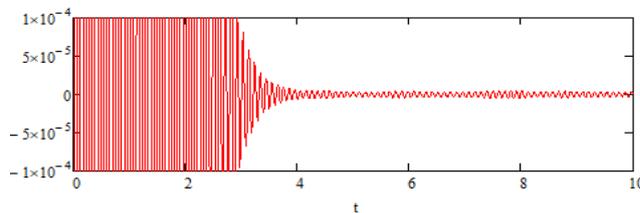


Рисунок 2.105 – Время затухания колебаний стальной цилиндрической оболочки в обводненном грунте при $m=2$ и $n=1$; $p_0=2$ МПа; $h/r=1/20$; $L/r=8$; $k_s=0$ МПа/м; $P=0$; $\eta = 0,5 \cdot 10^4$ Па·с

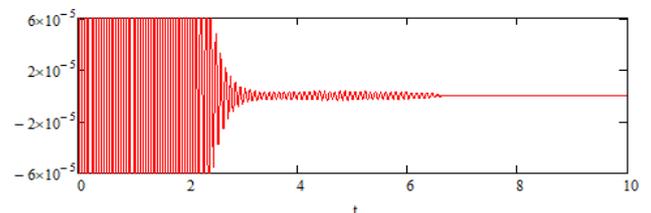


Рисунок 2.106 – Время затухания колебаний стальной цилиндрической оболочки в обводненном грунте при $m=2$ и $n=1$; $p_0=2$ МПа; $h/r=1/70$; $L/r=8$; $k_s=0$ МПа/м; $P=0$; $\eta = 0,5 \cdot 10^4$ Па·с

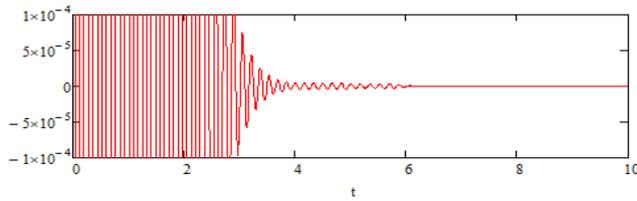


Рисунок 2.107 – Время затухания колебаний стальной цилиндрической оболочки в обводненном грунте при $m=2$ и $n=1$; $p_0=2$ МПа; $h/r=1/20$; $L/r=8$; $k_s=0$ МПа/м; $P=0,1$; $\eta = 0,5 \cdot 10^4$ Па \cdot с

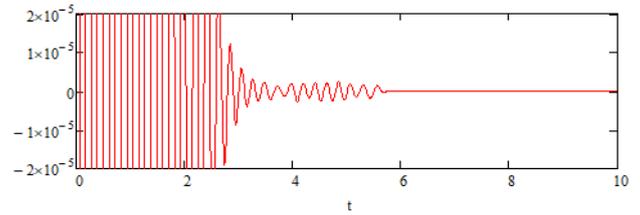


Рисунок 2.108 – Время затухания колебаний стальной цилиндрической оболочки в обводненном грунте при $m=2$ и $n=1$; $p_0=2$ МПа; $h/r=1/70$; $L/r=8$; $k_s=0$ МПа/м; $P=0,1$; $\eta = 0,5 \cdot 10^4$ Па \cdot с

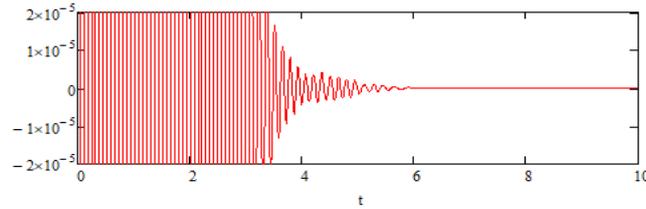


Рисунок 2.109 – Время затухания колебаний стальной цилиндрической оболочки в обводненном грунте при $m=2$ и $n=1$; $p_0=2$ МПа; $h/r=1/20$; $l/r=10$; $k_s=0$ МПа/м; $P=0,1$; $\eta = 0,5 \cdot 10^4$ Па \cdot с

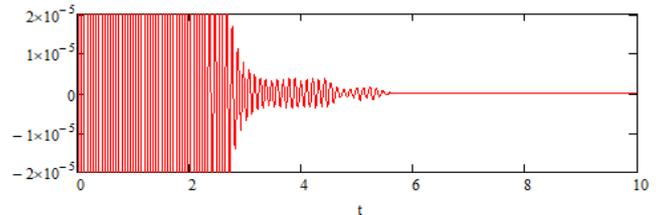


Рисунок 2.110 – Время затухания колебаний стальной цилиндрической оболочки в обводненном грунте при $m=2$ и $n=1$; $p_0=2$ МПа; $h/r=1/70$; $l/r=10$; $k_s=0$ МПа/м; $P=0,1$; $\eta = 0,5 \cdot 10^4$ Па \cdot с

Теперь рассмотрим случай полиэтиленовой цилиндрической оболочки и построим график зависимости перемещения от времени t .

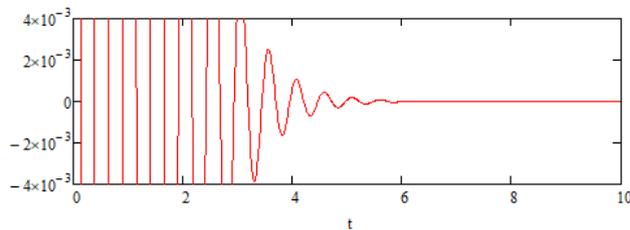


Рисунок 2.111 – Время затухания колебаний полиэтиленовой цилиндрической оболочки в обводненном грунте при $m=2$ и $n=1$; $p_0=0,1$ МПа; $h/r=1/20$; $L/r=8$; $k_s=0$ МПа/м; $P=0$; $\eta = 0,2 \cdot 10^4$ Па \cdot с

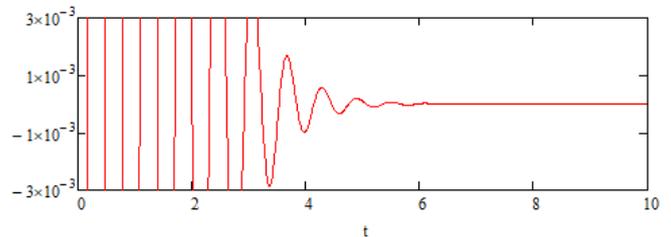


Рисунок 2.112 – Время затухания колебаний полиэтиленовой цилиндрической оболочки в обводненном грунте при $m=2$ и $n=1$; $p_0=0,1$ МПа; $h/r=1/70$; $L/r=8$; $k_s=0$ МПа/м; $P=0$; $\eta = 0,2 \cdot 10^4$ Па \cdot с

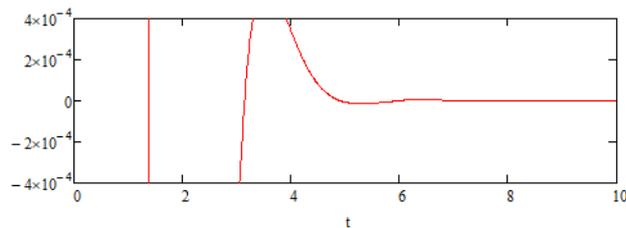


Рисунок 2.113 – Время затухания колебаний полиэтиленовой цилиндрической оболочки в обводненном грунте при $m=2$ и $n=1$; $p_0=0,1$ МПа; $h/r=1/20$; $L/r=8$; $k_s=0$ МПа/м; $P=0$; $\eta = 0,5 \cdot 10^4$ Па \cdot с

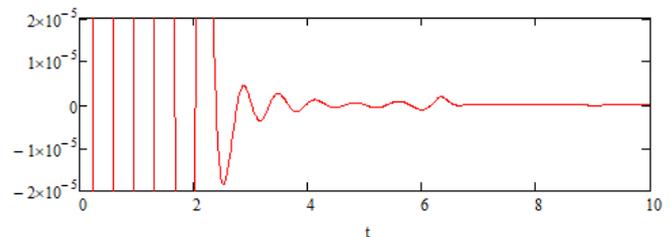


Рисунок 2.114 – Время затухания колебаний полиэтиленовой цилиндрической оболочки в обводненном грунте при $m=2$ и $n=1$; $p_0=0,1$ МПа; $h/r=1/70$; $L/r=8$; $k_s=0$ МПа/м; $P=0$; $\eta = 0,5 \cdot 10^4$ Па \cdot с

При анализе стальной и полиэтиленовой цилиндрической оболочки можно отметить, что в среднем время затухания составляет до 7 секунд, при этом затухание колебаний стальной оболочки является более плавным, чем для полиэтиленовой. Такой эффект объясняется большей силой инерции стальной оболочки.

2.9 Выводы по главе 2

По результатам комплексного анализа полученных решений по определению частот свободных колебаний тонкостенных замкнутых стальных и полиэтиленовых цилиндрических оболочек при наземном, частично заглубленном и подземном размещении необходимо отметить следующее:

1. На основании геометрически нелинейного варианта полубезмоментной теории цилиндрических оболочек среднего изгиба получено решение по определению частот свободных колебаний, позволяющее одновременно учесть совместное влияние внутреннего давления, параметра продольной сжимающей силы, давления внешней среды (в зависимости от рассматриваемой модели) и упругого отпора среды, температурного воздействия, скорости потока протекающей жидкости, присоединенной массы грунта и жидкости при различных значениях геометрических характеристик оболочки.

2. Используя критерий динамической устойчивости (когда частота обращается в ноль), определен предельный параметр продольной сжимающей силы, приводящий к потере устойчивости.

3. На основании равенства частот, определяемых при $m=1$ и $m=2$, получен параметр предельной длины участка L^* , который определяет критерий применимости теории цилиндрических оболочек в вопросах определения частот свободных колебаний.

4. При анализе полученных значений частот при наземном и подземном исполнении следует отметить большее влияние упругого отпора среды при подземном исполнении. Упругое основание увеличивает жесткость системы, что приводит к росту частот на 18–255 % в зависимости от коэффициента k_s и рассматриваемых параметров

внешних воздействий. Полиэтиленовые оболочки за счет меньшей цилиндрической жесткости более податливы к росту значений частот в связи с увеличением k_s .

5. Увеличение значений внутреннего рабочего давления значительно сказывается на увеличении частот свободных колебаний и может достигать 50 % по сравнению с пустой оболочкой.

6. С увеличением значений параметра длины L/r частоты снижаются, такой эффект объясняется возрастанием инерционной силы в связи с увеличением длины и массы рассматриваемого участка.

7. Для стальных цилиндрических оболочек значительное влияние оказывает параметр продольной сжимающей силы P , снижая частоты. При достижении критического значения $P_{кр}$ частоты обращаются в ноль, дальнейшего колебания не происходит. Такой эффект вызван местной потерей устойчивости рассматриваемого участка. Однако для полиэтиленовой оболочки тенденция снижения частот менее выражена, особенно в случае подземного размещения. Упругое основание существенно увеличивает жесткость участка и препятствует деформации поперечного сечения за счет радиального внешнего обжатия.

8. Оболочки чувствительны к температурному воздействию, нагрев способствует увеличению обжатия оболочки с двух торцов, что приводит к образованию дополнительных продольных сил, так, например, для стальной цилиндрической оболочки при изменении ΔT от -200 до $+200$ °C наибольшее снижение частот составляет 19,33 %, а для полиэтиленовой при ΔT от -50 до $+50$ °C – 9,33 %;

9. При помещении оболочек в среды с демпфирующими характеристиками наблюдается уменьшение значений определяемых частот. В случае повышения коэффициента динамической вязкости η в диапазоне от 5 до 30 кПа·с наиболее выраженное подавление колебаний фиксируется для полиэтиленовых конструкций. Это обусловлено их низкой плотностью и, как следствие, меньшей массой, что делает их более чувствительными к демпфирующим воздействиям со стороны окружающей среды.

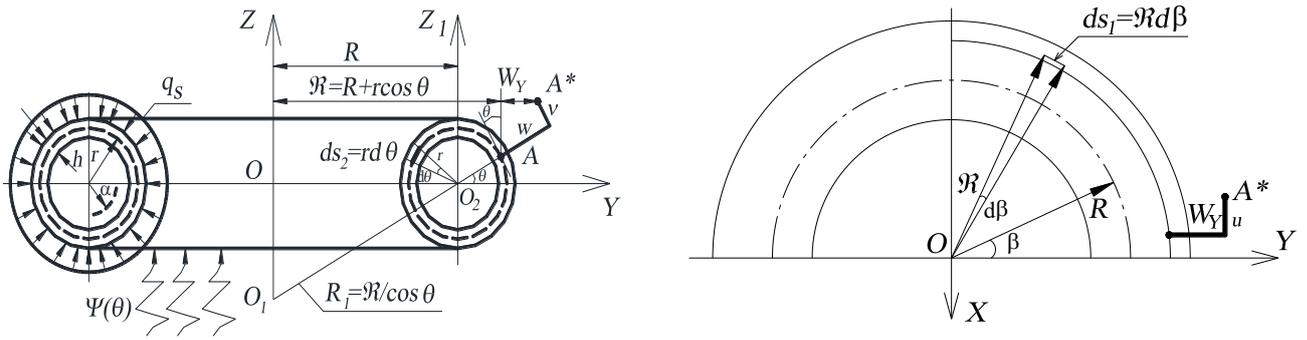
ГЛАВА 3. СВОБОДНЫЕ КОЛЕБАНИЯ ТОНКОСТЕННЫХ ТОРОИДАЛЬНЫХ ОБОЛОЧЕК В УПРУГОЙ СРЕДЕ

3.1 Описание расчетной модели и основных допущений геометрически нелинейного варианта полубезмоментной теории тонких тороидальных оболочек при различных способах размещения

Тороидальные оболочки находят широкое применение в различных областях инженерии, включая авиацию, космическую технику и строительство. Их уникальная геометрия обеспечивает высокую прочность при минимальном весе, что делает их идеальными для использования в условиях ограниченных ресурсов. Однако динамические характеристики таких оболочек существенно зависят от условий их размещения в упругой среде. Различные способы взаимодействия с основанием могут значительно изменить механические свойства оболочки и её поведение под нагрузкой.

Важным аспектом является учет свойств упругой среды, которая может как усиливать, так и ослаблять колебания оболочки. Для точного анализа необходимо разработать расчетную модель, учитывающую различные сценарии размещения тороидальной оболочки. Это позволит более глубоко понять механизмы взаимодействия и предсказать динамическое поведение конструкции. Наземное размещение предполагает размещение оболочки на упругом основании, подземное размещение – в упругой среде. Модель упругого основания – модель Фусса–Винклера.

Рассматривается расчетная модель участка трубопровода в виде замкнутой тороидальной оболочки (рисунок 3.1).



а) в плоскости Z–Y

б) в плоскости X–Y

Рисунок 3.1 – Криволинейный участок трубопровода в тороидальных координатах, с учетом влияния упругого основания и внешнего давления среды

на рисунке R – радиус продольной оси, проходящей через центр тяжести ее поперечных сечений, h – толщина оболочки. Величина отношения $\frac{h}{R}$ считается малой, что позволяет использовать соотношения теории оболочек, основанных на гипотезах Кирхгофа–Лява. На рисунке 3.1 изображен участок тороидальной оболочки со срединной поверхностью в тороидальных криволинейных координатах β, Θ , где β означает центральный угол тора, а Θ – угол в поперечном сечении оболочки ($0 \leq \Theta \leq 2\pi$), угол β изменяется в пределах $0 \leq \beta \leq \pi$ [3,4].

Оболочка подвержена совместному влиянию внутреннего давления, продольной сжимающей силы, давления внешней среды (в зависимости от рассматриваемой модели) и упругого отпора среды, температурной нагрузки, скорости потока протекающей жидкости, присоединенной массы грунта и жидкости при различных значениях геометрических характеристик оболочки.

В работе Матвеева Е.П. указано: «Уравнения движения изгибных колебаний тороидальной оболочки выводятся на основании общих соотношений геометрически нелинейной теории оболочек среднего изгиба, изложенной в монографии Х.М. Муштари и К.З. Галимова [143]. Эта теория рассматривает такой изгиб оболочек, при котором максимальный прогиб (в данном случае – радиальное перемещение точек срединной поверхности w) является величиной одного порядка с толщиной стенки или даже превышает ее, но мал по сравнению с другими линейными размерами оболочки» [138].

При рассмотрении срединной поверхности оболочки в криволинейных координатах β, θ дифференциалы отрезков дуг координатных линий ds_1 и ds_2 (см. рис. 5.1) связаны с дифференциалами самих координат через параметры Ламе A_1 и A_2 :

$$ds_1 = (R + r \cos \theta) d\beta, \quad ds_2 = r d\theta,$$

следовательно,

$$A_1 = R + r \cos \theta, \quad A_2 = r, \quad A_3 = 0. \quad (93)$$

Кривизны нормальных сечений срединной поверхности оболочки в недеформированном состоянии при $R_1 = \frac{\mathfrak{R}}{\cos \theta}$ и $R_2 = r$ по рисунку 3.1 определяются выражениями

$$\frac{1}{R_1} = \frac{\cos \theta}{R + r \cos \theta}, \quad \frac{1}{R_2} = \frac{1}{r}.$$

В диссертации [207] Соколов В.Г. отметил: «Компоненты перемещения произвольной точки A срединной поверхности (рис. 3.1) в положении A^* , отнесенные к радиусу r (т.е. безразмерные) и направленные вдоль координат β, θ, γ и по внешней нормали к срединной поверхности, обозначаются соответственно u, v, W_γ, w . Угол поворота касательной к средней линии контура поперечного сечения обозначается ϑ_2 .

При рассмотрении деформации тороидальной оболочки, возникающей при изгибных колебаниях в плоскости ее кривизны, используются допущения полубезмоментной теории оболочек В.З. Власова [40], строго обоснованные в работах А.Л. Гольденвейзера [62] и В.В. Новожилова [148] для достаточно длинных оболочек, у которых длина значительно больше радиуса поперечного сечения» [207]. В тороидальных координатах эти допущения формулируются в следующем виде:

– относительное удлинение в окружном направлении ε_2 мало по сравнению с относительным радиальным перемещением w и производной $\frac{\partial v}{\partial \theta}$, т.е.

$$\text{из } \varepsilon_2 = w + \frac{\partial v}{\partial \theta} \text{ имеем } w + \frac{\partial v}{\partial \theta} = 0;$$

– относительный сдвиг срединной поверхности γ мал по сравнению с углами поворота координатных линий, т.е.

$$\text{из } \gamma = \frac{r}{R} \frac{\partial v}{\partial \beta} + \frac{\partial u}{\partial \theta} \text{ имеем } \frac{r}{R} \frac{\partial v}{\partial \beta} + \frac{\partial u}{\partial \theta} = 0;$$

– угол поворота касательной к средней линии контура поперечного сечения определяется выражением

$$\vartheta_2 = \frac{\partial w}{\partial \theta} - v;$$

– возникающие в оболочке усилия и деформации связаны между собой соотношениями

$$\begin{aligned} M_1 &= \nu D \aleph_2; & T_1 &= Eh \varepsilon_1; & H_1 &= H_2 = H = (1 - \nu) D \tau; \\ M_2 &= D \aleph_2; & \varepsilon_2 + \nu \varepsilon_1 &= 0; & S_1 &= S_2 = S = \frac{Eh}{2(1 + \nu)} \gamma; \end{aligned}$$

где \aleph_2 – изменение кривизны;

D – цилиндрическая жесткость оболочки.

во всех уравнениях равновесия элемента оболочки (94), кроме четвертого, можно опустить величины поперечных сил Q_1 и крутящих моментов H .

Уравнения равновесия сил и моментов для элемента срединной поверхности тороидальной оболочки, находящейся в деформированном состоянии, имеют вид

$$\left\{ \begin{aligned} \frac{\partial}{\partial \beta} (A_2 T_1) + \frac{\partial}{\partial \theta} (A_1 S_2) + S_1 \frac{\partial A_1}{\partial \theta} - T_2 \frac{\partial A_2}{\partial \beta} + A_1 A_2 \left(\frac{Q_1}{R_1^*} + \tau Q_2 + X_1 \right) &= 0, \\ \frac{\partial}{\partial \theta} (A_1 T_2) + \frac{\partial}{\partial \beta} (A_2 S_1) + S_2 \frac{\partial A_2}{\partial \beta} - T_1 \frac{\partial A_1}{\partial \theta} + A_1 A_2 \left(\frac{Q_2}{R_2^*} + \tau Q_1 + X_2 \right) &= 0, \\ \frac{\partial}{\partial \beta} (A_2 Q_1) + \frac{\partial}{\partial \theta} (A_1 Q_2) - A_1 A_2 \left(\frac{T_1}{R_1^*} + \frac{T_2}{R_2^*} + S_1 \tau + S_2 \tau - X_3 \right) &= 0, \\ \frac{\partial}{\partial \beta} (A_2 M_1) + \frac{\partial}{\partial \theta} (A_1 H_2) + H_1 \frac{\partial A_1}{\partial \theta} - M_2 \frac{\partial A_2}{\partial \beta} - A_1 A_2 Q_1 &= 0, \\ \frac{\partial}{\partial \theta} (A_1 M_2) + \frac{\partial}{\partial \beta} (A_2 H_1) + H_2 \frac{\partial A_2}{\partial \beta} - M_1 \frac{\partial A_1}{\partial \theta} - A_1 A_2 Q_2 &= 0, \end{aligned} \right. \quad (94)$$

где X_1, X_2, X_3 – компоненты векторов внешнего усилия.

«Первые три уравнения (94) представляют собой уравнения равновесия сил, последние два – уравнения моментов.

Дифференциальные уравнения равновесия элемента оболочки (94) являются нелинейными, так как содержат произведения усилий и деформаций. Кроме того, они получены для оболочки, находящейся в деформированном состоянии. Поэтому в эти уравнения вошли радиусы кривизны R_1^* и R_2^* деформированной срединной

поверхности оболочки. Связь их с кривизной исходного состояния выражается в соответствии с [143] следующими соотношениями:

$$\frac{1}{R_1^*} = \frac{1}{R} \left(\cos \theta - \frac{r}{R} \frac{\partial^2 w}{\partial \beta^2} \right),$$

$$\frac{1}{R_2^*} = \frac{1}{r} \left(1 - \frac{\partial \vartheta}{\partial \theta} \right).$$

Изменение кривизны средней линии поперечного сечения оболочки κ_2 и кручение τ выражаются через угол поворота ϑ следующими соотношениями:

$$\kappa_2 = -\frac{1}{r} \frac{\partial \vartheta}{\partial \theta}, \tau = -\frac{1}{R} \frac{\partial \vartheta}{\partial \beta}.$$

В соответствии с допущениями полубезмоментной теории оболочек В.З. Власова [40] в первых трех уравнениях равновесия (94) пренебрегаем поперечной силой Q_1 , а в двух последних – крутящим моментом H . В результате после подстановки в (94) параметров Ламе (93) получим в соответствии с принципом Даламбера систему уравнений движения оболочки в усилиях» [207]:

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{r}{R} \frac{\partial T_1}{\partial \beta} + \frac{\partial S}{\partial \theta} + r\tau Q_2 + rX_1^* = 0, \\ \frac{r}{R} \frac{\partial S}{\partial \beta} + \frac{\partial T_2}{\partial \theta} + \frac{r}{R} T_1 \sin \theta + \frac{r}{R_2^*} Q_2 + rX_2^* = 0, \\ \frac{r}{R_1^*} T_1 + \frac{r}{R_2^*} T_2 + 2r\tau S - \frac{\partial Q_2}{\partial \theta} - rX_3^* = 0, \\ \frac{r}{R} \frac{\partial M_1}{\partial \beta} + \frac{\partial H}{\partial \theta} - rQ_1 = 0, \\ \frac{\partial M_2}{\partial \theta} - rQ_2 = 0, \end{array} \right. \quad (95)$$

где X_1^* , X_2^* , X_3^* – составляющие сил инерции по координатам β , θ и по нормали к срединной поверхности соответственно;

M_1 и M_2 – изгибающие моменты;

T_1 – продольное усиление;

S – сдвигающее усилие;

E – модуль упругости материала оболочки;

ν – коэффициент Пуассона.

Все параметры, обозначенные индексом 1, соответствуют координатным линиям β , индексом 2 – линиям θ .

3.2 Уравнения движения тороидальной оболочки при различных способах размещения

Исключив из уравнений (95) все усилия и моменты, кроме T_1 и M_2 , приходим к одному уравнению движения в усилиях:

$$\begin{aligned} & \frac{r^2}{R^2} \frac{\partial^2 T_1}{\partial \beta^2} + \frac{r}{R} \frac{\partial}{\partial \beta} \left(r \frac{\partial M_2}{\partial \theta} \right) + \frac{\partial^2}{\partial \theta^2} \left(\frac{R_2^*}{R_1^*} T_1 \right) - \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2}{\partial \theta^2} \left(R_2^* \frac{\partial^2 M_2}{\partial \theta^2} \right) - \\ & - \frac{\partial}{\partial \theta} \left(\frac{r}{R} T_1 \sin \theta \right) - \frac{\partial}{\partial \theta} \left(\frac{1}{R_2^*} \frac{\partial M_2}{\partial \theta} \right) + \frac{r^2}{R} \frac{\partial X_1^*}{\partial \beta} - r \frac{\partial X_2^*}{\partial \theta} - \frac{\partial^2}{\partial \theta^2} (R_2^* X_3^*) = 0, \end{aligned} \quad (96)$$

где $T_1 = Eh(\varepsilon_1 - \varepsilon_t) = Eh \left(\frac{F}{EA} + \frac{r}{R} \left(\frac{\partial u}{\partial \beta} + W_y \right) - \alpha_m \Delta T \right)$,

$$M_2 = D \kappa_2 = \frac{Eh^3}{12(1-\nu^2)} \left(-\frac{1}{r} \frac{\partial \vartheta}{\partial \theta} \right),$$

$$W_y = w \cos \theta - v \sin \theta,$$

где F – исходная продольная сила,

$$\varepsilon_1 = \varepsilon_0 + \frac{r}{R} \left(\frac{\partial u}{\partial \beta} + W_y \right), \quad \varepsilon_0 = \frac{F}{EA},$$

A – площадь поперечного сечения участка трубопровода,

u, v, w – отнесенные к радиусу r безразмерные компоненты перемещения,

W_y – проекция на ось y перемещения точки A срединной поверхности оболочки в положение A^* в результате деформации ее контура (рис. 3.1).

Ввиду нахождения участка трубопровода в изменяющейся температурной среде учтем влияние температурных деформаций в виде $\varepsilon_t = \alpha_m \Delta T$, $\Delta T = T - T_0$, где T – внутренняя температура, T_0 – внешняя температура, °C [168].

Радиусы кривизны R_1^* и R_2^* деформированной срединной поверхности оболочки выражаются в соответствии со следующими соотношениями:

$$\frac{1}{R_1^*} = \frac{1}{R} \left(\cos \theta - \frac{r}{R} \frac{\partial^2 w}{\partial \beta^2} \right), \quad \frac{1}{R_2^*} = \frac{1}{r} \left(1 - \frac{\partial \vartheta}{\partial \theta} \right), \quad (97)$$

где ϑ_2 – угол поворота касательной к средней линии сечения оболочки в результате деформации контура поперечного сечения.

Следует отметить, что согласно работе А.Ф. Смирнова, А.В. Александрова [197] будем полагать, что продольная сжимающая сила, действующая в каждом сечении арки – криволинейной оболочки, величина постоянная. Например, применяемые в газовой промышленности отводы холодного гнутья, в линейной

части имеют угол изгиба от 2 до 9 градусов, что соответствует диапазону соотношения r/R от 1/10 до 1/45, в этой связи такие кривые можно считать пологими, так как $f/L \leq 1/5$, тогда критическую продольную сжимающую силу можно представить в виде

$$N_{\text{кр}} \cong \frac{\pi^2 EI}{S_0^2} \approx F_3 = \frac{\pi^2 EI}{L^2}, \quad (98)$$

где $S_0^2 = R^2 \beta^2$.

Критическую силу, при которой происходит потеря статической устойчивости криволинейного трубопровода большой кривизны при $(\frac{f}{L} > 1/5)$, согласно работе [197], следует определять так:

$$N_{\text{кр}} = \left(\frac{\pi^2}{\beta^2} - 1 \right) \frac{EI}{R^2}, \quad (99)$$

где I – осевой момент инерции, мм⁴.

После преобразований, указанных в работах [178, 179, 180], уравнение движения в перемещениях имеет вид:

$$\begin{aligned} & \frac{r^2}{R^2} \frac{\partial^3 u}{\partial \beta \partial \theta^2} \cos \theta + \frac{r^3}{R^3} \frac{\partial^3 u}{\partial \beta^3} - \frac{r^2}{R^2} \frac{\partial}{\partial \theta} \left(\frac{\partial u}{\partial \beta} \sin \theta \right) + \frac{r^3}{R^3} \frac{\partial^2 W_y}{\partial \beta^2} + \\ & + \frac{r^2}{R^2} \frac{\partial}{\partial \theta} \left[\frac{\partial}{\partial \theta} (W_y \cos \theta) - W_y \sin \theta \right] + \frac{h^2}{r^2 12(1-\nu^2)} \frac{\partial^3}{\partial \theta^3} \left(\frac{\partial^2 \vartheta_2}{\partial \theta^2} + \vartheta_2 \right) - \\ & - 2(\varepsilon_0 - \varepsilon_t) \frac{r}{R} \left[\left(\frac{r}{R} \frac{\partial^4 w}{\partial \theta^2 \partial \beta^2} - \frac{\partial^3 \vartheta_2}{\partial \theta^3} \cos \theta + 2 \frac{\partial^2 \vartheta_2}{\partial \theta^2} \sin \theta + \frac{\partial \vartheta_2}{\partial \theta} \cos \theta \right) \right] - \\ & = - \frac{r^2}{EhR} \frac{\partial X_1^*}{\partial \beta} + \frac{r}{Eh} \frac{\partial X_2^*}{\partial \theta} + \frac{r}{Eh} \frac{\partial}{\partial \theta} \left(\frac{\partial^2 \vartheta}{\partial \theta^2} X_3^* + \frac{\partial X_3^*}{\partial \theta} \right), \end{aligned} \quad (100)$$

где ν – коэффициент Пуассона; r – радиус срединной поверхности оболочки, мм; R – радиус изгиба продольной оси, мм; X_i^* – составляющие сил инерции: тангенциальные составляющие сил инерции по координатам β и θ :

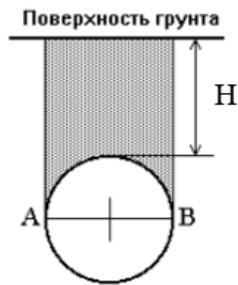
$$X_1^* = -rh\rho_0 \frac{\partial^2 u}{\partial t^2}, \quad X_2^* = -rh\rho_0 \frac{\partial^2 v}{\partial t^2}; \quad (101)$$

нормальная составляющая с учетом влияния внутреннего рабочего давления p и упругого отпора грунта:

$$X_3^* = -rh\rho_0 \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} + p_0 - q_{si} - K_{si} w + \quad (102)$$

$$+\mu_{bj} \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} - \rho_v \Phi_n^* \left(r \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} + \frac{V^2}{R} \frac{\partial^2 w}{\partial \beta^2} \right) - \eta \frac{\partial w}{\partial t},$$

где ρ_0 – плотность материала оболочки, p_0 – внутреннее постоянное давление, $\Phi_n^* = -2 \left[1 + 2 \frac{(P_{n-0.5}(ch r))'}{(P_{n-0.5}(ch r))} \right]^{-1}$ – Функция Лежандра, где $\frac{(P_{n-0.5}(ch r))'}{(P_{n-0.5}(ch r))}$ – функция Лежандра первого рода и её производная; q_{si} – внешнее давление грунта на оболочку представлено на рисунке и описано следующим выражением:



$$q_s = \gamma_s (H + 0,1073 \cdot D), \quad (103)$$

γ_s – удельный вес грунта, кН/м³

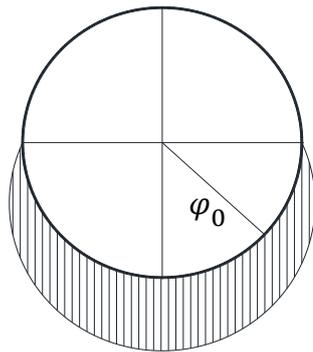
D – внешний диаметр трубопровода, мм;

H – глубина заложения, м

Рисунок 3.2 – Распределение внешнего давления грунта на оболочку от обратной засыпки

коэффициент K_{si} зависит от способа размещения в грунте:

– при наземном размещении $K_{s1} = \Psi(\theta)$, где $\Psi(\theta)$ – радиальное давление грунта на внешнюю поверхность оболочки, распределенное по полосе контакта, определяемое выражением:



$$\Psi(\theta) = \frac{kr}{\pi} \left[\frac{\varphi_0^3}{3} + \sum_{m=1}^{\infty} \varphi_m \cos m \theta \right], \quad (104)$$

$$\varphi_m =$$

$$= (-1)^m m^{-3} [2\varphi_m \cos \varphi_m - (\varphi_m^2 - 2) \sin \varphi_m];$$

$$\varphi_m = m\varphi_0,$$

где φ_0 – центральный угол вдавливания;

k_s – коэффициент упругого отпора грунта, МПа/м, по модели Фусса–Винклера [МПа/м].

Рисунок 3.3 – Давление грунта, распределенное по полосе контакта [173]:

– при подземном размещении $K_{s2} = k_s r$ – радиальный упругий отпор среды (грунта), окружающий оболочку:

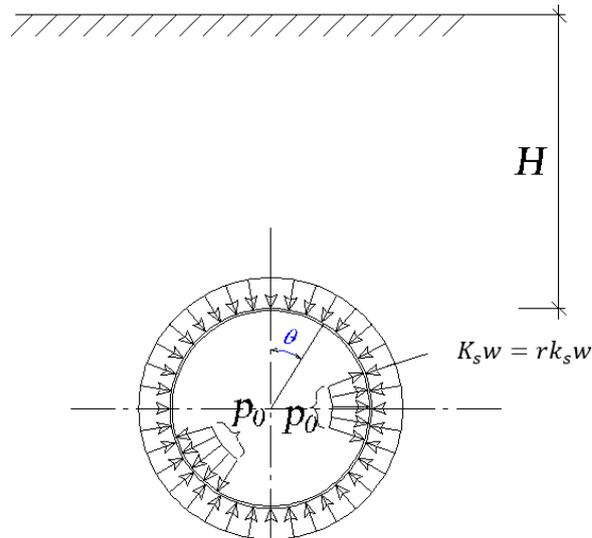


Рисунок 3.4 – Радиальное давление среды (грунта) на стенку оболочки при подземном размещении

Проведем преобразования выражения (100) с учетом (101), (102), получим

$$\begin{aligned}
 & \frac{r^3}{R^3} \frac{\partial^3 u}{\partial \beta^3} + \frac{r^2}{R^2} \frac{\partial^3 u}{\partial \theta^2 \partial \beta} \cos \theta - \frac{r^2}{R^2} \frac{\partial u}{\partial \beta} \cos \theta - \frac{r^2}{R^2} \frac{\partial^2 u}{\partial \theta \partial \beta} \sin \theta + \frac{r^3}{R^3} \frac{\partial^2 W_y}{\partial \beta^2} - \\
 & - 2 \frac{r^2}{R^2} \frac{\partial^4 w}{\partial \theta^2 \partial \beta^2} (\varepsilon_0 - \varepsilon_t) + \frac{r^2}{R^2} \frac{\partial}{\partial \theta} \left[\frac{\partial}{\partial \theta} (W_y \cos \theta) - W_y \sin \theta \right] + h_v^2 \frac{\partial^5 \vartheta}{\partial \theta^5} + \\
 & + 2 \frac{r}{R} (\varepsilon_0 - \varepsilon_t) \left(\frac{\partial^3 \vartheta}{\partial \theta^3} \cos \theta - 2 \frac{\partial^2 \vartheta}{\partial \theta^2} \sin \theta - \frac{\partial \vartheta}{\partial \theta} \cos \theta \right) + h_v^2 \frac{\partial^3 \vartheta}{\partial \theta^3} - \frac{r^2}{EhR^2} rh\rho \frac{\partial^3 u}{\partial \beta \partial t^2} + \quad (105) \\
 & + \frac{r}{Eh} rh\rho \frac{\partial^3 v}{\partial \theta \partial t^2} - \frac{r}{Eh} \left[rh\rho \frac{\partial^4 w}{\partial \theta^2 \partial t^2} - \frac{\partial^3 \vartheta}{\partial \theta^3} p_0 + \frac{\partial^3 \vartheta}{\partial \theta^3} q_s + \frac{\partial^2}{\partial \theta^2} K_{si} w - \mu_{bj} \frac{\partial^4 w}{\partial \theta^2 \partial t^2} + \right. \\
 & \left. + \frac{r}{Eh} \eta \frac{\partial^3 w}{\partial \theta^2 \partial t} + \rho_v r^2 \Phi_n^* \left(\frac{\partial^4 w}{\partial \theta^2 \partial t^2} + \frac{V^2}{r} \frac{\partial^4 w}{\partial \theta^2 \partial \beta^2} \right) \right] = 0,
 \end{aligned}$$

де h_v – параметр относительной толщины оболочки, $h_v = \frac{h}{R\sqrt{12(1-\nu^2)}}$.

Уравнение (105) представляет собой дифференциальное уравнение в частных производных с пятью неизвестными величинами u , v , w , W_y , ϑ . Неизвестные определяем, учитывая допущения полубезмоментной теории:

$$\frac{\partial v}{\partial \theta} + w = 0, \quad \frac{r}{R} \frac{\partial v}{\partial \beta} + \frac{\partial u}{\partial \theta} = 0, \quad \vartheta = \frac{\partial w}{\partial \theta} - v, \quad W_y = w \cos \theta - v \sin \theta.$$

В расчетах принят шарнирный тип закрепления оболочки. Для решения системы уравнений (105), нормальная составляющая перемещения при изгибных колебаниях тороидальной оболочки $w(\beta, \theta, t)$, имеет вид:

$$w|_{\beta=0} = 0, \frac{\partial^2 w}{\partial \beta^2} \Big|_{\beta=0} = 0. \quad (106)$$

а также удовлетворяющих условиям цикличности по окружной координате θ :

$$w(\beta, \theta, t) = \sum_m \sum_n f(t) b_m \cos(m\theta) \sin(k_\beta n\beta) \quad (107)$$

где $f(t)$ – функция времени t ; $b_m = \text{const}$; m, n – волновые числа, определяющие формы колебаний оболочки в окружном и продольном направлениях соответственно.

Ввиду того, что угол β изменяется в пределах $0 \leq \beta \leq \pi$, имеется практический интерес в рассмотрении участков трубопровода с различными углами β , тогда в компоненты перемещения при β необходимо ввести коэффициент k_β , варьирующийся от 0 до 1. Коэффициент k_β определяет длину криволинейного участка, а параметр R/r – непосредственно кривизну.

Остальные составляющие перемещения и угол поворота найдем из допущений полубезмоментной теории:

$$\begin{aligned} u(\beta, \theta, t) &= -\frac{r}{R} \sum_m \sum_n \frac{n}{m^2} f(t) b_{mn} \cos(m\theta) \cos(k_\beta n \cdot \beta), \\ v(\beta, \theta, t) &= -\sum_m \sum_n \frac{1}{m} f(t) b_{mn} \sin(m\theta) \sin(k_\beta n \cdot \beta), \\ \vartheta(\beta, \theta, t) &= -\sum_m \sum_n \frac{m^2 - 1}{m} f(t) b_m \sin(m\theta) \sin(k_\beta n \cdot \beta), \\ W_y(\beta, \theta, t) &= \sum_m \sum_n \frac{1}{2} \left(b_{m+1} \frac{m+2}{m+1} + b_{m-1} \frac{m-2}{m-1} \right) \cos(m\theta) \sin(k_\beta n \cdot \beta). \end{aligned} \quad (108)$$

Вычислим необходимые для решения частные производные по β и θ :

$$\begin{aligned}
& \left\{ \mu_0^4 h_v^2 n^4 k_\beta^3 b_m \sin m\theta - \frac{\mu_0^3}{2} h_v m^2 b_m \times \left[\sin(m-1)\theta + \sin(m+1)\theta + \right. \right. \\
& \quad \left. \left. + \left(b_{m+1} \frac{m+2}{m+1} + b_{m-1} \frac{m-2}{m-1} \right) \sin m\theta \right] + \frac{\mu_0^2}{4} \left(b_{m+1} + \right. \right. \\
& \quad \left. \left. + b_{m-1} \frac{m-2}{m-1} \right) \left[(m-2) \sin(m-1)\theta + (m+2) \sin(m+1)\theta + m^4 (m^2 - 1) (m^2 - \right. \right. \\
& \quad \left. \left. - 1 + p^* - q_s^*) b_m \sin m\theta + k_{si}^* m^4 b_m \sin m\theta - V^2 \mu_0 h_v \rho_0^* \Phi_n^* m^4 n^2 k_\beta b_m \sin m\theta - \right. \right. \\
& \quad \left. \left. - 2(\varepsilon_0 - \varepsilon_t) \frac{r^2}{h_v^2 R^2} n^2 k_\beta m^4 b_m \sin m\theta + (\varepsilon_0 - \varepsilon_t) \frac{r}{R} \frac{1}{h_v^2} b_m m^2 \left[(m^4 - 1) (\sin(m - \right. \right. \right. \\
& \quad \left. \left. - 1) \theta + \sin(m+1)\theta) + (\varepsilon_0 - \varepsilon_t) \frac{r}{R} \frac{1}{h_v^2} b_m m^2 \left[(2m^3 - 2m) (\sin(m-1)\theta - \right. \right. \right. \\
& \quad \left. \left. \left. \sin(m+1)\theta) \right] \right\} + \left\{ [r h \rho^* (\mu_0^2 h_v^2 n^2 k_\beta + m^4 + m^2)] + \right. \\
& \quad \left. \mu_{bj}^* m^4 + r^2 \rho_v^* \Phi_n^* m^4 \right\} b_m \sin m\theta \} \omega_{mn}^2 = 0,
\end{aligned} \tag{109}$$

где $G = \frac{r}{E h h_v^2}$, $\mu_{bj}^* = \mu_{bj} G$, $\mu_0 = \frac{r}{R h_v}$, $\rho^* = \rho_0 G$, $p^* = p_0^* G$, $\rho_v^* = \rho_v G$;

$k_{s1}^* = \frac{k_s r^2}{\pi E h h_v^2} |z_m|$ – параметр упругого основания (для случая наземного трубопровода);

z_m – коэффициент, зависящий от геометрических характеристик вдавливания трубы в грунт [183];

$k_{s2}^* = \frac{k_s r^2}{E h h_v^2}$ – параметр упругого отпора грунта (для случая подземного размещения), [178].

Далее приравняем коэффициенты при одинаковых тригонометрических функциях $\sin m\theta$ при $m = 1, 2, 3 \dots$. Приведем систему однородных линейных алгебраических уравнений к компактному виду:

$$a_{m,m-2} b_{m-2,n} + a_{m,m-1} b_{m-1,n} + a_{m,m} b_{m,n} + a_{m,m+1} b_{m+1,n} + a_{m,m+2} b_{m+2,n} = 0, \tag{110}$$

где $m = 1, 2, 3 \dots$; $m-1 > 0$; $m-2 > 0$, $n = 1, 2, 3, \dots, s$; $b_{mn} \neq 0$.

Для подробного анализа полученной системы однородных линейных алгебраических уравнений (110) представим её в матричной форме:

$$A \times B = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} & a_{35} & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & a_{42} & a_{43} & a_{44} & a_{45} & a_{46} & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & a_{53} & a_{54} & a_{55} & a_{56} & a_{57} & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & a_{64} & a_{65} & a_{66} & a_{67} & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & a_{75} & a_{76} & a_{77} & \dots & 0 \\ \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & a_{pp-2} & a_{pp-1} & a_{pp} \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} b_{n,1} \\ b_{n,2} \\ b_{n,3} \\ b_{n,4} \\ b_{n,5} \\ b_{n,6} \\ b_{n,7} \\ \dots \\ b_{n,p} \end{pmatrix}. \quad (111)$$

коэффициент a определяется выражениями:

$$a_{m,m} = A_{mn} - B_{mn}\omega_{mn}^2, \quad (112)$$

$$a_{m,m\pm 1} = \mu_0^3 h_v m^2 \frac{[(m^2 \pm m) + 1]}{(m \pm 1)} + P \mu_0^3 h_v n^2 k_\beta m^2 \left[m^4 \pm 2m^3 \mp m^{\frac{3}{2}} - 1 \right] -$$

$$-0,5T^* \mu_0 h_v^{-1} m^2 [m^4 \pm 2m^3 \mp m^{\frac{3}{2}} - 1],$$

$$a_{m,m\pm 2} = \mu_0^2 m^2 \frac{(m \pm 3)(m \mp 1)}{4(m \pm 2)},$$

$$A_{mn} = \mu_0^4 n^4 k_\beta^3 h_v^2 + m^4 (m^2 - 1)(m^2 - 1 + p^* - q_{si}^*) + k_{si}^* m^4 -$$

$$-P \mu_0^4 h_v^2 n^2 k_\beta m^4 + T_{tor}^* \mu_0^2 n^2 k_\beta m^4 - V^2 \mu_0 h_v \rho_v^* \Phi_n^* m^4 n^2 k_\beta b_m + 0,5 \mu_0^2 m^2 (m^2 + 1),$$

$$B_{mn} = \rho^* r h (\mu_0^2 n^2 k_\beta h_v^2 + m^4 + m^2) + \mu_{bj}^* m^4 + \rho_v^* \Phi_n r^2 m^4,$$

где $P = \frac{F}{N_{cr}}$ – параметр продольной сжимающей силы; $T^* = 2\alpha_m \Delta T$.

Используя тот же математический аппарат, что и в работе [205], усеченный определитель матрица A после всех преобразований имеет вид

$$|A - \lambda E| = \begin{vmatrix} d_{1,1} - \lambda & d_{1,2} & d_{1,3} \\ d_{2,1} & d_{2,2} - \lambda & d_{2,3} \\ d_{3,1} & d_{3,2} & d_{3,3} - \lambda \end{vmatrix} = 0, \quad (113)$$

где приняты обозначения:

$$\lambda = \omega^2, \quad d_{m,m} = \frac{A_{mn}}{B_{mn}}, \quad (114)$$

$$d_{m,m\pm 1} = \frac{a_{m,m\pm 1}}{B_{mn}}, \quad d_{m,m\pm 2} = \frac{a_{m,m\pm 2}}{B_{mn}}.$$

Коэффициенты A_{mn} , B_{mn} , $a_{m,m\pm 1}$, $a_{m,m\pm 2}$ определяются по формулам (112), где приняты обозначения:

$$\lambda = \omega^2, \quad d_{m,m} = \frac{A_{mn}}{B_{mn}}, \quad (115)$$

$$d_{m,m\pm 1} = \frac{a_{m,m\pm 1}}{B_{mn}}, \quad d_{m,m\pm 2} = \frac{a_{m,m\pm 2}}{B_{mn}}.$$

После раскрытия определителя (113) получаем характеристическое уравнение степени, где λ_i является собственным значением, позволяющим определить квадрат частот свободных колебаний тороидальной оболочки.

Если взять матрицу 1-го порядка при волновом числе $m=1$, то из (113) получим линейное характеристическое уравнение относительно λ

$$d_{1,1} - \lambda = 0. \quad (116)$$

Рассматривая матрицу 2-го порядка при волновых числах $m=1$ и 2, имеем из (113):

$$\begin{vmatrix} d_{1,1} - \lambda & d_{1,2} \\ d_{2,1} & d_{2,2} - \lambda \end{vmatrix} = 0. \quad (117)$$

Для матрицы 3-го порядка получаем кубическое характеристическое уравнение матрицы A , соответствующее формам колебаний при $m = 1, 2, 3$:

$$\lambda^3 - I_1\lambda^2 + I_2\lambda - I_3 = 0. \quad (118)$$

В тех случаях, когда влияние побочных коэффициентов составляет не более 3–5 %, для расчетов можно принять выражение в следующем виде:

– для тороидальной оболочки с потоком газа:

$$\omega_{mn}^2 = \frac{\mu_0^4 n^4 k_\beta^3 h_v^2 + m^4 (m^2 - 1)(m^2 - 1 + p_0^* - q_{si}^*)}{\rho^* r h (\mu_0^2 n^2 h_v^2 k_\beta + m^4 + m^2) + \mu_{bj}^* m^4} + \frac{k_{si}^* m^4 - P \mu_0^4 h_v^2 n^2 k_\beta m^4 + T_{tor}^* \mu_0^2 n^2 k_\beta m^4 + 0,5 \mu_0^2 m^2 (m^2 + 1)}{\rho^* r h (\mu_0^2 n^2 h_v^2 k_\beta + m^4 + m^2) + \mu_{bj}^* m^4}, \quad (119)$$

для тороидальной оболочки с потоком жидкости:

$$\omega_{mn}^2 = \frac{\mu_0^4 n^4 k_\beta^3 h_v^2 + m^4 (m^2 - 1)(m^2 - 1 + p_0^* - q_{si}^*)}{\rho^* r h (\mu_0^2 n^2 h_v^2 k_\beta + m^4 + m^2) + \mu_{bj}^* m^4 + \rho_v^* \Phi_n r^2 m^4} + \frac{k_{si}^* m^4 - P \mu_0^4 h_v^2 n^2 k_\beta m^4 + T_{tor}^* \mu_0^2 n^2 k_\beta m^4 + 0,5 \mu_0^2 m^2 (m^2 + 1) - \rho_v \Phi_n \mu_0 h_v V^2 m^4 n^2}{\rho^* r h (\mu_0^2 n^2 h_v^2 k_\beta + m^4 + m^2) + \mu_{bj}^* m^4 + \rho_v^* \Phi_n r^2 m^4}. \quad (120)$$

Полученное выражение (120) позволяет определить широкий спектр частот по оболочечным формам при волновых числах m и $n=1, 2, 3, \dots$, с учетом совместного влияния внутреннего давления, параметра продольной сжимающей силы, давления внешней среды (в зависимости от рассматриваемой модели) и упругого отпора среды, температурного воздействия, скорости потока протекающей жидкости, присоединенной массы грунта и жидкости при различных значениях геометрических характеристик тороидальной оболочки.

Произведем сопоставления аналитических решений, полученных для цилиндрической и тороидальной оболочки. В выражениях (112) в A_{mn} получено новое слагаемое, учитывающее влияние параметра продольной сжимающей силы, которое имеет вид

$$P\mu_0^4 h_v^2 n^2 m^4. \quad (121)$$

В работе [174] для прямолинейного участка было получено выражение по определению квадрата частоты свободных колебаний подземного нефтепровода, которое имеет вид

$$P\tilde{\lambda}_n^4 m^4 n^{-2}, \quad (122)$$

где $\tilde{\lambda}_n = \frac{n\pi r}{l\sqrt{h_v}}$.

Выражение (122) было получено для цилиндрической оболочки, а (121) для тороидальной. Проведем преобразование выражения (122):

$$\frac{n^4 \pi^4 r^4}{l^4 h_v^2} P m^4 n^{-2},$$

где $l = R\beta$, β – центральный угол тора, $k_\beta = 1$, $\beta = 180^\circ$ или π , тогда

$$\frac{n^4 \pi^4 r^4}{(R\pi)^4 h_v^2} P m^4 n^{-2}, \quad \text{следовательно,} \quad \frac{n^4 \pi^4 r^4}{(R\pi)^4 h_v^2} P m^4 n^{-2}, \quad \text{после преобразования}$$

получим

$$P\mu_0^4 h_v^2 n^2 m^4,$$

где $\mu_0^4 = \frac{r^4}{R^4 h_v^4}$.

Аналогично проведем процедуру преобразования и со слагаемым $T^* \mu_0^2 n^2 m^4$, учитывающим влияние температуры. В статье [168] получено выражение для цилиндрической оболочки:

$$T^* \tilde{\lambda}_n^2 m^4,$$

где $T^* = \frac{2\alpha_m \Delta T}{h_v}$.

Учитывая, что $\tilde{\lambda}_n^2 = \frac{n^2 \pi^2 r^2}{l^2 h_v}$, а $l = R\beta$, получим $T^* \mu_0^2 n^2 m^4$.

В результате проведенного преобразования решения для тороидальной оболочки удалось доказать правомерность полученных решений в сравнении с частным случаем для цилиндрической оболочки.

3.3 Определение значений предельных параметров замкнутой тороидальной оболочки

Критическое внешнее давление на оболочку q_{sigr} при подземном размещении.

Используя динамический критерий устойчивости, при которой частота свободных колебаний обращается в ноль $\omega_{m1} = 0$, то из формулы (120) можно определить величину критического внешнего давления.

Увеличение глубины заложения тороидальной оболочки приводит к росту внешней нагрузки, что в критических случаях может вызвать местную потерю устойчивости рассматриваемого участка. Для предотвращения этого явления требуется определить максимальное внешнее давление, действующее со стороны окружающей среды, на основе анализа динамической устойчивости. Критерий динамической устойчивости формулируется исходя из условия сохранения целостности оболочки при достижении предельных значений нагрузки, что требует учёта геометрических параметров, упругих характеристик материала и гидродинамических взаимодействий в рамках нелинейной теории оболочек. Критические величины внешней нагрузки определяются следующим образом:

– для тороидальной оболочки с газом:

$$q_{sigr} = \frac{\mu_0^4 n^4 k_\beta^3 h_v^2 + k_{si}^* m^4 - P \mu_0^4 h_v^2 n^2 k_\beta m^4 + T_{tor}^* \mu_0^2 n^2 k_\beta m^4 + 0,5 \mu_0^2 m^2 (m^2 + 1)}{m^4 (m^2 - 1)} + (m^2 - 1 + p^*); \quad (123)$$

– для тороидальной оболочки с жидкостью:

$$q_{sigrv} = \frac{\mu_0^4 n^4 k_\beta^3 h_v^2 + k_{si}^* m^4 - P \mu_0^4 h_v^2 n^2 k_\beta m^4 + T_{tor}^* \mu_0^2 n^2 k_\beta m^4 + 0,5 \mu_0^2 m^2 (m^2 + 1) - \tilde{\lambda}_n^4 \rho_v^* \Phi_n V^2 m^4 h_v}{m^4 (m^2 - 1)} + (m^2 - 1 + p^*). \quad (124)$$

Критерий применимости теории тороидальных оболочек

Анализ частот свободных изгибных колебаний тороидальных оболочек показывает, что при некотором параметре кривизны трубы R^* значение

наименьших частот, рассчитанных при $m=1$ и $m=2$, совпадают. При этом длина $l^* = R^* \cdot \pi$ зависит от параметра тонкостенности трубы, внутреннего рабочего давления, коэффициента упругого основания грунта, скорости потока протекающей жидкости, влияния присоединенной массы грунта и жидкости и параметра продольной сжимающей силы. Определение параметра длины R^* позволяет определить критерий применимости теории оболочек для определения наименьших частот свободных колебаний. Для получения формулы R^* приравняем правые части формулы (120) при $m=1$ и $m=2$. Ввиду того, что полученное решение имеет слагаемые при μ_0^4 , μ_0^2 и μ_0 получить простое инженерное решение не представляется возможным, необходимо решать уравнение следующего вида для тороидальной оболочки с жидкостью

$$A \cdot R^{*-4} + B \cdot R^{*-2} + C \cdot R^{*-1} + D = 0, \quad (125)$$

где

$$A = \left(\frac{h_v^2 \cdot n^4 - P \cdot h_v^2 \cdot n^2}{\rho_v^* \Phi_{mn} r^2 + 2h\rho^* r + \mu_{b1}^*} - \frac{h_v^2 \cdot n^4 - 4P \cdot h_v^2 \cdot n^4}{16\rho_v^* \Phi_n r^2 + 20h\rho^* r + 16\mu_{b2}^*} \right) \frac{r^4}{h_v^4};$$

$$B = \left(\frac{T_{tor}^* + 1}{\rho_v^* \Phi_{mn} r^2 + 2h\rho^* r + \mu_{b1}^*} - \frac{16T_{tor}^* n^2 + 10}{16\rho_v^* \Phi_n r^2 + 20h\rho^* r + 16\mu_{b2}^*} \right) \frac{r^2}{h_v^2};$$

$$C = \left(\frac{16V^2 h_v n^2 \rho_v^* \Phi_n}{16\rho_v^* \Phi_n r^2 + 2h\rho^* r + 16\mu_{b2}^*} - \frac{V^2 h_v n^2 \rho_v^* \Phi_n}{\rho_v^* \Phi_n r^2 + 2h\rho^* r + \mu_{b1}^*} \right) \frac{r}{h_v};$$

$$D = \left(\frac{k^*}{\rho_v^* \Phi_n r^2 + 2h\rho^* r + \mu_{b1}^*} - \frac{16k^* + 48p^* - 48q_s + 144}{\rho_v^* \Phi_n r^2 + 2h\rho^* r + 16\mu_{b2}^*} \right).$$

Уравнение (125) позволяет установить границу применимости полученных в диссертации решений для определения частот свободных колебаний участка трубопровода с позиции теории тороидальных оболочек. Установив параметр кривизны участка R^* , можно определить границу перехода от оболочечной формы колебаний к стержневой.

3.4 Определение частот и форм свободных колебаний тороидальной оболочки при наземном размещении на упругом основании

В целях определения минимальных значений частот и форм колебаний определим спектр частот стальной тороидальной оболочки с потоком жидкости

и газа при различных значениях волновых чисел m и n и представим полученные значения в виде графиков на рисунках 3.5–3.6.

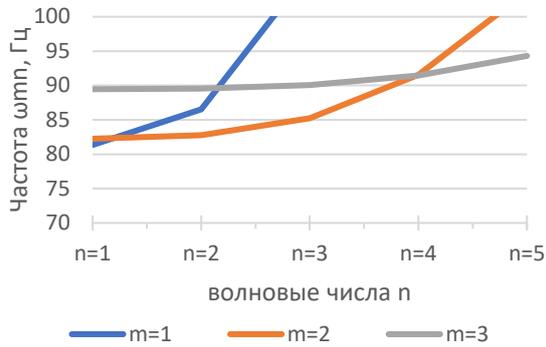


Рисунок 3.5 – Зависимость частот свободных колебаний тороидальной оболочки с газом от волновых чисел m и n при $p_0=0$ МПа; $h/R=1/70$; $R/r=10$; $k_s = 0$ МПа/м; $P=0$

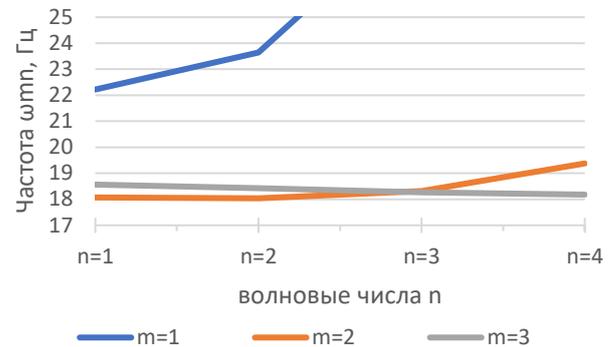


Рисунок 3.6 – Зависимость частот свободных колебаний тороидальной оболочки с жидкостью от волновых чисел m и n при $p_0=0$ МПа; $h/R=1/70$; $R/r=10$; $V=20$ м/с; $k_s = 0$ МПа/м; $P=0$

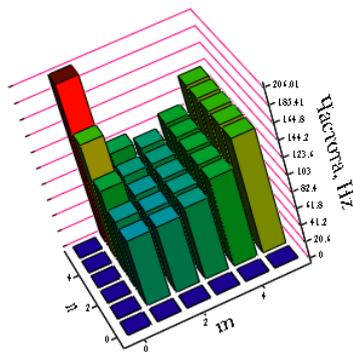


Рисунок 3.7 – Зависимость частот свободных колебаний тороидальной оболочки с газом от волновых чисел m и n при $p_0=0$ МПа; $h/R=1/70$; $R/r=10$; $k_s = 0$ МПа/м; $P=0$

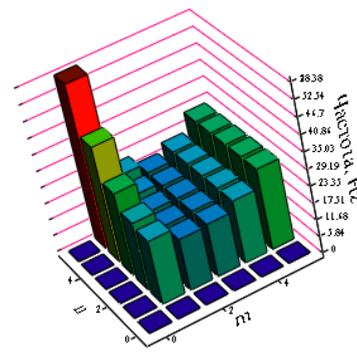


Рисунок 3.8 – Зависимость частот свободных колебаний тороидальной оболочки с жидкостью от волновых чисел m и n при $p_0=0$ МПа; $h/R=1/70$; $R/r=10$; $V=20$ м/с; $k_s = 0$ МПа/м; $P=0$

Из расчетов следует, что при параметре $R/r=10$ и 20 в случае с газопроводом минимальные частоты, хоть и близки к оболочечным, но все же являются минимальными при различных геометрических характеристиках при $m=1$ и $n=1$, что подтверждается тестовой симуляцией в программе ANSYS 2019 R3, результаты первой формы колебаний представлены на рисунках 3.9, 3.10.

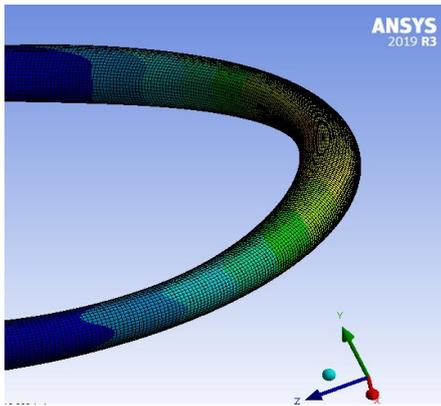


Рисунок 3.9 – Минимальная форма свободных колебаний тороидальной оболочки (безнапорная) в верхнем положении

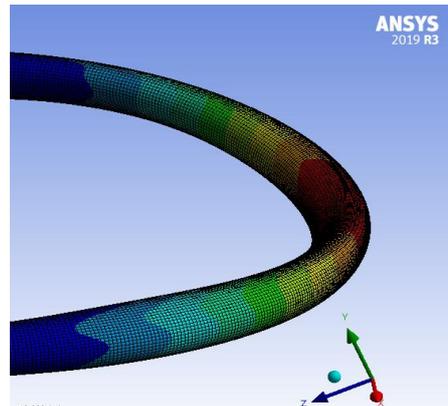


Рисунок 3.10 – Минимальная форма свободных колебаний тороидальной оболочки (безнапорная) в нижнем положении

Однако ситуация меняется при $n=2, 3, 4$ и т.д., где минимальные частоты уже реализуются по оболочечной форме колебаний, в качестве иллюстрации представлены рисунки 3.11, 3.12.

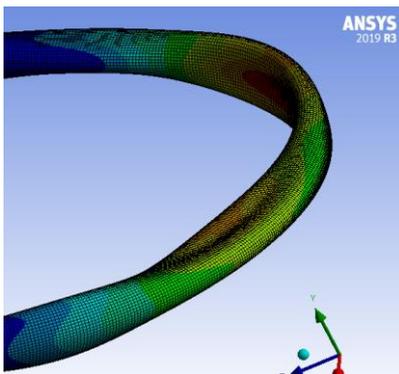


Рисунок 3.11 – Минимальная форма свободных колебаний тороидальной оболочки (безнапорная) в верхнем положении при частоте ω_{22}

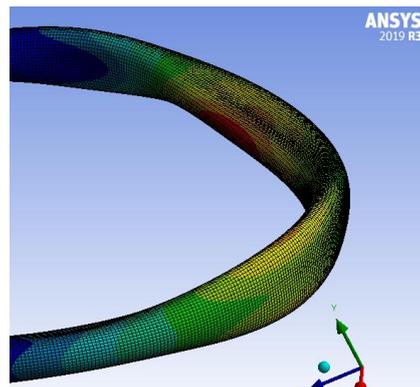


Рисунок 3.12 – Минимальная форма свободных колебаний тороидальной оболочки (безнапорная) в нижнем положении при частоте ω_{22}

В случае учета влияния присоединенной массы жидкости и скорости потока протекающей жидкости картина распределения частот меняется и минимальные частоты реализуются уже при $m=2$ и $n=1$.

Исследуем влияние внешних нагрузок и геометрических характеристик на частоты свободных колебаний криволинейного участка газопровода при наземном размещении для трех первых наиболее важных для динамических расчетов гармоник ω_{mn} . Полученные по формуле (120) значения частот сведем в таблицы 3.1, 3.2.

Таблица 3.1 – Зависимость частот свободных изгибных колебаний ω_{mn} наземного газопровода от параметра кривизны участка R/r , параметра тонкостенности h/r и коэффициента упругого отпора k_s

$p_0=0$ (безнапорная)												
Коэф. упругого отпора k_s (МПа/м)	ω_{min}	$R/r=10$					ω_{min}	$R/r=20$				
		$h/r=1/30$	ω_{min}	$h/r=1/50$	ω_{min}	$h/r=1/70$		$h/r=1/30$	ω_{min}	$h/r=1/50$	ω_{min}	$h/r=1/70$
$k_s=1$	ω_{11}	81,41	ω_{11}	81,56	ω_{11}	81,66	ω_{11}	40,87	ω_{11}	41,05	ω_{11}	41,2
	ω_{12}	86,62	ω_{21}	83,65	ω_{21}	82,75	ω_{12}	41,54	ω_{12}	41,71	ω_{12}	41,9
	ω_{21}	86,93	ω_{22}	84,14	ω_{22}	83,28	ω_{13}	44,49	ω_{13}	44,65	ω_{21}	43,6
$k_s=10$	ω_{11}	82,73	ω_{11}	83,55	ω_{11}	84,43	ω_{11}	43,26	ω_{11}	44,88	ω_{11}	46,5
	ω_{12}	87,84	ω_{21}	86,77	ω_{21}	87,10	ω_{12}	43,88	ω_{12}	45,48	ω_{12}	47,0
	ω_{21}	88,84	ω_{22}	87,28	ω_{22}	87,60	ω_{13}	46,67	ω_{13}	48,17	ω_{13}	49,6
$k_s=20$	ω_{11}	84,03	ω_{11}	85,76	ω_{11}	87,40	ω_{11}	45,76	ω_{11}	48,79	ω_{11}	51,7
	ω_{12}	89,04	ω_{21}	90,09	ω_{21}	91,69	ω_{12}	46,34	ω_{12}	49,33	ω_{12}	52,2
	ω_{21}	90,75	ω_{22}	90,56	ω_{22}	92,16	ω_{13}	48,98	ω_{13}	51,79	ω_{13}	54,5

Таблица 3.2 – Зависимость частот свободных изгибных колебаний ω_{mn} наземного газопровода от параметра кривизны участка r/R , параметра тонкостенности h/r и коэффициента упругого отпора k_s

$p_0=0$ (безнапорная)							$p_0=2$ МПа					
Коэф. упругого отпора k_s (МПа/м)	ω_{min}	$R/r=5$				$R/r=5$						
		$h/r=1/30$	ω_{min}	$h/r=1/50$	ω_{min}	$h/r=1/70$	ω_{min}	$h/r=1/30$	ω_{min}	$h/r=1/50$	ω_{min}	$h/r=1/70$
$k_s=1$	ω_{11}	163,88	ω_{21}	163,70	ω_{21}	163,25	ω_{11}	163,95	ω_{11}	163,99	ω_{11}	164,03
	ω_{21}	165,31	ω_{11}	163,99	ω_{11}	164,04	ω_{21}	168,30	ω_{21}	168,45	ω_{21}	169,88
	ω_{22}	169,51	ω_{22}	167,95	ω_{22}	167,51	ω_{22}	172,40	ω_{22}	172,55	ω_{22}	173,94
$k_s=10$	ω_{11}	164,55	ω_{11}	164,97	ω_{11}	165,41	ω_{11}	164,55	ω_{11}	164,97	ω_{11}	165,41
	ω_{21}	166,39	ω_{21}	165,30	ω_{21}	165,50	ω_{21}	169,25	ω_{21}	170,01	ω_{21}	172,04
	ω_{22}	170,55	ω_{22}	169,50	ω_{22}	169,69	ω_{22}	173,33	ω_{22}	174,06	ω_{22}	176,04
$k_s=20$	ω_{11}	165,21	ω_{11}	166,06	ω_{11}	166,92	ω_{11}	165,21	ω_{11}	166,06	ω_{11}	166,92
	ω_{21}	167,45	ω_{21}	167,07	ω_{21}	167,96	ω_{21}	170,30	ω_{21}	171,72	ω_{21}	174,41
	ω_{22}	171,59	ω_{22}	171,21	ω_{22}	172,08	ω_{22}	174,35	ω_{22}	175,73	ω_{22}	178,34

В качестве иллюстрации форм колебаний, соответствующих наименьшим определенным частотам, приведены рисунки 3.13–3.15.

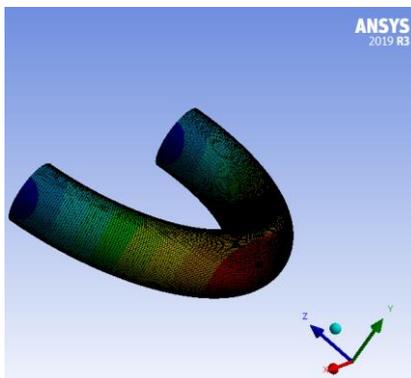


Рисунок 3.13 – Минимальная форма свободных колебаний, соответствующая частоте ω_{11} тороидальной оболочки при $R/r=5$

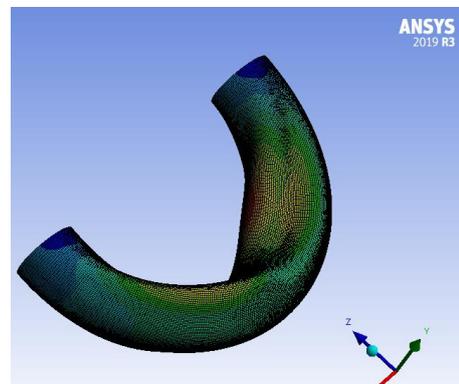


Рисунок 3.14 – Минимальная форма свободных колебаний, соответствующая частоте ω_{21} тороидальной оболочки при $R/r=5$

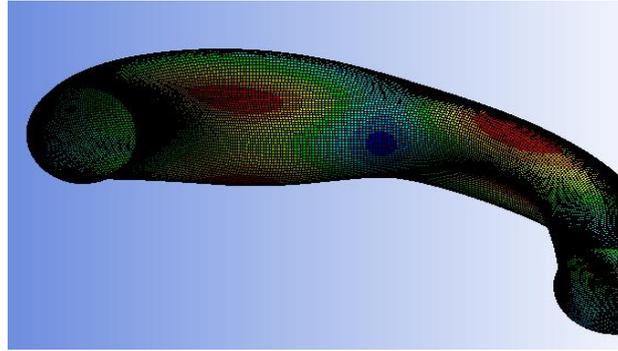


Рисунок 3.15 – Минимальная форма свободных колебаний, соответствующая частоте ω_{22} тороидальной оболочки

Проиллюстрируем полученные в таблице 3.2 значения в виде графиков на рисунках 3.16–3.19.

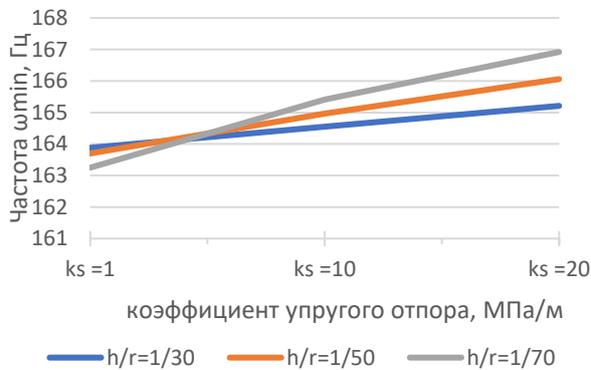


Рисунок 3.16 – Минимальные частоты колебаний газопровода в зависимости от значений k_s и параметра h/R при $p_0=0$ МПа; $R/r=5$;

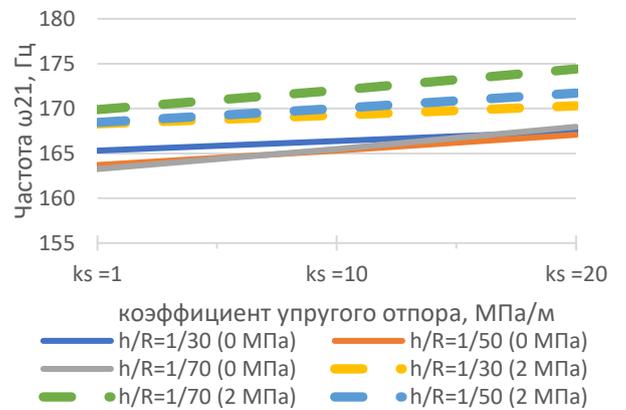


Рисунок 3.17 – Минимальные частоты колебаний ω_{21} газопровода в зависимости от значений k_s и параметра h/R при $p_0=0$ и 2 МПа; $R/r=5$;

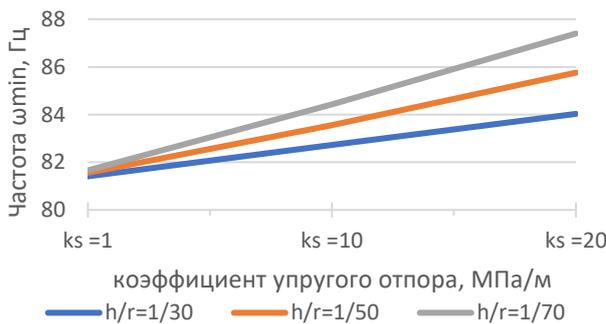


Рисунок 3.18 – Минимальные частоты колебаний газопровода в зависимости от значений k_s и параметра h/r при $p_0=0$ МПа; $R/r=10$

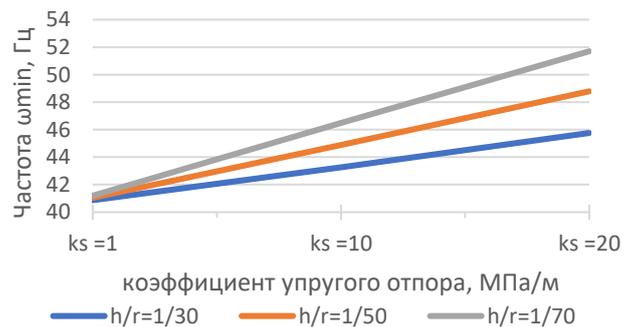


Рисунок 3.19 – Минимальные частоты колебаний газопровода в зависимости от значений k_s и параметра h/r при $p_0=0$ МПа; $R/r=20$

Согласно проведённым расчетам следует, что тороидальные оболочки со значением параметра тонкостенности $h/r=1/70$ более чувствительны к росту значений k_s и p_0 .

Определим влияние сектора вдавливания при частично заглубленном размещении на частоты свободных колебаний газопровода.

Таблица 3.3 – Зависимость минимальных частот свободных изгибных колебаний ω_{m1} тороидальной оболочки с газом на упругом основании от параметра тонкостенности h/r , внутреннего рабочего давления p_0 и коэффициента упругого отпора k_s

Угловой охват $2\varphi_0$,	ω_{21}	$R=10r, h/r=1/40$ (труба 1420×17,5 мм), $p_0=1$ МПа		
		Коэф. упругого отпора $k_s = 1$ МПа/м	Коэф. упругого отпора $k_s = 10$ МПа/м	Коэф. упругого отпора $k_s = 30$ МПа/м
$2 \cdot \pi/4$	ω_{21}	88,55	92,99	102,17
$2 \cdot \pi/8$		88,40	91,62	98,38
$2 \cdot \pi/12$		88,30	90,59	95,48
$2 \cdot \pi/16$		88,24	90,00	93,79
$2 \cdot \pi/20$		88,20	89,62	92,71
$2 \cdot \pi/24$		88,17	89,37	91,97

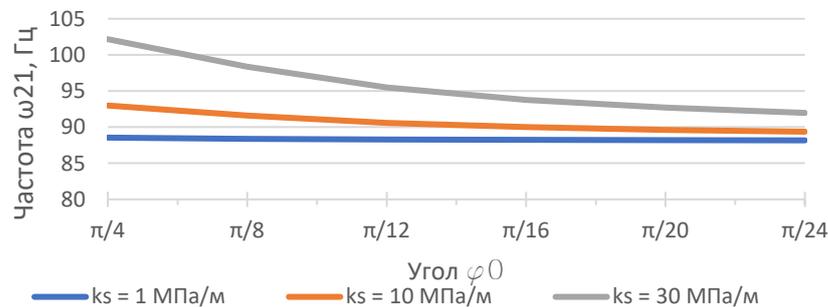


Рисунок 3.20 – Зависимость частот свободных колебаний наземной тороидальной оболочки с газом от угловой длины φ_0 при $p_0=1$ МПа; $h/R=1/40$; $R=10r$; $k_s = 1, 10, 30$ МПа/м

Из графиков следует, что наибольшее влияние грунта при увеличении сектора вдавливания осуществляется при $k_s = 30$ МПа/м. В результате увеличения угла вдавливания от $\frac{\pi}{24}$ до $\frac{\pi}{4}$ рост значений частот составляет 11 %. Такой случай может наблюдаться при сезонных изменениях грунта, когда грунт обваловки и основания выносятся водой, что приводит к изменению сектора вдавливания.

Рассмотрим минимальные частоты, полученные по формуле (120), определяемые для наземного *нефтепровода*, и сведем их в таблицы 3.4–3.6 и проиллюстрируем в виде графиков на рисунках 3.21–3.26. Согласно расчетам,

приведенным на рисунке 3.6, частота ω_{21} является минимальной и значительно меньше остальных частот, в этой связи дальнейшее исследование будем проводить относительно неё.

Таблица 3.4 – Зависимость частот свободных изгибных колебаний ω_{min} наземного нефтепровода от параметра кривизны участка R/r , параметра тонкостенности h/r и коэффициента упругого отпора k_s

$p_0=0$ (безнапорная)									
Коэф. упругого отпора k_s (МПа/м)	$R/r=5$			$R/r=10$			$R/r=20$		
	$h/r=1/30$	$h/r=1/50$	$h/r=1/70$	$h/r=1/30$	$h/r=1/50$	$h/r=1/70$	$h/r=1/30$	$h/r=1/50$	$h/r=1/70$
$k_s=1$	37,91	29,56	25,03	27,66	21,16	17,84	17,74	12,53	10,31
$k_s=5$	38,05	29,74	25,25	27,92	21,52	18,27	18,22	13,23	11,17
$k_s=10$	38,23	29,97	25,53	28,25	21,95	18,79	18,8	14,06	12,16
$k_s=20$	38,58	30,42	26,06	28,88	22,79	19,79	19,92	15,59	13,93
$p_0=2$ МПа									
Коэф. упругого отпора k_s (МПа/м)	$R/r=5$			$R/r=10$			$R/r=20$		
	$h/r=1/30$	$h/r=1/50$	$h/r=1/70$	$h/r=1/30$	$h/r=1/50$	$h/r=1/70$	$h/r=1/30$	$h/r=1/50$	$h/r=1/70$
$k_s=1$	38,85	30,78	26,48	29,37	23,44	20,54	20,75	16,7	15,19
$k_s=5$	38,99	30,96	26,69	29,62	23,76	20,91	21,17	17,23	15,78
$k_s=10$	39,16	31,18	26,95	29,92	24,15	21,37	21,67	17,87	16,5
$k_s=20$	39,5	31,62	27,46	30,52	24,92	22,25	22,64	19,09	17,84

Таблица 3.5 – Зависимость частот свободных изгибных колебаний ω_{min} наземного нефтепровода от параметра тонкостенности h/r , параметра кривизны участка R/r , внутреннего рабочего давления p_0 и скорости потока протекающей жидкости V

$p_0=0$ (безнапорная), $k_s=5$ МПа/м									
Скорость потока (м/с)	$R/r=5$			$R/r=10$			$R/r=20$		
	$h/r=1/30$	$h/r=1/50$	$h/r=1/70$	$h/r=1/30$	$h/r=1/50$	$h/r=1/70$	$h/r=1/30$	$h/r=1/50$	$h/r=1/70$
$V=1$	38,1	29,8	25,32	27,96	21,56	18,32	18,25	13,27	11,21
$V=10$	38,09	29,78	25,3	27,95	21,55	18,31	18,24	13,26	11,2
$V=30$	38	29,67	25,17	27,88	21,46	18,2	18,19	13,19	11,11
$V=50$	37,83	29,45	24,9	27,75	21,28	17,99	18,09	13,04	10,93
$V=100$	37,04	28,38	23,62	27,11	20,41	16,93	17,61	12,34	10,06

Окончание таблицы 3.5

$p_0=2 \text{ МПа}, k_s=5 \text{ МПа/м}$									
Скорость потока (м/с)	$R/r=5$			$R/r=10$			$R/r=20$		
	$h/r=1/30$	$h/r=1/50$	$h/r=1/70$	$h/r=1/30$	$h/r=1/50$	$h/r=1/70$	$h/r=1/30$	$h/r=1/50$	$h/r=1/70$
$V=1$	39,03	31,01	26,76	29,65	23,8	20,96	21,19	17,26	15,81
$V=10$	39,02	31	26,74	29,64	23,79	20,95	21,18	17,25	15,81
$V=30$	38,93	30,89	26,62	29,58	23,71	20,85	21,14	17,19	15,74
$V=50$	38,77	30,68	26,36	29,45	23,54	20,66	21,05	17,08	15,62
$V=100$	37,99	29,66	25,15	28,86	22,76	19,75	20,64	16,55	15,02

Таблица 3.6 – Зависимость частот свободных изгибных колебаний ω_{min} наземного трубопровода с жидкостью от параметра тонкостенности h/r , параметра кривизны участка R/r , внутреннего рабочего давления p_0 и плотности протекающей жидкости ρ_{v0} .

$p_0=0 \text{ (безнапорная)}, k_s=5 \text{ МПа/м}, V=10 \text{ м/с}$									
Плотность протекающей жидкости (гр/см ³)	$R/r=5$			$R/r=10$			$R/r=20$		
	$h/r=1/30$	$h/r=1/50$	$h/r=1/70$	$h/r=1/30$	$h/r=1/50$	$h/r=1/70$	$h/r=1/30$	$h/r=1/50$	$h/r=1/70$
$\rho_{v0}=0$	136,58	136,69	137,10	82,77	85,02	82,91	41,95	42,18	43,64
$\rho_{v0}=0,5$	51,96	41,17	35,20	37,67	29,55	25,32	23,17	18,08	15,42
$\rho_{v0}=1$	38,09	29,78	25,30	27,95	21,55	18,31	17,79	13,26	11,20

$p_0=2 \text{ МПа}, k_s=5 \text{ МПа/м}, V=10 \text{ м/с}$									
Плотность протекающей жидкости (гр/см ³)	$R/r=5$			$R/r=10$			$R/r=20$		
	$h/r=1/30$	$h/r=1/50$	$h/r=1/70$	$h/r=1/30$	$h/r=1/50$	$h/r=1/70$	$h/r=1/30$	$h/r=1/50$	$h/r=1/70$
$\rho_{v0}=0$	139,54	137,84	137,50	87,03	93,85	84,71	41,95	42,8	47,64
$\rho_{v0}=0,5$	53,23	42,86	37,20	39,95	32,62	28,96	23,17	19,65	17,47
$\rho_{v0}=1$	39,02	31,00	26,74	29,64	23,79	20,95	17,79	14,69	12,87

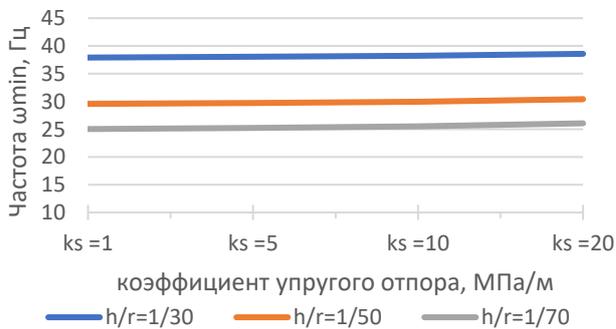


Рисунок 3.21 – Минимальные частоты колебаний нефтепровода в зависимости от значений k_s и параметра h/r при $p_0=0$ МПа; $R/r=5$

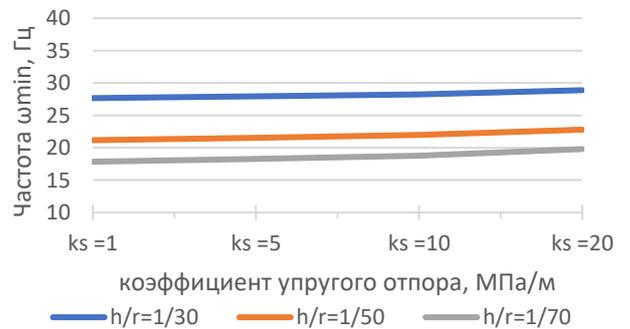


Рисунок 3.22 – Минимальные частоты колебаний нефтепровода в зависимости от значений k_s и параметра h/r при $p_0=0$ МПа; $R/r=10$

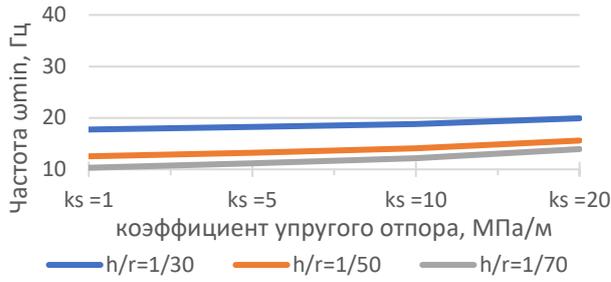


Рисунок 3.23 – Минимальные частоты колебаний нефтепровода в зависимости от значений k_s и параметра h/R при $p_0=0$ МПа; $R/r=20$

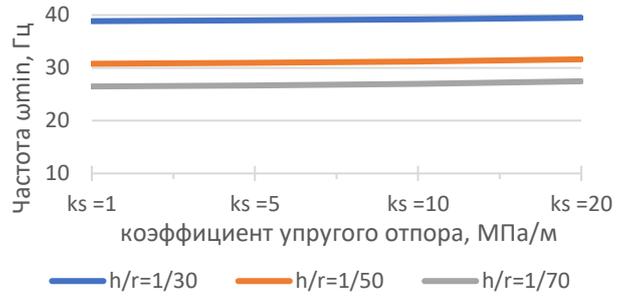


Рисунок 3.24 – Минимальные частоты колебаний нефтепровода в зависимости от значений k_s и параметра h/R при $p_0=2$ МПа; $R/r=5$

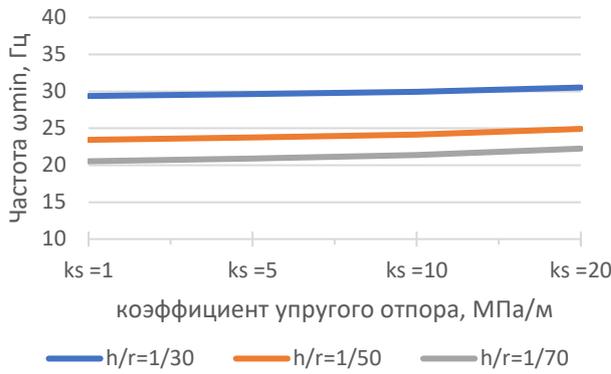


Рисунок 3.25 – Минимальные частоты колебаний нефтепровода в зависимости от значений k_s и параметра h/r при $p_0=2$ МПа; $R/r=10$

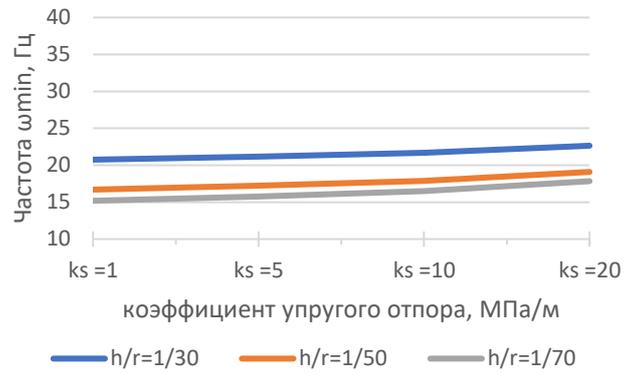


Рисунок 3.26 – Минимальные частоты колебаний нефтепровода в зависимости от значений k_s и параметра h/r при $p_0=2$ МПа; $R/r=20$

Определим влияние сектора вдавливания при частично заглубленном размещении на частоты свободных колебаний нефтепровода.

Таблица 3.7 – Зависимость минимальных частот свободных изгибных колебаний ω_{m1} тороидальной оболочки с нефтью на упругом основании от параметра тонкостенности h/r , внутреннего рабочего давления p_0 и коэффициента упругого отпора k_s

Угловой охват $2\varphi_0$,	ω_{21}	$R=10r, h/r=1/40$ (труба 1420x17,5 мм), $p_0=1$ МПа		
		Коэф. упругого отпора $k_s = 1$ МПа/м	Коэф. упругого отпора $k_s = 10$ МПа/м	Коэф. упругого отпора $k_s = 30$ МПа/м
$2 \cdot \pi/4$	ω_{21}	26,63	27,92	30,59
$2 \cdot \pi/8$		26,59	27,52	29,49
$2 \cdot \pi/12$		26,56	27,22	28,64
$2 \cdot \pi/16$		26,54	27,05	28,15
$2 \cdot \pi/20$		26,53	26,94	27,84
$2 \cdot \pi/24$		26,52	26,87	27,62

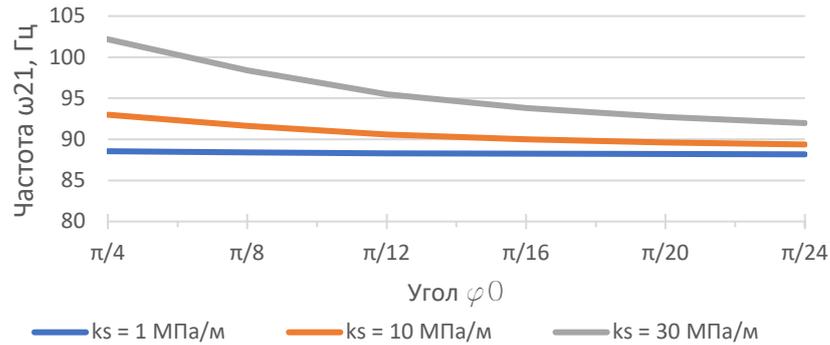


Рисунок 3.27 – Зависимость частот свободных колебаний наземной тороидальной оболочки с нефтью от угловой длины φ_0 при $p_0=1$ МПа; $h/R=1/40$; $R=10r$; $k_s = 1, 10, 30$ МПа/м

Из графиков следует, что наибольшее влияние грунта при увеличении сектора вдавливания осуществляется при $k_s = 30$ МПа/м. В результате увеличения угла вдавливания от $\frac{\pi}{24}$ до $\frac{\pi}{4}$ рост значений частот составляет 10,7 %.

Теперь покажем влияние скорости потока протекающей среды на значения частот тороидальной оболочки. Полученные в таблице 3.5 значения проиллюстрируем в виде графиков на рисунках 3.28–3.33.

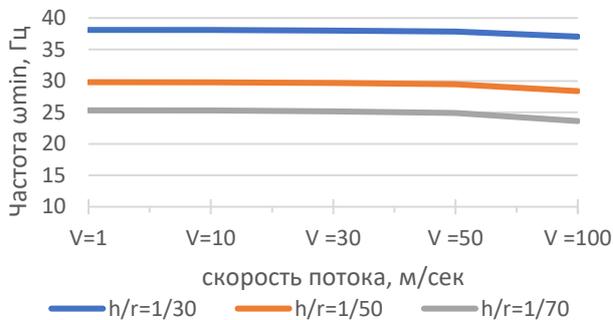


Рисунок 3.28 – Минимальные частоты колебаний нефтепровода в зависимости от значений скорости V и параметра h/r при $p_0=0$ МПа; $R/r=5$

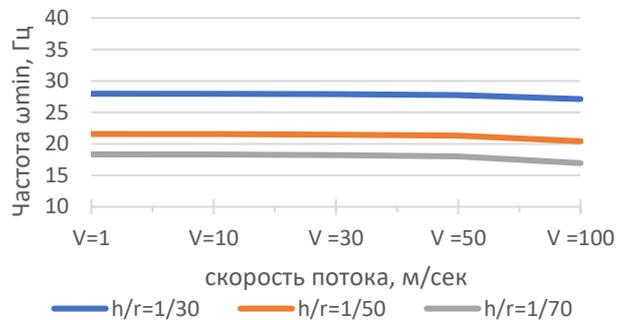


Рисунок 3.29 – Минимальные частоты колебаний нефтепровода в зависимости от значений скорости V и параметра h/r при $p_0=0$ МПа; $R/r=10$

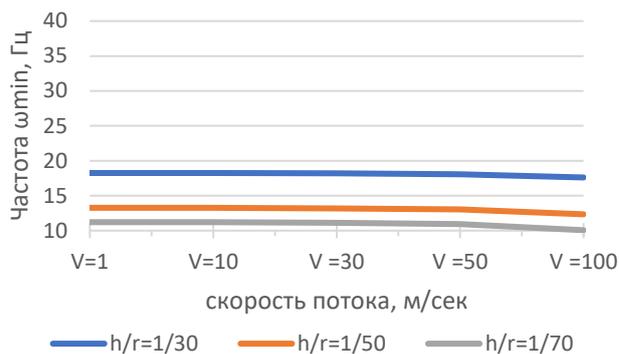


Рисунок 3.30 – Минимальные частоты колебаний нефтепровода в зависимости от значений скорости V и параметра h/r при $p_0=0$ МПа; $R/r=20$

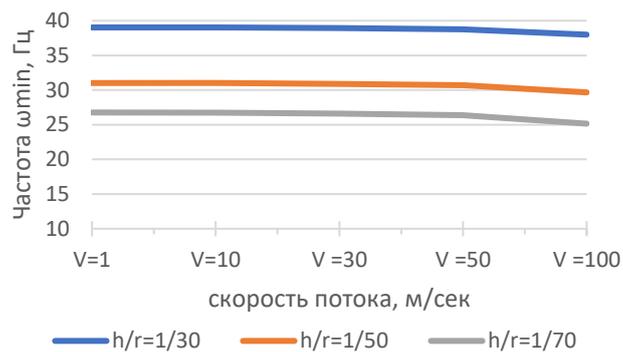


Рисунок 3.31 – Минимальные частоты колебаний нефтепровода в зависимости от значений скорости V и параметра h/r при $p_0=2$ МПа; $R/r=5$

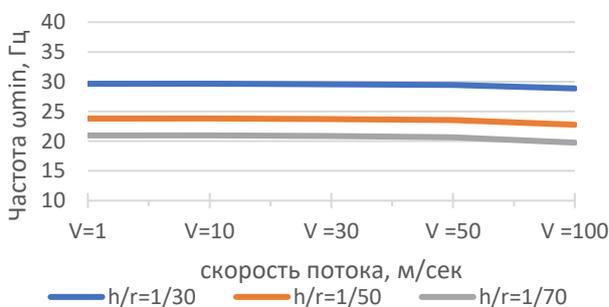


Рисунок 3.32 – Минимальные частоты колебаний нефтепровода в зависимости от значений скорости V и параметра h/r при $p_0=2$ МПа; $R/r=10$

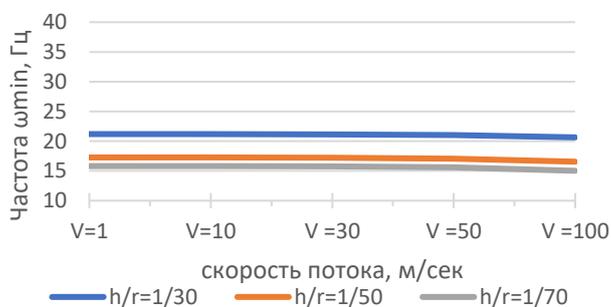


Рисунок 3.33 – Минимальные частоты колебаний нефтепровода в зависимости от значений скорости V и параметра h/r при $p_0=2$ МПа; $R/r=20$

Проиллюстрируем влияние плотности протекающей жидкости на минимальные частоты тороидальной оболочки и представим полученные значения в виде графиков на рисунках 3.34–3.39.

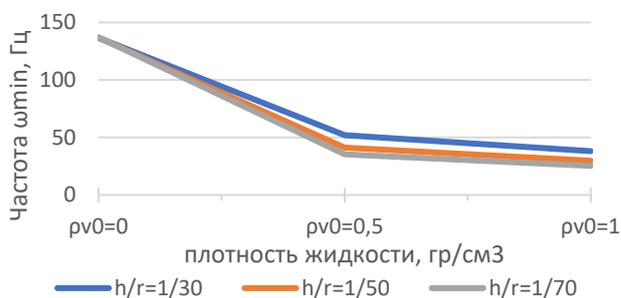


Рисунок 3.34 – Минимальные частоты колебаний нефтепровода в зависимости от значений плотности жидкости ρ_{v0} и параметра h/r при $p_0=0$ МПа; $R/r=5$

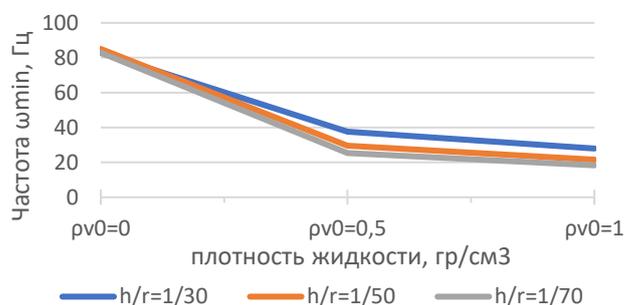


Рисунок 3.35 – Минимальные частоты колебаний нефтепровода в зависимости от значений плотности жидкости ρ_{v0} и параметра h/r при $p_0=0$ МПа; $R/r=10$

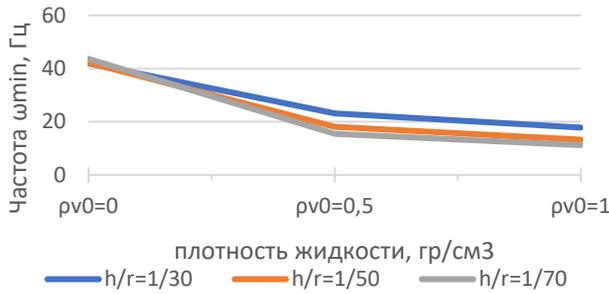


Рисунок 3.36 – Минимальные частоты колебаний нефтепровода в зависимости от значений плотности жидкости ρ_{v0} и параметра h/r при $p_0=0$ МПа; $R/r=20$

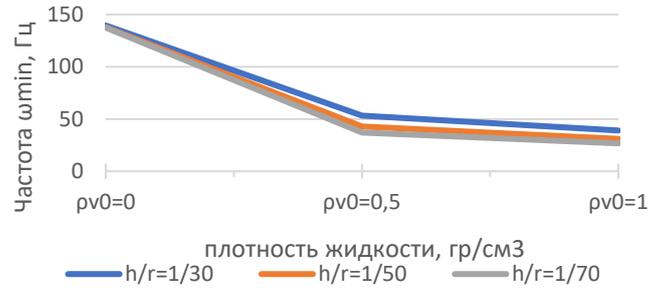


Рисунок 3.37 – Минимальные частоты колебаний нефтепровода в зависимости от значений плотности жидкости ρ_{v0} и параметра h/r при $p_0=2$ МПа; $R/r=5$

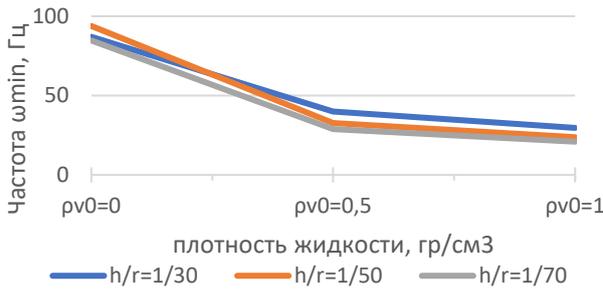


Рисунок 3.38 – Минимальные частоты колебаний нефтепровода в зависимости от значений плотности жидкости ρ_{v0} и параметра h/r при $p_0=2$ МПа; $R/r=10$

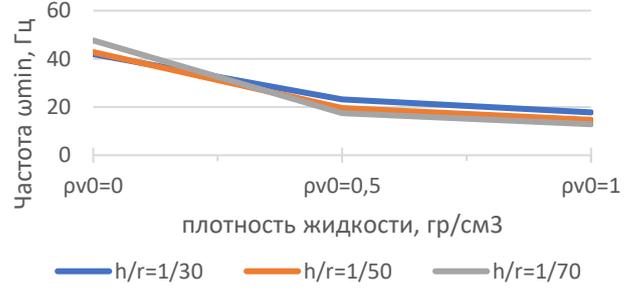


Рисунок 3.39 – Минимальные частоты колебаний нефтепровода в зависимости от значений плотности жидкости ρ_{v0} и параметра h/r при $p_0=2$ МПа; $R/r=20$

Исследуем границу применимости решений, полученных в текущей главе, рассмотрим на примере газопровода, поскольку он более чувствителен к изменению длины участка, полученные значения сведем в таблицу 3.8 и проиллюстрируем в виде графиков на рисунках 3.40–3.45.

Таблица 3.8 – Зависимость частот и форм свободных изгибных колебаний ω_{mn} наземного газопровода от параметра тонкостенности h/r , параметра кривизны участка R/r при $n=1$ и 2

$p_0=2$ МПа $k_s=5$ МПа/м, $n=1$									
R/r , м	$h/r=1/30$			$h/r=1/50$			$h/r=1/70$		
	$m=1$	$m=2$	$m=3$	$m=1$	$m=2$	$m=3$	$m=1$	$m=2$	$m=3$
4	206,09	205,75	220,92	206,2	204,49	210,17	206,3	204,26	207,11
5	164,09	165,65	184,33	164,23	164,09	171,28	164,36	163,79	167,51
6	136,43	139,16	161	136,59	137,29	145,89	136,76	136,94	141,44
7	116,81	120,42	145,14	117	118,26	128,17	117,2	117,85	123,09
8	102,17	106,52	133,85	102,39	104,06	115,23	102,61	103,6	109,54
$p_0=2$ МПа $k_s=5$ МПа/м, $n=2$									
R/r , м	$h/r=1/30$			$h/r=1/50$			$h/r=1/70$		
	$m=1$	$m=2$	$m=3$	$m=1$	$m=2$	$m=3$	$m=1$	$m=2$	$m=3$
5	200,81	171,15	186,51	201,33	170,48	174,58	201,86	171,06	171,85
10	88,50	90,40	121,38	89,74	89,13	102,08	90,99	90,23	97,34
15	58,78	66,65	105,17	60,65	64,91	82,13	62,51	66,42	76,16
20	45,31	56,13	98,88	47,72	54,04	73,91	50,06	55,85	67,21
25	37,77	50,54	95,84	40,64	48,22	69,78	43,37	50,23	62,64

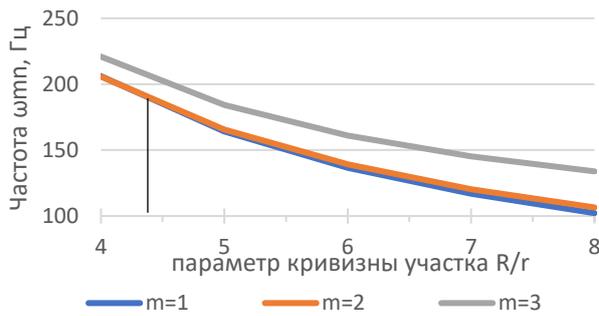


Рисунок 3.40 – Частоты свободных колебаний ω_{mn} наземного газопровода в зависимости от параметра h/r , и R/r при $n=1$, $m=1, 2, 3$ при $p_0=0$ МПа; $k_s=5$ МПа/м; $h/r=1/30$

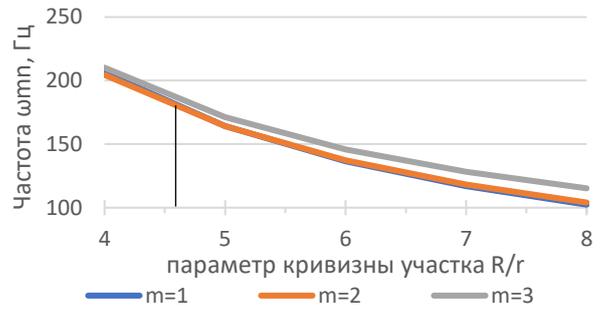


Рисунок 3.41 – Частоты свободных колебаний ω_{mn} наземного газопровода в зависимости от параметра h/r , и R/r при $n=1$, $m=1, 2, 3$ при $p_0=0$ МПа; $k_s=5$ МПа/м; $h/r=1/50$

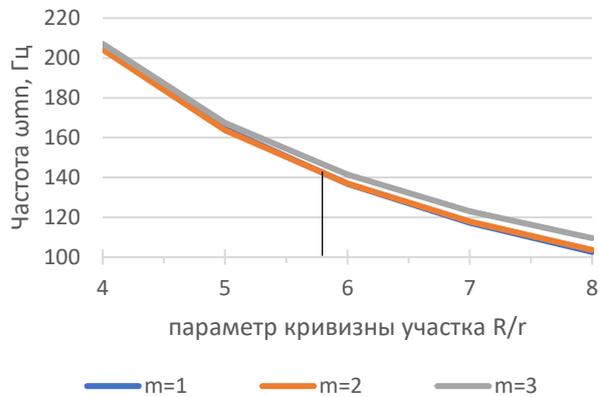


Рисунок 3.42 – Частоты свободных колебаний ω_{mn} наземного газопровода в зависимости от параметра h/r , и R/r при $n=1$, $m=1,2,3$ при $p_0=0$ МПа; $k_s=5$ МПа/м; $h/r=1/70$

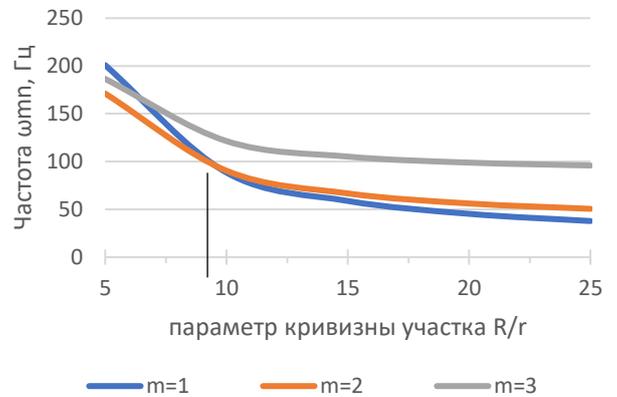


Рисунок 3.43 – Частоты свободных колебаний ω_{mn} наземного газопровода в зависимости от параметра h/r , и R/r при $n=2$, $m=1,2,3$ при $p_0=0$ МПа; $k_s=5$ МПа/м; $h/r=1/30$

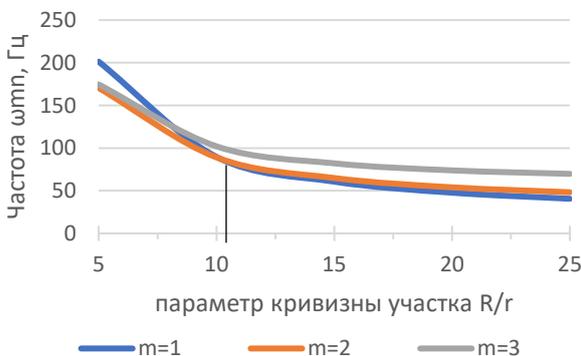


Рисунок 3.44 – Частоты свободных колебаний ω_{mn} наземного газопровода в зависимости от параметра h/r , и R/r при $n=2$, $m=1,2,3$ при $p_0=0$ МПа; $k_s=5$ МПа/м; $h/r=1/50$

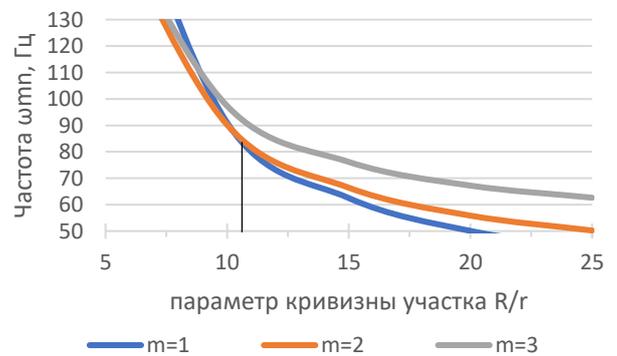


Рисунок 3.45 – Частоты свободных колебаний ω_{mn} наземного газопровода в зависимости от параметра h/r , и R/r при $n=2$, $m=1,2,3$ при $p_0=0$ МПа; $k_s=5$ МПа/м; $h/r=1/70$

Анализ полученных значений частот показал, что минимальные частоты реализуются по оболочечной форме, однако для более длинных участков, превышающих R^* , минимальные частоты реализуются по форме без деформации поперечного сечения, близкой к стержневой модели.

Как и в случае с цилиндрической оболочкой, при увеличении значений k_s и p_0 происходит рост значений частот. Более тонкостенные оболочки проявляют большую чувствительность к изменениям внешних воздействий.

С увеличением плотности протекающей жидкости происходит снижение собственных частот, такой эффект объясняется ростом присоединенной массы жидкости и её инерционных сил. Отличие частот между пустой оболочкой и оболочкой с жидкостью составляет более 70 % в зависимости от геометрических характеристик оболочки.

В результате увеличения скорости потока протекающей жидкости изменение частот составляет не более 5 %.

3.5 Определение частот и форм свободных колебаний тороидальной оболочки при подземном размещении

На основании проведенного исследования поведения оболочки отмечено повышение значений при различных частотах и формах колебаний при различных геометрических характеристиках тороидальной оболочки и внешних воздействиях. Как следует из главы 2, частоты при подземной прокладке имеют бóльшую тенденцию к росту. Поэтому задачей данного раздела является изучение поведения тороидальной оболочки в упругой среде и влияния коэффициента упругого отпора грунта на минимальные значения частот свободных колебаний. Для решения поставленной задачи рассмотрим аналогичные геометрические характеристики оболочки при тех же внешних воздействиях. Отличие будет заключаться в том, что при решении систем уравнений в расчетах будет учитываться $k_{s2}^* = k_s Gr$ для подземной прокладки, как и в разделе 2.5. Рассмотрим случай тороидальной оболочки с потоком жидкости (нефти).

Таблица 3.9 – Зависимость частот свободных изгибных колебаний ω_{min} подземного нефтепровода от параметра кривизны участка R/r , параметра тонкостенности h/r и коэффициента упругого отпора k_s

$p_0=0$ (безнапорная), $V=5$ м/с, $H=2,0$ м									
Коэф. упругого отпора k_s , МПа/м	$R/r=5$			$R/r=10$			$R/r=20$		
	$h/r=1/30$	$h/r=1/50$	$h/r=1/70$	$h/r=1/30$	$h/r=1/50$	$h/r=1/70$	$h/r=1/30$	$h/r=1/50$	$h/r=1/70$
$k_s=1$	40,55	31,74	26,96	29,62	22,83	19,37	19,15	13,8	11,55
$k_s=5$	41,01	32,35	27,69	30,48	23,98	20,74	20,69	15,97	14,13
$k_s=10$	41,59	33,10	28,58	31,51	25,35	22,34	22,46	18,32	16,8
$k_s=20$	42,72	34,56	30,28	33,5	27,88	25,24	25,63	22,29	21,16
$p_0=2$ МПа, $V=5$ м/с, $H=2,0$ м									
$k_s=1$	41,54	33,04	28,51	31,43	25,23	22,21	22,31	18,13	16,59
$k_s=5$	42,00	33,63	29,2	32,24	26,28	23,41	23,64	19,83	18,48
$k_s=10$	42,56	34,36	30,04	33,22	27,54	24,84	25,2	21,77	20,59
$k_s=20$	43,66	35,76	31,66	35,11	29,89	27,48	28,07	25,2	24,28

Таблица 3.10 – Зависимость частот свободных изгибных колебаний ω_{min} подземного нефтепровода от параметра тонкостенности h/r , параметра кривизны участка R/r , внутреннего рабочего давления p_0 и скорости потока протекающей жидкости V

$p_0=0$ (безнапорная), $k_s=5$ МПа/м, $H=2,0$ м									
Скорость потока, м/с	$R/r=5$			$R/r=10$			$R/r=20$		
	$h/r=1/30$	$h/r=1/50$	$h/r=1/70$	$h/r=1/30$	$h/r=1/50$	$h/r=1/70$	$h/r=1/30$	$h/r=1/50$	$h/r=1/70$
$V=1$	41,01	32,36	27,7	30,48	23,98	20,74	20,69	15,97	14,13
$V=10$	41,01	32,34	27,68	30,47	23,97	20,73	20,68	15,96	14,12
$V=30$	40,93	32,24	27,56	30,41	23,89	20,64	20,64	15,91	14,05
$V=50$	40,77	32,04	27,32	30,29	23,73	20,45	20,55	15,79	13,91
$V=100$	40,04	31,07	26,16	29,72	22,96	19,53	20,14	15,22	13,24
$p_0=2$ МПа, $k_s=5$ МПа/м, $H=2,0$ м									
$V=1$	42	33,63	29,2	32,24	26,28	23,42	23,64	19,83	18,48
$V=10$	41,99	33,62	29,19	32,23	26,28	23,41	23,64	19,83	18,47
$V=30$	41,91	33,53	29,07	32,17	26,2	23,32	23,6	19,78	18,42
$V=50$	41,76	33,33	28,85	32,06	26,06	23,15	23,52	19,68	18,31
$V=100$	41,05	32,4	27,75	31,52	25,36	22,35	23,16	19,23	17,81

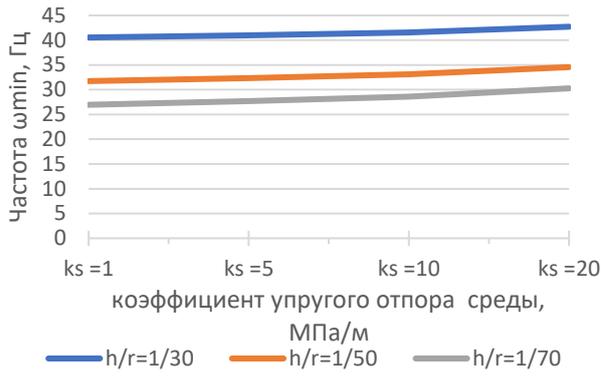


Рисунок 3.46 – Минимальные частоты колебаний подземного криволинейного газопровода в зависимости от значений k_s и параметра h/r при $p_0=0$ МПа; $R/r=5$

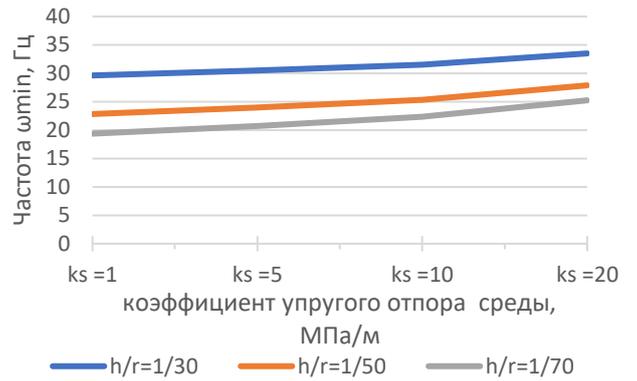


Рисунок 3.47 – Минимальные частоты колебаний подземного криволинейного газопровода в зависимости от значений k_s и параметра h/r при $p_0=0$ МПа; $R/r=10$

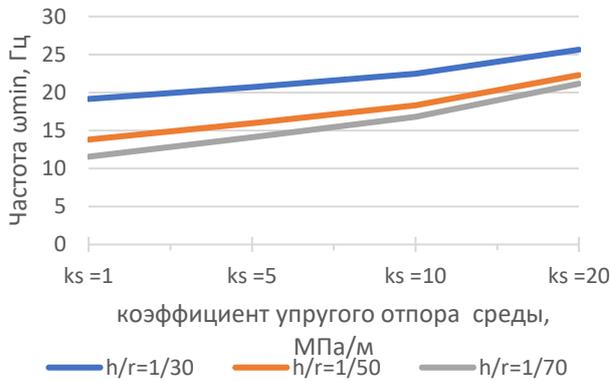


Рисунок 3.48 – Минимальные частоты колебаний подземного криволинейного газопровода в зависимости от значений k_s и параметра h/r при $p_0=0$ МПа; $R/r=20$

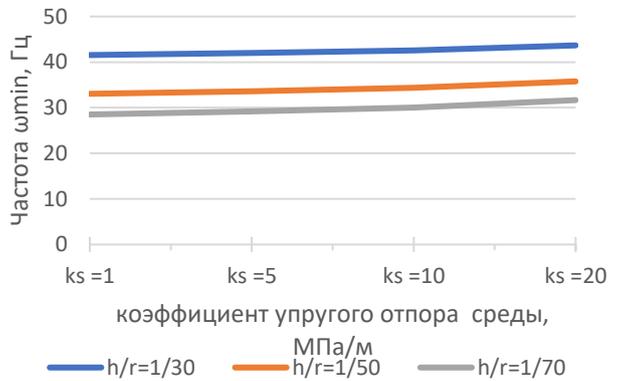


Рисунок 3.49 – Минимальные частоты колебаний подземного криволинейного газопровода в зависимости от значений k_s и параметра h/r при $p_0=2$ МПа; $R/r=5$

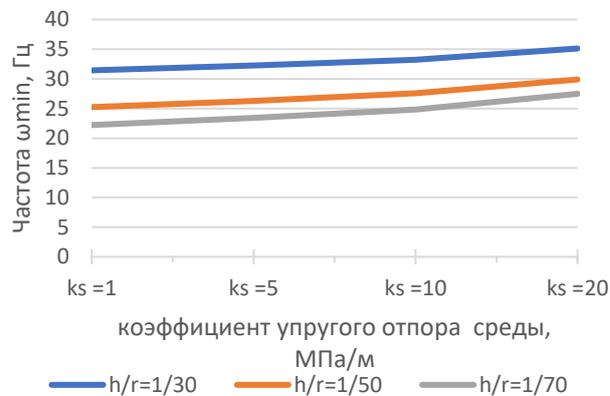


Рисунок 3.50 – Минимальные частоты колебаний подземного криволинейного газопровода в зависимости от значений k_s и параметра h/r при $p_0=2$ МПа; $R/r=10$

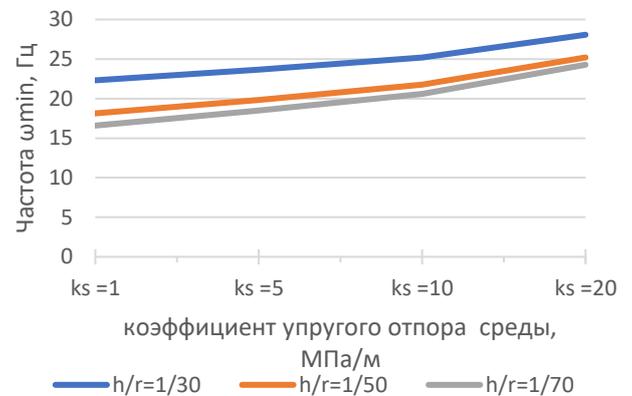


Рисунок 3.51 – Минимальные частоты колебаний подземного криволинейного газопровода в зависимости от значений k_s и параметра h/r при $p_0=2$ МПа; $R/r=20$

Проиллюстрируем влияние скорости потока протекающей жидкости на минимальные частоты тороидальной оболочки при подземном размещении в упругой среде на рисунках 3.52–3.57.

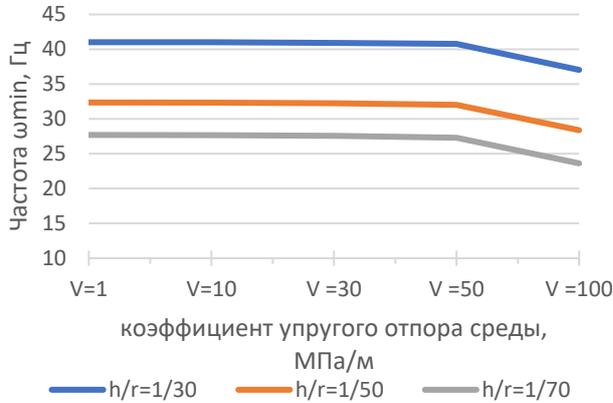


Рисунок 3.52 – Минимальные частоты колебаний подземного криволинейного нефтепровода в зависимости от значений скорости потока протекающей среды V и параметра h/r при $p_0=0$ МПа; $R/r=5$

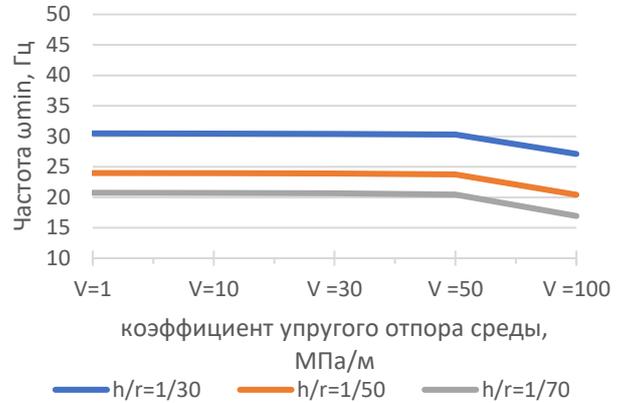


Рисунок 3.53 – Минимальные частоты колебаний подземного криволинейного нефтепровода в зависимости от значений скорости потока протекающей среды V и параметра h/r при $p_0=0$ МПа; $R/r=10$

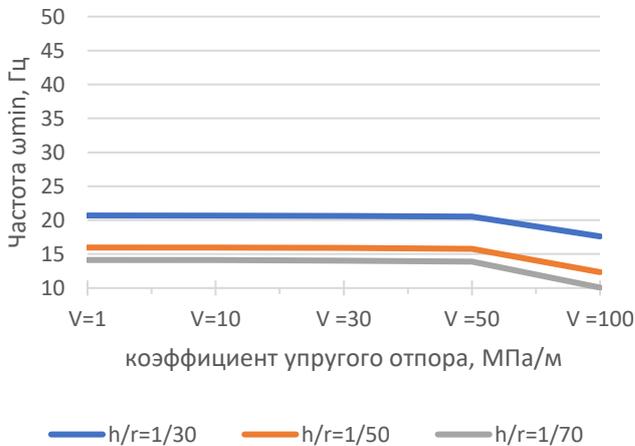


Рисунок 3.54 – Минимальные частоты колебаний подземного криволинейного нефтепровода в зависимости от значений скорости потока протекающей среды V и параметра h/r при $p_0=0$ МПа; $R/r=20$

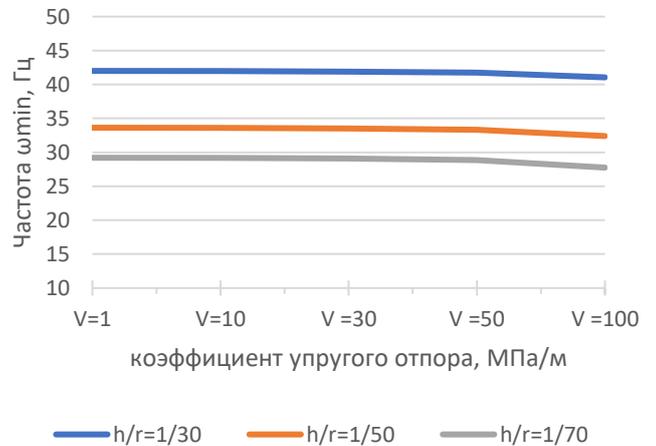


Рисунок 3.55 – Минимальные частоты колебаний подземного криволинейного нефтепровода в зависимости от значений скорости потока протекающей среды V и параметра h/r при $p_0=2$ МПа; $R/r=5$

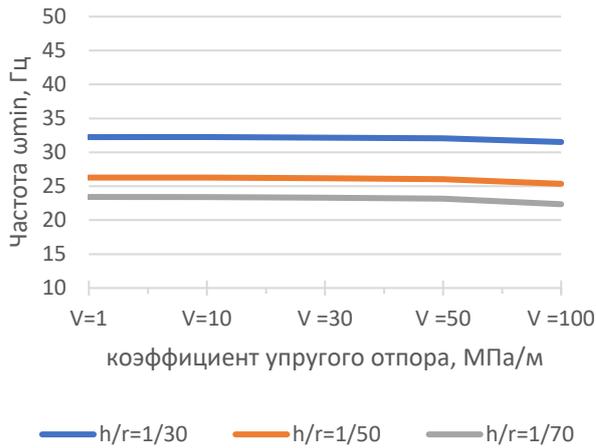


Рисунок 3.56 – Минимальные частоты колебаний подземного криволинейного нефтепровода в зависимости от значений скорости потока протекающей среды V и параметра h/r при $p_0=2$ МПа; $R/r=10$

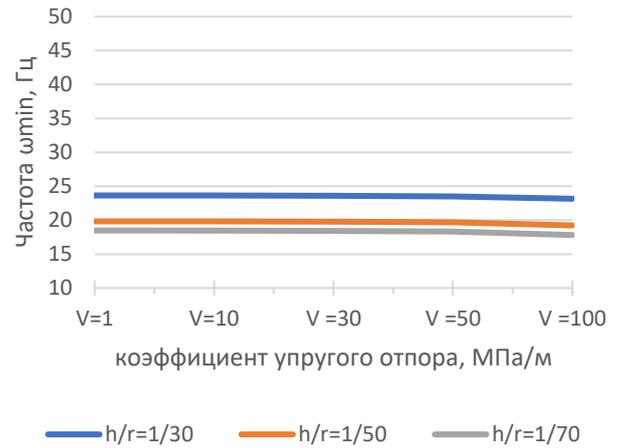


Рисунок 3.57 – Минимальные частоты колебаний подземного криволинейного нефтепровода в зависимости от значений скорости потока протекающей среды V и параметра h/r при $p_0=2$ МПа; $R/r=20$

На основании результатов проведенного исследования по изучению влияния упругой среды следует отметить, как и в случае с цилиндрической оболочкой, большой рост значений частот. При анализе длины криволинейного участка выявлено, что чем больше длина криволинейного участка, тем большее влияние оказывает упругая среда. Например, при $R/r=5$ рост значений частот при изменении k_s от 1 до 20 МПа/м составляет 10 %, а при $R/r=20$, уже 61 %.

3.6 Определение частот и форм свободных колебаний полиэтиленовой тороидальной оболочки при наземном и подземном размещении

Определим спектр частот свободных колебаний полиэтиленовой тороидальной оболочки с потоком жидкости и газа при различных значениях волновых чисел m и n и представим полученные значения на рисунках 5.58, 5.59.

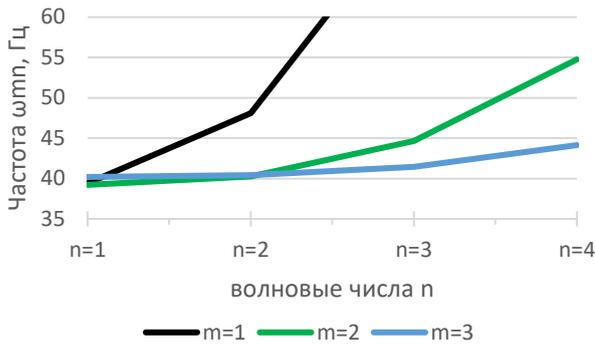


Рисунок 3.58 – Частоты свободных колебаний тороидальной оболочки с газом в зависимости от волновых чисел m и n при $p_0=0$ МПа; $h/R=1/70$; $R/r=10$; $k_s = 0$ МПа/м; $P=0$

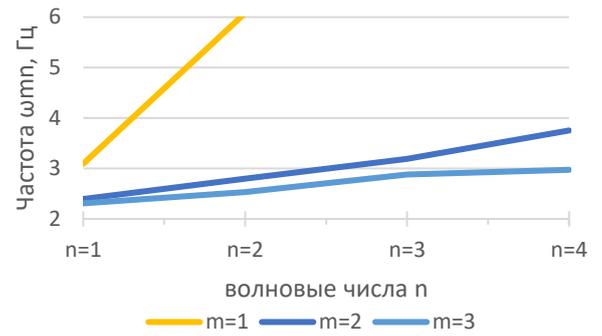


Рисунок 3.59 – Частоты свободных колебаний тороидальной оболочки с жидкостью в зависимости от волновых чисел m и n при $p_0=0$ МПа; $h/R=1/70$; $R/r=10$; $V=5$ м/с; $k_s = 0$ МПа/м; $P=0$

Из расчетов следует, что в случае с пустой оболочкой (при $p_0=0$ МПа) минимальные частоты реализуются при $m=2$ и $n=1$, а в случае с оболочкой с жидкостью при $m=3$ и $n=1$. Такой эффект объясняется меньшей жесткостью рассматриваемого участка ввиду физико-механических характеристик материала тороидальной оболочки. Для наглядности результатов, приведенных на рисунке проиллюстрируем деформированную модель тороидальной оболочки на рисунках 3.60, 3.61.

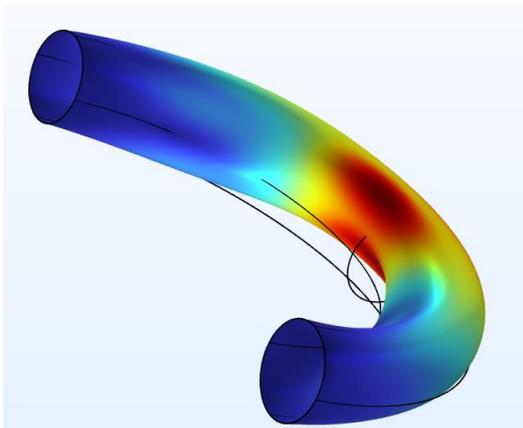


Рисунок 3.60 – Минимальная форма свободных колебаний тороидальной оболочки (безнапорная) при частоте ω_{31} .
Общий вид

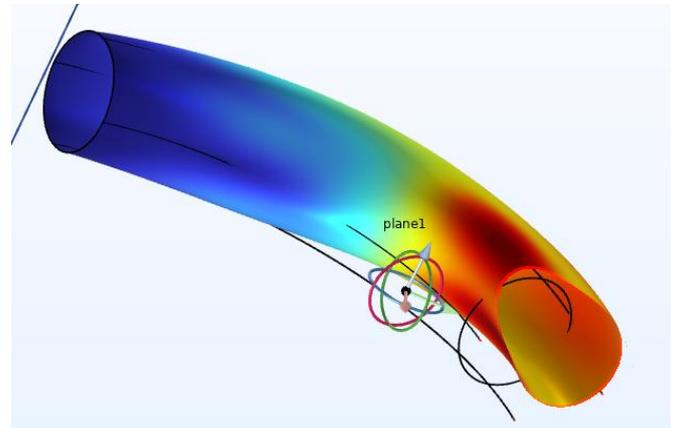


Рисунок 3.61 – Минимальная форма свободных колебаний тороидальной оболочки (безнапорная) при частоте ω_{31} . Сквозное сечение

По примеру раздела 3.4 и 3.5 проведем исследование влияния геометрических характеристик и внешних воздействий на частоты и формы полиэтиленовой тороидальной оболочки, полученные значения сведем в таблицы 3.11 и , а также проиллюстрируем результаты на рисунках .

Полиэтиленовая оболочка очень чувствительна к изменению значений внутреннего рабочего давления и упругой среды, поэтому для изучения поведения именно оболочечных форм колебаний целесообразно рассмотреть более тонкую оболочку с параметром $h/R=1/70$. Рассмотрим более сложный случай – оболочка с потоком жидкости.

Таблица 3.11 – Зависимость частот свободных изгибных колебаний ω_{m1} наземного водопровода от параметра кривизны участка R/r , внутреннего давления p_0 и коэффициента упругого отпора k_s

$h/R=1/70$							
Коэф. упругого отпора k_s (МПа/м)	ω_{m1}	$R=4r$			$R=6r$		
		$p_0=0$	$p_0=0,1$	$p_0=0,2$	$p_0=0$	$p_0=0,1$	$p_0=0,2$
Оболочка с потоком жидкости							
$k_s=1$	ω_{11}	3,11	3,11	3,11	3,16	3,16	3,16
	ω_{21}	2,49	2,85	3,17	2,68	3,32	3,86
	ω_{31}	2,40	3,30	4,01	2,63	4,15	5,25
$k_s=5$	ω_{11}	3,92	3,92	3,92	4,63	4,63	4,63
	ω_{21}	3,46	3,73	3,98	4,32	4,74	5,13
	ω_{31}	3,39	4,08	4,67	4,29	5,36	6,25
$k_s=10$	ω_{11}	4,75	4,75	4,75	5,98	5,98	5,98
	ω_{21}	4,37	4,59	4,80	5,74	6,07	6,38
	ω_{31}	4,32	4,88	5,39	5,72	6,56	7,30
$k_s=20$	ω_{11}	6,08	6,08	6,08	8,02	8,02	8,02
	ω_{21}	5,79	5,95	6,11	7,85	8,09	8,33
	ω_{31}	5,75	6,18	6,59	7,84	8,47	9,06

Таблица 3.12 – Зависимость частот свободных изгибных колебаний ω_{m1} подземного водопровода от параметра кривизны участка R/r , внутреннего давления p_0 и коэффициента упругого отпора k_s

$h/R=1/70, H=2,0\text{м}$							
Коэф. упругого отпора k_s (МПа/м)	ω_{m1}	$R=4r$			$R=6r$		
		$p_0=0$	$p_0=0,1$	$p_0=0,2$	$p_0=0$	$p_0=0,1$	$p_0=0,2$
Оболочка с потоком жидкости							
$k_s=1$	ω_{11}	3,57	3,57	3,57	4,01	4,01	4,01
	ω_{21}	3,05	3,35	3,63	3,65	4,14	4,59
	ω_{31}	2,97	3,74	4,38	3,62	4,84	5,80
$k_s=5$	ω_{11}	5,55	5,55	5,55	7,21	7,21	7,21
	ω_{21}	5,23	5,41	5,59	7,03	7,29	7,55
	ω_{31}	5,19	5,66	6,10	7,01	7,71	8,35
$k_s=10$	ω_{11}	7,30	7,30	7,30	9,85	9,85	9,85
	ω_{21}	7,06	7,20	7,33	9,72	9,91	10,11
	ω_{31}	7,03	7,39	7,73	9,71	10,22	10,71
$k_s=20$	ω_{11}	9,92	9,92	9,92	13,67	13,67	13,67
	ω_{21}	9,75	9,85	9,95	13,58	13,72	13,86
	ω_{31}	9,73	9,99	10,24	13,58	13,95	14,32

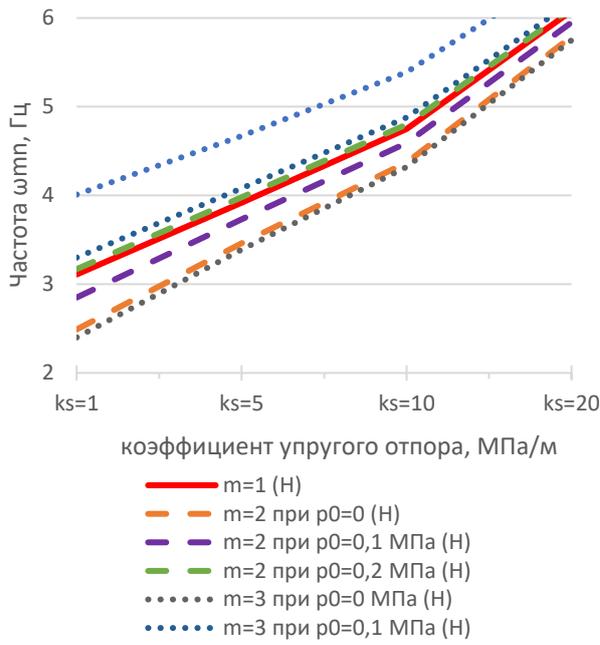


Рисунок 3.62 – Частоты свободных колебаний наземного водопровода от волновых чисел $m=1, 2, 3$, значений коэффициента упругого отпора среды k_s при $p_0=0; 0,2; 0,4$ МПа; $h/R=1/70; R/r=4$

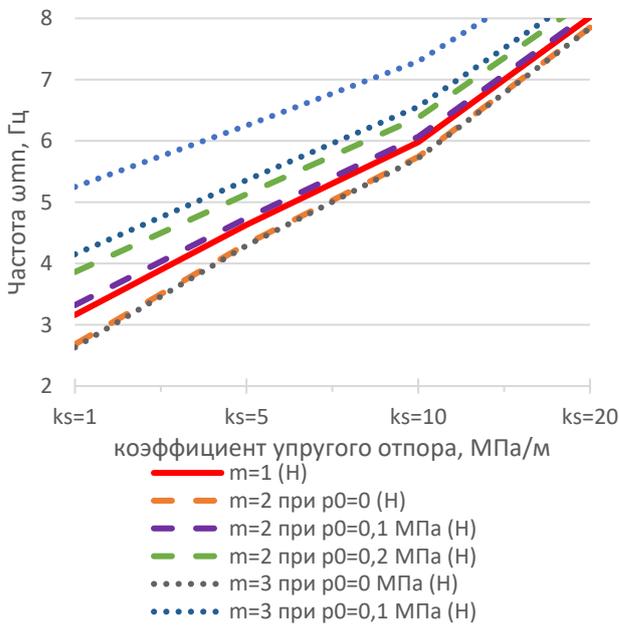


Рисунок 3.64 – Частоты свободных колебаний наземного водопровода от волновых чисел $m=1, 2, 3$, значений коэффициента упругого отпора среды k_s при $p_0=0; 0,2; 0,4$ МПа; $h/R=1/70; R/r=6$

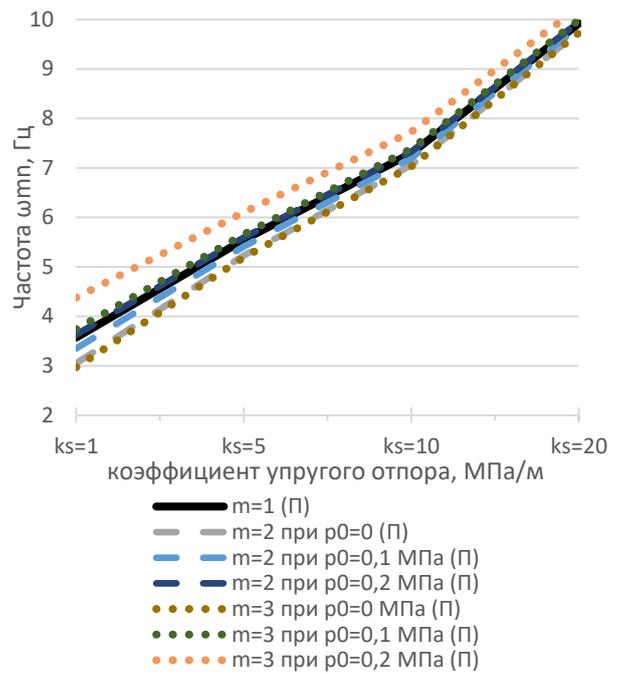


Рисунок 3.63 – Частоты свободных колебаний подземного водопровода от волновых чисел $m=1, 2, 3$, значений коэффициента упругого отпора среды k_s при $p_0=0; 0,2; 0,4$ МПа; $h/R=1/70; R/r=4$

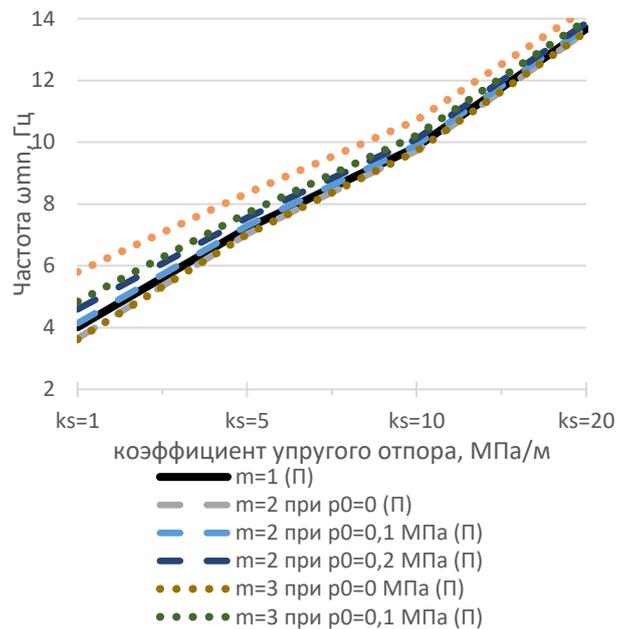


Рисунок 3.65 – Частоты свободных колебаний подземного водопровода от волновых чисел $m=1, 2, 3$, значений коэффициента упругого отпора среды k_s при $p_0=0; 0,2; 0,4$ МПа; $h/R=1/70; R/r=6$

На основании проведенного исследования можно отметить влияние геометрических характеристик и внешних воздействий, остановимся на каждом из них более подробно.

Внутреннее рабочее давление p_0 , МПа

Внутреннее давление оказывает существенное влияние как на стальные оболочки, так на полиэтиленовые оболочки. Ввиду меньшей жесткости полиэтиленовые оболочки более чувствительны к изменению внутреннего рабочего давления. При изменении внутреннего рабочего давления с 0 до 0,2 МПа рост частот составляет, например:

– при $k=5$ МПа/м и происходит рост минимальных частот свободных колебаний при $m=3$ для наземного водопровода на 37,78 % при $R=4r$, а при $R=6r$ – на 45,68 %. Для случая подземного водопровода – 6,8 %, и 7,3 % соответственно.

– при $k=20$ МПа/м для наземного водопровода на 14,60% при $R=4r$, а при $R=6r$ – на 15,56 %. Для случая подземного водопровода – 17,53 % и 19,11 % соответственно.

Влияние коэффициента упругого отпора среды k_s , МПа/м

Влияние упругого отпора среды оказывает существенное влияние на рост значений частот свободных колебаний. С увеличением значений коэффициента k_s от 1 до 20 частоты увеличиваются более чем в три раза, что является весьма существенным при проектировании элементов конструкций, состоящих из подобных полиэтиленовых оболочек.

Рассмотрим тенденции изменения частот ω_{31} в зависимости от значений внутреннего давления и параметра R/r участка, например:

– для наземного водопровода:

при $p_0=0$ и $R=4r$ рост составляет 139 %, а при $p_0=0,2$ МПа – 64,33 %;

при $p_0=0$ и $R=6r$ рост составляет 198 %, а при $p_0=0,2$ МПа – 72,57 %;

– для подземного водопровода:

при $p_0=0$ и $R=4r$ рост составляет 227 %, а при $p_0=0,2$ МПа – 133,78 %;

при $p_0=0$ и $R=6r$ рост составляет 275 %, а при $p_0=0,2$ МПа – 146,89 %.

На основании полученных данных можно отметить, что при размещении оболочки в упругой среде влияние этой среды более существенно, чем при наземном размещении. Тенденция роста частот для оболочки с потоком жидкости менее выражена, чем для оболочки с газом, это объясняется большей присоединенной массой жидкости, участвующей в колебательном процессе.

С увеличением параметра длины участка тенденция роста частот увеличивается ввиду большей области контакта оболочки с упругой средой.

3.7 Определение частот и форм свободных колебаний тороидальной оболочки при действии продольной силы и температурного воздействия

Исследуем влияние побочных коэффициентов на собственные значения матрицы A при различных значениях R/r , P и ΔT .

Таблица 3.13 – Определение частот свободных колебаний ω_{mn} при воздействии параметра продольной силы с побочными коэффициентами и без

$p_0=2,0$ МПа; $H=2,0$ м; $V=5$ м/с; $h/R=1/70$; $k=5$ МПа/м; $T^* = 0$									
	$R=10r$								
	$P=0$			$P=0.5$			$P=1$		
Определитель	$\omega_{1,1}$	$\omega_{2,1}$	$\omega_{3,1}$	$\omega_{1,1}$	$\omega_{2,1}$	$\omega_{3,1}$	$\omega_{1,1}$	$\omega_{2,1}$	$\omega_{3,1}$
С побочными коэффициентами	23,30	21,92	25,94	23,62	19,42	27,46	23,42	16,40	29,40
Без побочных коэффициентов	23,89	21,21	26,00	23,25	21,87	25,89	23,20	21,81	25,85
Расхождение результатов, %	2,47	3,35	0,23	1,59	11,20	6,06	0,95	24,81	13,73
	$R=20r$								
С побочными коэффициентами	14,60	17,33	23,69	14,58	17,29	23,73	14,55	17,18	23,82
Без побочных коэффициентов	14,63	17,31	23,69	14,62	17,31	23,69	14,62	17,30	23,69
Расхождение результатов, %	0,21	0,12	0,00	0,27	0,12	0,17	0,48	0,69	0,55
	$R=30r$								
С побочными коэффициентами	11,88	16,19	23,33	11,88	16,19	23,33	11,87	16,17	23,34
Без побочных коэффициентов	11,88	16,19	23,33	11,88	16,19	23,33	11,88	16,19	23,33
Расхождение результатов, %	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,08	0,12	0,04

Таблица 3.14 – Определение частот свободных колебаний ω_{mn} при воздействии температуры с побочными коэффициентами и без

Определитель	$p_0=2,0$ МПа; $H=2,0$ м; $V=5$ м/с, $h/R=1/40$, $k=1$ МПа/м; $R=10r$, $P=0$								
	$\Delta T = -100$			$\Delta T = 0$			$\Delta T = +100$		
	$\omega_{1,1}$	$\omega_{2,1}$	$\omega_{3,1}$	$\omega_{1,1}$	$\omega_{2,1}$	$\omega_{3,1}$	$\omega_{1,1}$	$\omega_{2,1}$	$\omega_{3,1}$
С побочными коэффициентами	22,82	19,85	25,32	22,88	20,04	25,05	22,85	20,21	25,03
Без побочных коэффициентов	22,23	20,75	24,95	22,26	20,78	24,98	22,29	20,82	25,01
Расхождение результатов, %	2,65	4,34	1,48	2,79	3,56	0,28	2,51	2,93	0,08

На основании анализа полученных в таблицах 3.133.133.13 и 3.14 значений можно сделать следующие выводы:

1) согласно расчетам наибольшее влияние параметра продольной сжимающей силы имеет участок при $R/r=10$. Для таких случаев побочные коэффициенты оказывают существенное влияние на собственные частоты тороидальной оболочки в связи с ростом параметра продольной сжимающей силы. Так, например, при P близким к единице, падение частот составляет 24,81 %;

2) при уменьшении параметра кривизны r/R до 1/20, 1/30 происходит резкое снижение влияние параметра продольной сжимающей силы, в том числе с учетом побочных коэффициентов. В таком случае изменение параметра продольной сжимающей силы практически не сказывается на изменении собственных частот и составляет не более 1 %. Такой эффект связан с самой геометрией тороидальной оболочки, оболочка испытывает упругие деформации, компенсируя возрастающее продольное усилие;

3) согласно полученным значениям следует, что при достижении $P=1$ цилиндрическая оболочка, как и стержень, теряет устойчивость по причине достижения критического значения, однако в тороидальной оболочке такого эффекта не наблюдается и критический параметр продольной сжимающей силы может многократно превышать $P=1$ и достигать значений 7,8,9, что для рассматриваемого объекта исследования является нереалистичным, это объясняется геометрической формой тороидальной оболочки, которая

компенсирует перемещения, действующие на криволинейный участок с двух сторон, за счет упругих свойств материала оболочки;

4) анализ влияния температурного воздействия показал минимальное влияние на изменение собственных частот криволинейного участка трубопровода, ΔT изменяется в пределах от -100 до $+100$ °С, при этом значения частот изменяются не более 5 %.

3.8 Колебания тороидальной оболочки с учетом присоединённой массы и демпфирующих свойств среды

Для исследования влияния сил сопротивления среды тороидальной оболочки, взаимодействующей с упругой средой, запишем систему разделяющихся линейных однородных дифференциальных уравнений второго порядка относительно функции времени вида $\varphi''(t) + 2d_m\varphi'(t) + \omega_{mn}^2\varphi(t) = 0$, где

$$\begin{aligned} & \left[\frac{r^2 \rho_0 h}{E h h_v^2} (\mu_0^2 n^2 k_\beta h_v^2 + m^4 + m^2) + \mu_{bj} \frac{r}{E h h_v^2} m^4 + \rho_v \frac{r}{E h h_v^2} \Phi_n r^2 m^4 \right] \varphi''(t) + \eta \frac{r m^4}{E h h_v^2} \varphi'(t) + \\ & + \left[\mu_0^4 n^4 k_\beta^3 h_v^2 + m^4 (m^2 - 1)(m^2 - 1 + p^* - q_{si}^*) + k_{si}^* m^4 - P \mu_0^4 h_v^2 n^2 k_\beta m^4 + T_{tor}^* \mu_0^2 n^2 k_\beta m^4 \right. \\ & \left. - V^2 \mu_0 h_v \rho_v^* \Phi_n^* m^4 n^2 k_\beta + 0,5 \mu_0^2 m^2 (m^2 + 1) \right] \varphi(t) = 0. \end{aligned} \quad (126)$$

Поделив каждый компонент выражения (86) на $\frac{r^2 \rho_0 h}{E h h_v^2} (\mu_0^2 n^2 k_\beta h_v^2 + m^4 + m^2) + \mu_{bj} \frac{r}{E h h_v^2} m^4 + \rho_v \frac{r}{E h h_v^2} \Phi_n r^2 m^4$, получим

$$\varphi''(t) + \frac{\eta m^2}{r \rho_0 h (\mu_0^2 n^2 k_\beta h_v^2 + m^4 + m^2) + \mu_{bj} m^2 + \rho_v \Phi_n r^2 m^2} \varphi'(t) + \omega_{mn}^2 \varphi(t) = 0, \quad (127)$$

где компонент $2d_m$ при $\varphi'(t)$ есть коэффициент демпфирования или

$2d_m = \frac{\eta m^2}{r \rho_0 h (\mu_0^2 n^2 k_\beta h_v^2 + m^4 + m^2) + \mu_{bj} m^2 + \rho_v \Phi_n r^2 m^2}$, а компонент при $\varphi(t)$ – квадрат частоты свободных колебаний ω_{mn}^2 без учёта сил сопротивления среды и присоединённой массы грунта, определяемая выражением (120):

$$\begin{aligned} \omega_{mn}^2 = & \frac{\mu_0^4 n^4 k_\beta^3 h_v^2 + m^4 (m^2 - 1)(m^2 - 1 + p_0^* - q_{si}^*)}{\rho^* r h (\mu_0^2 n^2 h_v^2 + m^4 + m^2) + \mu_{bj}^* m^4 + \rho_v^* \Phi_n r^2 m^4} + \\ & + \frac{k_{si}^* m^4 - P \mu_0^4 h_v^2 n^2 k_\beta m^4 + T_{tor}^* \mu_0^2 n^2 k_\beta m^4 + 0,5 \mu_0^2 m^2 (m^2 + 1) - \rho_v \Phi_n \mu_0 h_v V^2 m^4 n^2}{\rho^* r h (\mu_0^2 n^2 h_v^2 + m^4 + m^2) + \mu_{bj}^* m^4 + \rho_v^* \Phi_n r^2 m^4}. \end{aligned}$$

Решением системы уравнений (127) является квадратное уравнение вида

$$s^2 + 2d_m s + \omega_{mn}^2 = 0. \quad (128)$$

Данное уравнение имеет известное решение [113, с.28; 226, с.93; 217, с.98] и корни этого характеристического уравнения определяются как

$$s_{1,2} = -d_m \pm \sqrt{d_m^2 - \omega_{mn}^2}. \quad (129)$$

Численное значение корней зависит от величин d_m и ω_{mn} . В случае, когда $d_m < \omega_{mn}$, корни уравнения будут комплексные сопряжённые и принимают вид

$$s_{1,2} = -d_m \pm i\sqrt{\omega_{mn}^2 - d_m^2}. \quad (130)$$

Для комплексных сопряженных корней общее решение дифференциального уравнения имеет вид

$$\varphi(t) = e^{d_m t} \left(C_1 \cos \left(t\sqrt{\omega_{mn}^2 - d_m^2} \right) + C_2 \sin \left(t\sqrt{\omega_{mn}^2 - d_m^2} \right) \right). \quad (131)$$

Это выражение определяет форму колебаний демпфированной оболочки. Отсюда следует, что круговая частота свободных колебаний оболочки ω_{mn}^* с учётом сил сопротивления среды определяется как

$$\omega_{mn}^* = \sqrt{\omega_{mn}^2 - d_m^2} = \omega_{mn} \sqrt{1 - \frac{d_m^2}{\omega_{mn}^2}}. \quad (132)$$

Таблица 3.15 – Частотные характеристики стальной тороидальной оболочки с жидкостью (водопровод), уложенной в обводнённый грунт, с учётом влияния сил сопротивления среды и без неё

$\eta \cdot 10^4$ (Па·с)	$H=2,0$ м; $R/r=10$; $k=0$ МПа/м; $p_0=2$ МПа, плотность грунта $\rho_s=1$ т/м ³								
	$h/r=1/30$			$h/r=1/50$			$h/r=1/70$		
	$\omega_{1,1}$	$\omega_{2,1}$	$\omega_{3,1}$	$\omega_{1,1}$	$\omega_{2,1}$	$\omega_{3,1}$	$\omega_{1,1}$	$\omega_{2,1}$	$\omega_{3,1}$
	$\omega_{1,1}^*$	$\omega_{2,1}^*$	$\omega_{3,1}^*$	$\omega_{1,1}^*$	$\omega_{2,1}^*$	$\omega_{3,1}^*$	$\omega_{1,1}^*$	$\omega_{2,1}^*$	$\omega_{3,1}^*$
0,5	26,39	26,32	36,45	21,03	20,91	26,34	17,94	18,27	22,84
	26,21	26,07	36,26	20,70	20,49	26,00	17,48	17,74	22,40
Разница, %	0,69	0,96	0,52	1,59	2,05	1,31	2,63	2,99	1,96
1,0	26,39	26,32	36,45	21,03	20,91	26,34	17,94	18,27	22,84
	25,64	25,28	35,65	19,68	19,19	24,93	16,03	16,01	21,01
Разница, %	2,93	4,11	2,24	6,86	8,96	5,66	11,92	14,12	8,71
1,5	26,39	26,32	36,45	21,03	20,91	26,34	17,94	18,27	22,84
	24,67	23,90	34,63	17,86	16,79	23,06	13,25	12,63	18,47
Разница, %	6,97	10,13	5,26	17,75	24,54	14,22	35,40	44,66	23,66
2,0	26,39	26,32	36,45	21,03	20,91	26,34	17,94	18,27	22,84
	23,25	21,83	33,13	14,93	12,70	20,13	7,87	4,88	14,17
Разница, %	13,51	20,57	10,02	40,86	64,65	30,85	127,95	274,39	61,19
2,5	26,39	26,32	36,45	21,03	20,91	26,34	17,94	18,27	22,84
	21,27	18,84	31,11	9,99	2,52	15,59	–	–	4,50
Разница, %	24,07	39,70	17,16	110,51	729,76	68,95	–	–	407,56
3,0	26,39	26,32	36,45	21,03	20,91	26,34	17,94	18,27	22,84
	18,58	14,36	28,44	–	–	6,70	–	–	–
Разница, %	42,03	83,29	28,16	–	–	293,13	–	–	–

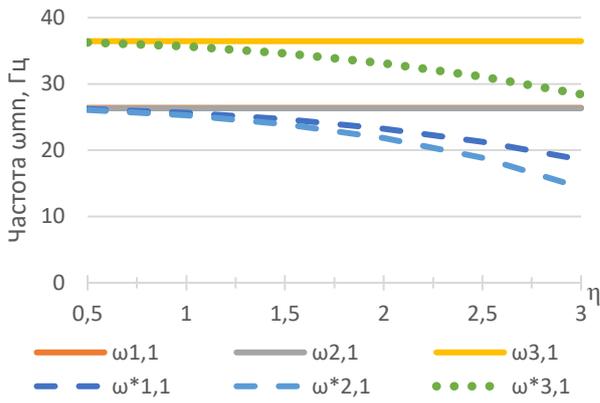


Рисунок 3.66 – Частоты свободных колебаний стальной тороидальной оболочки (водопровода) при $m=2$ и $n=1$; $p_0=2-6$ МПа; $h/r=1/30$; $R/r=8$; $k_s=0$ МПа/м; $P=0$

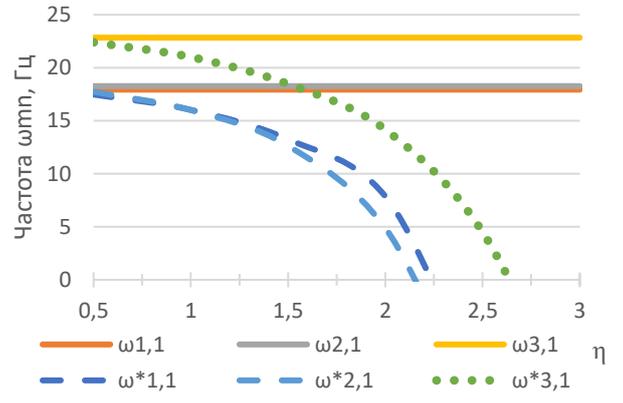


Рисунок 3.67 – Частоты свободных колебаний стальной тороидальной оболочки с (водопровода) при $m=2$ и $n=1$; $p_0=2-6$ МПа; $h/r=1/70$; $R/r=8$; $k_s=0$ МПа/м; $P=0$

Таблица 3.16 – Частотные характеристики полиэтиленовой тороидальной оболочки с жидкостью (водопровод), уложенной в обводнённый грунт, с учётом влияния сил сопротивления среды и без неё

$\eta \cdot 10^4$ (Па·с)	$H=2,0$ м; $R/r=10$; $k=0$ МПа/м; $p_0=0$ МПа, плотность грунта $\rho_s=1$ т/м ³								
	$h/r=1/30$			$h/r=1/50$			$h/r=1/70$		
	$\omega_{1,1}$	$\omega_{2,1}$	$\omega_{3,1}$	$\omega_{1,1}$	$\omega_{2,1}$	$\omega_{3,1}$	$\omega_{1,1}$	$\omega_{2,1}$	$\omega_{3,1}$
0,1	2,3	2,14	2,95	1,79	1,59	1,84	1,50	1,31	1,41
	2,09	1,90	2,77	1,49	1,22	1,53	1,12	0,83	0,98
Разница, %	10,05	12,63	6,50	20,13	30,33	20,26	33,93	57,83	43,88
0,2	2,3	2,14	2,95	1,79	1,59	1,84	1,50	1,31	1,41
	1,26	0,82	2,17	–	–	–	–	–	–
Разница, %	82,54	160,98	35,94	310,59	228,23	316,47	212,78	184,52	195,92
0,3	2,3	2,14	2,95	1,79	1,59	1,84	1,50	1,31	1,41
	–	–	–	–	–	–	–	–	–
Разница, %	–	–	–	–	–	–	–	–	–

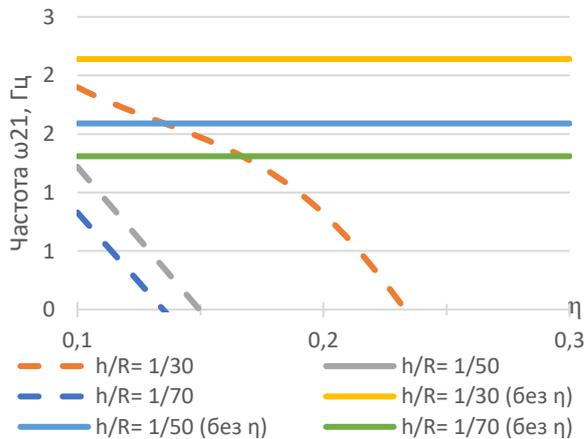


Рисунок 3.68 – Зависимость частот свободных колебаний полиэтиленовой тороидальной оболочки с жидкостью (водопровод) при $m=2$ и $n=1$; $p_0=0-0,4$ МПа; $h/r=1/30$; $R/r=8$; $k_s=0$ МПа/м; $P=0$

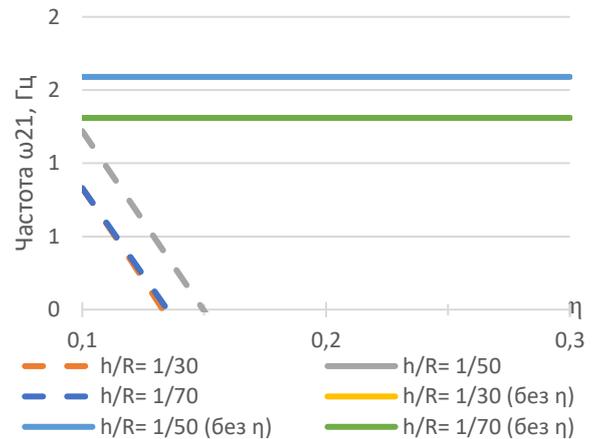


Рисунок 3.69 – Зависимость частот свободных колебаний полиэтиленовой тороидальной оболочки с жидкостью (водопровод) при $m=2$ и $n=1$; $p_0=0-0,4$ МПа; $h/r=1/70$; $R/r=8$; $k_s=0$ МПа/м; $P=0$

На основании проведенного анализа полученных значений можно сформировать следующие выводы:

Для стальной тороидальной оболочки

При рассмотрении трех вариантов тороидальных оболочек с соотношением толщины стенки к радиусу h/r 1/30 – 1/70 заметны существенные отличия. При увеличении значений η от 5 до 30 кПа·с оболочка с h/r , равной 1/30 за счет большей силы инерции менее восприимчива к демпфирующим свойствам окружающей среды, наибольшее снижение значений частот реализуется при 30 кПа·с и 2 МПа и составляет 83,29 %, при $\omega_{2,1}$ и $\omega_{2,1}^*$. Для случая $h/r = 1/70$ тенденция снижения частот более выражена, при 30 кПа·с колебаний уже не происходит.

Для полиэтиленовой цилиндрической оболочки:

Для случая полиэтиленовых тороидальных оболочек закономерности, связанные с параметром тонкостенности h/r сохраняются, однако полное затухание колебаний происходит уже при 3 кПа·с.

Как и в случае цилиндрической оболочки, решим систему разделяющихся линейных однородных дифференциальных уравнений для тороидальной оболочки вида $\varphi''(t) + 2d_m\varphi'(t) + \omega_{mn}^2\varphi(t) = 0$ относительно времени t в MathCAD 15 при помощи решателя «Odesolve». Рассмотрим случай стальной оболочки и построим график зависимости перемещения от времени при различных значениях геометрических характеристик и внешних воздействиях.

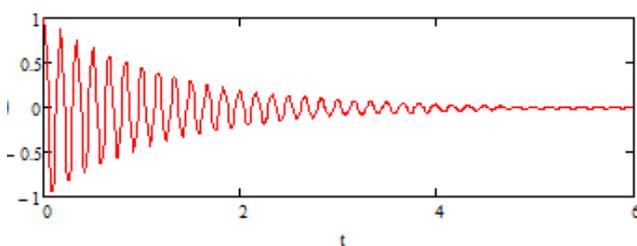


Рисунок 3.70 – Время затухания колебаний стальной тороидальной оболочки в обводненном грунте при $m=2$ и $n=1$; $p_0=2$ МПа; $h/r=1/20$; $R/r=10$; $k_s=0$ МПа/м; $P=0$; $\eta = 0,1 \cdot 10^4$ Па · с

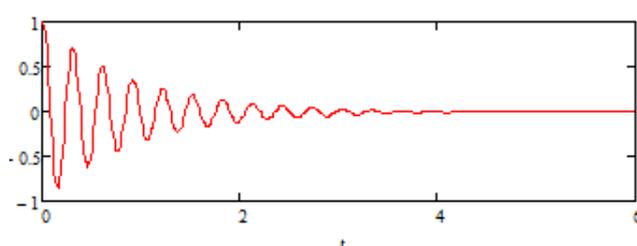


Рисунок 3.71 – Время затухания колебаний стальной тороидальной оболочки в обводненном грунте при $m=2$ и $n=1$; $p_0=2$ МПа; $h/r=1/70$; $R/r=10$; $k_s=0$ МПа/м; $P=0$; $\eta = 0,1 \cdot 10^4$ Па · с

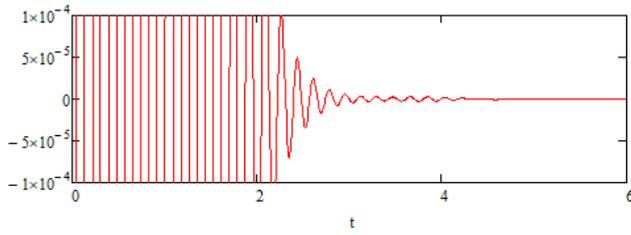


Рисунок 3.72 – Время затухания колебаний стальной тороидальной оболочки в обводненном грунте при $m=2$ и $n=1$; $p_0=2$ МПа; $h/r=1/20$; $R/r=8$; $k_s=0$ МПа/м; $P=0$; $\eta = 0,5 \cdot 10^4$ Па \cdot с

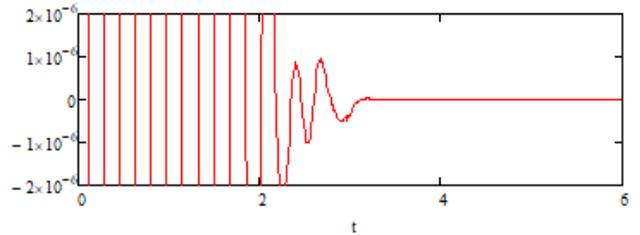
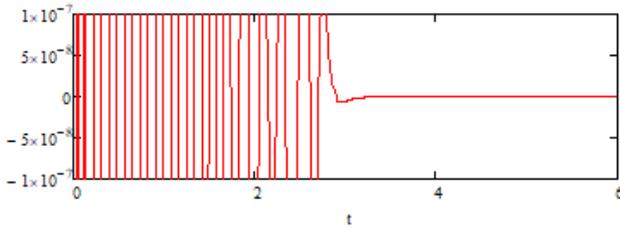
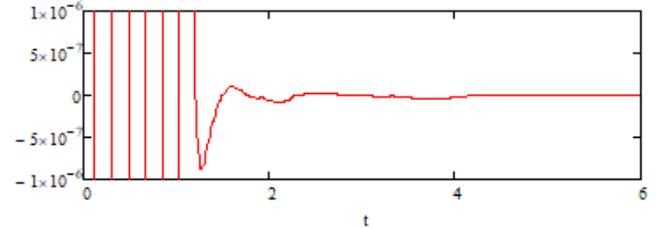


Рисунок 3.73 – Время затухания колебаний стальной тороидальной оболочки в обводненном грунте при $m=2$ и $n=1$; $p_0=2$ МПа; $h/r=1/70$; $R/r=8$; $k_s=0$ МПа/м; $P=0$; $\eta = 0,5 \cdot 10^4$ Па \cdot с



Время затухания колебаний стальной тороидальной оболочки в обводненном грунте при $m=2$ и $n=1$; $p_0=2$ МПа; $h/r=1/20$; $R/r=10$; $k_s=0$ МПа/м; $\eta = 1 \cdot 10^4$ Па \cdot с



Время затухания колебаний стальной тороидальной оболочки в обводненном грунте при $m=2$ и $n=1$; $p_0=2$ МПа; $h/r=1/70$; $R/r=10$; $k_s=0$ МПа/м; $\eta = 1 \cdot 10^4$ Па \cdot с

Теперь рассмотрим случай полиэтиленовой тороидальной оболочки и построим график зависимости перемещения от времени t .

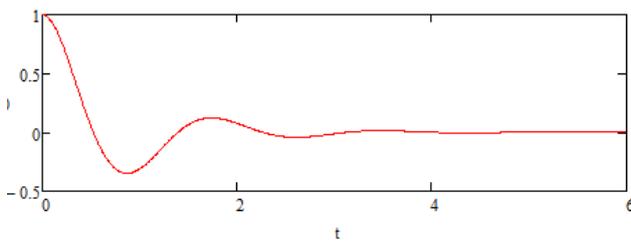


Рисунок 3.74 – Время затухания колебаний полиэтиленовой тороидальной оболочки в обводненном грунте при $m=3$ и $n=1$; $p_0=2$ МПа; $h/r=1/20$; $R/r=10$; $k_s=0$ МПа/м; $P=0$; $\eta = 0,1 \cdot 10^4$ Па \cdot с

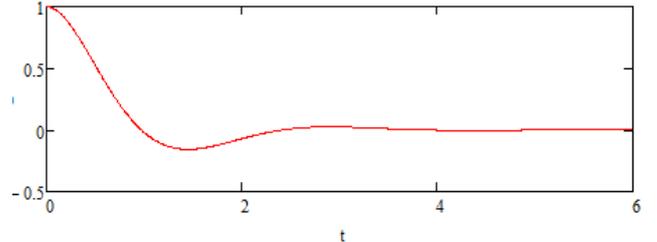


Рисунок 3.75 – Время затухания колебаний полиэтиленовой тороидальной оболочки в обводненном грунте при $m=3$ и $n=1$; $p_0=2$ МПа; $h/r=1/70$; $R/r=10$; $k_s=0$ МПа/м; $P=0$; $\eta = 0,1 \cdot 10^4$ Па \cdot с

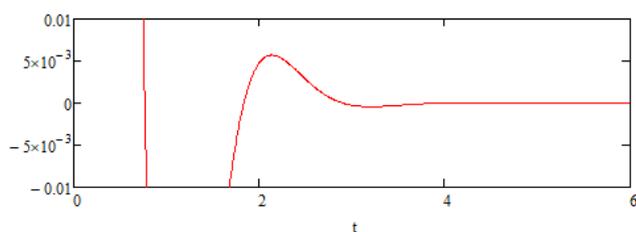


Рисунок 3.76 – Время затухания колебаний полиэтиленовой тороидальной оболочки в обводненном грунте при $m=3$ и $n=1$; $p_0=2$ МПа; $h/R=1/20$; $R/r=8$; $k_s=0$ МПа/м; $P=0$; $\eta = 0,2 \cdot 10^4$ Па · с

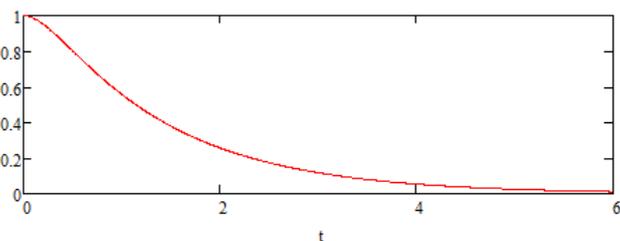


Рисунок 3.77 – Время затухания колебаний полиэтиленовой тороидальной оболочки в обводненном грунте при $m=3$ и $n=1$; $p_0=2$ МПа; $h/R=1/70$; $R/r=8$; $k_s=0$ МПа/м; $P=0$; $\eta = 0,2 \cdot 10^4$ Па · с

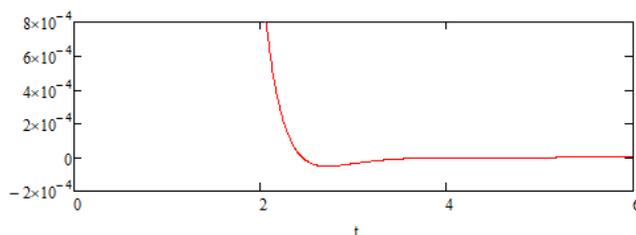


Рисунок 3.78 – Время затухания колебаний полиэтиленовой тороидальной оболочки в обводненном грунте при $m=3$ и $n=1$; $p_0=2$ МПа; $h/R=1/20$; $l/r=10$; $k_s=0$ МПа/м; $P=0$; $\eta = 0,3 \cdot 10^4$ Па · с

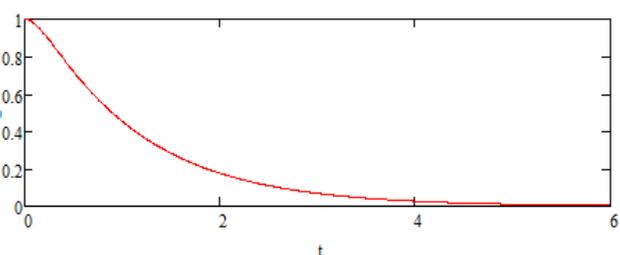


Рисунок 3.79 – Время затухания колебаний полиэтиленовой тороидальной оболочки в обводненном грунте при $m=3$ и $n=1$; $p_0=2$ МПа; $h/R=1/70$; $l/r=10$; $k_s=0$ МПа/м; $P=0$; $\eta = 0,3 \cdot 10^4$ Па · с

При анализе стальной и полиэтиленовой тороидальной оболочки можно отметить, что в среднем время затухания составляет до 3–4 секунды, при этом затухание колебаний стальной оболочки является более плавным, чем для полиэтиленовой. Такой эффект объясняется большей силой инерции стальной оболочки.

3.9 Выводы по главе 3

По результатам комплексного анализа полученных решений по определению частот свободных колебаний тонкостенных замкнутых стальных и полиэтиленовых тороидальных оболочек при наземном, частично заглубленном и подземном размещении следует отметить следующее:

1. На основании геометрически нелинейного варианта полубезмоментной теории тороидальных оболочек среднего изгиба получено наиболее полное решение по определению частот свободных колебаний, позволяющее одновременно учесть

совместное влияние внутреннего давления, параметра продольной сжимающей силы, давления внешней среды (в зависимости от рассматриваемой модели) и упругого отпора среды, температурного воздействия, скорости потока протекающей жидкости, присоединенной массы грунта и жидкости при различных значениях геометрических характеристик оболочки.

2. Приравнивая частоты, определяемые при $m=1$ и $m=2$ получен параметр R^* , который представляет собой границу перехода от оболочечной формы колебаний к стержневой.

3. При анализе полученных значений частот при наземном и подземном исполнении следует отметить большее влияние упругого отпора среды при подземном исполнении. Упругое основание увеличивает жесткость системы, что приводит к росту частот на 18–255 % в зависимости от коэффициента k_s и рассматриваемых параметров внешних воздействий. Полиэтиленовые оболочки за счет меньшей жесткости более податливы к росту значений частот в связи с увеличением k_s .

4. В результате увеличения сектора вдавливания тороидального участка трубопровода в грунт происходит рост значений частот, например, при изменении угла φ_0 от $\pi/24$ до $\pi/4$, при $k_s=30$ МПа/м, рост значений частот составляет 11 %.

5. Увеличение значений внутреннего рабочего давления значительно сказывается на увеличении частот свободных колебаний и может достигать 30 % по сравнению с пустой оболочкой.

6. С увеличением значений параметра кривизны R/r частоты снижаются, такой эффект объясняется возрастанием инерционной силы в связи с увеличением длины, и как следствие, массы рассматриваемого участка.

7. При нахождении оболочек в средах, обладающих демпфирующими свойствами, происходит снижение значений частот оболочек. При увеличении значений коэффициента динамической вязкости η от 0,5 до $3,0 \cdot 10^4$ Па·с значительнее всего затухание колебаний происходит для полиэтиленовых оболочек, так как они обладают меньшей плотностью и соответственно меньшим весом. Полное затухание колебаний полиэтиленовой оболочки происходит уже при $0,3 \cdot 10^4$ Па·с.

ГЛАВА 4. СВОБОДНЫЕ КОЛЕБАНИЯ ТОНКОСТЕННЫХ ДВУХСЛОЙНЫХ ОБОЛОЧЕК, ВЗАИМОДЕЙСТВУЮЩИХ С УПРУГОЙ СРЕДОЙ

Неоднородные оболочки являются перспективной областью развития для российских компаний ввиду их более высокой эксплуатационной надежности при работе, например, в агрессивных средах. Данные оболочки имеют широкий спектр применения от радиаторов отопления до пульпо- и нефтепроводов. Столь широкий диапазон их использования заключается в сочетании их физических и механических свойств.

«Биметаллические трубопроводы состоят из двух слоев металлов, чаще всего основной слой выполнен из прочных сталей 10, 20, 09Г2С, 12ХМ и др., а плакирующий из хромистых сталей 08Х13, 08Х14ФБ и хромоникелевых сталей 08Х18Н10, 08Х18Н10Б и др. [166]. Плакирующий слой может быть расположен как внутри трубы, так и/или снаружи. Место расположения данного слоя зависит от области применения трубопроводов, условий окружающей среды и требуемых механических характеристик» [300].

Схемы предварительной укладки биметаллических заготовок в пакеты показана на рисунке 4.1.

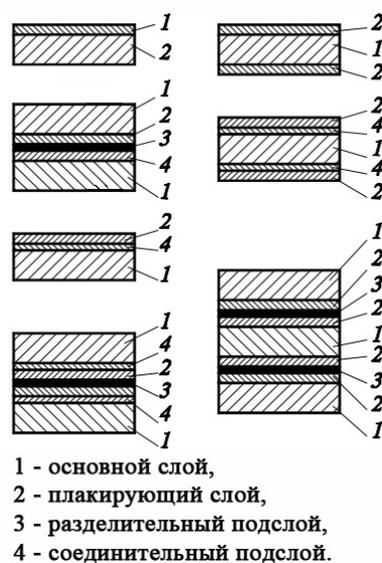


Рисунок 4.1 – Схемы предварительной укладки биметаллических заготовок

До недавнего времени недостатком биметаллических трубопроводов большого диаметра была невозможность обеспечить одинаковые свойства основного металла и сварного соединения, что снижало эксплуатационную надежность труб из-за недостаточного сопротивления хрупкому разрушению сварного шва и овализация концов при объемной термической обработке труб [158]. Также промысловые и комплексные лабораторные испытания труб показали, что коррозия наиболее часто наблюдается в месте сварного шва трубопроводов, в то время как общая коррозия внутренней поверхности трубы не превышает 0,01 мм/год и не наблюдается локальная коррозия. В связи с этим актуальным является вопрос защиты сварного шва после удаления грата, путем наплавки узкой полоски сварного шва в месте отсутствия плакирующего слоя дуговой сваркой с автоматической системой слежения за процессом [85]. Но в настоящее время существует методика производства длинномерных многослойных биметаллических труб большого диаметра для транспортировки углеводородов.

Однако в использовании данных материалов есть и свои трудности, так как в силу различия материалов по механическим и теплофизическим свойствам распределение напряжений по слоям также может быть удачным или неудачным [300].

В работах К.М. Гумерова подробно исследуется вопрос, связанный с полями напряжения биметаллических трубопроводов [16]. В частности, рассматриваются характерные случаи работы трубопроводов:

- двухслойная труба находится без внутреннего давления в циклически изменяющемся равномерном температурном поле (без градиентов);
- двухслойная труба находится под внутренним давлением при постоянной температуре t_0 .

Расчёт по LCC (Life Cycle Cost) показывает, что при сроке службы более 25 лет в условиях высокой агрессивности среды ($Ag \geq 3$ по ГОСТ 9.908–85) приведённые затраты на инновационные трубы оказываются на 15–20 % ниже, чем при использовании стандартных решений. Это делает их применение рациональным с точки зрения устойчивого инжиниринга [276].

В практике трубопроводного строительства применяются неоднородные трубы, которые могут представлять собой как биметаллические трубы, так и трубы с защитными покрытиями, в связи с чем необходимо в целях развития расчетных моделей и методов определения динамических характеристик получить решения, позволяющие определить частоты свободных колебаний цилиндрических и тороидальных оболочек, представляющие собой расчетные схемы неоднородных (двухслойных) тонкостенных трубопроводов большого диаметра. Защитные покрытия широко применяются при строительстве подземных переходов через искусственные и естественные преграды, сооружаемые бестраншейными методами прокладки. Например, эпоксидное стеклопластиковое покрытие (рис. 4.2), толщина до 10 мм, защитное покрытие «Кольчуга» (рис. 4.3, толщина до 20 мм, покрытие на основе серобетона (0), цементобетонное покрытие «ЗУБ-КОМПОЗИТ» (рис. 4.5), толщина 15–30 мм и другие балластирующие бетонные покрытия, толщина которых может достигать до 150 мм.



Рисунок 4.2 – Эпоксидный стеклопластик



Рисунок 4.3 – Защитное покрытие «Кольчуга»



Рисунок 4.4 – Покрытие на основе серобетона



Рисунок 4.5 – Покрытие ЗУБ-композит

Таблица 4.1 – Физико-механические характеристики покрытий

№ п/п	Наименование покрытия	Модуль упругости E , МПа	Коэффициент Пуассона ν	Плотность материала ρ , т/м ³
1	Стеклопластиковые защитные покрытия	$1,2 \cdot 10^3$	0,25–0,30	1,45–1,65
2	Покрытие на основе серобетона	$3-4 \cdot 10^4$	0,20–0,27	2–3
3	Покрытие на основе цементобетона	$14,5-23,5 \cdot 10^3$	0,20–0,30	2

При формировании расчетной модели полагаем, что сдвига между слоями не происходит, оба слоя прочно склеены между собой. Для корректности выполнения расчетов принимаем сопоставимые коэффициенты Пуассона материалов.

4.1 Описание расчетной модели двухслойной оболочки при различных способах её размещения

В основу расчета неоднородных (двухслойных) оболочек заложена теория неоднородных изотропных оболочек. За исходную поверхность, относительно которой сформулированы гипотезы Кирхгофа–Лява, принимается поверхность, совпадающая с исходным слоем неоднородной оболочки.

Отличие от уравнений, записанных для однородной оболочки, заключается в разных по величине приведенных модулей упругости и коэффициентов Пуассона при растяжении (сжатии) E_0, ν_0 и при изгибе E_ν, ν_ν .

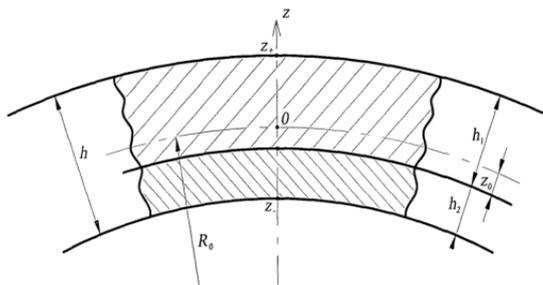


Рисунок 4.6 – Расположение исходной поверхности оболочки

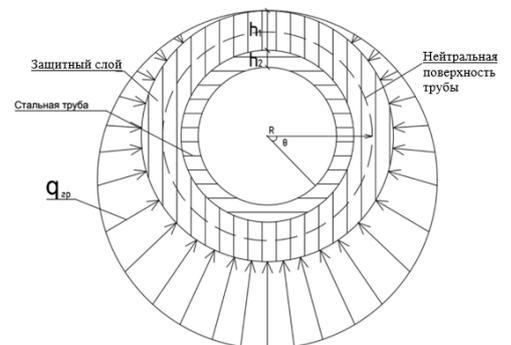


Рисунок 4.7 – Внешнее давление среды на стенку оболочки при неоднородном внешнем давлении

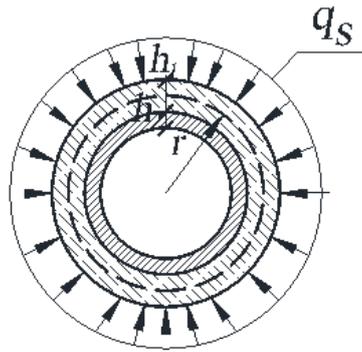


Рисунок 4.8 – Внешнее давление среды на стенку оболочки при однородном внешнем давлении

Для учета неоднородности сечения необходимо принять связь между усилиями и деформациями в следующем виде:

$$\begin{aligned} M_1 = \nu D \cdot \varkappa_2, \quad M_2 = D \cdot \varkappa_2, \quad T_1 = (1 - \nu_0) B \varepsilon_1, \quad \varepsilon_2 + \nu_0 \varepsilon_1 = 0, \\ H_1 = H_2 = H = (1 - \nu_\nu) D \cdot \tau, \quad S_1 = S_2 = S = \frac{B}{2(1 - \nu_0) \omega^*}, \quad \varkappa_2 = -\frac{1}{r_0} \frac{\partial \vartheta_2}{\partial \theta}. \end{aligned} \quad (133)$$

Модуль упругости при растяжении (сжатии) имеет вид

$$E_0 = (1 - \nu_0^2) \frac{B}{h}, \quad (134)$$

где B – приведенная жёсткость на растяжение (сжатие),

$$B = \frac{1}{(1 - \nu^2)} (E_1 h_1 + E_2 h_2), \quad (135)$$

где E_1 – модуль упругости материала защитной оболочки,

E_2 – модуль упругости материала оболочки (трубы),

h_1 – толщина защитной оболочки,

h_2 – толщина слоя оболочки (трубы),

r_0 – расчетное значение радиуса исходной поверхности,

h – общая толщина слоя неоднородной оболочки (трубы).

Модуль упругости на изгиб имеет вид

$$E_\nu = \frac{12D(1 - \nu_\nu^2)}{h^3}, \quad (136)$$

Приведенная жесткость на изгиб имеет следующий вид

$$D_0 = \frac{1}{3(1 - \nu^2)} \{E_1 [(h_1 - z_0)^3 + z_0^3] + E_2 [(h_2 + z_0)^3 - z_0^3]\}, \quad (137)$$

где z_0 – расстояние от слоя стыковки до исходного слоя поверхности:

$$z_0 = \frac{E_1 h_1^2 - E_2 h_2^2}{2(E_1 h_1 + E_2 h_2)}. \quad (138)$$

Принимаем для двухслойной оболочки условие равенства коэффициентов Пуассона слоев $\nu_1 = \nu_2 = \nu$ с учетом (138).

В отличие от однородной оболочки, в выражении (47) внесены следующие уточнения: $\rho_{sr} = \gamma_{cp}/g$ – приведенная плотность материалов слоев, $\gamma_{sr} = (\gamma_1 h_1 + \gamma_2 h_2)/h$ – усредненный вес двухслойной оболочки, состоящей из металлической трубы (γ_2) и оболочки покрытия (γ_1), h – суммарная толщина двух слоев оболочки ($h = h_1 + h_2$).

4.2 Определение частот и форм свободных колебаний неоднородной тороидальной (двухслойной) оболочки

Разрешающая система уравнений неоднородной тороидальной оболочки о свободных изгибных колебаниях замкнутой тороидальной оболочки, заглубленной в грунт, имеет вид

$$\begin{aligned} & \frac{r_0^3}{R^3} \frac{\partial^3 u}{\partial \beta^3} + \frac{r_0^2}{R^2} \frac{\partial^3 u}{\partial \theta^2 \partial \beta} \cos \theta - \frac{r_0^2}{R^2} \frac{\partial u}{\partial \beta} \cos \theta - \frac{r_0^2}{R^2} \frac{\partial^2 u}{\partial \theta \partial \beta} \sin \theta + \frac{r_0^3}{R^3} \frac{\partial^2 W_y}{\partial \beta^2} - 2 \frac{r_0^2}{R^2} \frac{\partial^4 w}{\partial \theta^2 \partial \beta^2} (\varepsilon_0 - \varepsilon_t) + \\ & + \frac{r_0^2}{R^2} \frac{\partial}{\partial \theta} \left[\frac{\partial}{\partial \theta} (W_y \cos \theta) - W_y \sin \theta \right] + \eta_0 h_v^2 \frac{\partial^5 \vartheta}{\partial \theta^5} + 2 \frac{r_0}{R} (\varepsilon_0 - \varepsilon_t) \left(\frac{\partial^3 \vartheta}{\partial \theta^3} \cos \theta - 2 \frac{\partial^2 \vartheta}{\partial \theta^2} \sin \theta - \right. \\ & \left. - \frac{\partial \vartheta}{\partial \theta} \cos \theta - 2 \cos \theta \right) + \eta_0 h_v^2 \frac{\partial^3 \vartheta}{\partial \theta^3} - \frac{r_0^2}{E_0 h R^2} r_0 h \rho_{sr} \frac{\partial^3 u}{\partial \beta \partial t^2} + \frac{r_0}{E_0 h} r h \rho_{sr} \frac{\partial^3 v}{\partial \theta \partial t^2} - \\ & - \frac{r_0}{E_0 h} \left[r_0 h \rho_{sr} \frac{\partial^4 w}{\partial \theta^2 \partial t^2} - \frac{\partial^3 \vartheta}{\partial \theta^3} p_0 + \frac{\partial^3 \vartheta}{\partial \theta^3} q_s + \frac{\partial^2}{\partial \theta^2} k_{si} w - \mu_{bj} \frac{\partial^4 w}{\partial \theta^2 \partial t^2} + \eta \frac{\partial^2 w}{\partial \theta \partial t} + \rho_v r_0^2 \Phi_n^* \left(\frac{\partial^4 w}{\partial \theta^2 \partial t^2} + \right. \right. \\ & \left. \left. + \frac{V^2}{r_0 R} \frac{\partial^4 w}{\partial \theta^2 \partial \beta^2} \right] = 0. \end{aligned} \quad (139)$$

Дальнейшие математические преобразования производятся аналогично выполненным в разделе 3.2. После преобразований получим полное выражение для квадрата частоты свободных колебаний неоднородной, двухслойной тороидальной оболочки, взаимодействующей с упругой средой:

$$\begin{aligned} \omega_{mn}^2 = & \frac{\mu_0^4 n^4 k_\beta^3 h_v^2 + \eta_0 m^4 (m^2 - 1) \left(m^2 - 1 + \frac{p^* - q_{si}^*}{\eta_0} \right) + k_s^* m^4 - p \mu_0^4 h_v^2 n^2 k_\beta m^4}{\rho^* r_0 h (\mu_0^2 n^2 h_v^2 + m^4 + m^2) + \mu_{bj}^* m^4 + \rho_v^* \Phi_n r_0^2 m^4} + \\ & + \frac{T_{tor}^* \mu_0^2 n^2 k_\beta m^4 + 0,5 \mu_0^2 m^2 (m^2 + 1) - \rho_v \Phi_n \mu_0 k_\beta h_v V^2 m^4 n^2}{\rho^* r_0 h (\mu_0^2 n^2 k_\beta h_v^2 + m^4 + m^2) + \mu_{bj}^* m^4 + \rho_v^* \Phi_n r_0^2 m^4} \end{aligned} \quad (140)$$

где для неоднородной оболочки $h_v = \frac{h}{r_0 \sqrt{12(1-\nu^2)}}$, $\eta_0 = \frac{12D_0}{h^2 B}$,

$$G = \frac{r_0}{E_0 h h_v^2}, \mu_{bj}^* = \mu_{bj} G, \mu_0 = \frac{r_0}{R h_v}, \rho^* = \rho_{sr} G, p^* = p_0^* G, \rho_v^* = \rho_v G,$$

$k_{s1}^* = \frac{k_s r_0^2}{\pi E_0 h h_v^2} |z_m|$ – параметр упругого основания (для случая наземного и частично заглубленного размещения);

z_m – коэффициент, зависящий от геометрических характеристик вдавливания трубы в грунт [183];

$k_{s2}^* = \frac{k_s r_0^2}{E_0 h h_v^2}$ – параметр упругого отпора грунта (для случая подземного размещения) [178];

Формула (140) получена для замкнутой тороидальной оболочки с шарнирным типом закрепления концов, учитывает одновременное влияние внутреннего и внешнего давления, параметра продольной сжимающей силы, скорости потока протекающей жидкости, температурного воздействия, упругого основания, присоединенной массы среды (грунта) и жидкости.

Отметим, что в данной работе не рассматривается технология изготовления и подбора оптимальной толщины второго слоя оболочки. Исследуются величины и формы колебаний двухслойных оболочек. Таким образом, значения толщин второго слоя выбираются в более широком диапазоне.

В данном разделе рассмотрим влияние толщины защитных и балластирующих покрытий на минимальные частоты свободных колебаний двухслойной оболочки, размещенной в упругой среде (при подземном размещении).

В качестве примера рассмотрим защитные покрытия, выполненные из бетона и стеклопластика. Принимаем, что покрытия являются изотропными.

Таблица 4.2 – Зависимость частот свободных изгибных колебаний ω_{min} подземного газопровода от параметра кривизны участка R/r , коэффициента упругого отпора k_s и толщины защитного слоя бетонирования $h1$

Бетонные покрытия. $p_0=2$ МПа, $H=2,0$ м, радиус стальной трубы $r=700$ мм, $h2=10$ мм						
Толщина защитного слоя оболочки, $h1$	$R/r = 5$		$R/r = 10$		$R/r = 20$	
	$k_s = 1$ МПа/м	$k_s = 10$ МПа/м	$k_s = 1$ МПа/м	$k_s = 10$ МПа/м	$k_s = 1$ МПа/м	$k_s = 10$ МПа/м
5	159,54	163,45	79,87	87,53	41,19	54,62
10	155,59	159,19	77,86	84,93	40,08	52,56
15	152,29	155,63	76,17	82,75	39,15	50,81
20	149,49	152,61	74,74	80,89	38,36	49,32
25	147,09	150,02	73,52	79,29	37,68	48,02

Окончание таблицы 4.2

Стеклопластиковые покрытия. $p_0=2$ МПа, $H=2,0$ м, радиус стальной трубы $r=700$ мм, $h_2=10$ мм						
Толщина защитного слоя оболочки, h_1	$R/r=5$		$R/r=10$		$R/r=20$	
	$k_s=1$ МПа/м	$k_s=10$ МПа/м	$k_s=1$ МПа/м	$k_s=10$ МПа/м	$k_s=1$ МПа/м	$k_s=10$ МПа/м
5	157,27	161,35	78,78	86,74	40,70	54,59
10	151,05	154,05	75,66	83,29	39,08	52,39
15	145,55	149,30	72,90	80,24	37,66	50,45
20	140,64	144,25	70,44	77,51	36,38	48,71
25	136,22	139,71	68,22	75,05	35,23	47,15

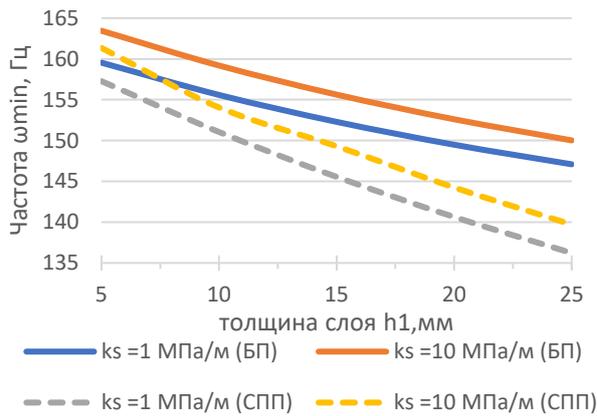


Рисунок 4.9 – Минимальные частоты колебаний ω_{\min} двухслойного газопровода от значений k_s и толщины защитного слоя h_1 , при $p_0=2$ МПа; $R/r=5$

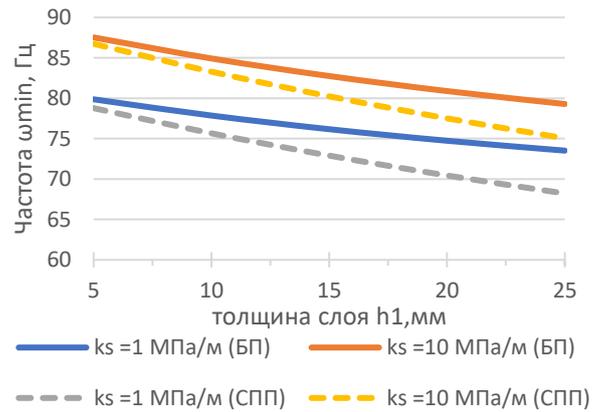


Рисунок 4.10 – Минимальные частоты колебаний ω_{\min} двухслойного газопровода от значений k_s и толщины защитного слоя h_1 , при $p_0=2$ МПа; $R/r=10$

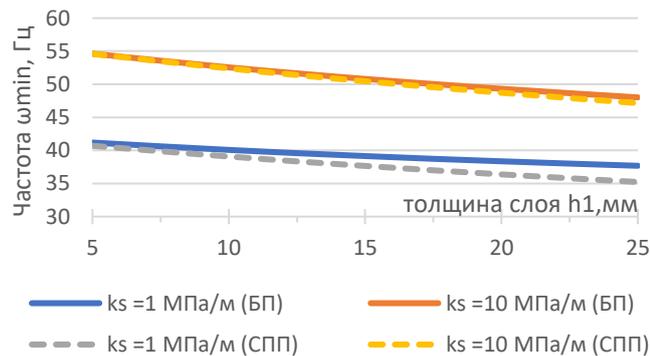


Рисунок 4.11 – Минимальные частоты колебаний ω_{\min} двухслойного газопровода от значений k_s и толщины защитного слоя h_1 , при $p_0=2$ МПа; $R/r=20$

Таблица 4.3 – Зависимость частот свободных изгибных колебаний ω_{min} подземного нефтепровода от параметра кривизны участка R/r , параметра тонкостенности h/r и коэффициента упругого отпора k_s

Бетонные покрытия. $p_0=2$ МПа, $H=2,0$ м, радиус стальной трубы $r=700$ мм, $h_2=10$ мм, $V=5$ м/с						
Толщина защитного слоя оболочки, h_1	$R/r=5$		$R/r=10$		$R/r=20$	
	$k_s=1$ МПа/м	$k_s=10$ МПа/м	$k_s=1$ МПа/м	$k_s=10$ МПа/м	$k_s=1$ МПа/м	$k_s=10$ МПа/м
5	34,39	35,39	25,94	28,14	14,66	18,68
10	33,46	34,5	24,89	27,19	14,43	18,85
15	32,57	33,65	24,01	26,41	14,18	18,41
20	31,74	32,85	23,28	25,77	13,93	18,26
25	30,93	32,07	22,69	25,26	13,66	18,11
Стеклопластиковые покрытия. $p_0=2$ МПа, $H=2,0$ м, радиус стальной трубы $r=700$ мм, $h_2=10$ мм, $V=5$ м/с						
Толщина защитного слоя оболочки, h_1	$R/r=5$		$R/r=10$		$R/r=20$	
	$k_s=1$ МПа/м	$k_s=10$ МПа/м	$k_s=1$ МПа/м	$k_s=10$ МПа/м	$k_s=1$ МПа/м	$k_s=10$ МПа/м
5	30,16	31,32	22,18	24,80	16,55	20,54
10	30,14	31,31	22,17	24,77	16,54	20,50
15	30,13	31,30	22,16	24,75	16,53	20,48
20	30,13	31,30	22,15	24,75	16,52	20,47
25	30,13	31,30	22,15	24,74	16,51	20,46

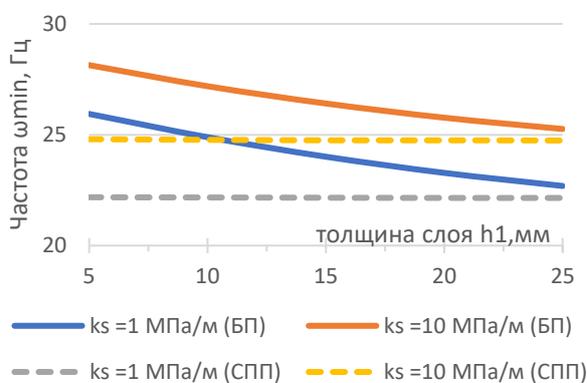


Рисунок 4.12 – Минимальные частоты колебаний ω_{min} двухслойного нефтепровода от значений k_s и толщины защитного слоя h_1 , при $p_0=2$ МПа; $R/r=10$

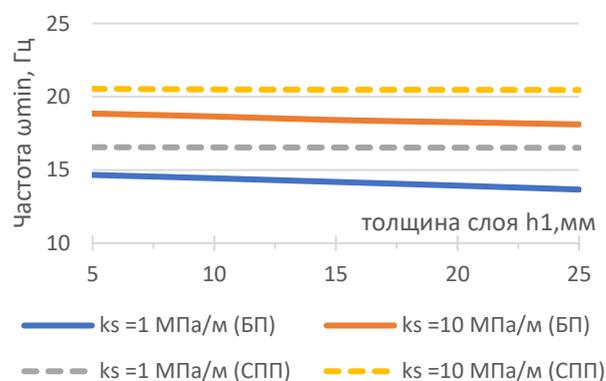


Рисунок 4.13 – Минимальные частоты колебаний ω_{min} двухслойного нефтепровода от значений k_s и толщины защитного слоя h_1 , при $p_0=2$ МПа; $R/r=20$

На основании проведенного анализа полученных значений следует отметить:

1) как и в случае с однослойной тороидальной оболочкой, двухслойная оболочка чувствительна к росту значений k_s , в зависимости от длины рассматриваемого участка рост может варьировать от 3 % до 20% и более;

2) при увеличении толщины внешнего слоя оболочки с 5 до 25 мм частоты снижаются, в зависимости от типа покрытия, например:

– для бетонных покрытий при $R/r = 5$ снижение составляет для *газопровода* 8,46 % при $k_s = 1$ МПа/м и 8,95 % при $k_s = 10$ МПа/м. При $R/r = 20$ снижение составляет 9,31 % при $k_s = 1$ МПа/м и 13,74 % при $k_s = 10$ МПа/м;

– для стеклопластиковых покрытий при $R/r = 5$ снижение составляет 15,45 % при $k_s = 1$ МПа/м и 15,48 % при $k_s = 10$ МПа/м. При $R/r = 20$ снижение составляет 15,52 % при $k_s = 1$ МПа/м и 15,77 % при $k_s = 10$ МПа/м;

3) в случае бетонных покрытий снижение частот становится заметно больше при толщинах более 10 мм, это объясняется большей плотностью бетона и, следовательно, большим весом, вовлекаемым при колебательном процессе;

4) при рассмотрении двухслойной тороидальной оболочки с жидкостью частоты ниже в 4–5 раз по сравнению с оболочкой с потоком газа, в данном случае к возросшей инерционной силе сталебетонной оболочки добавляется еще и инерционная сила протекающей жидкости;

5) сталебетонная оболочка с жидкостью более восприимчива к увеличению внешнего бетонного слоя, ввиду большего модуля упругости и плотности внешнего покрытия по сравнению со стеклопластиковым защитным слоем. По причине более высокой жесткости сталебетонное покрытие имеет частоты выше до 15 % в сравнении со стеклопластиковым покрытием. С увеличением толщины внешнего слоя бетона до 25 мм вес сталебетонной двухслойной оболочки увеличивается, что приводит к уменьшению частот свободных колебаний.

4.3 Определение значений предельных параметров замкнутой неоднородной (двухслойной) тороидальной оболочки

Критическое внешнее давление на оболочку q_{sicr}

В зависимости от глубины заложения тороидальной оболочки величина внешней нагрузки увеличивается и при достижении критических значений может

привести к местной потере устойчивости рассматриваемого участка, в связи с чем необходимо определить максимальное внешнее давление от обратной засыпки среды, которое определяется также на основании ранее описанного критерия динамической устойчивости:

для двухслойной тороидальной оболочки с газом:

$$q_{sigr} = \frac{\mu_0^4 n^4 k_\beta^3 h_v^2 + k_{si}^* m^4 - P \mu_0^4 h_v^2 n^2 k_\beta m^4 + T_{tor}^* \mu_0^2 n^2 k_\beta m^4 + 0,5 \mu_0^2 m^2 (m^2 + 1)}{\eta_0 m^4 (m^2 - 1)} + \left(m^2 - 1 + \frac{p^* - q_{si}^*}{\eta_0} \right); \quad (141)$$

для двухслойной тороидальной оболочки с жидкостью:

$$q_{sigrv} = \frac{\mu_0^4 n^4 k_\beta^3 h_v^2 + k_{si}^* m^4 - P \mu_0^4 h_v^2 n^2 k_\beta m^4 + T_{tor}^* \mu_0^2 n^2 k_\beta m^4 + 0,5 \mu_0^2 m^2 (m^2 + 1) - \tilde{\lambda}_n^4 \rho_v^* \Phi_n V^2 m^4 h_v}{\eta_0 m^4 (m^2 - 1)} + \left(m^2 - 1 + \frac{p^* - q_{si}^*}{\eta_0} \right). \quad (142)$$

Критерий применимости теории неоднородных тороидальных оболочек

для неоднородной тороидальной оболочки с жидкостью:

$$A \cdot R^{*-4} + B \cdot R^{*-2} + C \cdot R^{*-1} + D = 0 \quad (143)$$

$$\text{где } A = \left(\frac{h_v^2 \cdot n^4 - P \cdot h_v^2 \cdot n^2}{\rho_v^* \Phi_{mn} r^2 + 2h\rho^* r + \mu_{b1}^*} - \frac{h_v^2 \cdot n^4 - 4P \cdot h_v^2 \cdot n^4}{16\rho_v^* \Phi_n r^2 + 20h\rho^* r + 16\mu_{b2}^*} \right) \frac{r^4}{h_v^4};$$

$$B = \left(\frac{T_{tor}^* + 1}{\rho_v^* \Phi_{mn} r^2 + 2h\rho^* r + \mu_{b1}^*} - \frac{16T_{tor}^* n^2 + 10}{16\rho_v^* \Phi_n r^2 + 20h\rho^* r + 16\mu_{b2}^*} \right) \frac{r^2}{h_v^2};$$

$$C = \left(\frac{16V^2 h_v n^2 \rho_v^* \Phi_n}{16\rho_v^* \Phi_n r^2 + 2h\rho^* r + 16\mu_{b2}^*} - \frac{V^2 h_v n^2 \rho_v^* \Phi_n}{\rho_v^* \Phi_n r^2 + 2h\rho^* r + \mu_{b1}^*} \right) \frac{r}{h_v};$$

$$D = \left(\frac{k^*}{\rho_v^* \Phi_n r^2 + 2h\rho^* r + \mu_{b1}^*} - \frac{16k^* + 48\eta_0 \left(\frac{p^* - q_s}{\eta_0} + 3 \right)}{\rho_v^* \Phi_n r^2 + 2h\rho^* r + 16\mu_{b2}^*} \right).$$

Уравнение (143) позволяет установить границу применимости полученных в диссертации решений для определения частот свободных колебаний двухслойного участка трубопровода с позиции теории тороидальных оболочек. Установив параметр кривизны участка R^* , можно определить границу перехода от оболочечной формы колебаний к стержневой.

4.4 Колебания двухслойной тороидальной оболочки с учетом присоединённой массы и демпфирующих свойств среды

Для исследования влияния сил сопротивления среды неоднородной (двухслойной) тороидальной оболочки, взаимодействующей с упругой средой, по примеру параграфа 3.8 запишем систему разделяющихся линейных однородных

дифференциальных уравнений второго порядка относительно функции времени, вида $\varphi''(t) + 2d_m \varphi'(t) + \omega_{mn}^2 \varphi(t) = 0$, где

$$\left[\frac{r^2 \rho_0 h}{E h h_v^2} (\mu_0^2 n^2 k_\beta h_v^2 + m^4 + m^2) + \mu_{bj} \frac{r}{E h h_v^2} m^4 + \rho_v \frac{r}{E h h_v^2} \Phi_n r^2 m^4 \right] \varphi''(t) + \eta \frac{r m^4}{E h h_v^2} \varphi'(t) + \left[\mu_0^4 n^4 k_\beta^3 h_v^2 + \eta_0 m^4 (m^2 - 1) \left(m^2 - 1 + \frac{p^* - q_{si}^*}{\eta_0} \right) + k_{si}^* m^4 - P \mu_0^4 h_v^2 n^2 k_\beta m^4 + T_{tor}^* \mu_0^2 n^2 k_\beta m^4 - V^2 \mu_0 h_v \rho_v^* \Phi_n^* m^4 n^2 k_\beta + 0,5 \mu_0^2 m^2 (m^2 + 1) \right] \varphi(t) = 0. \quad (144)$$

Поделив каждый компонент выражения (86) на $\frac{r^2 \rho_{sr} h}{E h h_v^2} (\mu_0^2 n^2 k_\beta h_v^2 + m^4 + m^2) + \mu_{bj} \frac{r}{E h h_v^2} m^4 + \rho_v \frac{r}{E h h_v^2} \Phi_n r^2 m^4$, ПОЛУЧИМ

$$\varphi''(t) + \frac{\eta m^2}{r \rho_{sr} h (\mu_0^2 n^2 k_\beta h_v^2 + m^4 + m^2) + \mu_{bj} m^2 + \rho_v \Phi_n r^2 m^2} \varphi'(t) + \omega_{mn}^2 \varphi(t) = 0, \quad (145)$$

где компонент $2d_m$ при $\varphi'(t)$ есть коэффициент демпфирования или

$$2d_m = \frac{\eta m^2}{r \rho_{sr} h (\mu_0^2 n^2 k_\beta h_v^2 + m^4 + m^2) + \mu_{bj} m^2 + \rho_v \Phi_n r^2 m^2}, \text{ а компонент при } \varphi(t) - \text{ квадрат}$$

частоты свободных колебаний ω_{mn}^2 без учёта сил сопротивления среды и присоединённой массы грунта, определяемый выражением (140)

$$\omega_{mn}^2 = \frac{\mu_0^4 n^4 k_\beta^3 h_v^2 + \eta_0 m^4 (m^2 - 1) \left(m^2 - 1 + \frac{p^* - q_{si}^*}{\eta_0} \right)}{\rho^* r h (\mu_0^2 n^2 h_v^2 + m^4 + m^2) + \mu_{bj}^* m^4 + \rho_v^* \Phi_n r^2 m^4} + \frac{k_{si}^* m^4 - P \mu_0^4 h_v^2 n^2 k_\beta m^4 + T_{tor}^* \mu_0^2 n^2 k_\beta m^4 + 0,5 \mu_0^2 m^2 (m^2 + 1) - \rho_v \Phi_n \mu_0 h_v V^2 m^4 n^2}{\rho^* r h (\mu_0^2 n^2 h_v^2 + m^4 + m^2) + \mu_{bj}^* m^4 + \rho_v^* \Phi_n r^2 m^4}.$$

Таблица 4.4 – Частотные характеристики стальной двухслойной тороидальной оболочки с газом (газопровод), уложенной в обводнённый грунт с учётом влияния сил сопротивления среды

$\eta \cdot 10^4$ (Па·с)	$H=2,0$ м; $R/r=8$; $k=0$ МПа/м; $p_0=2$ МПа, $D=1420$ мм, $h_2=10$ мм, плотность грунта $\rho_s=1,5$ т/м ³					
	Бетонное покрытие			Стеклопластиковое покрытие		
	$h_1=5$ мм	$h_1=10$ мм	$h_1=20$ мм	$h_1=5$ мм	$h_1=10$ мм	$h_1=20$ мм
	$\omega_{2,1}^*$	$\omega_{2,1}^*$	$\omega_{2,1}^*$	$\omega_{2,1}^*$	$\omega_{2,1}^*$	$\omega_{2,1}^*$
0	43,51	42,26	60,40	43,49	49,21	58,85
0,5	43,4	49,34	60,33	43,39	49,12	58,78
1,0	43,08	49,06	60,12	43,06	48,84	58,55
1,5	42,54	48,6	59,76	42,51	48,37	58,17
2,0	41,76	47,95	59,26	41,73	47,7	57,64
2,5	40,75	47,1	58,62	40,71	46,82	56,94
3,0	39,48	46,03	57,82	39,42	45,73	56,09

Таблица 4.5 – Частотные характеристики стальной двухслойной тороидальной оболочки с жидкостью (нефтепровод), уложенной в обводнённый грунт с учётом влияния сил сопротивления среды

$\eta \cdot 10^4$ (Па·с)	$H=2,0$ м; $R/r=10$; $k=0$ МПа/м; $p_0=2$ МПа, $V=5$ м/с, плотность грунта $\rho_s=1,5$ т/м ³					
	Бетонное покрытие			Стеклопластиковое покрытие		
	$h1=5$ мм	$h1=10$ мм	$h1=20$ мм	$h1=5$ мм	$h1=10$ мм	$h1=20$ мм
	$\omega^*_{2,1}$	$\omega^*_{2,1}$	$\omega^*_{2,1}$	$\omega^*_{2,1}$	$\omega^*_{2,1}$	$\omega^*_{2,1}$
0	23,60	26,95	33,27	23,56	26,76	32,22
0,5	23,41	26,78	33,14	23,36	26,58	32,08
1,0	22,8	26,28	32,76	22,75	26,06	31,67
1,5	21,76	25,4	32,1	21,7	25,16	30,96
2,0	20,21	24,13	31,16	20,13	23,85	29,95
2,5	18,02	22,38	29,92	17,91	22,05	28,59
3,0	14,92	20,05	28,32	14,75	19,63	26,84

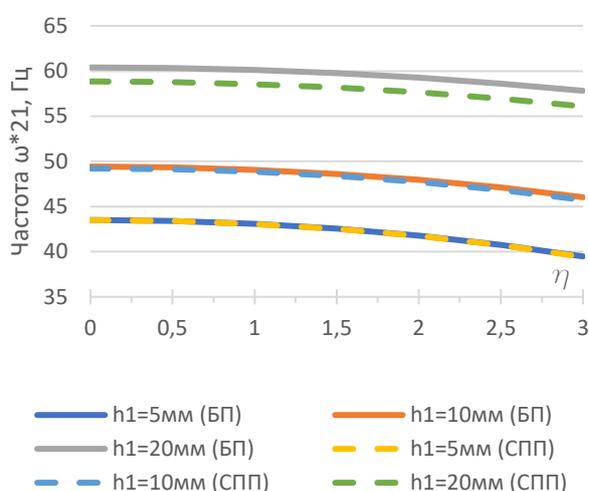


Рисунок 4.14 – Зависимость частот свободных колебаний стальной тороидальной оболочки с газом (газопровод), с защитным покрытием, при $m=2$ и $n=1$; $p_0=2$ МПа; $h/R=1/30$; $R/r=8$; $k_s=0$ МПа/м; $P=0$

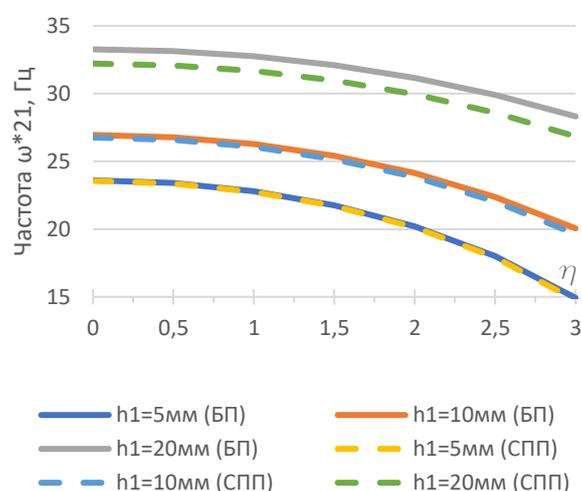


Рисунок 4.15 – Зависимость частот свободных колебаний стальной тороидальной оболочки с жидкостью (водопровод), с защитным покрытием, при $m=2$ и $n=1$; $p_0=2$ МПа; $h/R=1/70$; $R/r=8$; $k_s=0$ МПа/м; $P=0$

Как и в случае тороидальной оболочки, решим систему разделяющихся линейных однородных дифференциальных уравнений для двухслойной тороидальной оболочки вида $\varphi''(t) + 2d_m\varphi'(t) + \omega_{mn}^2\varphi(t) = 0$ относительно времени t в MathCAD 15 при помощи решателя «Odesolve». Рассмотрим случай стальной оболочки с защитным покрытием из бетона и построим график зависимости перемещения от времени при различных значениях геометрических характеристик и внешних воздействиях.

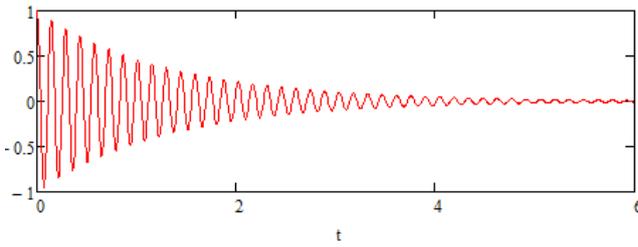


Рисунок 4.16 – Время затухания колебаний двухслойной тороидальной оболочки в обводненном грунте при $m=2$ и $n=1$; $p_0=2$ МПа; $h/r_0=1/47$ (при $h_1=10$ мм, $h_2=5$ мм); $R/r=8$; $k_s=0$ МПа/м; $\eta = 0,1 \cdot 10^4$ Па с

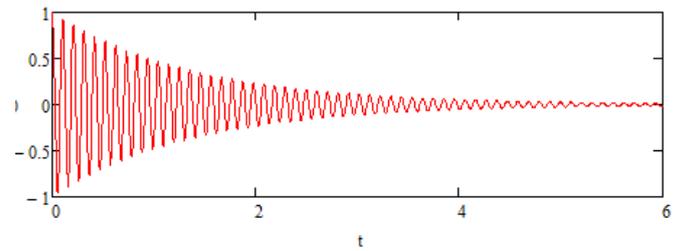


Рисунок 4.17 – Время затухания колебаний двухслойной тороидальной оболочки в обводненном грунте при $m=2$ и $n=1$; $p_0=2$ МПа; $h/r_0=1/23$ (при $h_1=10$ мм, $h_2=20$ мм); $R/r=8$; $k_s=0$ МПа/м; $\eta = 0,1 \cdot 10^4$ Па · с

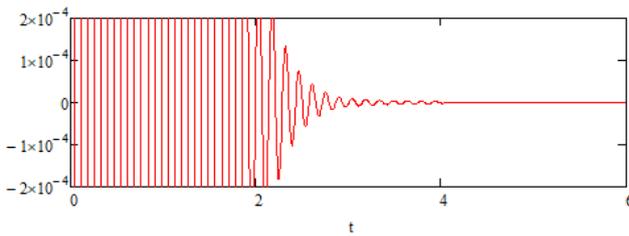


Рисунок 4.18 – Время затухания колебаний двухслойной тороидальной оболочки в обводненном грунте при $m=2$ и $n=1$; $p_0=2$ МПа; $h/r_0=1/47$ (при $h_1=10$ мм, $h_2=5$ мм); $R/r=8$; $k_s=0$ МПа/м; $P=0$; $\eta = 0,5 \cdot 10^4$ Па · с

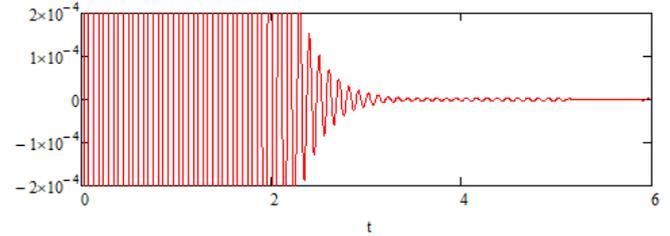


Рисунок 4.19 – Время затухания колебаний двухслойной тороидальной оболочки в обводненном грунте при $m=2$ и $n=1$; $p_0=2$ МПа; $h/r_0=1/23$ (при $h_1=10$ мм, $h_2=20$ мм); $R/r=8$; $k_s=0$ МПа/м; $P=0$; $\eta = 0,5 \cdot 10^4$ Па · с

4.5 Выводы по главе 4

По результатам комплексного анализа полученных решений по определению частот свободных колебаний тонкостенных замкнутых двухслойных тороидальных оболочек при подземном размещении необходимо отметить следующее:

1. В отличие от однослойной однородной тороидальной оболочки в решениях дополнительно учтено влияние неоднородности во втором слагаемом числителя формулы (140) в виде $\eta_0 m^4 (m^2 - 1) \left(m^2 - 1 + \frac{p^* - q_{si}^*}{\eta_0} \right)$. Коэффициент неоднородности $\eta_0 = \frac{12D_0}{h^2 B}$ позволяет учесть свойства двух материалов и их влияние на частоты свободных колебаний.

2. На основании равенства частот, определяемых при $m=1$ и $m=2$, получен параметр предельной длины участка R^* , который определяет критерий применимости теории тороидальных оболочек в вопросах определения частот свободных колебаний.

3. Используя критерий динамической устойчивости (когда частота обращается в ноль), определено предельное внешнее давление на оболочку q_{sicr} , приводящее к местной потере устойчивости.

4. При увеличении значений параметра кривизны R/r частоты снижаются, такой эффект объясняется возрастанием инерционной силы в связи с увеличением длины и, как следствие, массы рассматриваемого участка.

5. При увеличении толщины внешнего слоя оболочки с 5 до 25 мм частоты снижаются в зависимости от типа покрытия. При этом частоты для цементобетонных покрытий выше, чем для стеклопластиковых ввиду большей жесткости.

ГЛАВА 5. ПАРАМЕТРИЧЕСКИЕ КОЛЕБАНИЯ И ДИНАМИЧЕСКАЯ УСТОЙЧИВОСТЬ ОБОЛОЧЕК В УПРУГОЙ СРЕДЕ

5.1 Параметрические колебания и динамическая устойчивость цилиндрических оболочек при наземном и подземном размещении

В условиях эксплуатации магистральные трубопроводы подвергаются комплексным динамическим воздействиям, включая гидродинамические нагрузки от насосных агрегатов, сейсмические колебания и аэродинамические возмущения. Спектральный анализ колебаний выявляет сложную суперпозицию собственных мод и вынужденных гармоник, взаимодействие которых определяет устойчивость конструкции. Исследования [20] демонстрируют, что при совпадении частот внешнего воздействия γ с собственными частотами системы ω реализуется параметрический резонанс. Этот феномен характеризуется потерей динамической устойчивости прямолинейной конфигурации оболочки, сопровождающейся экспоненциальным ростом амплитуд поперечных колебаний. Критические условия возникают, когда отношение γ/ω приближается к рациональным числам (например, 1:1, 1:2), что приводит к нелинейному накоплению энергии в системе. Параметрический резонанс требует отдельного рассмотрения в рамках теории нелинейных колебаний, так как его проявления не устраняются традиционными методами виброзащиты, а требуют модификации жёсткостных характеристик или демпфирования.

В процессе эксплуатации оболочки подвергаются различного рода динамическим воздействиям и вибрациям, вызванным работой перекачивающих установок или внешних воздействий. Спектр колебаний оболочек разнообразен и представляет собой сложный комплекс взаимодействия собственных и вынужденных частот. Доказано, что при определенных соотношениях возмущающей частоты и собственной частоты прямолинейная форма цилиндрической оболочки становится динамически неустойчивой, появляются поперечные колебания, амплитуда которых резко возрастает и достигает больших

значений. Соотношения, при которых наступает этот резонанс, называют параметрическим резонансом.

Рассматривается замкнутая цилиндрическая оболочка конечной длины при наземном и подземном размещении под воздействием нестационарного внутреннего рабочего давления $P(t)$

$$p(t) = p_0(1 + \mu \cos \gamma t). \quad (146)$$

Нестационарное давление приводит к возбуждению стационарную продольную сжимающую силу и коэффициент упругого отпора среды, которые определяются выражениями

$$F(t) = F(1 + \mu \cos \gamma t); \quad (147)$$

$$k_s(t) = k_s(1 + \mu \cos \gamma t), \quad (148)$$

а для оболочек с жидкостью дополнительно и скорость потока протекающей жидкости:

$$V(t) = V_0(1 + \mu \cos \gamma t), \quad (149)$$

где p_0 – внутреннее рабочее давление;

γ – частота возбуждения, соответствующая характеристикам перекачивающей станции;

$\mu \leq 0,5$ – коэффициент возбуждения;

F – продольная сжимающая сила;

k_s – коэффициент упругого отпора среды.

Используя предложенную ранее методику по определению собственных частот без учёта побочных коэффициентов, решение сводится к разделяющейся системе дифференциальных уравнений Матье:

$$\varphi''(t) + 2\zeta_0\varphi'(t) + \omega_{mn}^2(1 - \delta_{mn} \cos \gamma t) \varphi(t) = 0, \quad (150)$$

где ω_{mn}^2 – квадрат частоты собственных колебаний (77); δ_{mn} – коэффициент возбуждения:

для цилиндрической оболочки с газом:

$$\delta_{mn} = \frac{\tilde{\lambda}_n^4 m^4 P n^{-2} - k_{si}^* m^4 - p^* m^4 (m^2 - 1)}{\tilde{\lambda}_n^4 + m^4 (m^2 - 1) (m^2 - 1 + p^* - q_{si}^*) + k_{si}^* m^4 - \tilde{\lambda}_n^4 m^4 P n^{-2} + \tilde{\lambda}_n^2 m^4 T^* \mu}; \quad (151)$$

для цилиндрической оболочки с жидкостью:

$$\delta_{mn} = \frac{\tilde{\lambda}_n^4 m^4 P n^{-2} + \lambda_n^4 \rho_v^* \Phi_{mn} V^2 m^4 h_v - k_s^* m^4 - p^* m^4 (m^2 - 1)}{\tilde{\lambda}_n^4 + m^4 (m^2 - 1) (m^2 - 1 + p^* - q_{si}^*) + k_{si}^* m^4 - \tilde{\lambda}_n^4 m^4 P n^{-2} - \tilde{\lambda}_n^4 \rho_v^* \Phi_{mn} V^2 m^4 h_v + \tilde{\lambda}_n^2 m^4 T^*} \mu. \quad (152)$$

$2\zeta_0$ – коэффициент демпфирования для цилиндрической оболочки с газом и жидкостью соответственно:

$$2\zeta_0 = \eta \cdot m^2 / (R\rho_0 h (\lambda_n^2 / m^2 + 1 + m^2) + \mu_{bj} m^2), \quad (153)$$

$$2\zeta_0 = \eta \cdot m^2 / (R\rho_0 h (\lambda_n^2 / m^2 + 1 + m^2) + \mu_{bj} m^2 + \rho_v \Phi_{mn} R^2 m^2). \quad (154)$$

Решение уравнения Матъе (150) получено Н.Н. Боголюбовым – Ю.А. Митропольским и представляет собой неравенства для нахождения границ первой, второй, третьей и последующих областей неустойчивости:

– главная первая область неустойчивости:

$$1 - \sqrt{\frac{\delta_{mn}^2}{4} - \frac{4(2\zeta_0)^2}{\omega_0^2}} < \left(\frac{2\omega_{mn}}{\omega_0}\right)^2 < 1 + \sqrt{\frac{\delta_{mn}^2}{4} - \frac{4(2\zeta_0)^2}{\omega_0^2}}, \quad (155)$$

– вторая область неустойчивости:

$$4 + \frac{2(\delta_{mn})^2}{3} - \sqrt{\delta_{mn}^4 - \frac{64(2\zeta_{mn})^2}{\omega_0^2}} < \left(\frac{2\omega_{mn}}{\omega_0}\right)^2 < 4 + \frac{2(\delta_{mn})^2}{3} + \sqrt{\delta_{mn}^4 - \frac{64(2\zeta_{mn})^2}{\omega_0^2}}, \quad (156)$$

– третья область неустойчивости:

$$9 + \frac{81(\delta_{mn})^2}{64} - \sqrt{\frac{3^{12}(\delta_{mn})^6}{2^{18}} - \frac{324(2\zeta_0)^2}{\omega_0^2}} < \left(\frac{2\omega_{mn}}{\omega_0}\right)^2 < 9 + \frac{81(\delta_{mn})^2}{64} + \sqrt{\frac{3^{12}(\delta_{mn})^6}{2^{18}} - \frac{324(2\zeta_0)^2}{\omega_0^2}}. \quad (157)$$

Полученная система уравнений Матъе позволяет исследовать динамическую устойчивость оболочки при условии $P > p^* (m^2 - 1) / \lambda_n^4$ для различных значений волновых чисел $m, n=1, 2, \dots$ при помощи построения областей динамической неустойчивости типа диаграмм Айнса–Стретта, которые определяются следующими соотношениями частот свободных колебаний ω_{mn} и частот возбуждения γ : $\omega_{mn} = \frac{\gamma}{2} i, i=1, 2, 3, \dots$

Основная, наиболее широкая область называется главной областью динамической неустойчивости, которая реализуется при коэффициенте $i=1$, то есть при $\omega_{mn} = \gamma/2$. Второстепенные области неустойчивости при $i>1$ имеют значительно меньшую ширину и обычно перекрываются главной областью.

Решение уравнений Матъе (150) для главной области динамической неустойчивости представляет собой неравенство

$$1 - \frac{\delta_{mn}}{2} < \left(\frac{2\omega_{mn}}{\gamma}\right)^2 < 1 + \frac{\delta_{mn}}{2}. \quad (158)$$

Основанная на этом решении методика построения главных областей динамической неустойчивости заключается в определении положения верхней и нижней границ этих областей. В соответствии с (158) имеем:

– верхняя граница, определенная равенством

$$\gamma^2 = 4\omega_{mn}^2 \left(1 - \frac{\delta_{mn}}{2}\right)^{-1}; \quad (159)$$

– нижняя граница

$$\gamma^2 = 4\omega_{mn}^2 \left(1 + \frac{\delta_{mn}}{2}\right)^{-1}. \quad (160)$$

Методика определения динамической устойчивости сводится к определению положения точки на графиках. Если точка находится в свободной от штриховки плоскости, то устойчивость обеспечена. В противном случае следует изменить основные параметры оболочки или перекачивающей станции.

5.2 Определение и анализ областей динамической неустойчивости стальных цилиндрических оболочек при наземном и подземном размещении

Проведем комплексное исследование динамической устойчивости цилиндрических оболочек, выполненных из стали и полиэтилена при различных значениях геометрических характеристик и внешних воздействий.

Области динамической неустойчивости строим при наименьших значениях, соответствующих оболочечным частотам и формам свободных колебаний, без учета демпфирующих свойств среды. Эти свойства будут учтены в параграфе 5.9

Используя предложенную методику, построены области динамической неустойчивости цилиндрических оболочек с определением значений верхних и нижних границ областей неустойчивости. Полученные значения сведем в таблицы 5.1–5.12 и проиллюстрируем на рисунках 5.1–5.32.

Таблица 5.1 – Зависимость частот возмущения γ (Гц) для трех областей динамической неустойчивости стальной цилиндрической оболочки с газом при наземном размещении от коэффициента возбуждения μ

$h/r=1/40; p_0=2 \text{ МПа}; P=0,1; L/r=10; k_s = 1 \text{ МПа/м}, H=2 \text{ м}$						
μ	Граница	0,1	0,2	0,3	0,4	0,5
1-я область	Верхняя	75,00	74,66	74,33	74	73,68
	Нижняя	75,68	76,04	76,39	76,75	77,12
2-я область	Верхняя	37,67	37,67	37,67	37,68	37,68
	Нижняя	37,67	37,66	37,65	37,63	37,60
3-я область	Верхняя	25,03	25,03	25,03	25,04	25,06
	Нижняя	25,02	25,02	25,02	25,01	24,58

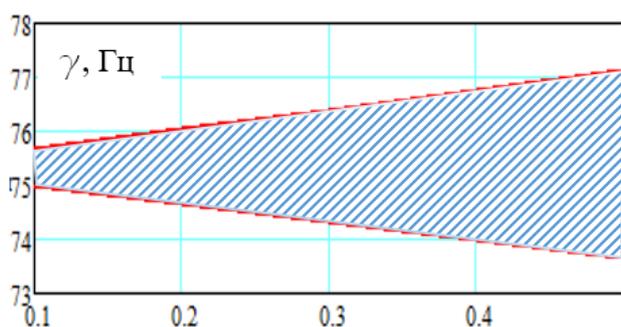


Рисунок 5.1 – Главная область динамической неустойчивости для стальной цилиндрической оболочки с газом при значениях параметра возбуждения μ от 0,1 до 0,5, при $p_0 = 2 \text{ МПа}$, $h/r=1/40$, $L/r=10$, $k=1 \text{ МПа/м}$

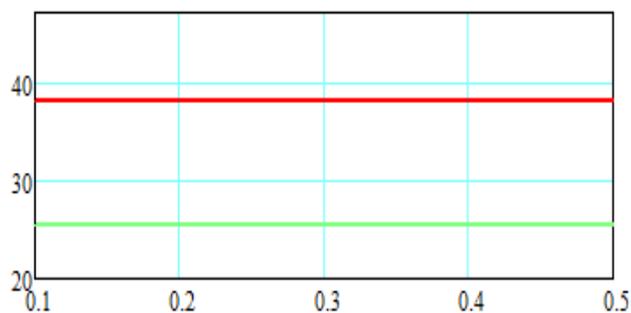


Рисунок 5.2 – Вторая и третья область динамической неустойчивости для стальной цилиндрической оболочки с газом при значениях параметра возбуждения μ от 0,1 до 0,5, при $p_0 = 2 \text{ МПа}$, $h/r=1/40$, $L/r=10$, $k=1 \text{ МПа/м}$

Как показывают расчеты, вторая и третья области динамической неустойчивости значительно уже главной, об этом было отмечено в работах [183, 207], в этой связи сосредоточимся на определении и построении главной, наиболее широкой области динамической неустойчивости при различных значениях геометрических характеристик и внешних воздействий. В случае нахождения значения внешнего возбуждения внутри главной области возникает демультипликативный резонанс, при котором амплитуда колебаний возрастает по экспоненциальному закону. Ввиду того, что этот резонанс возникает в результате периодического изменения одного из параметров колебательной системы, его часто называют параметрическим резонансом [19].

Таблица 5.2 – Зависимость частот возмущения γ (Гц) для главной области динамической неустойчивости стальной цилиндрической оболочки с газом при наземном размещении от внутреннего рабочего давления при различных значениях параметра тонкостенности h/r

$h/r=1/30; L/r=10; k_s = 5 \text{ МПа/м}, H=2 \text{ м}$						
p_0 (МПа)	Граница	0	2,0	4,0	6,0	8,0
1-я (главная) область	Верхняя	78,65	104,94	126,24	144,59	160,92
	Нижняя	78,2	95,05	109,61	122,53	134,24
$h/r=1/70; L/r=10; k_s = 5 \text{ МПа/м}; H=2 \text{ м}$						
p_0 , МПа	Граница	0	2,0	4,0	6,0	8,0
1-я область	Верхняя	60,58	123,26	163,98	196,5	224,37
	Нижняя	59,21	102,3	132,28	156,65	177,71

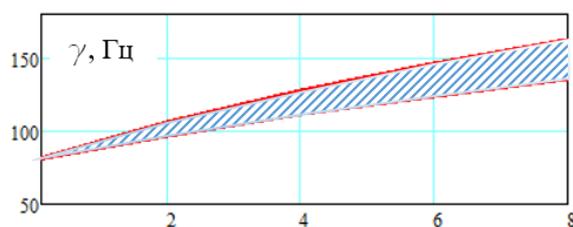


Рисунок 5.3 – Главная область динамической неустойчивости для стальной цилиндрической оболочки с газом при значениях параметра возбуждения $\mu=0,5$, при $p_0=0-8 \text{ МПа}$, $h/r=1/30$, $L/r=10$, $k_s=5 \text{ МПа/м}$

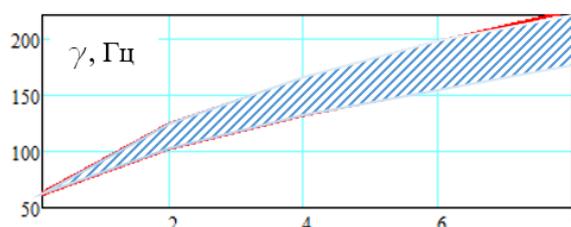


Рисунок 5.4 – Главная область динамической неустойчивости для стальной цилиндрической оболочки с газом при значениях параметра возбуждения $\mu=0,5$, при $p_0=0-8 \text{ МПа}$, $h/r=1/70$, $L/r=10$, $k_s=5 \text{ МПа/м}$

Решая систему уравнений (150) относительно времени t при помощи функции «Odesolve» в MathCAD 15, получим решения, которые можно представить в виде графиков на рисунках 5.5, 5.6. Эти графики позволяют наглядно увидеть возрастание амплитуды колебаний и через какое время это происходит.

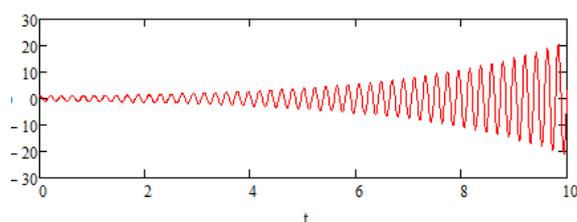


Рисунок 5.5 – Область возрастания амплитудных значений в зависимости от времени t для стальной цилиндрической оболочки с газом при значениях параметра возбуждения $\mu = 0,5$, $p_0 = 0 \text{ МПа}$, $h/r=1/70$, $L/r=10$, $k=5 \text{ МПа/м}$

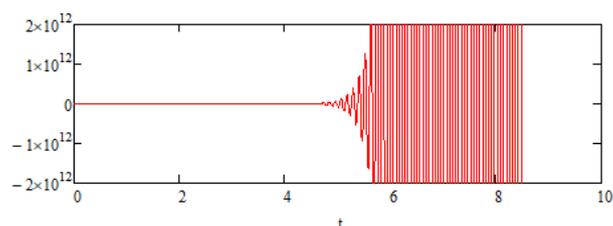


Рисунок 5.6 – Область возрастания амплитудных значений в зависимости от времени t для стальной цилиндрической оболочки с газом при значениях параметра возбуждения $\mu = 0,5$, $p_0 = 2 \text{ МПа}$, $h/r=1/70$, $L/r=10$, $k=5 \text{ МПа/м}$

Из графиков следует, что при $p_0 = 0$ за счет меньшей жесткости время для появления значительных перемещений требуется более 10 секунд. Однако ситуация меняется при увеличении значений внутреннего рабочего давления до

2 МПа, в этом случае требуется менее 6 секунд, при этом тенденция роста частот значительно выше в сравнении с оболочкой без давления.

Таблица 5.3 – Зависимость частот возмущения γ (Гц) для главной области динамической неустойчивости стальной цилиндрической оболочки с газом при наземном размещении от внутреннего рабочего давления при различных значениях параметра длины участка L/r

$h/r=1/50; L/r=6; k_s = 5 \text{ МПа/м}, H=2 \text{ м}$						
p_0 (МПа)	Граница	0	2,0	4,0	6,0	8,0
1-я область	Верхняя	145,57	170,55	192,65	212,64	231,02
	Нижняя	145,17	160,76	175,22	188,71	201,35
$h/r=1/50; L/r=10; k_s = 5 \text{ МПа/м}, H=2 \text{ м}$						
p_0 (МПа)	Граница	0	2,0	4,0	6,0	8,0
1-я область	Верхняя	65,03	111,32	143,92	170,49	193,48
	Нижняя	64,12	95,13	118,58	138,15	155,28

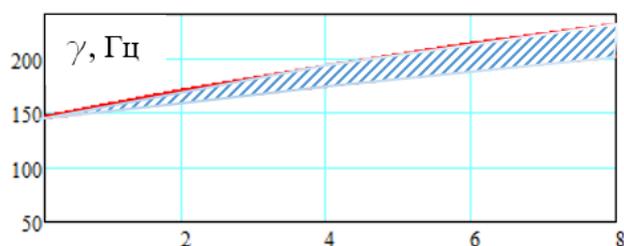


Рисунок 5.7 – Главная область динамической неустойчивости для стальной цилиндрической оболочки с газом при значениях параметра возбуждения $\mu=0,5, p_0=0-8 \text{ МПа}, h/r=1/50, L/r=6, k=5 \text{ МПа/м}$

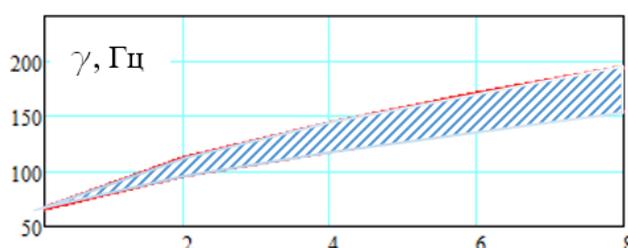


Рисунок 5.8 – Главная область динамической неустойчивости для стальной цилиндрической оболочки с газом при значениях параметра возбуждения $\mu=0,5, p_0=0-8 \text{ МПа}, h/r=1/50, L/r=10, k=5 \text{ МПа/м}$

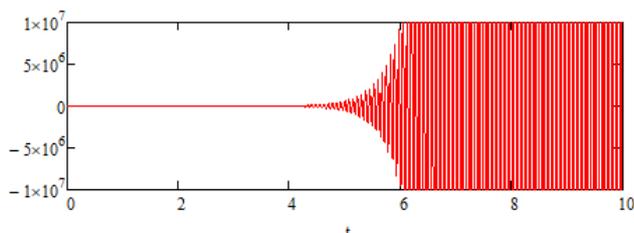


Рисунок 5.9 – Область возрастания амплитудных значений в зависимости от времени t для стальной цилиндрической оболочки с газом при значениях параметра возбуждения $\mu = 0,5, p_0 = 2 \text{ МПа}, h/r=1/50, L/r=6, k=5 \text{ МПа/м}$

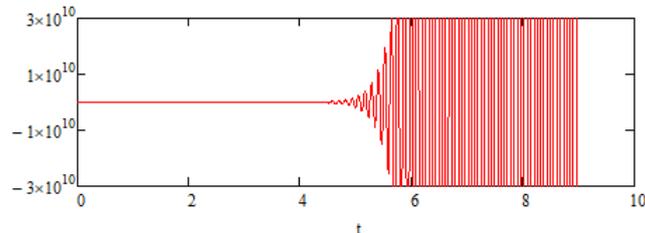


Рисунок 5.10 – Область возрастания амплитудных значений в зависимости от времени t для стальной цилиндрической оболочки с газом при значениях параметра возбуждения $\mu = 0,5, p_0 = 2 \text{ МПа}, h/r=1/50, L/r=10, k=5 \text{ МПа/м}$

Из полученных значений следует, что при увеличении длины участка с $L/r=6$ до 10 область динамической неустойчивости становится шире и смещается вниз в сторону уменьшения значений γ .

Таблица 5.4 – Зависимость частот возмущения γ (Гц) для главной (первой) области динамической неустойчивости стальной цилиндрической оболочки с газом при наземном и подземном размещении от значений коэффициента упругого отпора грунта k_s и параметра длины участка L/r

$h/r=1/50; L/r=8; p_0 = 2 \text{ МПа}, H=2 \text{ м (для подземной)}$							
k_s (МПа/м)	Граница	5	10	15	20	25	30
1-я область (наземная)	Верхняя	130,98	136,67	142,14	147,43	152,53	157,48
	Нижняя	115,67	119,58	123,38	127,07	130,66	134,15
1-я область (подземная)	Верхняя	142,93	158,85	173,39	186,83	199,39	211,22
	Нижняя	123,98	135,12	145,5	155,2	164,34	173
$h/r=1/50; L/r=12; p_0 = 2 \text{ МПа}, H=2 \text{ м (для подземной)}$							
k_s (МПа/м)	Граница	5	10	15	20	25	30
1-я область (наземная)	Верхняя	111,26	118,03	124,43	130,52	136,35	141,94
	Нижняя	92,26	97,19	101,88	106,37	110,67	114,82
1-я область (подземная)	Верхняя	125,31	143,48	159,61	174,26	187,78	200,4
	Нижняя	102,52	115,96	128	139	149,2	158,75

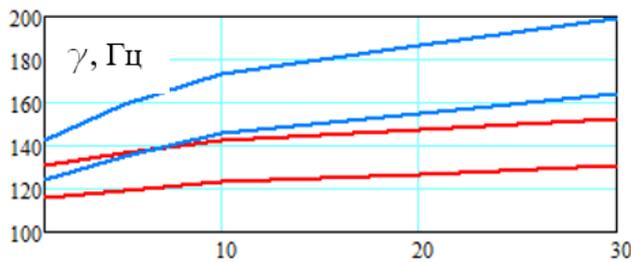


Рисунок 5.11 – Основная область динамической неустойчивости для стального газопровода при наземном и подземном размещении при значениях $\mu=0,5, p_0 = 2 \text{ МПа}, h/r=1/50, L/r=8, k=5 \text{ МПа/м}$

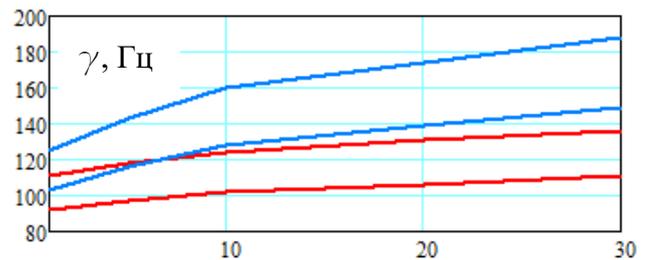


Рисунок 5.12 – Основная область динамической неустойчивости для стального газопровода при наземном и подземном размещении при значениях $\mu=0,5, p_0 = 2 \text{ МПа}, h/r=1/50, L/r=12, k=5 \text{ МПа/м}$

В результате увеличения значений k_s область динамической неустойчивости расширяется и смещается в сторону увеличения значений γ , причем для случая подземного размещения этот эффект более выражен (синяя область), чем при наземном размещении (красная область). При частичном заглублении при увеличении сектора вдавливания от $\frac{\pi}{24}$ до $\frac{\pi}{4}$ область динамической неустойчивости смещается в сторону увеличения значений γ .

Произведем расчеты для цилиндрической оболочки с потоком жидкости. Для расчетов принимаем плотность жидкости $\rho_v = 1 \text{ т/м}^3$.

Таблица 5.5 – Зависимость частот возмущения γ (Гц) для главной области динамической неустойчивости стальной цилиндрической оболочки с жидкостью при наземном размещении от внутреннего рабочего давления при различных значениях параметра тонкостенности h/r

$h/r=1/30; L/r=10; k_s = 5 \text{ МПа/м}, H = 2 \text{ м}; V = 5 \text{ м/с}$						
p_0 (МПа)	Граница	0	2,0	4,0	6,0	8,0
1-я область	Верхняя	53,75	69,78	82,98	94,43	104,67
	Нижняя	52,41	62,82	71,87	79,95	87,29
$h/r=1/70; L/r=10; k_s = 5 \text{ МПа/м}, H = 2 \text{ м}; V = 5 \text{ м/с}$						
p_0 (МПа)	Граница	0	2,0	4,0	6,0	8,0
1-я область	Верхняя	34,64	61,87	80,52	95,62	108,66
	Нижняя	31,90	51,03	64,81	76,14	86,00

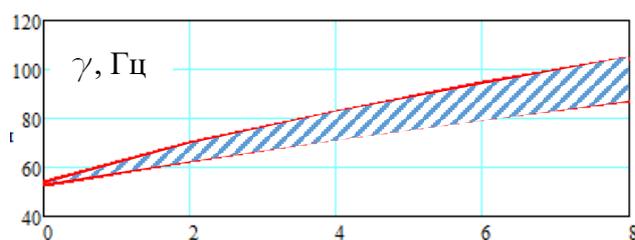


Рисунок 5.13 – Основная область динамической неустойчивости для стального нефтепровода при наземном и подземном размещении при значениях $\mu=0,5$, при $p_0 = 2-8 \text{ МПа}$, $h/r=1/30$, $L/r=10$, $k=5 \text{ МПа/м}$

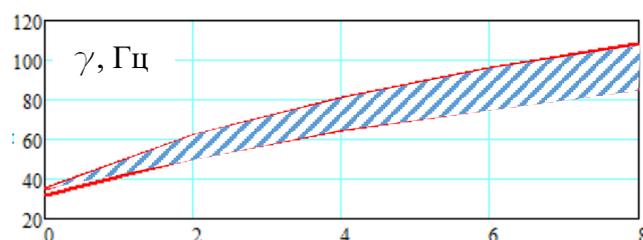


Рисунок 5.14 – Основная область динамической неустойчивости для стального нефтепровода при наземном и подземном размещении при значениях $\mu=0,5$, при $p_0 = 2-8 \text{ МПа}$, $h/r=1/70$, $L/r=10$, $k=5 \text{ МПа/м}$

При рассмотрении двух вариантов оболочек при $h/r=1/30$ и $1/70$ наблюдается смещение области динамической неустойчивости вниз на 20 Гц при этом немного расширяясь. Разница верхней и нижней границы при $p_0=8 \text{ МПа}$ для $h/r=1/30$ составляет 17 Гц, а при $h/r=1/70$ – 22 Гц.

Аналогично оболочки с газом определим время, необходимое для роста амплитуды колебаний оболочки с жидкостью, и представим графики на рисунках 5.15, 5.16.

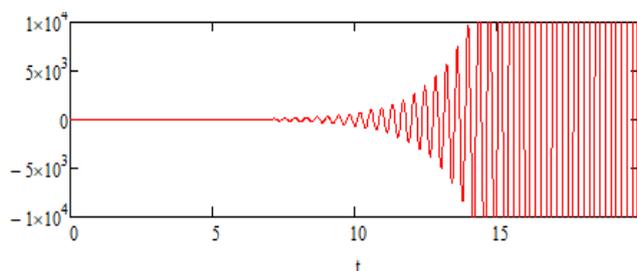


Рисунок 5.15 – Область возрастания амплитудных значений в зависимости от времени t для стальной цилиндрической оболочки с жидкостью при значениях параметра возбуждения $\mu = 0,5$, $p_0 = 0 \text{ МПа}$, $h/r=1/70$, $L/r=10$, $k=5 \text{ МПа/м}$

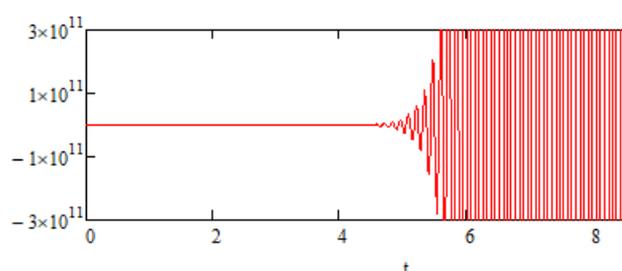


Рисунок 5.16 – Область возрастания амплитудных значений в зависимости от времени t для стальной цилиндрической оболочки с жидкостью при значениях параметра возбуждения $\mu = 0,5$, $p_0 = 2 \text{ МПа}$, $h/r=1/70$, $L/r=10$, $k=5 \text{ МПа/м}$

Как и в случае с оболочкой с газом тенденция возрастания амплитуды колебаний сохраняется и в случае с оболочкой с жидкостью.

Таблица 5.6 – Зависимость частот возмущения γ (Гц) для главной области динамической неустойчивости стальной цилиндрической оболочки с жидкостью при наземном размещении от внутреннего рабочего давления при различных значениях параметра длины участка L/r

$h/r=1/50; L/r=8; k_s = 5 \text{ МПа/м}, H=2 \text{ м}; V= 5 \text{ м/с}$						
p_0 (МПа)	Граница	0	2,0	4,0	6,0	8,0
1-я область	Верхняя	51,24	70,62	85,97	99,04	110,61
	Нижняя	49,63	62,39	73,10	82,47	90,90
$h/r=1/50; L/r=12; k_s = 5 \text{ МПа/м}, H=2 \text{ м}; V= 5 \text{ м/с}$						
p_0 (МПа)	Граница	0	2,0	4,0	6,0	8,0
1-я область	Верхняя	34,50	59,98	77,66	92,04	104,46
	Нижняя	31,95	49,74	62,75	73,50	82,88

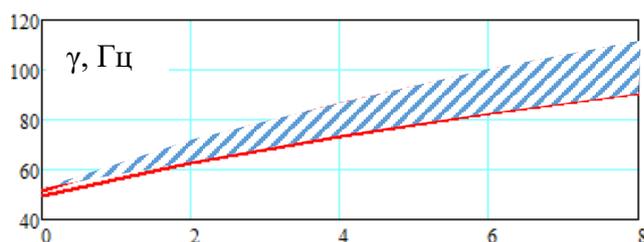


Рисунок 5.17 – Основная область динамической неустойчивости для стального нефтепровода при наземном и подземном размещении при значениях $\mu=0,5$, при $p_0=0-8 \text{ МПа}$, $h/r=1/30$, $L/r=10$, $k=5 \text{ МПа/м}$

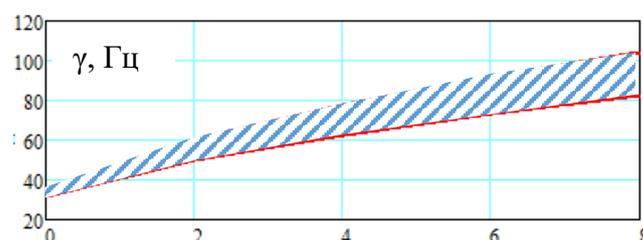


Рисунок 5.18 – Основная область динамической неустойчивости для стального нефтепровода при наземном и подземном размещении при значениях $\mu=0,5$, при $p_0=0-8 \text{ МПа}$, $h/r=1/70$, $L/r=10$, $k=5 \text{ МПа/м}$

Таблица 5.7 – Зависимость частот возмущения γ (Гц) для главной области динамической неустойчивости стальной цилиндрической оболочки с жидкостью при наземном и подземном размещении от значений коэффициента упругого отпора грунта k_s и параметра длины участка L/r

$h/r=1/50; L/r=8; p_0 = 2 \text{ МПа}, H=2 \text{ м (для подземной)}; V= 5 \text{ м/с}$							
k_s (Мпа/м)	Граница	5	10	15	20	25	30
1-я область (наземная)	Верхняя	70,62	73,70	76,66	79,52	82,28	84,96
	Нижняя	62,39	64,51	66,56	68,56	70,50	72,39
1-я область (подземная)	Верхняя	77,06	85,69	93,56	100,83	107,62	114,01
	Нижняя	66,85	72,92	78,53	83,77	88,71	93,39
$h/r=1/50; L/r=12; p_0 = 2 \text{ МПа}, H=2 \text{ м (для подземной)}; V= 5 \text{ м/с}$							
k_s (Мпа/м)	Граница	5	10	15	20	25	30
1-я область (наземная)	Верхняя	59,98	63,63	67,08	70,37	73,52	76,53
	Нижняя	49,74	52,40	54,93	57,35	59,67	61,91
1-я область (подземная)	Верхняя	67,56	77,36	86,07	93,97	101,27	108,07
	Нижняя	55,28	62,53	69,02	74,96	80,46	85,61

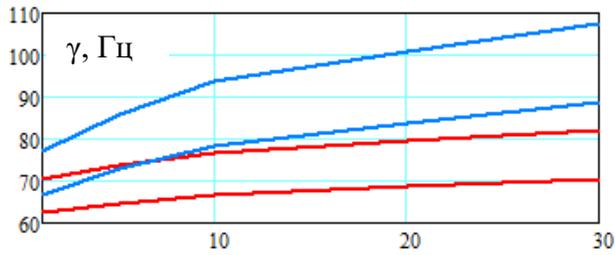


Рисунок 5.19 – Основная область динамической неустойчивости для стального нефтепровода при наземном и подземном размещении при значениях $\mu=0,5$, $p_0=2$ МПа, $h/r=1/50$, $L/r=8$, $k_s=5-30$ МПа/м

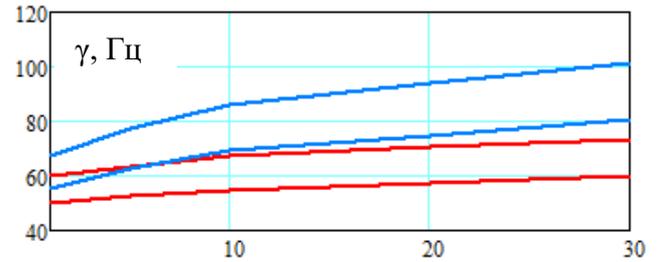


Рисунок 5.20 – Основная область динамической неустойчивости для стального нефтепровода при наземном и подземном размещении при значениях $\mu=0,5$, $p_0=2$ МПа, $h/r=1/50$, $L/r=12$, $k_s=5-30$ МПа/м

Согласно проведенному исследованию областей динамической неустойчивости с жидкостью, области смещаются вниз в сторону уменьшения значений γ , по сравнению с оболочкой с газом в пределах 40 %, в остальном размеры областей сопоставимы с оболочкой с газом.

Далее построим области динамической неустойчивости в зависимости от скорости потока протекающей жидкости V .

Таблица 5.8 – Зависимость частот возмущения γ (Гц) для главной области динамической неустойчивости стальной цилиндрической оболочки с жидкостью при наземном и подземном размещении от значений скорости потока протекающей жидкости и параметра длины участка L/r

$h/r=1/50; L/r=8; p_0=2$ МПа, $H=2$ м (для подземной); $k_s=10$ МПа/м							
V , м/с	Граница	5	10	20	50	80	100
1-я область (наземная)	Верхняя	73,70	73,31	71,76	59,83	38,10	69,81
	Нижняя	64,51	64,24	63,17	55,14	22,55	–
1-я область (подземная)	Верхняя	85,69	85,33	83,87	72,35	105,83	12,21
	Нижняя						
$h/r=1/50; L/r=12; p_0=2$ МПа, $H=2$ м (для подземной); $k_s=10$ МПа/м							
V , м/с	Граница	5	10	20	50	80	100
1-я область (наземная)	Верхняя	63,63	63,54	63,18	60,62	55,57	50,47
	Нижняя	52,40	52,33	52,07	50,21	46,55	42,90
1-я область (подземная)	Верхняя	77,36	77,29	76,98	74,79	70,48	66,13
	Нижняя	62,53	62,48	62,26	60,76	57,91	55,24

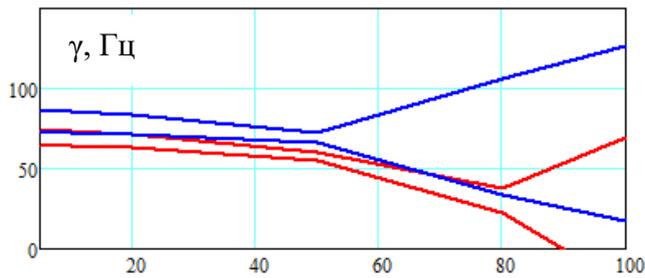


Рисунок 5.21 – Основная область динамической неустойчивости для стального нефтепровода при наземном и подземном размещении при значениях $\mu=0,5$, $p_0 = 2$ МПа, $h/r=1/50$, $L/r=8$, $k=10$ МПа/м

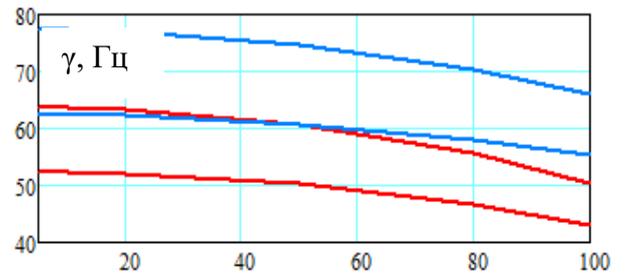


Рисунок 5.22 – Основная область динамической неустойчивости для стального нефтепровода при наземном и подземном размещении при значениях $\mu=0,5$, $p_0=2$ МПа, $h/r=1/50$, $L/r=12$, $k=10$ МПа/м

В зависимости от рассматриваемых геометрических характеристик и внешних воздействий очертания областей могут существенно отличаться, от плавного смещения и сужения до значительного расширения областей. Так, например, на рисунке 5.21 видно, что при превышении скорости потока в 50 м/с происходит резкое расширение области динамической неустойчивости (синяя область), что повышает риск возникновения параметрического резонанса. В случае попадания значения (γ , V) внутрь синей или красной области амплитуда колебаний резко увеличивается до критических значений, в противном случае устойчивость обеспечена.

5.3 Определение и анализ областей динамической неустойчивости полиэтиленовых цилиндрических оболочек с потоком жидкости и газа при наземном и подземном размещении

В данном разделе изучим поведение полиэтиленовой оболочки с потоком жидкости и газа и определим области динамической неустойчивости в зависимости от внутреннего давления, геометрических характеристик, коэффициента упругого отпора среды, а также определим время, через которое происходит возрастание амплитуды колебаний.

Таблица 5.9 – Зависимость частот возмущения γ (Гц) для трех областей динамической неустойчивости полиэтиленовой цилиндрической оболочки с газом при наземном размещении от коэффициента возбуждения μ

$h/r=1/30; L/r=6; k_s = 5 \text{ МПа/м}, H=2\text{м}$						
μ	Граница	0,1	0,2	0,3	0,4	0,5
1-я область	Верхняя	135,69	139,14	142,88	146,93	151,35
	Нижняя	129,48	126,68	124,06	121,59	119,26
2-я область	Верхняя	66,26	66,33	66,46	66,63	66,85
	Нижняя	66,12	65,76	65,18	64,39	63,41
3-я область	Верхняя	44,13	44,07	43,99	43,91	43,84
	Нижняя	44,13	44,03	43,84	43,55	43,16

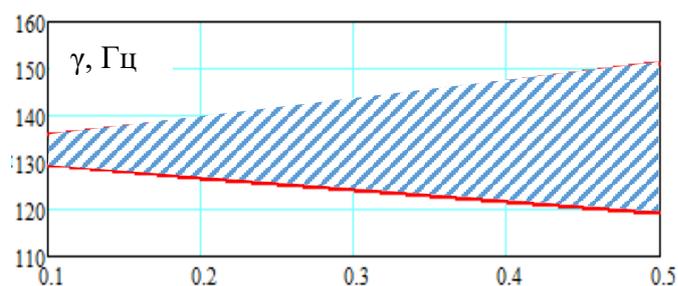


Рисунок 5.23 – Основная область динамической неустойчивости для ПЭ газопровода при наземном и подземном размещении при μ от 0,1 до 0,5, $p_0 = 0,1$ МПа, $h/r=1/70, L/r=10, k=1$ МПа/м

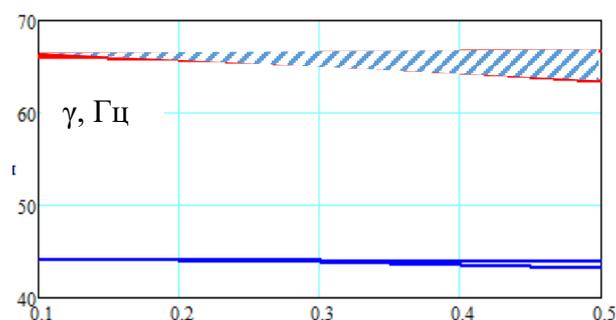


Рисунок 5.24 – Вторая и третья область динамической неустойчивости для ПЭ газопровода при μ от 0,1 до 0,5, $p_0 = 0,1$ МПа, $h/r=1/70, L/r=10, k=1$ МПа/м

Как и в случае со стальной оболочкой, наиболее широкая область реализуется для первой (главной) области динамической неустойчивости при $\mu = 0,5$. В этой связи дальнейшие вычисления будем проводить для главной области динамической неустойчивости.

Таблица 5.10 – Зависимость частот возмущения γ (Гц) для главной области динамической неустойчивости полиэтиленовой цилиндрической оболочки с газом и жидкостью при наземном размещении от внутреннего рабочего давления

<i>с газом</i>						
$h/r=1/50; L/r=8; k_s = 5 \text{ МПа/м}, H=2 \text{ м}$						
p_0 , МПа	Граница	0	0,05	0,1	0,15	0,2
1-я область	Верхняя	113,04	120,19	126,94	133,35	139,46
	Нижняя	88,60	94,08	99,26	104,18	108,88
<i>с жидкостью</i>						
$h/r=1/50; L/r=8; k_s = 5 \text{ МПа/м}, H=2 \text{ м}$						
p_0 , МПа	Граница	0	0,05	0,1	0,15	0,2
1-я область	Верхняя	24,56	26,17	27,69	29,14	30,51
	Нижняя	19,26	20,50	21,66	22,77	23,82

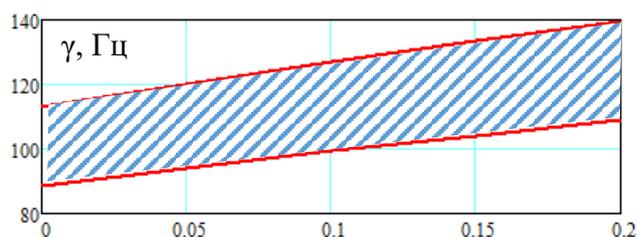


Рисунок 5.25 – Основная область динамической неустойчивости для ПЭ цилиндрического оболочки-газопровода при $\mu=0,5$, $p_0 = 0-0,2$ МПа, $h/r=1/50$, $L/r=8$, $k=5$ МПа/м

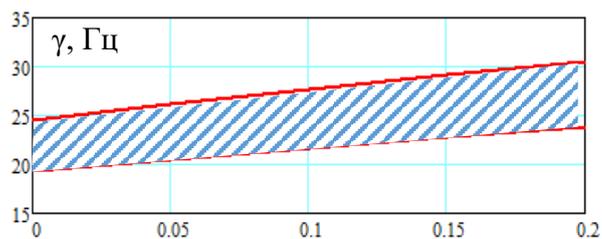


Рисунок 5.26 – Основная область динамической неустойчивости для ПЭ цилиндрического оболочки-водопровода при $\mu=0,5$, при $p_0 = 0-0,2$ МПа, $h/r=1/50$, $L/r=8$, $k=5$ МПа/м

Таблица 5.11 – Зависимость частот возмущения γ (Гц) для главной области динамической неустойчивости полиэтиленовой цилиндрической оболочки с газом и жидкостью при наземном размещении при различных значениях параметра длины участка L/r

<i>с газом</i>								
$h/r=1/50; p_0 = 0,1$ МПа; $k_s = 5$ МПа/м, $H=2$ м								
L/r	Граница	6	7	8	9	10	11	12
1-я область	Верхняя	129,21	127,66	126,94	126,58	126,39	126,28	126,22
	Нижняя	102,53	100,32	99,26	98,71	98,40	98,22	98,11
<i>с жидкостью</i>								
$h/r=1/50; p_0 = 0,1$ МПа; $k_s = 5$ МПа/м, $H=2$ м								
L/r	Граница	6	7	8	9	10	11	12
1-я область	Верхняя	27,34	27,58	27,69	27,76	27,79	27,81	27,83
	Нижняя	21,75	21,69	21,66	21,65	21,64	21,63	21,63

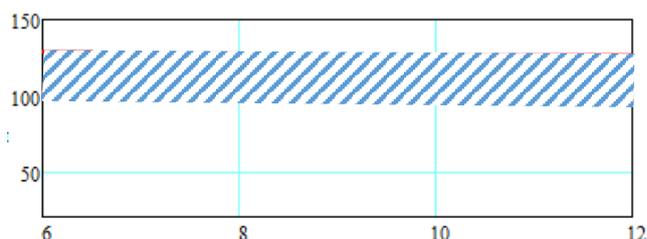


Рисунок 5.27 – Основная область динамической неустойчивости для полиэтиленовой цилиндрической оболочки с газом при значениях параметра возбуждения $\mu=0,5$, при $p_0 = 0,1$ МПа, $h/r=1/50$, $L/r=6-12$, $k=5$ МПа/м

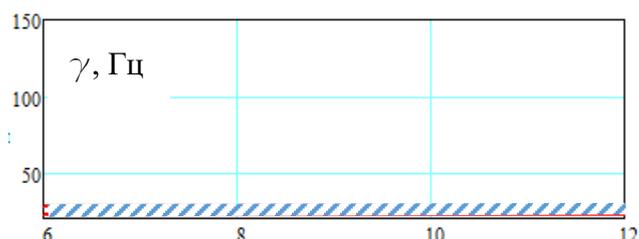


Рисунок 5.28 – Основная область динамической неустойчивости для полиэтиленовой цилиндрической оболочки с жидкостью при значениях параметра возбуждения $\mu=0,5$, при $p_0 = 0,1$ МПа, $h/r=1/50$, $L/r=6-12$, $k=5$ МПа/м

Таблица 5.12 – Зависимость частот возмущения γ (Гц) для главной области динамической неустойчивости полиэтиленовой цилиндрической оболочки с газом и жидкостью при наземном и подземном размещении от значений коэффициента упругого отпора среды k_s и параметра длины участка L/r

с газом							
$h/r=1/50; L/r=8; p_0 = 0,1$ МПа, $H=2$ м (для подземной)							
k_s (МПа/м)	Граница	5	10	15	20	25	30
1-я область (наземная)	Верхняя	126,94	168,83	202,22	230,83	256,27	279,40
	Нижняя	99,26	131,48	157,23	179,32	198,97	216,85
1-я область (подземная)	Верхняя	206,51	285,61	347,13	399,28	445,37	487,11
	Нижняя	160,54	221,65	269,23	309,58	345,25	377,56
с жидкостью							
$h/r=1/50; L/r=8; p_0 = 0,1$ МПа, $H=2$ м (для подземной)							
k_s (МПа/м)	Граница	5	10	15	20	25	30
1-я область (наземная)	Верхняя	27,69	37,09	44,54	50,92	56,58	61,72
	Нижняя	21,66	28,88	34,63	39,55	43,93	47,90
1-я область (подземная)	Верхняя	45,50	63,10	76,77	88,34	98,57	107,83
	Нижняя	35,37	48,97	59,54	68,50	76,41	83,58

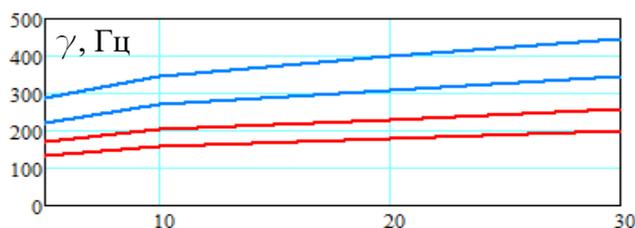


Рисунок 5.29 – Основная область динамической неустойчивости для полиэтиленовой цилиндрической оболочки с газом при наземном и подземном размещении при значениях параметра возбуждения $\mu=0,5$, $p_0=0,1$ МПа, $h/r=1/50$, $L/r=8$, $k_s=5-30$ МПа/м

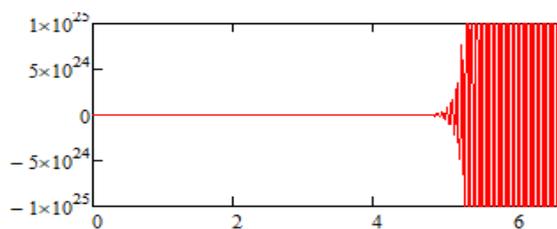


Рисунок 5.31 – Область возрастания амплитудных значений в зависимости от времени t для полиэтиленовой цилиндрической оболочки с газом при значениях параметра возбуждения $\mu = 0,5$, $p_0 = 0,1$ МПа, $h/r=1/50$, $L/r=8$, $k_s=5$ МПа/м

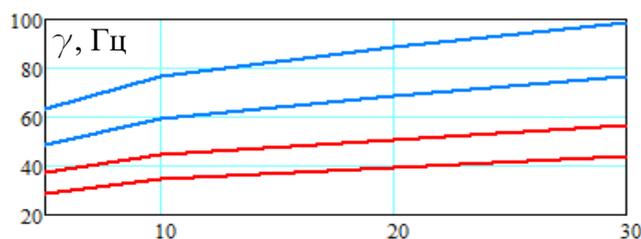


Рисунок 5.30 – Основная область динамической неустойчивости для полиэтиленовой цилиндрической оболочки с жидкостью при наземном и подземном размещении при значениях параметра возбуждения $\mu=0,5$, $p_0=0,1$ МПа, $h/r=1/50$, $L/r=8$, $k_s=5-30$ МПа/м

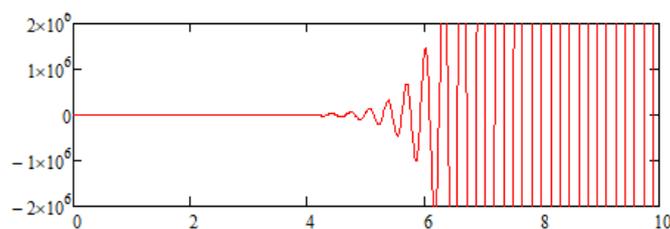


Рисунок 5.32 – Область возрастания амплитудных значений в зависимости от времени t для полиэтиленовой цилиндрической оболочки с газом при значениях параметра возбуждения $\mu = 0,5$, $p_0=0,1$ МПа, $h/r=1/50$, $L/r=8$, $k_s=5$ МПа/м

На основании выполненных расчетов можно сделать следующие выводы:

1) в результате увеличения значений внутреннего давления область динамической неустойчивости сдвигается в сторону увеличения значений γ ;

2) область динамической неустойчивости для оболочки с жидкостью располагается уже и ниже, чем для оболочки с газом более чем в 4 раза;

3) в результате увеличения значений L/r значительного влияния на область динамической неустойчивости не происходит;

4) от способа размещения полиэтиленовой оболочки зависит её восприимчивость к внешнему воздействию со стороны среды. Так, например, область для полиэтиленовой оболочки при подземном размещении на 63 % выше, чем при наземном, а с увеличением значений k_s границы верхней и нижней областей смещаются в сторону увеличения значений γ ;

5) время, в пределах которого происходит увеличение амплитуды колебаний от 5 до 6 секунд, зависит от транспортируемого продукта.

5.4 Параметрические колебания и динамическая устойчивость тороидальных оболочек при наземном и подземном размещении

Для исследования параметрических колебаний и динамической устойчивости замкнутых тороидальных оболочек, как и в случае с цилиндрическими оболочками, запишем систему дифференциальных уравнений Матъе (150):

$$\varphi''(t) + 2\zeta_0 \varphi'(t) + \omega_{mn}^2 (1 - \delta_{mn} \cos \gamma t) \varphi(t) = 0,$$

где ω_{mn}^2 – квадрат частоты собственных колебаний тороидальной оболочки (120);

δ_{mn} – коэффициент возбуждения:

– для тороидальной оболочки с газом

$$\delta_{mn} = \frac{P\mu_0^4 h_v^2 n^2 k_\beta m^4 - k_{si}^* m^4 - p^* m^4 (m^2 - 1)}{\mu_0^4 n^4 k_\beta^3 h_v^2 + m^4 (m^2 - 1)(m^2 - 1 + p^* - q_{si}^*) + k_{si}^* m^4 - P\mu_0^4 h_v^2 n^2 k_\beta m^4 + \Gamma_{tor}^* \mu_0^2 n^2 k_\beta m^4 + 0,5\mu_0^2 m^2 (m^2 + 1)} \cdot \mu. \quad (161)$$

– для тороидальной оболочки с жидкостью

$$\delta_{mn} = \frac{P\mu_0^4 h_v^2 n^2 k_\beta m^4 + V^2 \mu_0 h_v \rho_v^* \Phi_n^* m^4 n^2 k_\beta - k_{si}^* m^4 - p^* m^4 (m^2 - 1)}{\mu_0^4 n^4 k_\beta^3 h_v^2 + m^4 (m^2 - 1)(m^2 - 1 + p^* - q_{si}^*) + k_{si}^* m^4 - P\mu_0^4 h_v^2 n^2 k_\beta m^4 + \Gamma_{tor}^* \mu_0^2 n^2 k_\beta m^4 - V^2 \mu_0 h_v \rho_v^* \Phi_n^* m^4 n^2 k_\beta + 0,5\mu_0^2 m^2 (m^2 + 1)} \cdot \mu. \quad (162)$$

$2\zeta_0$ – коэффициент демпфирования для тороидальной оболочки с газом и жидкостью соответственно:

$$2\zeta_0 = \eta \cdot m^2 / \left[r\rho_0 h \left(\frac{\mu_0^2 n^2 k_\beta h_v^2}{m^2} + m^2 + 1 \right) + \mu_{bj} m^2 \right], \quad (163)$$

$$2\zeta_0 = \eta \cdot m^2 / \left[r\rho_0 h \left(\frac{\mu_0^2 n^2 k_\beta h_v^2}{m^2} + m^2 + 1 \right) + \mu_{bj} m^2 + \rho_v \Phi_n r^2 m^2 \right]. \quad (164)$$

Области динамической неустойчивости для границ первой, второй и последующей областей неустойчивости определяются и строятся аналогично решениям (155)–(160).

5.5 Определение и анализ областей динамической неустойчивости тороидальных оболочек при наземном и подземном размещении

Используя предложенную методику, построены области динамической неустойчивости тороидальных оболочек, с определением значений верхних и нижних границ областей неустойчивости. Полученные значения сведем в таблицы 5.13–5.20 и проиллюстрируем на рисунках 5.33–5.50.

Таблица 5.13 – Зависимость частот возмущения γ (Гц) для трех областей динамической неустойчивости стальной тороидальной оболочки с газом при наземном размещении от коэффициента возбуждения μ

$h/r=1/30; R/r=8; k_s = 5 \text{ МПа/м}, p_0 = 2 \text{ МПа}$						
μ	Граница	0,1	0,2	0,3	0,4	0,5
1-я область	Верхняя	198,64	199,10	199,56	200,03	200,50
	Нижняя	197,72	197,27	196,82	196,38	195,94
2-я область	Верхняя	99,09	99,09	99,09	99,10	99,10
	Нижняя	99,09	99,08	99,07	99,06	99,05
3-я область	Верхняя	66,06	66,06	66,06	66,05	66,05
	Нижняя	66,06	66,06	66,06	66,05	66,05

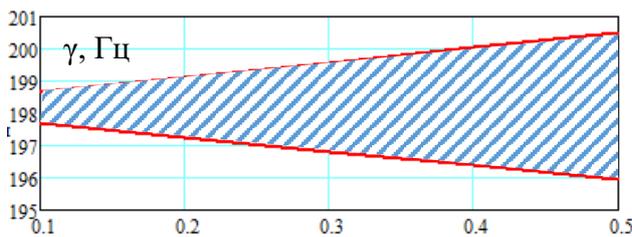


Рисунок 5.33 – Основная область динамической неустойчивости для стальной цилиндрической оболочки с газом при значениях параметра возбуждения μ от 0,1 до 0,5, при $p_0 = 2 \text{ МПа}$, $h/r=1/40, L/r=10, k=1 \text{ МПа/м}$

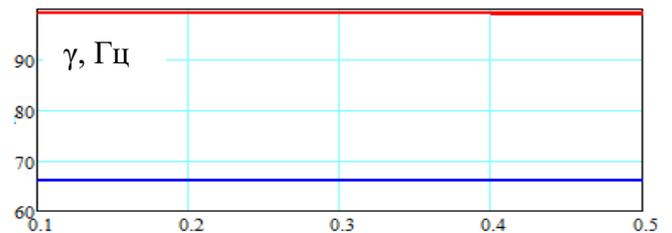


Рисунок 5.34 – Вторая и третья область динамической неустойчивости для стальной цилиндрической оболочки с газом при значениях параметра возбуждения μ от 0,1 до 0,5, при $p_0 = 2 \text{ МПа}, h/r=1/40, L/r=10, k=1 \text{ МПа/м}$

Как и в случае с цилиндрической оболочкой, наиболее широкой областью является первая (главная). Дальнейшее определение значений и построение областей будем производить именно при $\mu=0,5$ для главной области динамической неустойчивости.

Таблица 5.14 – Зависимость частот возмущения γ (Гц) для главной области динамической неустойчивости стальной тороидальной оболочки с газом при наземном размещении от внутреннего рабочего давления при различных значениях параметра тонкостенности h/r

$h/r=1/30; R/r=8; k_s = 5 \text{ МПа/м}$								
p_0 (МПа)	Граница	0	1,0	2,0	3,0	4,0	5,0	6,0
1-я область	Верхняя	214,08	219,64	225,08	230,42	235,65	240,77	245,81
	Нижняя	213,24	216,62	219,96	223,27	226,54	229,78	232,08
$h/r=1/70; R/r=8; k_s = 5 \text{ МПа/м}$								
p_0 (МПа)	Граница	0	1,0	2,0	3,0	4,0	5,0	6,0
1-я область	Верхняя	209,65	222,55	234,83	246,57	257,73	268,66	279,11
	Нижняя	207,69	215,62	223,36	230,89	238,22	245,37	252,33

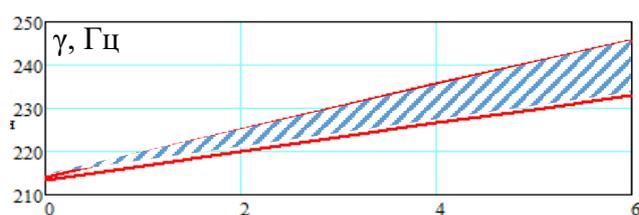


Рисунок 5.35 – Основная область динамической неустойчивости для стальной тороидальной оболочки с газом при значениях параметра возбуждения $\mu=0,5$ при $p_0 = 0-6$ МПа, $h/r=1/30$, $R/r=8$, $k=5$ МПа/м

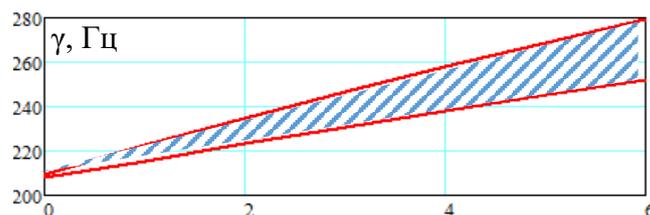


Рисунок 5.36 – Основная область динамической неустойчивости для стальной тороидальной оболочки с газом при значениях параметра возбуждения $\mu=0,5$ при $p_0 = 0-6$ МПа, $h/r=1/70$, $R/r=8$, $k=5$ МПа/м

При рассмотрении двух вариантов оболочек при $h/r=1/30$ и $1/70$ наблюдается смещение области динамической неустойчивости вниз на 5 Гц, при этом немного расширяясь. Разница верхней и нижней границы при $p_0=8$ МПа для $h/r=1/30$ составляет 13 Гц, а при $h/r=1/70$ – 27 Гц.

Таблица 5.15 – Зависимость частот возмущения γ (Гц) для главной области динамической неустойчивости стальной тороидальной оболочки с газом при наземном размещении от внутреннего рабочего давления при различных значениях параметра длины участка R/r

$h/r=1/50; R/r=8; k_s = 5 \text{ МПа/м}$								
p_0 (МПа)	Граница	0	1,0	2,0	3,0	4,0	5,0	6,0
1-я область	Верхняя	209,87	219,13	228,06	236,70	245,08	253,20	261,10
	Нижняя	208,47	214,13	219,69	225,15	230,51	235,76	240,93
$h/r=1/50; P=0; R/r=15; k_s = 5 \text{ МПа/м}$								
p_0 (МПа)	Граница	0	1,0	2,0	3,0	4,0	5,0	6,0
1-я область	Верхняя	120,71	136,34	150,51	163,56	175,71	187,12	197,90
	Нижняя	118,26	128,11	137,39	146,14	154,44	164,34	169,89

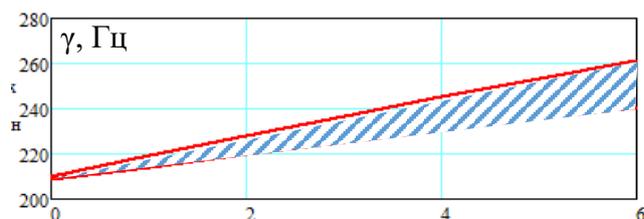


Рисунок 5.37 – Основная область динамической неустойчивости для стальной тороидальной оболочки с газом при значениях параметра возбуждения $\mu=0,5$, $p_0=0-6$ МПа, $h/r=1/50$, $R/r=6$, $k=5$ МПа/м

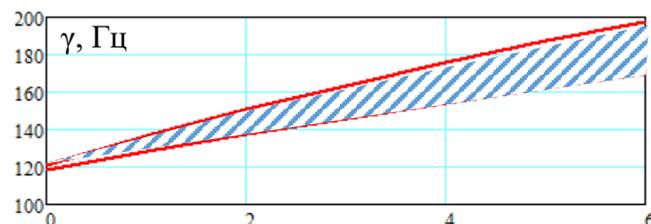


Рисунок 5.38 – Основная область динамической неустойчивости для стальной тороидальной оболочки с газом при значениях параметра возбуждения $\mu=0,5$, $p_0=0-6$ МПа, $h/r=1/50$, $R/r=10$, $k=5$ МПа/м

Из полученных значений следует, что при увеличении длины участка с $R/r=6$ до 10 область динамической неустойчивости становится шире и смещается вниз в сторону уменьшения значений γ .

Теперь построим аналогичные графики по определению времени возрастания амплитуды колебаний для тороидальной оболочки.

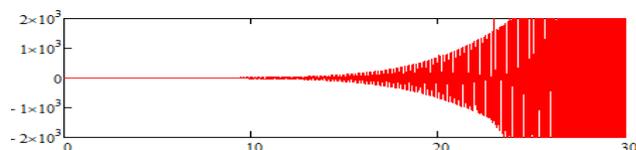


Рисунок 5.39 – Область возрастания амплитудных значений в зависимости от времени t для стальной тороидальной оболочки с газом при значениях параметра возбуждения $\mu = 0,5$, $p_0 = 0$ МПа, $h/r=1/50$, $R/r=8$, $k=5$ МПа/м

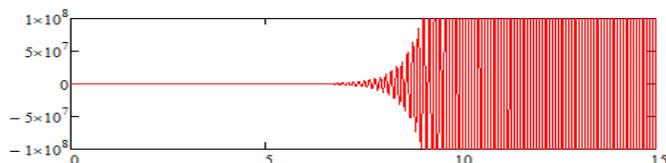


Рисунок 5.40 – Область возрастания амплитудных значений в зависимости от времени t для стальной тороидальной оболочки с газом при значениях параметра возбуждения $\mu = 0,5$, $p_0 = 2$ МПа, $h/r=1/50$, $R/r=15$, $k=5$ МПа/м

В сравнении с цилиндрической оболочкой время, необходимое для увеличения амплитуды колебаний, для тороидальной оболочки больше и составляет от 8 секунд согласно расчетам.

Таблица 5.16 – Зависимость частот возмущения γ (Гц) для главной области динамической неустойчивости стальной тороидальной оболочки с газом при наземном и подземном размещении от значений коэффициента упругого отпора грунта k_s и параметра длины участка R/r

$h/r=1/50$; $R/r=8$; $p_0 = 4$ МПа, $H=2$ м (для подземной)							
k_s (МПа/м)	Граница	5	10	15	20	25	30
1-я область (наземная)	Верхняя	245,08	248,12	251,13	254,11	257,06	259,98
	Нижняя	230,51	232,47	234,42	236,36	238,28	240,19
1-я область (подземная)	Верхняя	251,59	260,80	269,76	278,46	286,91	295,14
	Нижняя	234,70	240,73	246,64	252,42	258,09	263,65

Окончание таблицы 5.16

$h/r=1/50; R/r=12; p_0 = 4 \text{ МПа}, H=2 \text{ м (для подземной)}$;							
k_s (МПа/м)	Граница	5	10	15	20	25	30
1-я область (наземная)	Верхняя	193,26	197,17	201,00	204,76	208,47	212,11
	Нижняя	174,27	176,90	179,49	182,05	184,57	187,07
1-я область (подземная)	Верхняя	201,54	213,13	224,16	234,70	244,81	254,53
	Нижняя	179,85	187,77	195,38	202,72	209,82	216,69

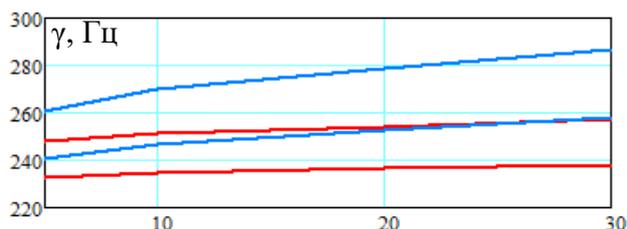


Рисунок 5.41 – Главная область динамической неустойчивости для стальной тороидальной оболочки с газом при наземном и подземном размещении при значениях параметра возбуждения $\mu=0,5$, $p_0=4 \text{ МПа}$, $h/r=1/50$, $R/r=8$, $k_s=5\text{--}30 \text{ МПа/м}$

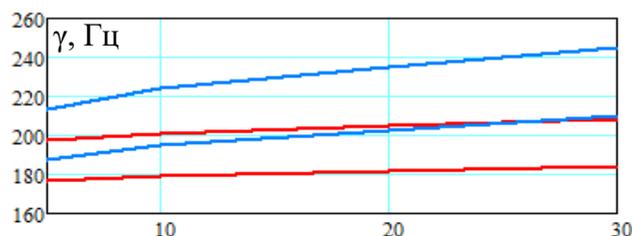


Рисунок 5.42 – Главная область динамической неустойчивости для стальной тороидальной оболочки с газом при наземном и подземном размещении при значениях параметра возбуждения $\mu=0,5$, $p_0=4 \text{ МПа}$, $h/r=1/50$, $R/r=12$, $k_s=5\text{--}30 \text{ МПа/м}$

В результате увеличения значений k_s область динамической неустойчивости расширяется и смещается в сторону увеличения значений γ , причем для случая подземного размещения этот эффект более выражен (синяя область), чем при наземном размещении (красная область). С увеличением длины участка, как и в случае с цилиндрической оболочкой, область динамической неустойчивости снижается вниз в сторону уменьшения значений γ .

Построим области динамической неустойчивости для криволинейного нефтепровода, содержащего транспортируемую среду – жидкость. Полученные значения сведем в таблицы 5.17–5.20 и проиллюстрируем в виде графиков на рисунках 5.43–5.50.

Таблица 5.17 – Зависимость частот возмущения γ (Гц) для главной области динамической неустойчивости стальной тороидальной оболочки с жидкостью при наземном размещении от внутреннего рабочего давления при различных значениях параметра тонкостенности h/r

$h/r=1/30; R/r=8; k_s = 5 \text{ МПа/м}, V= 5 \text{ м/с}$								
p_0 (МПа)	Граница	0	1,0	2,0	3,0	4,0	5,0	6,0
1-я область	Верхняя	64,79	66,47	68,12	69,73	71,31	72,87	74,39
	Нижняя	64,53	64,55	66,57	67,57	68,56	69,54	70,51
$h/r=1/70; R/r=8; k_s = 5 \text{ МПа/м}, H=2 \text{ м}; V= 5 \text{ м/с}$								
p_0 (МПа)	Граница	0	1,0	2,0	3,0	4,0	5,0	6,0
1-я область	Верхняя	42,96	45,60	48,12	50,52	52,83	55,05	57,19
	Нижняя	42,56	44,18	45,77	47,31	48,81	50,28	51,71

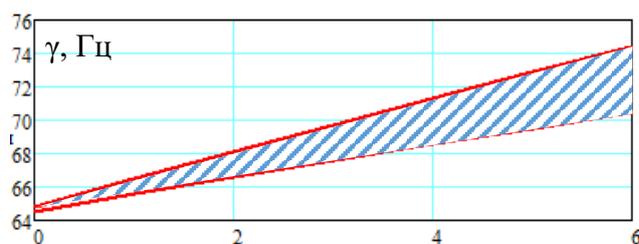


Рисунок 5.43 – Основная область динамической неустойчивости для стальной тороидальной оболочки с жидкостью при значениях параметра возбуждения $\mu=0,5$ при $p_0=0-6$ МПа, $h/r=1/30$, $R/r=8$, $k=5$ МПа/м

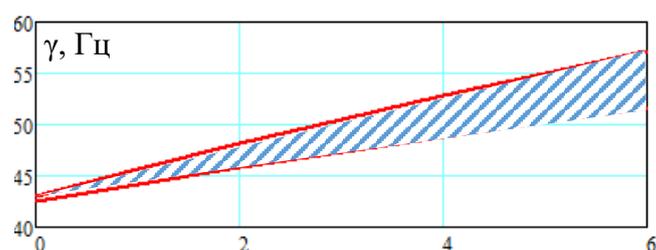


Рисунок 5.44 – Основная область динамической неустойчивости для стальной тороидальной оболочки с жидкостью при значениях параметра возбуждения $\mu=0,5$ при $p_0=0-6$ МПа, $h/r=1/70$, $R/r=8$, $k=5$ МПа/м

Таблица 5.18 – Зависимость частот возмущения γ (Гц) для главной области динамической неустойчивости стальной тороидальной оболочки с жидкостью при наземном размещении от внутреннего рабочего давления при различных значениях параметра длины участка R/r

$h/r=1/50$; $R/r=6$; $k_s = 5$ МПа/м, $H=2$ м; $V=5$ м/с								
p_0 (МПа)	Граница	0	1,0	2,0	3,0	4,0	5,0	6,0
1-я область	Верхняя	59,70	61,23	62,73	64,21	65,65	67,06	68,45
	Нижняя	59,47	60,40	61,32	62,23	63,14	64,03	64,91
$h/r=1/50$; $R/r=10$; $k_s = 5$ МПа/м, $H=2$ м; $V=5$ м/с								
p_0 (МПа)	Граница	0	1,0	2,0	3,0	4,0	5,0	6,0
1-я область	Верхняя	43,34	46,20	48,91	51,50	53,98	56,36	58,65
	Нижняя	42,90	44,66	46,39	48,04	49,66	51,24	52,77

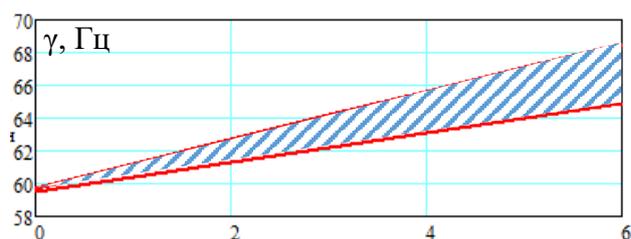


Рисунок 5.45 – Основная область динамической неустойчивости для стальной тороидальной оболочки с жидкостью при значениях параметра возбуждения $\mu=0,5$ при $p_0=0-6$ МПа, $h/r=1/50$, $R/r=6$, $k=5$ МПа/м

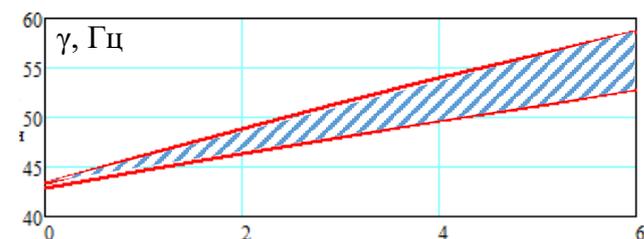


Рисунок 5.46 – Основная область динамической неустойчивости для стальной тороидальной оболочки с жидкостью при значениях параметра возбуждения $\mu=0,5$ при $p_0=0-6$ МПа, $h/r=1/50$, $R/r=10$, $k=5$ МПа/м

Таблица 5.19 – Зависимость частот возмущения γ (Гц) для главной (первой) области динамической неустойчивости стальной тороидальной оболочки с жидкостью при наземном и подземном размещении от значений коэффициента упругого отпора грунта k_s и параметра длины участка R/r

$h/r=1/50$; $R/r=8$; $p_0 = 2$ МПа, $H=2$ м (для подземной); $V=5$ м/с							
k_s (МПа/м)	Граница	5	10	15	20	25	30
1-я область (наземная)	Верхняя	54,84	55,62	56,39	57,15	57,90	58,64
	Нижняя	52,82	53,31	53,80	54,28	54,76	55,24
1-я область (подземная)	Верхняя	56,50	58,85	61,13	63,33	65,47	67,54
	Нижняя	53,87	55,38	56,85	58,29	59,71	61,09

Окончание таблицы 5.19

$h/r=1/50; R/r=15; p_0 = 2 \text{ МПа}, H=2 \text{ м (для подземной)}; V= 5 \text{ м/с}$							
k_s (МПа/м)	Граница	5	10	15	20	25	30
1-я область (наземная)	Верхняя	40,61	41,95	43,25	44,51	45,75	46,95
	Нижняя	37,07	37,96	38,83	39,63	40,53	41,35
1-я область (подземная)	Верхняя	43,43	47,29	50,87	54,23	57,39	60,40
	Нижняя	38,96	41,58	44,07	46,42	48,66	50,81

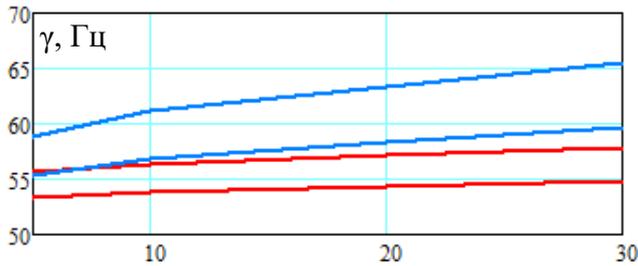


Рисунок 5.47 – Основная область динамической неустойчивости для стальной тороидальной оболочки с жидкостью при наземном и подземном размещении при значениях параметра возбуждения $\mu=0,5, p_0=4 \text{ МПа}, h/r=1/50, R/r=8, k_s=5-30 \text{ МПа/м}$

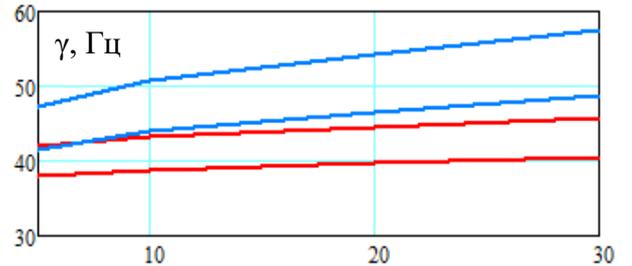


Рисунок 5.48 – Основная область динамической неустойчивости для стальной тороидальной оболочки с жидкостью при наземном и подземном размещении при значениях параметра возбуждения $\mu=0,5, p_0=4 \text{ МПа}, h/r=1/50, R/r=12, k_s=5-30 \text{ МПа/м}$

Таблица 5.20 – Зависимость частот возмущения γ (Гц) для главной (первой) области динамической неустойчивости стальной тороидальной оболочки с жидкостью при наземном и подземном размещении от значений скорости потока протекающей жидкости и параметра длины участка L/r

$h/r=1/50; R/r=8; p_0 = 2 \text{ МПа}, H=2 \text{ м (для подземной)}; k_s = 10 \text{ МПа/м}$							
$V, \text{ м/с}$	Граница	5	10	20	50	80	100
1-я область (наземная)	Верхняя	55,62	55,60	55,54	55,07	54,21	53,39
	Нижняя	53,31	53,30	53,23	52,78	51,84	50,99
1-я область (подземная)	Верхняя	58,85	58,84	58,78	58,34	57,53	56,76
	Нижняя	55,38	55,36	55,29	54,83	53,96	53,15
$h/r=1/50; R/r=15; p_0 = 2 \text{ МПа}, H=2 \text{ м (для подземной)}; k_s = 10 \text{ МПа/м}$							
$V, \text{ м/с}$	Граница	5	10	20	50	80	100
1-я область (наземная)	Верхняя	41,95	41,94	41,89	41,57	40,98	40,42
	Нижняя	37,96	37,95	37,90	37,54	36,88	36,26
1-я область (подземная)	Верхняя	47,29	47,28	47,24	46,96	46,44	45,95
	Нижняя	41,58	41,57	41,53	41,21	40,61	40,04

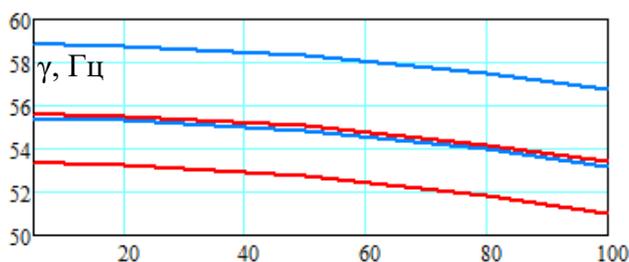


Рисунок 5.49 – Основная область динамической неустойчивости для стального криволинейного нефтепровода при наземном и подземном размещении при значениях параметра возбуждения $\mu=0,5$, $p_0 = 2$ МПа, $h/r=1/50$, $R/r=8$, $k=10$ МПа/м

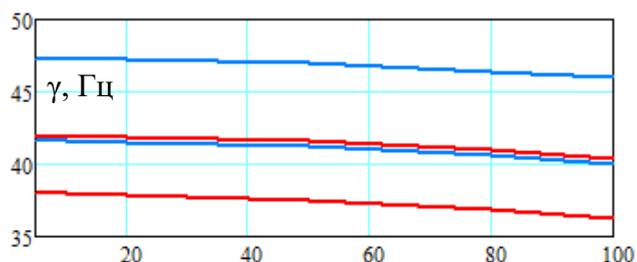


Рисунок 5.50 – Основная область динамической неустойчивости для стального криволинейного нефтепровода при наземном и подземном размещении при значениях параметра возбуждения $\mu=0,5$, $p_0 = 2$ МПа, $h/r=1/50$, $R/r=12$, $k=10$ МПа/м

Отметим отличительные особенности поведения тороидальной оболочки с жидкостью. Как и в случае с цилиндрической оболочкой, области динамической неустойчивости тороидальной оболочки с жидкостью располагаются более чем в 4 раза ниже, чем для оболочки с газом, в остальной тенденции изменения частот в зависимости от изменения геометрических характеристик и внешних нагрузок сопоставимые.

5.6 Определение и анализ областей динамической неустойчивости полиэтиленовых тороидальных оболочек с потоком жидкости и газа при наземном и подземном размещении

Выполним анализ областей динамической неустойчивости для тороидальной оболочки из полиэтилена с потоком жидкости и газа при наземном и подземном размещении. Используя решения, полученные в разделе 5.4 определим границы областей динамической неустойчивости и сведем эти значения в таблицы 5.21–5.23 и проиллюстрируем полученные значения на рисунках 5.51–5.58.

Таблица 5.21 – Зависимость частот возмущения γ (Гц) для главной области динамической неустойчивости полиэтиленовой тороидальной оболочки с газом и жидкостью при наземном размещении от внутреннего рабочего давления

<i>С газом</i>						
$h/r=1/70; R/r=8; k_s = 1$ МПа/м, $H=2$ м						
p_0 (МПа)	Граница	0	0,05	0,1	0,15	0,2
1-я область	Верхняя	75,62	89,65	101,83	112,72	122,67
	Нижняя	66,22	76,06	84,80	92,72	100,03
<i>С жидкостью</i>						
$h/r=1/70; R/r=8; k_s = 1$ МПа/м, $H=2$ м						
p_0 (МПа)	Граница	0	0,05	0,1	0,15	0,2
1-я область	Верхняя	5,53	6,58	7,49	8,30	9,04
	Нижняя	4,83	5,57	6,22	6,81	7,35

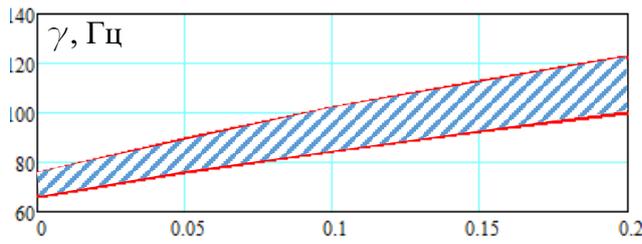


Рисунок 5.51 – Основная область динамической неустойчивости для ПЭ газопровода при значениях параметра возбуждения $\mu=0,5$, при $p_0 = 0-0,2$ МПа, $h/r=1/70$, $R/r=8$, $k=1$ МПа/м

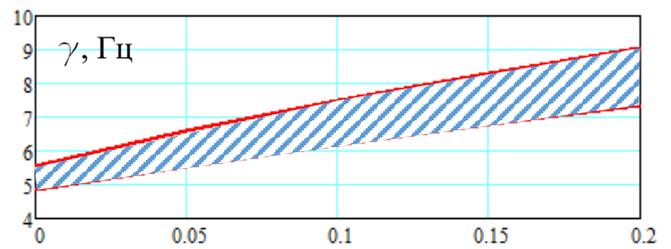


Рисунок 5.52 – Основная область динамической неустойчивости для ПЭ водопровода при значениях параметра возбуждения $\mu=0,5$, при $p_0 = 0-0,2$ МПа, $h/r=1/70$, $R/r=8$, $k=1$ МПа/м

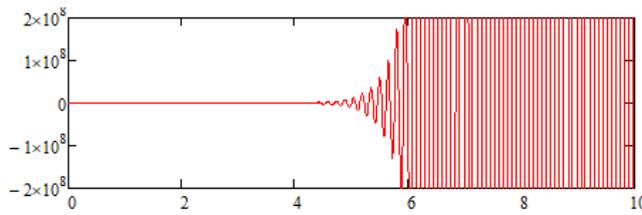


Рисунок 5.53 – Область возрастания амплитудных значений в зависимости от времени t для полиэтиленовой тороидальной оболочки с газом при значениях параметра возбуждения $\mu = 0,5$, $p_0 = 0,05$ МПа, $h/r=1/70$, $R/r=8$, $k=1$ МПа/м

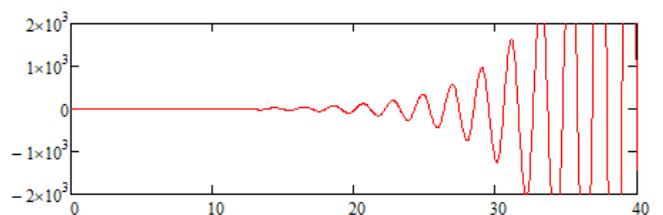


Рисунок 5.54 – Область возрастания амплитудных значений в зависимости от времени t для полиэтиленовой тороидальной оболочки с жидкостью при значениях параметра возбуждения $\mu = 0,5$, $p_0 = 0,05$ МПа, $h/r=1/70$, $R/r=8$, $k=1$ МПа/м

Таблица 5.22 – Зависимость частот возмущения γ (Гц) для главной области динамической неустойчивости полиэтиленовой тороидальной оболочки с газом и жидкостью при наземном размещении при различных значениях параметра длины участка R/r

<i>с газом</i>								
$h/r=1/70; p_0 = 0,1$ МПа; $k_s = 1$ МПа/м, $H=2$ м;								
R/r	Граница	8	10	12	14	16	18	20
1-я область	Верхняя	101,83	97,92	95,76	94,45	93,59	93,01	92,59
	Нижняя	84,80	79,90	77,13	75,41	74,28	73,49	72,82
<i>с жидкостью</i>								
$h/r=1/70; p_0 = 0,1$ МПа; $k_s = 1$ МПа/м, $H=2$ м;								
R/r	Граница	8	10	12	14	16	18	20
1-я область	Верхняя	7,38	7,49	7,58	7,64	7,70	7,75	7,79
	Нижняя	6,08	6,04	6,01	6,01	6,01	6,01	6,01

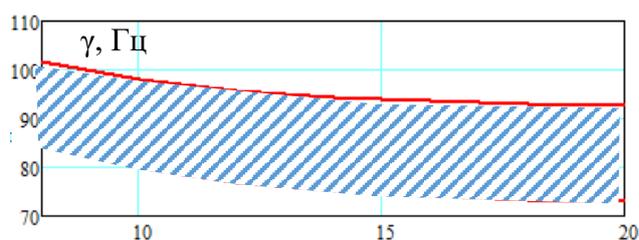


Рисунок 5.55 – Основная область динамической неустойчивости для ПЭ газопровода при $\mu=0,5$, $p_0=0,1$ МПа, $h/r=1/70$, $k=1$ МПа/м

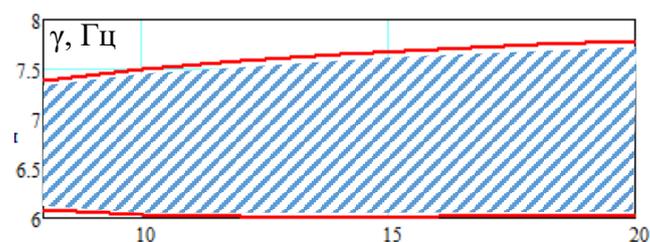


Рисунок 5.56 – Основная область динамической неустойчивости для ПЭ водопровода при $\mu=0,5$, $p_0=0,1$ МПа, $h/r=1/70$, $k=1$ МПа/м

Таблица 5.23 – Зависимость частот возмущения γ (Гц) для главной (первой) области динамической неустойчивости полиэтиленовой тороидальной оболочки с газом при наземном и подземном размещении от значений коэффициента упругого отпора грунта k_s

С газом							
$h/r=1/70$; $R/r=8$; $p_0=0,1$ МПа, $H=2$ м (для подземной)							
k_s (МПа/м)	Граница	1	2	3	5	7	10
1-я область (наземная)	Верхняя	101,83	117,65	131,62	155,87	176,84	204,32
	Нижняя	84,80	96,34	106,65	124,75	140,54	161,36
1-я область (подземная)	Верхняя	133,48	169,62	199,34	248,35	289,18	341,39
	Нижняя	108,03	135,09	157,59	194,94	226,21	266,31
С жидкостью							
$h/r=1/70$; $R/r=8$; $p_0=0,1$ МПа, $H=2$ м (для подземной)							
k_s (МПа/м)	Граница	1	2	3	5	7	10
1-я область (наземная)	Верхняя	7,49	8,66	9,70	11,50	13,05	15,09
	Нижняя	6,22	7,08	7,84	9,19	10,36	11,90
1-я область (подземная)	Верхняя	9,84	12,52	14,72	18,34	21,36	25,23
	Нижняя	7,95	9,96	11,62	14,39	16,70	19,67

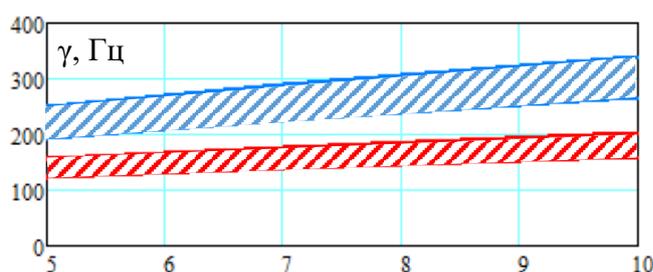


Рисунок 5.57 – Основная область динамической неустойчивости для стального газопровода при наземном и подземном размещении при $\mu=0,5$, $p_0=0,1$ МПа, $h/r=1/70$, $R/r=8$, $k_s=1-10$ МПа/м

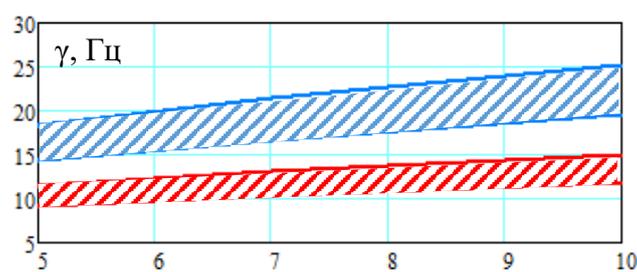


Рисунок 5.58 – Основная область динамической неустойчивости для стального нефтепровода при наземном и подземном размещении при $\mu=0,5$, $p_0=0,1$ МПа, $h/r=1/70$, $R/r=8$, $k_s=1-10$ МПа/м

На основании выполненных расчетов для тороидальной полиэтиленовой оболочки можно сделать следующие выводы:

1) в результате увеличения значений внутреннего давления область динамической неустойчивости сдвигается в сторону увеличения значений γ ;

2) область динамической неустойчивости для оболочки с жидкостью располагается уже и ниже, чем для оболочки с газом более чем в 10 раз. Такой эффект объясняется малой жесткостью полиэтиленовой оболочки в сравнении со стальной и существенным влиянием протекающей жидкости;

3) в результате увеличения значений R/r область динамической неустойчивости снижается вниз в сторону уменьшения значений γ ; разница между верхней и нижней границей для оболочки с газом составляет 20 Гц, а с жидкостью – в пределах 1 Гц;

4) в зависимости от способа размещения полиэтиленовой оболочки зависит её восприимчивость к внешнему воздействию со стороны среды. Так, например, область для полиэтиленовой оболочки при подземном размещении на 31,68 % выше, чем при наземном, а с увеличением значений k_s границы верхней и нижней области смещаются в сторону увеличения значений γ ;

5) Время, в пределах которого происходит увеличение амплитуды колебаний от 5 до 30 секунд в зависимости от транспортируемого продукта.

5.7 Исследование параметрических колебаний и динамической устойчивости двухслойных тороидальных оболочек при подземном размещении

Для исследования параметрических колебаний и динамической устойчивости замкнутых неоднородных (двухслойных) тороидальных оболочек запишем систему дифференциальных уравнений Матье:

$$\varphi''(t) + 2\zeta_0\varphi'(t) + \omega_{mn}^2(1 - \delta_{mn} \cos \gamma t) \varphi(t) = 0,$$

где ω_{mn}^2 – квадрат частоты собственных колебаний неоднородной (двухслойной) тороидальной оболочки (140);

δ_{mn} – коэффициент возбуждения:

– для неоднородной (двухслойной) тороидальной оболочки с газом:

$$\delta_{mn} = \frac{P\mu_0^4 h_0^2 n^2 k_\beta m^4 - k_{s1}^* m^4 - p^* m^4 (m^2 - 1)}{\mu_0^4 n^4 k_\beta^2 h_0^2 + \eta_0 m^4 (m^2 - 1) \left(m^2 - 1 + \frac{p^* - q_{s1}^*}{\eta_0} \right) + k_{s1}^* m^4 - P\mu_0^4 h_0^2 n^2 k_\beta m^4 + T_{tor} \mu_0^2 n^2 k_\beta m^4 + 0,5 \mu_0^2 m^2 (m^2 + 1)} \cdot \mu; \quad (165)$$

– для неоднородной (двухслойной) тороидальной оболочки с жидкостью:

$$\delta_{mn} = \frac{P\mu_0^4 h_0^2 n^2 k_\beta m^4 + V^2 \mu_0 h_\nu \rho_\nu^* \Phi_n^* m^4 n^2 k_\beta k_{s1}^* m^4 - p^* m^4 (m^2 - 1)}{\mu_0^4 n^4 k_\beta^2 h_0^2 + \eta_0 m^4 (m^2 - 1) \left(m^2 - 1 + \frac{p^* - q_{s1}^*}{\eta_0} \right) + k_{s1}^* m^4 - P\mu_0^4 h_0^2 n^2 k_\beta m^4 + T_{tor}^* \mu_0^2 n^2 k_\beta m^4 - V^2 \mu_0 h_\nu \rho_\nu^* \Phi_n^* m^4 n^2 k_\beta + 0,5 \mu_0^2 m^2 (m^2 + 1)} \cdot \mu; \quad (166)$$

$2\zeta_0$ – коэффициент демпфирования для неоднородной (двухслойной) тороидальной оболочки с газом и жидкостью соответственно:

$$2\zeta_0 = \eta \cdot m^2 / \left[r\rho_0 h \left(\frac{\mu_0^2 n^2 k_\beta h_v^2}{m^2} + m^2 + 1 \right) + \mu_{bj} m^2 \right], \quad (167)$$

$$2\zeta_0 = \eta \cdot m^2 / \left[r\rho_0 h \left(\frac{\mu_0^2 n^2 k_\beta h_v^2}{m^2} + m^2 + 1 \right) + \mu_{bj} m^2 + \rho_v \Phi_n r^2 m^2 \right]. \quad (168)$$

Области динамической неустойчивости для границ первой, второй, третьей и последующей областей неустойчивости определяются и строятся аналогично решениям (155)–(160).

Рассмотрим пример двухслойной оболочки при различных толщинах защитного слоя, выполненных из цементобетона и стеклопластика. На основании вышеуказанной методики определим границы областей динамической неустойчивости. Полученные значения сведем в таблицы 5.24, 5.25 и проиллюстрируем в виде графиков на рисунках 5.59–5.63.

Таблица 5.24 – Зависимость частот возмущения γ (Гц) для главной области динамической неустойчивости стальной двухслойной тороидальной оболочки с газом при подземном размещении от толщины внешнего слоя $h1$.

<i>Стеклопластиковое покрытие</i>						
$D=1420$ мм (стальная оболочка); $R/r_0=8$; $k_s = 5$ МПа/м, $H=2$ м; $p_0=2$ МПа						
$h1, мм$	Граница	1	5	10	15	20
1-я область	Верхняя	241,96	233,58	224,33	216,21	209,04
	Нижняя	227,26	219,42	210,77	203,18	196,50
<i>Цементобетонное покрытие</i>						
$D=1420$ мм (стальная оболочка); $R/r_0=8$; $k_s = 5$ МПа/м, $H=2$ м; $p_0=2$ МПа						
$h1, мм$	Граница	1	5	10	15	20
1-я область	Верхняя	242,26	235,49	229,12	224,80	222,30
	Нижняя	227,67	221,86	216,55	213,20	211,56

Таблица 5.25 – Зависимость частот возмущения γ (Гц) для главной области динамической неустойчивости стальной двухслойной тороидальной оболочки с жидкостью при подземном размещении от толщины внешнего слоя $h1$.

<i>Стеклопластиковое покрытие</i>						
$D=1420$ мм (стальная оболочка); $R/r_0=8$; $k_s = 5$ МПа/м, $H=2$ м; $p_0=2$ МПа						
$h1, мм$	Граница	1	5	10	15	20
1-я область	Верхняя	50,03	50,00	49,97	49,95	49,96
	Нижняя	46,99	46,97	46,94	46,94	46,96
<i>Цементобетонное покрытие</i>						
$D=1420$ мм (стальная оболочка); $R/r_0=8$; $k_s = 5$ МПа/м, $H=2$ м; $p_0=2$ МПа						
$h1, мм$	Граница	1	5	10	15	20
1-я область	Верхняя	50,24	51,09	52,29	53,68	55,31
	Нижняя	47,22	48,13	49,42	50,91	52,64

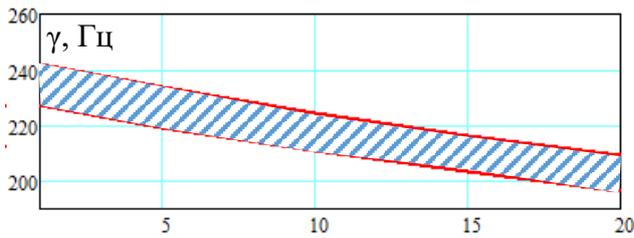


Рисунок 5.59 – Основная область динамической неустойчивости для двухслойной тороидальной оболочки (стеклопластиковое покрытие) для газа при $\mu=0,5, p_0=2$ МПа, $R/r_0=8, k=5$ МПа/м

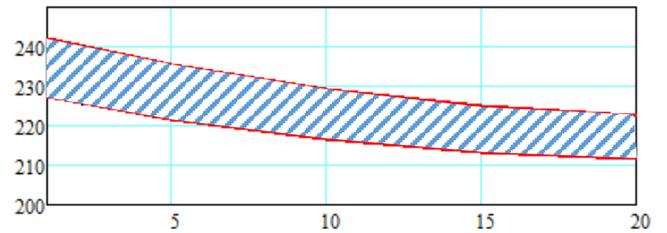


Рисунок 5.60 – Основная область динамической неустойчивости для двухслойной тороидальной оболочки (цементобетонное покрытие) для газа при $\mu=0,5, p_0=2$ МПа, $R/r_0=8, k=5$ МПа/м

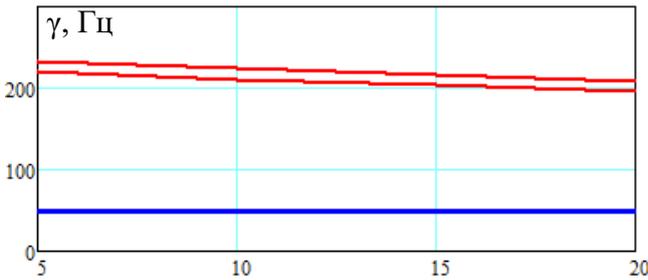


Рисунок 5.61 – Основная область динамической неустойчивости для двухслойной тороидальной оболочки (стеклопластиковое покрытие) с жидкостью при значениях параметра возбуждения $\mu=0,5, p_0=2$ МПа, $r_0/R=8, k=5$ МПа/м, для жидкости $\rho_v = 1$ т/м³

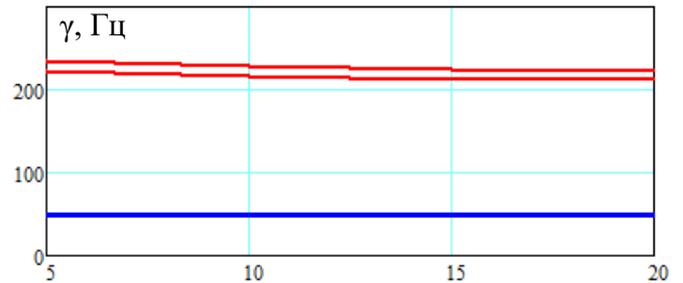


Рисунок 5.62 – Основная область динамической неустойчивости для двухслойной тороидальной оболочки (цементобетонное покрытие) с жидкостью при значениях параметра возбуждения $\mu=0,5, p_0=2$ МПа, $r_0/R=8, k=5$ МПа/м, для жидкости $\rho_v = 1$ т/м³

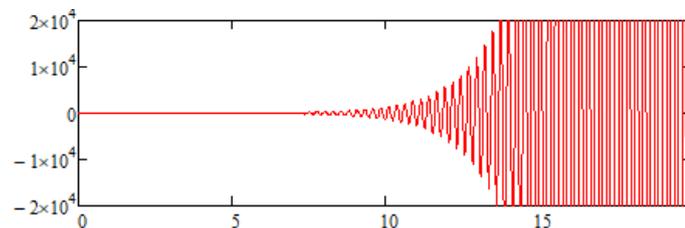


Рисунок 5.63 – Область возрастания амплитудных значений в зависимости от времени t для двухслойной тороидальной оболочки (стеклопластиковое покрытие) с жидкостью при значениях параметра возбуждения $\mu = 0,5, p_0 = 2$ МПа, $h_1=10$ мм, $r_0/R=5, k=5$ МПа/м

Согласно выполненным расчетам следует отметить следующее:

- с увеличением значений толщины стенки внешнего слоя бетонного покрытия h_1 происходит увеличение массы всей оболочки, что приводит к смещению всей области динамической неустойчивости вниз, в сторону уменьшения значений γ ;

- при рассмотрении тороидальной оболочки с жидкостью за счет её присоединенной массы область динамической неустойчивости значительно смещается вниз, а также сужается, разница между верхней и нижней границей в рассматриваемом примере составляет 3 Гц.

5.8 Определение и анализ областей динамическая неустойчивости оболочек в упругой среде при температурном воздействии и параметре продольной сжимающей силы

Как известно, продольная сжимающая сила оказывает существенное влияние на частоты свободных колебаний стержневых и оболочечных систем, снижая их. Выполним анализ влияния параметра продольной сжимающей силы на размеры и местоположение областей динамической неустойчивости цилиндрических оболочек. Определим верхние и нижние границы областей динамической неустойчивости и сведем полученные значения в таблицы 5.26–5.29 и проиллюстрируем полученные значения в виде графиков на рисунках 5.64–5.79.

Таблица 5.26 – Зависимость частот возмущения γ (Гц) для главной области динамической неустойчивости стальной цилиндрической оболочки с потоком жидкости и газа при подземном размещении от значений коэффициента упругого отпора грунта k_s и параметра продольной сжимающей силы P

<i>С газом</i>							
$h/R=1/50; L/r=8; p_0 = 2 \text{ МПа}, H=2 \text{ м}; k_s = 5 \text{ МПа/м}$							
P	Граница	0	0,05	0,1	0,15	0,20	0,25
1-я область	Верхняя	142,90	118,03	87,09	70,68	210,93	–
	Нижняя	123,91	106,90	87,06	42,02	–	–
$h/r=1/50; L/r=8; p_0 = 2 \text{ МПа}, H=2 \text{ м}; k_s = 10 \text{ МПа/м}$							
P	Граница	0	0,05	0,1	0,15	0,20	0,25
1-я область	Верхняя	158,86	136,75	110,61	81,36	–	–
	Нижняя	135,13	119,64	101,97	77,16	24,18	–
$h/r=1/50; L/r=8; p_0 = 2 \text{ МПа}, H=2 \text{ м}; k_s = 20 \text{ МПа/м}$							
P	Граница	0	0,05	0,1	0,15	0,20	0,25
1-я область	Верхняя	186,84	168,32	147,57	123,58	94,22	70,70
	Нижняя	155,21	141,87	127,17	110,63	91,47	53,52
<i>С жидкостью</i>							
$h/r=1/50; L/r=8; p_0 = 2 \text{ МПа}, H=2 \text{ м}; k_s = 5 \text{ МПа/м}$							
P	Граница	0	0,05	0,1	0,15	0,20	0,25
1-я область	Верхняя	77,06	63,59	46,96	38,81	172,88	–
	Нижняя	66,85	57,66	46,80	22,28	–	–
$h/r=1/50; L/r=8; p_0 = 2 \text{ МПа}, H=2 \text{ м}; k_s = 10 \text{ МПа/м}$							
P	Граница	0	0,05	0,1	0,15	0,20	0,25
1-я область	Верхняя	85,69	73,73	59,57	43,88	–	–
	Нижняя	72,92	64,54	55,00	41,43	12,50	–
$h/r=1/50; L/r=8; p_0 = 2 \text{ МПа}, H=2 \text{ м}; k_s = 20 \text{ МПа/м}$							
P	Граница	0	0,05	0,1	0,15	0,20	0,25
1-я область	Верхняя	100,83	90,81	79,58	66,60	50,69	38,28
	Нижняя	83,77	76,56	68,62	59,67	49,32	28,56

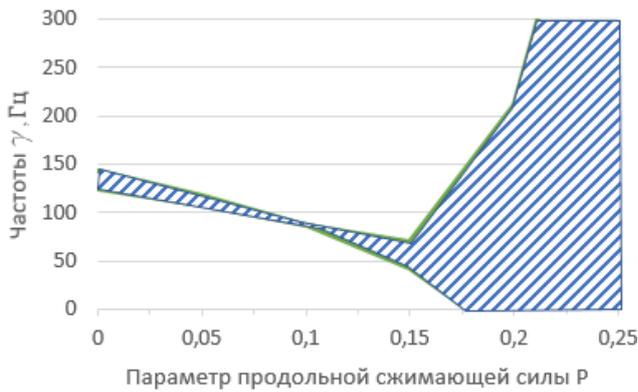


Рисунок 5.64 – Основная область динамической неустойчивости для стального газопровода при подземном размещении при $\mu=0,5$, $p_0=2$ МПа, $h/r=1/50$, $L/r=8$, $k_s=5$ МПа/м, $H=2$ м

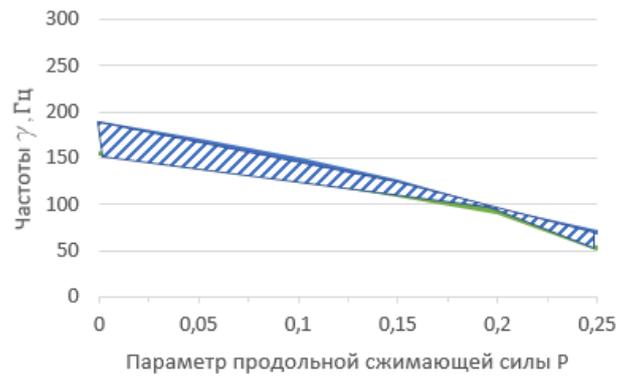


Рисунок 5.65 – Основная область динамической неустойчивости для стального газопровода при подземном размещении при $\mu=0,5$, $p_0=2$ МПа, $h/r=1/50$, $L/r=8$, $k_s=20$ МПа/м, $H=2$ м

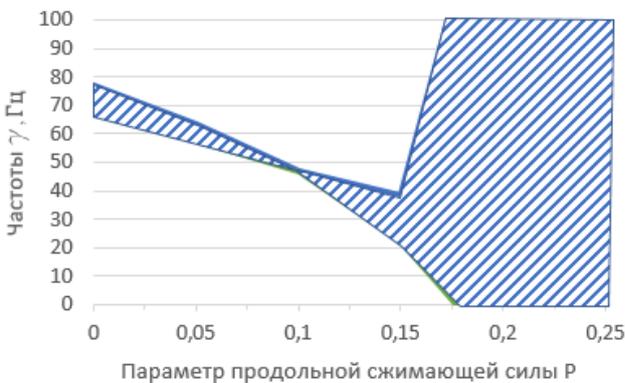


Рисунок 5.66 – Основная область динамической неустойчивости для стального нефтепровода при подземном размещении при $\mu=0,5$, $p_0=2$ МПа, $h/r=1/50$, $L/r=8$, $k_s=5$ МПа/м, $H=2$ м

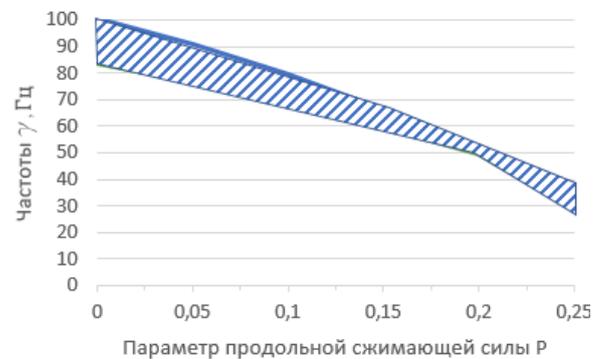


Рисунок 5.67 – Основная область динамической неустойчивости для стального нефтепровода при подземном размещении при $\mu=0,5$, $p_0=2$ МПа, $h/r=1/50$, $L/r=8$, $k_s=20$ МПа/м, $H=2$ м

Как следует из расчетов, наблюдается два поведения области динамической неустойчивости:

- 1) при достижении критических значений P область резко расширяется и заполняет все пространство рассматриваемой плоскости (рис. 5.66);
 - 2) область плавно смещается вниз в сторону уменьшения значений γ (рис. 0).
- Однако это говорит лишь о том, что величина критического параметра продольной сжимающей силы еще не достигнута, при его достижении результат будет схож с описанным на рисунке (рис. 5.66).

Таблица 5.27 – Зависимость частот возмущения γ (Гц) для главной области динамической неустойчивости стальной цилиндрической оболочки с потоком жидкости и газа при подземном размещении от значений внутреннего рабочего давления и параметра продольной сжимающей силы P

<i>С газом</i>							
$h/r=1/50; L/r=8; p_0 = 2 \text{ МПа}, H=2 \text{ м}; k_s = 5 \text{ МПа/м}$							
P	Граница	0	0,05	0,1	0,15	0,20	0,25
1-я область	Верхняя	142,90	118,03	87,09	70,68	210,93	–
	Нижняя	123,91	106,90	87,06	42,02	–	–
$h/r=1/50; L/r=8; p_0 = 4 \text{ МПа}, H=2 \text{ м}; k_s = 5 \text{ МПа/м}$							
P	Граница	0	0,05	0,1	0,15	0,20	0,25
1-я область	Верхняя	169,37	148,76	124,98	96,00	71,52	32,06
	Нижняя	142,62	128,00	111,58	92,58	56,25	–
$h/r=1/50; L/r=8; p_0 = 6 \text{ МПа}, H=2 \text{ м}; k_s = 5 \text{ МПа/м}$							
P	Граница	0	0,05	0,1	0,15	0,20	0,25
1-я область	Верхняя	192,32	174,36	154,40	131,59	104,28	76,70
	Нижняя	159,19	146,20	131,98	116,08	97,85	68,37
<i>С жидкостью</i>							
$h/R=1/50; L/r=8; p_0 = 2 \text{ МПа}, H=2 \text{ м}; k_s = 5 \text{ МПа/м}$							
P	Граница	0	0,05	0,1	0,15	0,20	0,25
1-я область	Верхняя	77,06	63,59	46,96	38,80	172,88	–
	Нижняя	66,85	57,66	46,80	22,28	–18,66	–
$h/R=1/50; L/r=8; p_0 = 4 \text{ МПа}, H=2 \text{ м}; k_s = 5 \text{ МПа/м}$							
P	Граница	0	0,05	0,1	0,15	0,20	0,25
1-я область	Верхняя	91,38	80,23	67,36	51,65	38,68	19,05
	Нижняя	76,97	69,07	60,19	49,93	30,05	–
$h/R=1/50; L/r=8; p_0 = 6 \text{ МПа}, H=2 \text{ м}; k_s = 5 \text{ МПа/м}$							
P	Граница	0	0,05	0,1	0,15	0,20	0,25
1-я область	Верхняя	103,79	94,08	83,28	70,93	56,14	41,39
	Нижняя	85,92	78,91	71,22	62,62	52,77	36,65

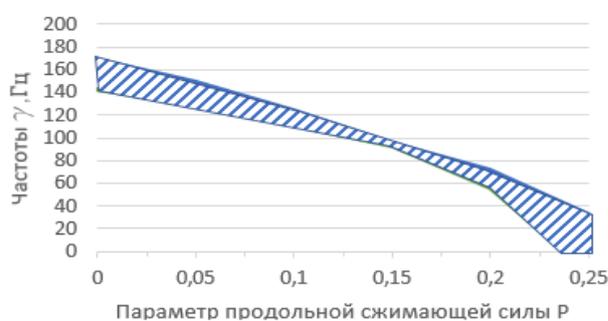


Рисунок 5.68 – Основная область динамической неустойчивости для стального газопровода при подземном размещении при $\mu=0,5, p_0=4 \text{ МПа}, h/r=1/50, L/r=8, k_s=5 \text{ МПа/м}, H=2 \text{ м}$

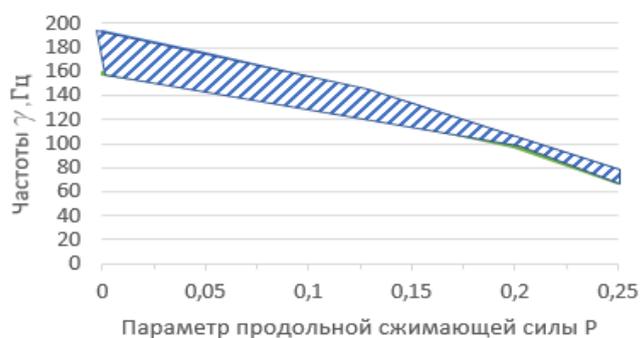


Рисунок 5.69 – Основная область динамической неустойчивости для стального газопровода при подземном размещении при $\mu=0,5, p_0=6 \text{ МПа}, h/r=1/50, L/r=8, k_s=5 \text{ МПа/м}, H=2 \text{ м}$

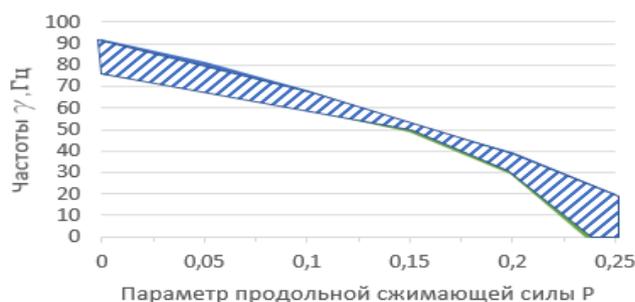


Рисунок 5.70 – Основная область динамической неустойчивости для стального нефтепровода при подземном размещении при $\mu=0,5$, $p_0=2$ МПа, $h/r=1/50$, $L/r=8$, $k_s=5$ МПа/м, $H=2$ м

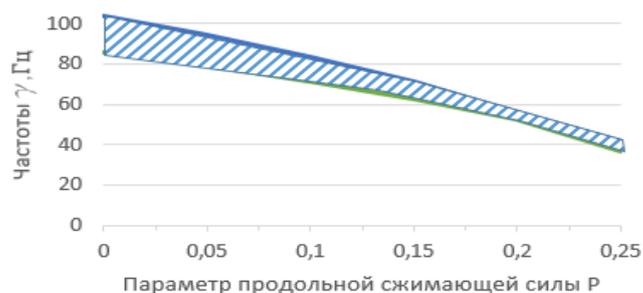


Рисунок 5.71 – Основная область динамической неустойчивости для стального нефтепровода при подземном размещении при $\mu=0,5$, $p_0=6$ МПа, $h/r=1/50$, $L/r=8$, $k_s=5$ МПа/м, $H=2$ м

Еще одним интересным наблюдением является сужение области динамической неустойчивости. При достижении определенных значений параметра P происходит временное сужение области, а затем её дальнейшее расширение, например, как на рисунках 5.68 и 5.70.

Аналогично стальной оболочке построим и исследуем области динамической неустойчивости для полиэтиленовой оболочки.

Таблица 5.28 – Зависимость частот возмущения γ (Гц) для главной области динамической неустойчивости полиэтиленовой цилиндрической оболочки с потоком жидкости и газа при подземном размещении от значений коэффициента упругого отпора грунта k_s и параметра продольной сжимающей силы P

С газом							
$h/r=1/50; L/r=8; p_0 = 0,1$ МПа, $H=2$ м; $k_s = 1$ МПа/м							
P	Граница	0	0,05	0,1	0,15	0,20	0,25
1-я область	Верхняя	107,28	105,54	103,78	101,98	100,15	98,28
	Нижняя	84,20	82,87	81,52	80,14	78,75	77,32
$h/r=1/50; L/r=8; p_0 = 0,1$ МПа, $H=2$ м; $k_s = 5$ МПа/м							
P	Граница	0	0,05	0,1	0,15	0,20	0,25
1-я область	Верхняя	206,51	205,62	204,71	203,81	202,90	201,98
	Нижняя	160,54	159,85	159,15	158,45	157,75	157,04
$h/r=1/50; L/r=8; p_0 = 0,1$ МПа, $H=2$ м; $k_s = 10$ МПа/м							
P	Граница	0	0,05	0,1	0,15	0,20	0,25
1-я область	Верхняя	285,61	284,96	284,31	283,66	283,01	282,35
	Нижняя	221,65	221,15	220,65	220,14	219,64	219,13
С жидкостью							
$h/r=1/50; L/r=8; p_0 = 0,1$ МПа, $H=2$ м; $k_s = 1$ МПа/м							
P	Граница	0	0,05	0,1	0,15	0,20	0,25
1-я область	Верхняя	23,25	22,85	22,45	22,04	21,63	21,20
	Нижняя	18,27	17,97	17,66	17,35	17,03	16,71

Окончание таблицы 5.28

$h/r=1/50; L/r=8; p_0 = 0,1 \text{ МПа}, H=2 \text{ м}; k_s = 5 \text{ МПа/м}$							
P	Граница	0	0,05	0,1	0,15	0,20	0,25
1-я область	Верхняя	45,50	45,30	45,10	44,89	44,89	44,89
	Нижняя	35,37	35,22	35,06	34,91	34,75	34,59
$h/r=1/50; L/r=8; p_0 = 0,1 \text{ МПа}, H=2 \text{ м}; k_s = 10 \text{ МПа/м}$							
P	Граница	0	0,05	0,1	0,15	0,20	0,25
1-я область	Верхняя	63,10	62,96	62,81	62,67	62,52	62,38
	Нижняя	48,97	48,86	48,75	48,63	48,52	48,41

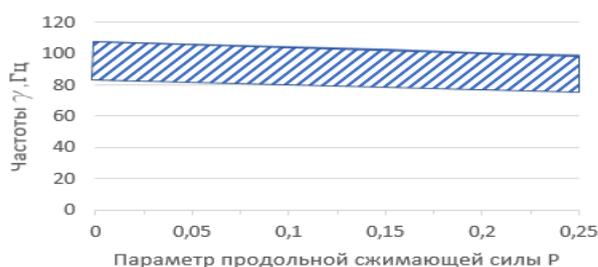


Рисунок 5.72 – Основная область динамической неустойчивости для ПЭ газопровода при подземном размещении, $\mu=0,5$, $p_0=0,1 \text{ МПа}$, $h/r=1/50$, $L/r=8$, $k_s=1 \text{ МПа/м}$, $H=2 \text{ м}$

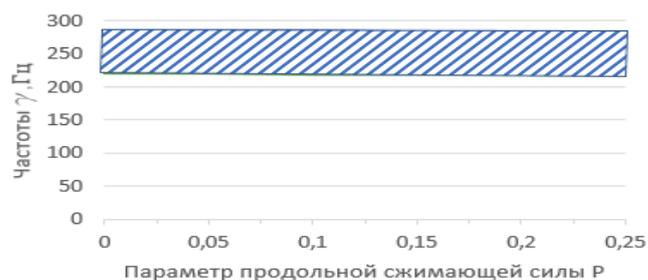


Рисунок 5.73 – Основная область динамической неустойчивости для ПЭ газопровода при подземном размещении, $\mu=0,5$, $p_0=0,1 \text{ МПа}$, $h/r=1/50$, $L/r=8$, $k_s=10 \text{ МПа/м}$, $H=2 \text{ м}$

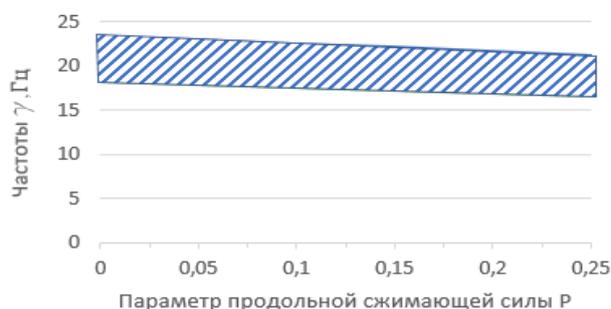


Рисунок 5.74 – Основная область динамической неустойчивости для ПЭ водопровода при подземном размещении, $\mu=0,5$, $p_0=0,1 \text{ МПа}$, $h/r=1/50$, $L/r=8$, $k_s=1 \text{ МПа/м}$, $H=2 \text{ м}$

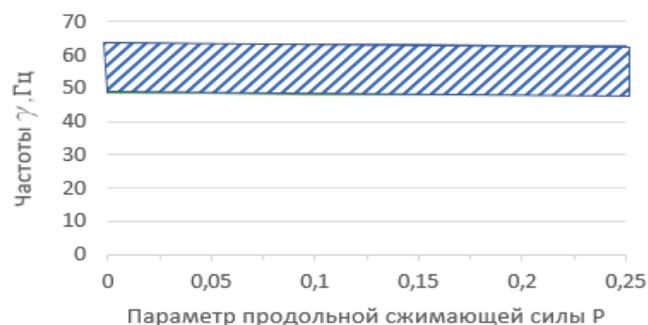


Рисунок 5.75 – Основная область динамической неустойчивости для ПЭ водопровода при подземном размещении, $\mu=0,5$, $p_0=0,1 \text{ МПа}$, $h/r=1/50$, $L/r=8$, $k_s=10 \text{ МПа/м}$, $H=2 \text{ м}$

Таблица 5.29 – Зависимость частот возмущения γ (Гц) для главной области динамической неустойчивости полиэтиленовой цилиндрической оболочки с потоком жидкости и газа при подземном размещении от значений внутреннего рабочего давления и параметра продольной сжимающей силы P

$C \text{ газом}$							
$h/r=1/50; L/r=8; p_0 = 0 \text{ МПа}, H=2 \text{ м}; k_s = 1 \text{ МПа/м}$							
P	Граница	0	0,05	0,1	0,15	0,20	0,25
1-я область	Верхняя	90,41	88,34	86,22	84,05	81,82	79,53
	Нижняя	71,33	69,75	68,14	66,49	64,80	63,07
$h/r=1/50; L/r=8; p_0 = 0,2 \text{ МПа}, H=2 \text{ м}; k_s = 1 \text{ МПа/м}$							
P	Граница	0	0,05	0,1	0,15	0,20	0,25
1-я область	Верхняя	121,84	120,31	118,77	117,20	115,61	113,99
	Нижняя	95,35	64,18	92,99	91,79	90,57	89,33

Окончание таблицы 5.29

С жидкостью							
$h/r=1/50; L/r=8; p_0 = 0 \text{ МПа}, H=2 \text{ м}; k_s = 1 \text{ МПа/м}$							
P	Граница	0	0,05	0,1	0,15	0,20	0,25
1-я область	Верхняя	19,41	18,93	18,44	17,94	17,43	16,90
	Нижняя	15,34	14,98	14,62	14,24	13,85	13,45
$h/r=1/50; L/r=8; p_0 = 0,2 \text{ МПа}, H=2 \text{ м}; k_s = 1 \text{ МПа/м}$							
P	Граница	0	0,05	0,1	0,15	0,20	0,25
1-я область	Верхняя	26,54	26,20	25,85	25,49	25,13	24,77
	Нижняя	20,78	20,52	20,25	19,98	19,71	19,43

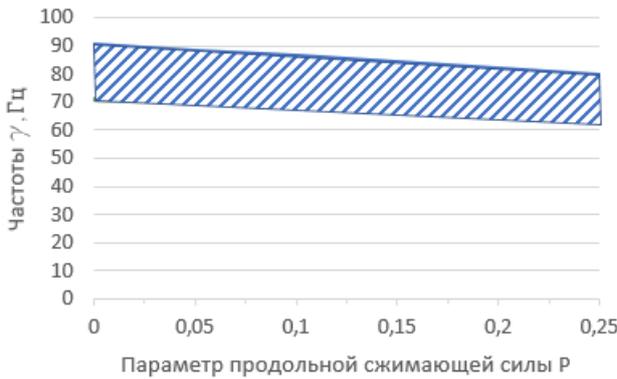


Рисунок 5.76 – Основная область динамической неустойчивости для ПЭ газопровода при подземном размещении, $\mu=0,5, p_0=4 \text{ МПа}, h/r=1/50, L/r=8, k_s=5 \text{ МПа/м}, H=2 \text{ м}$

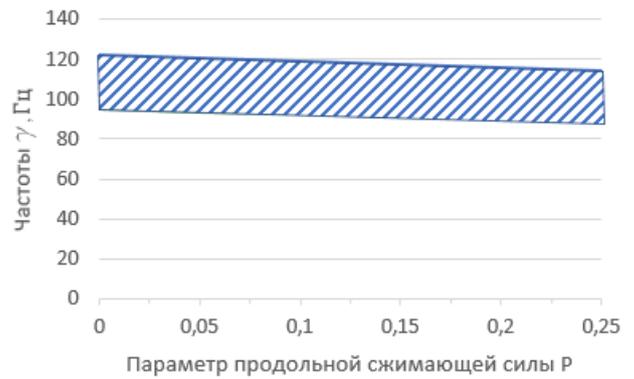


Рисунок 5.77 – Основная область динамической неустойчивости для ПЭ газопровода при подземном размещении, $\mu=0,5, p_0=6 \text{ МПа}, h/r=1/50, L/r=8, k_s=5 \text{ МПа/м}, H=2 \text{ м}$

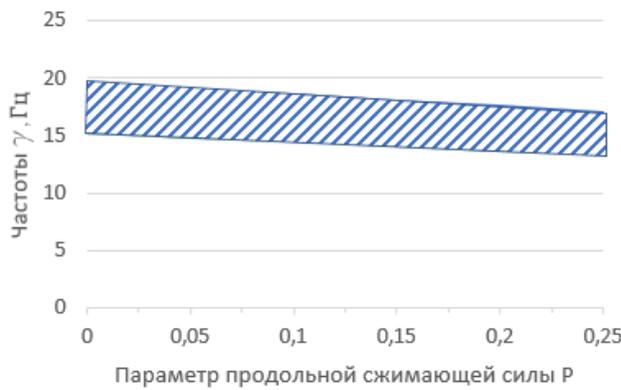


Рисунок 5.78 – Основная область динамической неустойчивости для ПЭ водопровода при подземном размещении, $\mu=0,5, p_0=2 \text{ МПа}, h/r=1/50, L/r=8, k_s=5 \text{ МПа/м}, H=2 \text{ м}$

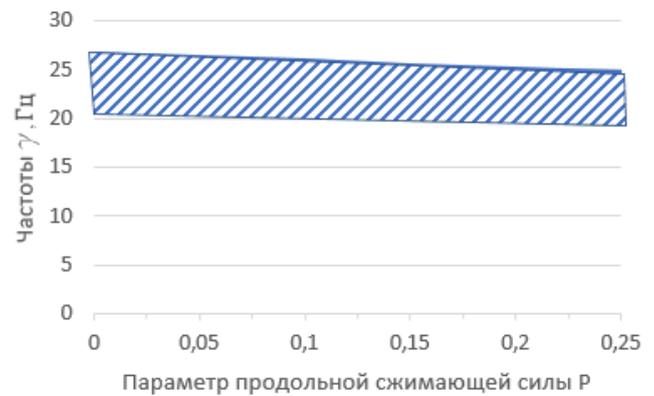


Рисунок 5.79 – Основная область динамической неустойчивости для ПЭ водопровода при подземном размещении, $\mu=0,5, p_0=6 \text{ МПа}, h/r=1/50, L/r=8, k_s=5 \text{ МПа/м}, H=2 \text{ м}$

Как было доказано ранее, при нахождении полиэтиленовой оболочки в грунте, особенно при подземном размещении, её жесткость существенно увеличивается, грунт препятствует перемещениям, обжимая оболочку со всех сторон. В этой связи параметр продольной сжимающей силы не оказывает такого сильного воздействия, как для стальной трубы. Как следует из расчетов, с увеличением параметра P область динамической неустойчивости снижается вниз

в сторону увеличения значений γ . Также следует отметить, что при возрастании значений k_s и p_0 целиком вся область динамической неустойчивости смещается в сторону увеличения значений γ .

Согласно исследованию, проведенному в разделе 2.7, следует, что оболочка чувствительна к изменению температуры ΔT . В случае нагрева оболочка испытывает двухстороннее обжатие, а при охлаждении – растяжение, что дополнительно способствует либо понижению частот, либо повышению.

Проведем исследование влияния температуры ΔT на размеры и местоположение областей динамической неустойчивости и сведем полученные значения в таблицы 5.30, 5.31 и проиллюстрируем в виде графиков на рисунках 5.80–5.87.

Таблица 5.30 – Зависимость частот возмущения γ (Гц) для главной области динамической неустойчивости стальной цилиндрической оболочки с потоком жидкости и газа при подземном размещении от значений коэффициента упругого отпора грунта k_s и температуры ΔT

<i>с газом</i>						
<i>$h/r=1/50; L/r=8; p_0 = 2$ МПа, $H=2$ м; $k_s = 5$ МПа/м</i>						
$\Delta T, ^\circ\text{C}$	Граница	-200	-100	0	100	200
1-я область	Верхняя	146,07	144,28	142,90	141,81	140,93
	Нижняя	121,96	123,03	123,91	124,63	125,24
<i>$h/r=1/50; L/r=8; p_0 = 2$ МПа, $H=2$ м; $k_s = 10$ МПа/м</i>						
$\Delta T, ^\circ\text{C}$	Граница	-200	-100	0	100	200
1-я область	Верхняя	162,07	160,29	158,86	157,68	156,69
	Нижняя	133,25	134,27	135,13	135,87	136,51
<i>$h/r=1/50; L/r=8; p_0 = 2$ МПа, $H=2$ м; $k_s = 20$ МПа/м</i>						
$\Delta T, ^\circ\text{C}$	Граница	-200	-100	0	100	200
1-я область	Верхняя	189,96	188,27	186,84	185,60	184,52
	Нижняя	153,49	154,40	155,21	155,93	156,58
<i>с жидкостью</i>						
<i>$h/r=1/50; L/r=8; p_0 = 2$ МПа, $H=2$ м; $k_s = 5$ МПа/м</i>						
$\Delta T, ^\circ\text{C}$	Граница	-200	-100	0	100	200
1-я область	Верхняя	78,77	77,80	77,06	76,47	76,00
	Нижняя	65,80	66,38	66,85	67,25	67,57
<i>$h/r=1/50; L/r=8; p_0 = 2$ МПа, $H=2$ м; $k_s = 10$ МПа/м</i>						
$\Delta T, ^\circ\text{C}$	Граница	-200	-100	0	100	200
1-я область	Верхняя	87,43	86,46	85,69	85,05	84,52
	Нижняя	71,90	72,45	72,92	73,32	73,67
<i>$h/r=1/50; L/r=8; p_0 = 2$ МПа, $H=2$ м; $k_s = 20$ МПа/м</i>						
$\Delta T, ^\circ\text{C}$	Граница	-200	-100	0	100	200
1-я область	Верхняя	102,51	101,60	100,83	100,16	99,57
	Нижняя	82,84	83,34	83,77	84,16	84,51

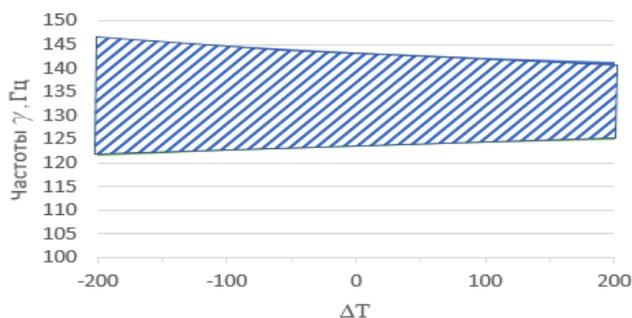


Рисунок 5.80 – Основная область динамической неустойчивости для стального газопровода при подземном размещении $\mu=0,5$, $p_0=2$ МПа, $h/r=1/50$, $L/r=8$, $k_s=5$ МПа/м, $H=2$ м, ΔT от -200 до $+200$ °С

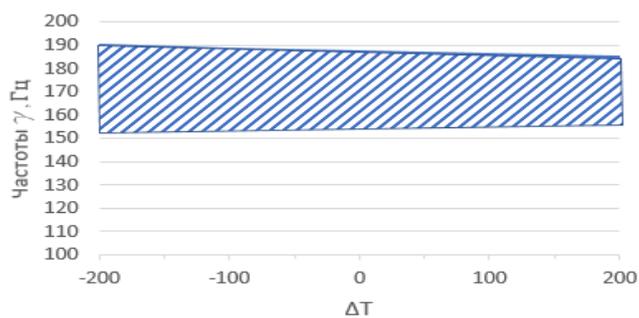


Рисунок 5.81 – Основная область динамической неустойчивости для стального газопровода при подземном размещении $\mu=0,5$, $p_0=2$ МПа, $h/r=1/50$, $L/r=8$, $k_s=20$ МПа/м, $H=2$ м, ΔT от -200 до $+200$ °С

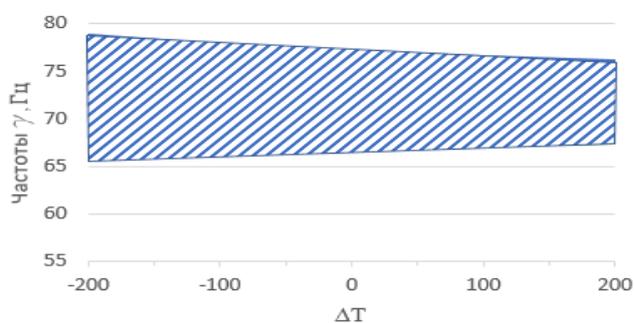


Рисунок 5.82 – Основная область динамической неустойчивости для стального нефтепровода при подземном размещении $\mu=0,5$, $p_0=2$ МПа, $h/r=1/50$, $L/r=8$, $k_s=5$ МПа/м, $H=2$ м, ΔT от -200 до $+200$ °С

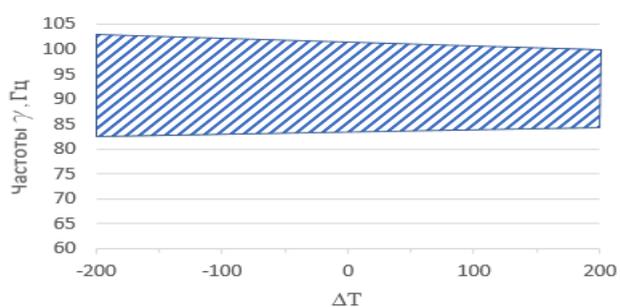


Рисунок 5.83 – Основная область динамической неустойчивости для стального нефтепровода при подземном размещении $\mu=0,5$, $p_0=2$ МПа, $h/r=1/50$, $L/r=8$, $k_s=20$ МПа/м, $H=2$ м, ΔT от -200 до $+200$ °С

Таблица 5.31 – Зависимость частот возмущения γ (Гц) для главной области динамической неустойчивости полиэтиленовой цилиндрической оболочки с потоком жидкости и газа при подземном размещении от значений коэффициента упругого отпора грунта k_s и температуры ΔT

С газом						
$h/r=1/50; L/r=8; p_0 = 0,1$ МПа, $H=2$ м; ; $k_s = 1$ МПа/м						
$\Delta T, ^\circ\text{C}$	Граница	-50	-20	0	20	50
1-я область	Верхняя	108,81	107,86	107,28	106,76	106,04
	Нижняя	83,49	83,93	84,20	84,46	84,82
$h/r=1/50; L/r=8; p_0 = 0,1$ МПа, $H=2$ м; $k_s = 5$ МПа/м						
$\Delta T, ^\circ\text{C}$	Граница	-50	-20	0	20	50
1-я область	Верхняя	207,29	206,82	206,51	206,22	205,78
	Нижняя	160,18	160,40	160,54	160,68	16,89
С жидкостью						
$h/r=1/50; L/r=8; p_0 = 0,1$ МПа, $H=2$ м; $k_s = 1$ МПа/м						
$\Delta T, ^\circ\text{C}$	Граница	-50	-20	0	20	50
1-я область	Верхняя	23,61	23,38	23,25	23,13	22,96
	Нижняя	18,10	18,20	18,27	18,33	18,41

Окончание таблицы 5.31

$h/r=1/50; L/r=8; p_0 = 0,1 \text{ МПа}, H=2\text{м}; k_s = 5 \text{ МПа/м}$						
$\Delta T, \text{ }^\circ\text{C}$	Граница	-50	-20	0	20	50
1-я область	Верхняя	45,67	45,57	45,50	45,43	45,33
	Нижняя	35,29	35,34	35,37	35,40	35,45

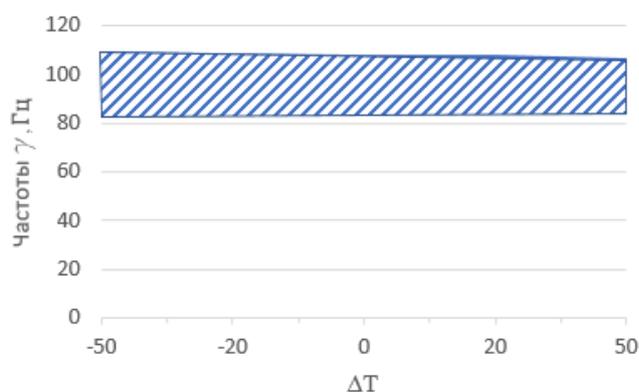


Рисунок 5.84 – Основная область динамической неустойчивости для ПЭ газопровода при подземном размещении, $\mu=0,5, p_0=0,1 \text{ МПа}, h/r=1/50, L/r=8, k_s=1 \text{ МПа/м}, H=2\text{м}, \Delta T$ от -50 до $+50 \text{ }^\circ\text{C}$

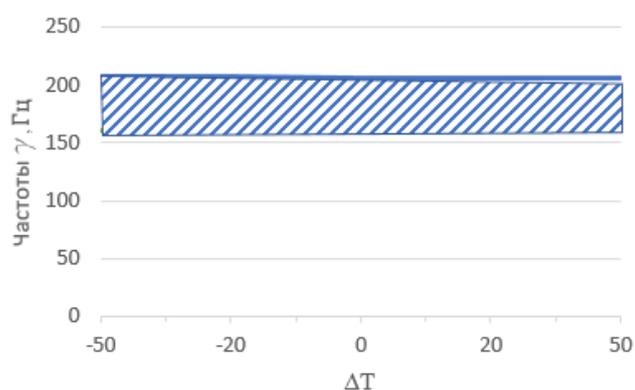


Рисунок 5.85 – Основная область динамической неустойчивости для ПЭ газопровода при подземном размещении, $\mu=0,5, p_0=0,1 \text{ МПа}, h/r=1/50, L/r=8, k_s=5 \text{ МПа/м}, H=2\text{м}, \Delta T$ от -50 до $+50 \text{ }^\circ\text{C}$

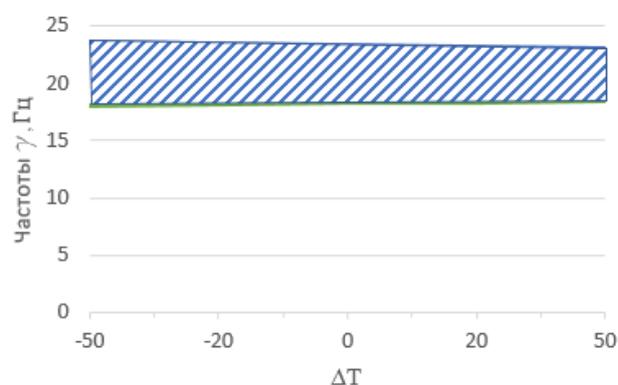


Рисунок 5.86 – Основная область динамической неустойчивости для ПЭ водопровода при подземном размещении $\mu=0,5, p_0=0,1 \text{ МПа}, h/r=1/50, L/r=8, k_s=1 \text{ МПа/м}, H=2 \text{ м}, \Delta T$ от -50 до $+50 \text{ }^\circ\text{C}$

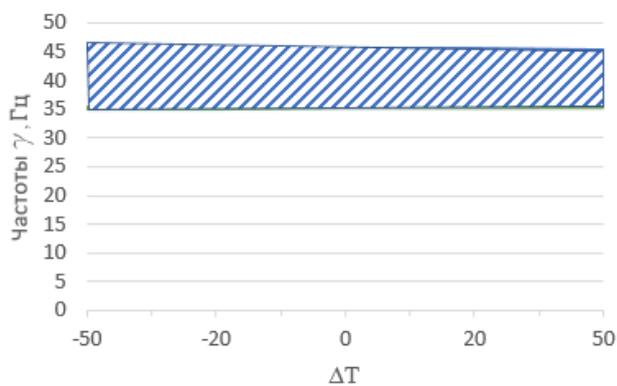


Рисунок 5.87 – Основная область динамической неустойчивости для ПЭ водопровода при подземном размещении $\mu=0,5, p_0=0,1 \text{ МПа}, h/r=1/50, L/r=8, k_s=5 \text{ МПа/м}, H=2 \text{ м}, \Delta T$ от -50 до $+50 \text{ }^\circ\text{C}$

Согласно проведенным расчетам можно отметить, что при нагреве ($\Delta T = 200 \text{ }^\circ\text{C}$) область динамической неустойчивости шире, чем при охлаждении ($\Delta T = 200 \text{ }^\circ\text{C}$), для стальной оболочки максимальная разница между верхней и нижней границей составляет 25 Гц и 15 Гц соответственно, для оболочки с жидкостью – 13 и 9 Гц соответственно.

Из проведённого анализа полученных значений следует, что в связи с увеличением параметра продольной сжимающей силы от 0 до 1 и изменением температуры ΔT от -100 до 100 (для стальной оболочки) и от -50 до 50 (для полиэтиленовой оболочки области динамической неустойчивости изменяются менее 1 %, что в целом коррелируется с аналогичным эффектом при определении собственных частот тороидальной оболочки при тех же воздействиях, выполненных в разделе 3.7.

5.9 Определение и анализ областей динамической неустойчивости цилиндрических и тороидальных оболочек с учетом сил сопротивления и демпфирующих свойств среды

Рассмотрим влияние сил сопротивления среды и её демпфирующих свойств на размеры и местоположение областей динамической неустойчивости стальной и полиэтиленовой цилиндрической и тороидальной оболочки. Сведем полученные значения в таблицы 5.33–5.36 и проиллюстрируем их на графиках на рисунках 5.88–5.91.

Таблица 5.33 – Зависимость частот возмущения γ (Гц) для главной области динамической неустойчивости стальной цилиндрической оболочки с жидкостью при подземном размещении от внутреннего рабочего давления при различных значениях динамического коэффициента вязкости η

<i>Без учета демпфирующих свойств грунта</i>						
<i>$h/r=1/50; L/r=8; k_s = 1$ МПа/м, $H=2$ м; $V=5$ м/с</i>						
p_0 (МПа)	Граница	2	3	4	5	6
1-я область	Верхняя	41,91	46,90	51,43	55,60	59,49
	Нижняя	37,11	40,56	43,74	46,72	49,52

Окончание таблицы 5.33

<i>С учетом демпфирующих свойств грунта при $\eta = 0,5 \cdot 10^4$ Па·с</i>						
<i>$h/r=1/50; L/r=8; k_s = 1$ МПа/м, $H=2$ м; $V=5$ м/с</i>						
p_0 (МПа)	Граница	2	3	4	5	6
1-область	Верхняя	41,64	46,69	51,25	55,44	59,35
	Нижняя	37,30	40,69	43,85	46,81	49,60
<i>С учетом демпфирующих свойств грунта при $\eta = 1 \cdot 10^4$ Па·с</i>						
<i>$h/r=1/50; L/r=8; k_s = 1$ МПа/м, $H=2$ м; $V=5$ м/с</i>						
p_0 (МПа)	Граница	2	3	4	5	6
1-я область	Верхняя	40,60	45,99	50,68	54,95	58,90
	Нижняя	38,10	41,18	44,22	47,12	49,87
<i>С учетом демпфирующих свойств грунта при $\eta = 1,5 \cdot 10^4$ Па·с</i>						
<i>$h/r=1/50; L/r=8; k_s = 1$ МПа/м, $H=2$ м; $V=5$ м/с</i>						
p_0 (МПа)	Граница	2	3	4	5	6
1-я область	Верхняя	39,16	44,15	49,54	54,03	58,11
	Нижняя	38,60	42,66	45,02	47,72	50,37

Таблица 5.34 – Зависимость частот возмущения γ (Гц) для главной области динамической неустойчивости полиэтиленовой цилиндрической оболочки с жидкостью при подземном размещении от внутреннего рабочего давления при различных значениях динамического коэффициента вязкости η .

<i>Без учета демпфирующих свойств грунта</i>						
$h/r=1/50; L/r=8; k_s = 1 \text{ МПа/м}, H=2\text{м}; V=5 \text{ м/с}$						
p_0 (МПа)	Граница	0,05	0,1	0,15	0,175	0,2
1-я область	Верхняя	10,77	11,86	12,85	13,33	13,78
	Нижняя	7,70	8,61	9,44	9,83	10,20
<i>С учетом демпфирующих свойств грунта при $\eta = 0,5 \cdot 10^4 \text{ Па}\cdot\text{с}$</i>						
$h/r=1/50; L/r=8; k_s = 1 \text{ МПа/м}, H=2\text{м}; V=5 \text{ м/с}$						
p_0 (МПа)	Граница	0,05	0,1	0,15	0,175	0,2
1-я область	Верхняя	9,41	10,66	11,78	12,30	12,79
	Нижняя	8,39	9,21	9,97	10,33	10,69

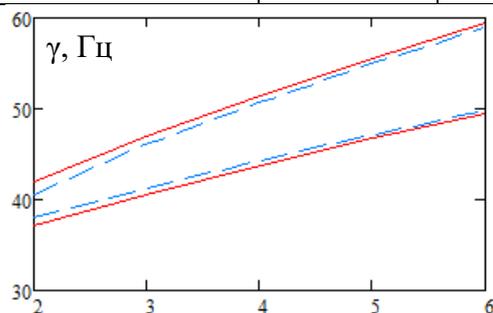


Рисунок 5.88 – Основная область динамической неустойчивости для стального нефтепровода при подземном размещении $\mu=0,5, p_0=2-6 \text{ МПа}, h/r=1/50, L/r=8, k_s=1 \text{ МПа/м}, \eta=1,5 \cdot 10^4 \text{ Па}\cdot\text{с}$

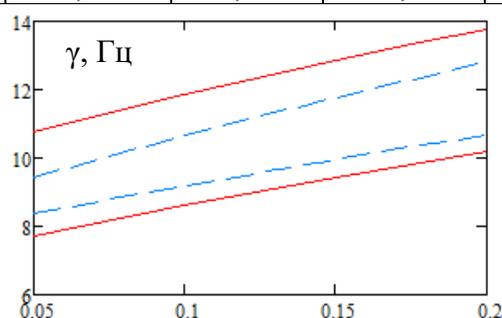


Рисунок 5.89 – Основная область динамической неустойчивости для ПЭ водопровода при подземном размещении $\mu=0,5, p_0=0,05-0,2 \text{ МПа}, h/r=1/50, L/r=8, k_s=1 \text{ МПа/м}, \eta=0,5 \cdot 10^4 \text{ Па}\cdot\text{с}$

Таблица 5.35 – Зависимость частот возмущения γ (Гц) для главной области динамической неустойчивости стальной тороидальной оболочки с жидкостью при подземном размещении от внутреннего рабочего давления при различных значениях динамического коэффициента вязкости η

<i>Без учета демпфирующих свойств грунта</i>						
$h/r=1/50; R/r=8; k_s = 1 \text{ МПа/м}, H=2\text{м}; V=5 \text{ м/с}$						
p_0 (МПа)	Граница	2	3	4	5	6
1-я область	Верхняя	47,01	48,81	50,55	52,24	53,89
	Нижняя	45,37	46,50	47,62	48,71	49,78
<i>С учетом демпфирующих свойств грунта при $\eta = 0,5 \cdot 10^4 \text{ Па}\cdot\text{с}$</i>						
$h/r=1/50; R/r=8; k_s = 1 \text{ МПа/м}, H=2\text{м}; V=5 \text{ м/с}$						
p_0 (МПа)	Граница	2	3	4	5	6
1-область	Верхняя	46,93	48,75	50,51	52,20	53,85
	Нижняя	45,45	46,56	47,66	48,74	49,81
<i>С учетом демпфирующих свойств грунта при $\eta = 1,0 \cdot 10^4 \text{ Па}\cdot\text{с}$</i>						
$h/r=1/50; R/r=8; k_s = 1 \text{ МПа/м}, H=2\text{м}; V=5 \text{ м/с}$						
p_0 (МПа)	Граница	2	3	4	5	6
1-я область	Верхняя	46,58	48,55	50,35	52,08	53,74
	Нижняя	45,76	46,73	47,79	48,85	49,90
<i>С учетом демпфирующих свойств грунта при $\eta = 1,5 \cdot 10^4 \text{ Па}\cdot\text{с}$</i>						
$h/r=1/50; R/r=8; k_s = 1 \text{ МПа/м}, H=2\text{ м}; \eta=1 \cdot 10^4 \text{ Па}\cdot\text{с}; V=5 \text{ м/с}$						
p_0 (МПа)	Граница	2	3	4	5	6
1-я область	Верхняя	46,10	48,06	50,06	51,85	53,55
	Нижняя	45,85	47,18	48,04	49,04	50,05

Таблица 5.36 – Зависимость частот возмущения γ (Гц) для главной области динамической неустойчивости полиэтиленовой тороидальной оболочки с жидкостью при подземном размещении от внутреннего рабочего давления при различных значениях динамического коэффициента вязкости η

<i>Без учета демпфирующих свойств грунта</i>						
<i>$h/r=1/50; R/r=8; k_s = 1$ МПа/м, $H=2$м; $V=5$ м/с</i>						
p_0 (МПа)	Граница	0,05	0,1	0,15	0,175	0,2
1-я область	Верхняя	8,07	8,63	9,16	9,41	9,65
	Нижняя	6,67	7,07	7,46	7,65	7,83
<i>С учетом демпфирующих свойств грунта</i>						
<i>$h/r=1/50; R/r=8; k_s = 1$ МПа/м, $H=2$м; $\eta=0,5 \cdot 10^4$ Па·с; $V=5$ м/с</i>						
p_0 (МПа)	Граница	0,05	0,1	0,15	0,175	0,2
1-я область	Верхняя	7,93	8,5	9,04	9,29	9,54
	Нижняя	6,75	7,15	7,53	7,71	7,89

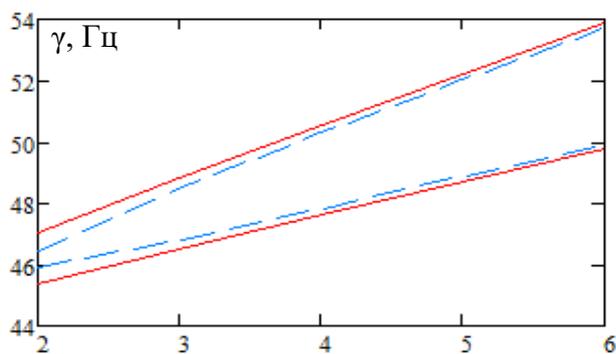


Рисунок 5.90 – Основная область динамической неустойчивости для стального криволинейного нефтепровода при подземном размещении $\mu=0,5$, $p_0=2-6$ МПа, $h/r=1/50$, $R/r=8$, $k_s=1$ МПа/м

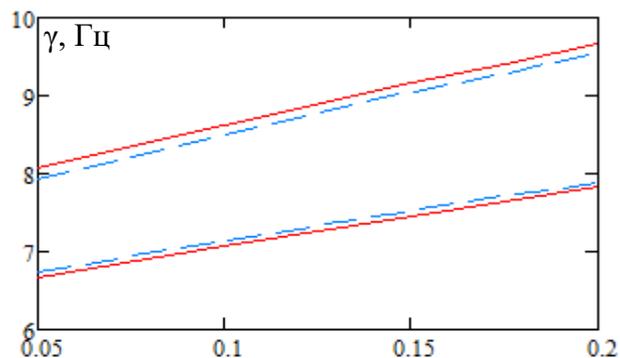


Рисунок 5.91 – Основная область динамической неустойчивости для ПЭ водопровода при подземном размещении $\mu=0,5$, $p_0=0,05-0,2$ МПа, $h/r=1/50$, $R/r=8$, $k_s=1$ МПа/м

В результате анализа построенных областей динамической неустойчивости цилиндрических и тороидальных оболочек, выполненных из стали и полиэтилена, совершающих колебания в среде, с учетом демпфирующих свойств, следует отметить следующее:

Для цилиндрических оболочек:

1) при увеличении внутреннего давления с 2 до 6 МПа для стальной оболочки с учетом демпфирующих свойств среды (синяя пунктирная область) наблюдается схожая тенденция, что и для областей при отсутствии таких свойств (красная область). Однако при $p_0=2$ МПа наблюдается более существенное влияние окружающей среды на границы области динамической неустойчивости, в этом месте на графике происходит сужение. Таким образом, более узкая область

позволяет сформировать вывод о более высокой защищенности рассматриваемого участка от параметрического резонанса;

2) в случае полиэтиленовой оболочки наблюдается заметное сужение границ областей динамической неустойчивости. Такая оболочка обладает меньшим весом в сравнении со стальной оболочкой, и, следовательно, гашение колебаний происходит более выражено, о чем свидетельствуют результаты расчетов, приведенных на графике рисунка 5.89.

Для тороидальных оболочек:

1) тороидальная стальная оболочка имеет схожие тенденции изменения границ областей динамической неустойчивости, однако ввиду большей жесткости (за счет геометрической формы) область смещена вверх в сторону увеличения значений γ ;

2) в случае полиэтиленовой тороидальной оболочки границы областей динамической неустойчивости с учетом демпфирующих свойств среды на 12 % уже в сравнении с областями без учета этих свойств.

5.10 Выводы по главе 5

1. Исследована динамическая устойчивость стальных (однослойных и двухслойных) и полиэтиленовых цилиндрических и тороидальных оболочек, взаимодействующих с упругой средой. Получена и решена разделяющаяся система дифференциальных уравнений Матье. Используя методику Боголюбова–Митропольского определены и построены верхние и нижние границы областей динамической неустойчивости.

2. Полученные решения позволяют выполнить анализ размеров и местоположения областей динамической неустойчивости при различных значениях геометрических характеристик и внешних воздействий, оказывающих влияние на оболочки при наземном и подземном размещении.

3. Наиболее широкая область реализуется при значении параметра возбуждения $\mu=0,5$, это наиболее опасная область, при которой повышается шанс возникновения параметрического резонанса.

4. В результате увеличения значений внутреннего рабочего давления и коэффициента упругого отпора грунта k_s область динамической неустойчивости расширяется и смещается в сторону увеличения значений γ .

5. Тонкостенные оболочки ($h/r=1/70$) более чувствительны к изменениям давления и коэффициента упругого отпора грунта k_s , для таких оболочек области динамической неустойчивости располагаются ниже, чем при $h/r=1/30$ и шире.

6. Области динамической неустойчивости для оболочки подземного размещения располагается выше чем при наземном. Упругая среда за счет радиального обжатия стенок трубы препятствует перемещениям и деформациям, повышая при этом жесткость рассматриваемого участка.

7. В результате решения уравнения Матье в MathCAD 15 представляется возможным определить время, необходимое для развития больших амплитудных значений. Согласно полученным результатам для цилиндрических оболочек достаточно 5–6 секунд, а для тороидальных это время при определённых соотношениях геометрических характеристик и внешних воздействий может составлять более 20 секунд.

8. Области динамической неустойчивости для оболочек с жидкостью, за счет присоединенной массы жидкости могут быть значительно ниже, чем для оболочек с газом, расхождения могут достигать 3–4 раз.

9. Области динамической неустойчивости для полиэтиленовых оболочек ввиду меньшей жесткости располагаются ниже, чем у стальных. Однако следует отметить их большую восприимчивость к изменению внутреннего давления и коэффициента упругого отпора грунта. В связи с их увеличением тенденция роста значений нижних и верхних областей в разы превосходит стальные.

10. Двухслойные оболочки (например, сталь + бетон) демонстрируют смещение областей вниз при увеличении толщины внешнего слоя, такой эффект объясняется возрастанием присоединенной массы внешнего слоя.

11. Возрастание значений параметра продольной сжимающей силы P вызывает резкое расширение областей неустойчивости. Для стальных оболочек это

приводит к потере устойчивости, тогда как полиэтиленовые проявляют меньшую чувствительность, особенно для случая подземного размещения оболочек.

12. В результате учета демпфирующих свойств среды стальные и тороидальные оболочки менее чувствительны к возрастающим значениям коэффициента динамической вязкости η по сравнению с полиэтиленовыми, где разница площадей двух областей может достигать 30–40 %.

ГЛАВА 6. СРАВНЕНИЕ И СОПОСТАВЛЕНИЕ РЕШЕНИЙ, ПОЛУЧЕННЫХ В ДИССЕРТАЦИИ, С РЕШЕНИЯМИ ДРУГИХ АВТОРОВ

Данная глава посвящена верификации и подтверждению полученных в диссертации результатов исследований в сравнении с имеющимися в литературе решениями других авторов. Это могут быть аналитические решения и численные. В связи с тем, что решения, полученные в диссертации, являются новыми и учитывают одновременно влияния внутреннего давления, параметра продольной сжимающей силы, давления внешней среды и упругого отпора среды, температурного воздействия, скорости потока протекающей жидкости, присоединенной массы внешней среды и жидкости при различных значениях геометрических характеристик оболочки, то произведем сравнение и сопоставление частных случаев полученных в диссертации решений с решениями других авторов по стержневой и оболочечной теории, экспериментальными данными и численными методами расчета при помощи метода конечных элементов (МКЭ).

6.1 Сравнение и сопоставление решений, полученных в диссертации, с решениями других авторов по стержневой теории

В целях сравнения полученных решений с решениями других авторов по стержневой теории возьмем за основу наиболее полную формулу для замкнутой цилиндрической оболочки с потоком жидкости:

$$\omega_{mn}^2 = \frac{\tilde{\lambda}_n^4 + m^4(m^2 - 1)(m^2 - 1 + p^* - q_{si}^*) + k_{si}^* m^4 - \tilde{\lambda}_n^4 m^4 P n^{-2} + \tilde{\lambda}_n^2 m^4 T^* - \tilde{\lambda}_n^4 \rho_v^* \Phi_{mn} V^2 m^4 h_v}{\rho^* \cdot r \cdot h (\tilde{\lambda}_n^2 h_v + m^2 + m^4) + \mu_{bj}^* m^4 + \rho_v^* \Phi_{mn} r^2 m^4}.$$

Для сравнения полученной формулы (77) с решениями по стержневой теории необходимо принять в выражении $m=1$, и параметр функции Бесселя $\Phi_{mn}=1$, что соответствует графику на рисунке 2.2 для реальных отношений L/R при $\lambda_n < 0,25$. Далее в знаменателе можно пренебречь слагаемым $\lambda_n^2 h_v$ ввиду малости этого слагаемого $\lambda_n^2 h_v \ll 1$. В результате преобразований получим

$$\omega_{11}^2 = \frac{\tilde{\lambda}_n^4 + k_{si}^* - \tilde{\lambda}_n^4 P + \tilde{\lambda}_n^2 T^* - \tilde{\lambda}_n^4 \rho_v^* V^2 h_v}{2\rho^* \cdot r \cdot h + \mu_{bj}^* + \rho_v^* r^2}. \quad (169)$$

Ниже приведены результаты сравнения формулы (169) с результатами известных авторов по стержневой теории.

1. Принимаем, что параметр продольной силы $P=0$, коэффициент постели $k^*=0$ и скорость протекающей жидкости $V=0$, в трубе, не заполненной жидкостью $\rho_v^* = 0$, без учета присоединенной массы грунта $\mu_{bj}^* = 0$, то после преобразований получим формулу следующего вида:

$$\omega_{1n}^2 = \frac{\tilde{\lambda}_n^4}{2\rho^* \cdot r \cdot h}, \quad (170)$$

где $\tilde{\lambda}_n = \frac{n\pi r}{L\sqrt{h_v}}$, $\rho^* = \rho_0 G$, $G = \frac{r}{Eh \cdot h_v^2}$;

$$\omega_{1n}^2 = \frac{n^4 \pi^4 E r^3 h^3 \pi}{2L^4 r h \rho_0 \pi}, \quad (171)$$

где $I = \pi r^3 h$ – осевой момент инерции; $A = 2\pi r h$ – площадь поперечного сечения, после преобразования имеем:

$$\omega_{1n}^2 = \frac{n^4 \pi^4 EI}{L^4 A \rho_0}. \quad (172)$$

Представленная формула приведена в нормативном документе ПНАЭ Г–7–002–86 для определения частоты свободных изгибных колебаний шарнирно закрепленного трубопровода:

$$\omega_n^2 = \frac{n^2 \pi^2 EI}{L^2 m},$$

2. Для дальнейшего сравнения принимаем, что параметр продольной сжимающей силы $P \neq 0$, а остальные вышеуказанные параметра равны нулю, тогда формула (169) примет следующий вид:

$$\omega_{1n}^2 = \frac{\tilde{\lambda}_n^4 - \tilde{\lambda}_n^4 P}{2\rho^* \cdot r \cdot h}. \quad (173)$$

После преобразования получим вид известной формулы В.В. Болотина, Я.Г. Пановко в [20]

$$\omega_n = \frac{n^2 \pi^2}{l^2} \sqrt{\frac{EI}{m} \left(1 - \frac{Fl^4}{n^2 \pi^2 EI}\right)}.$$

3. Для нахождения частоты свободных изгибных колебаний надземного нефтепровода учитывающей скорость протекающей жидкости (нефти) $V = const$, без учета сжимающих сил принимаем, что $V \neq 0$ в формуле (169), получим

$$\omega_{1n}^2 = \frac{\tilde{\lambda}_n^4 - \tilde{\lambda}_n^2 \rho_v^* V^2 h_v}{2\rho^* r h + \rho_0 r^2} \quad (174)$$

Подставим $\tilde{\lambda}_n = \frac{n\pi r}{L\sqrt{h_v}}$, $\rho_0^* = \rho_0 \frac{r}{Ehh_v^2}$, $\rho_v^* = \rho_v \frac{r}{Ehh_v^2}$ в формулу (174) и преобразуем

$$\omega_{1n}^2 = \frac{n^4 \pi^4 r^4 \left(1 - \frac{\rho_0 r V^2}{Eh} \frac{L^2 h_v h_v}{n^2 \pi^2 r^2}\right)}{L^4 h_v^2 \left(2rh\rho_0 \frac{r}{Ehh_v^2} + r^2 \rho_v \frac{r}{Ehh_v^2}\right)} = \frac{n^4 \pi^4 E \pi r^3 h}{L^4 (A\rho_0 + A_v \rho_v)} \left(1 - \frac{\pi r^2 \rho_v V^2 L^2}{n^2 \pi^2 \pi r^3 h E}\right),$$

после преобразования получим известную формулу В.И. Феодосьева (9):

$$\omega_n^2 = \frac{n^4 \pi^4}{l^4} \frac{EI}{m + m_0} \left(1 - \frac{V^2 m_0 l^2}{n^2 \pi^2 EI}\right).$$

4. Для дальнейшего сравнения положим, что коэффициент постели $k_s \neq 0$, а остальные параметры $\rho_v = 0$, $P = 0$, $V = 0$, с учетом вышеуказанных условий, формула (169) после преобразования представим в следующем виде

$$\omega_{1n}^2 = \frac{\tilde{\lambda}_n^4 + k_s^*}{2\rho^* r h}, \quad (175)$$

где $\tilde{\lambda}_n = \frac{n\pi r}{L\sqrt{h_v}}$, $\rho^* = \rho_0 \frac{r}{Ehh_v^2}$, $\rho_v^* = \rho_v \frac{r}{Ehh_v^2}$, $k_s^* = \frac{kr^2}{\pi Ehh_v^2} z_m$.

Значения коэффициента z_m зависят от сектора вдавливания оболочки в упругое основание.

Сравним численно частоты, полученные по формуле (175) и формуле (5) С.П. Тимошенко для балки на упругом основании [106]:

$$p_i = \frac{i^2 \pi^2 a}{l^2} \sqrt{1 + \frac{k_n l^4}{EI \pi^4}},$$

где p_i – частота свободных колебаний i -й формы;

k_n – коэффициент постели с размерностью, Н/м²;

$k_n = k \cdot b$, b – ширина полосы контакта с поверхностью грунта, м;

ρ – плотность материала трубы;

F – площадь поперечного сечения; $a^2 = \frac{EI}{\rho F}$.

Полученные результаты расчета сведены в таблицу 6.1. Согласно полученным значениям, расхождение составляет не более 1 %.

Основное отличие формул (5) и (175) заключается в том, что в формуле С.П. Тимошенко полоса контакта балки с грунтом сводится к прямолинейной поверхности. В расчетах коэффициент постели k_s умножается на ширину полосы контакта b , т.е. $k_n = k \cdot b$. В случае формулы (175) полоса контакта оболочки с грунтом представляет собой криволинейную поверхность, и в результате решения контактной задачи в k_s^* вводится коэффициент z_m , значение которого зависит от параметров контактной поверхности.

Таблица 6.1 – Определение частот свободных колебаний наземного газопровода при различных значениях коэффициента постели грунта

k_s , МПа/м	Ширина полосы контакта b , см	$L/R=10; h/R=1/50$ (14×1420 мм)		
		z_m	Формула (175)	Формула (5) С.П. Тимошенко
1	34,24	0,380	77,13	77,15
5	20,16	0,283	77,30	77,37
10	16,02	0,181	77,45	77,56
20	12,72	0,144	77,69	77,85
30	11,12	0,126	77,89	78,11

5. В главе 2 были получены выражения, определяющие параметр критической продольной сжимающей силы, приводящей к потере статической устойчивости участка. Для дальнейшего анализа и сопоставления полученных решений принята формула (80). Данная формула является наиболее полной, так как учитывает большее количество параметров:

$$P_{кр} = \frac{\tilde{\lambda}_n^4 + m^4(m^2 - 1)(m^2 - 1 + p^* - q_{si}^*) + k_{si}^* m^4 - \tilde{\lambda}_n^4 m^4 P n^{-2} + \tilde{\lambda}_n^2 m^4 T^* - \tilde{\lambda}_n^4 \rho_v^* \Phi_{mn} V^2 m^4 h_v}{\tilde{\lambda}_n^4 m^4 n^{-2}}.$$

Положим $m=1$, $V=0$, для класса труб $L/R > 15$, получим

$$P_{кр} = \frac{\tilde{\lambda}_n^4 + k_{si}^*}{\tilde{\lambda}_n^4} n^2 \quad (176)$$

где $k^* = \frac{k_{si} r^2}{\pi E h h_v^2} z_m$.

Произведем сравнение выражения (176) с решением (13) Н.А. Алфутова [5]:

$$\bar{P}_n = n^2 + \frac{\bar{k}}{n^2},$$

где $\bar{P}_n = \frac{F}{F_0}$, $\bar{k} = \frac{k_n l^4}{\pi^4 EI}$, k_n – коэффициент постели грунта, Н/м².

Полученные результаты исследования сведены в таблицу, анализ которой показывает, что полученные значения по формуле (176) хорошо согласуются с результатами формулы Н.А. Алфутова (13), расхождение значений составляет не более 3 %.

Таблица 6.2 – Определение параметра критической продольной сжимающей силы наземного газопровода при различных значениях коэффициента постели грунта

k_s , МПа/м	$L/r=10; h/r=1/50$ (14×1420 мм)		
	z_m	Формула (176)	Формула Н.А. Алфутова (13)
1	0,380	1,0042	1,0059
5	0,283	1,0083	1,0178
10	0,181	1,0108	1,0284
20	0,144	1,0138	1,0453
30	0,126	1,0159	1,0594

Произведем сравнение полученной в диссертации формулы для определения частоты свободных колебаний тороидальной оболочки в упругой среде (120)

$$\omega_{mn}^2 = \frac{\mu_0^4 n^4 k_\beta^3 h_v^2 + m^4 (m^2 - 1)(m^2 - 1 + p_0^* - q_{si}^*)}{\rho^* r h (\mu_0^2 n^2 h_v^2 k_\beta + m^4 + m^2) + \mu_{bj}^* m^4 + \rho_v^* \Phi_n r^2 m^4} +$$

$$+ \frac{k_{si}^* m^4 - P \mu_0^4 h_v^2 n^2 k_\beta m^4 + T_{tor}^* \mu_0^2 n^2 k_\beta m^4 + 0,5 \mu_0^2 m^2 (m^2 + 1) - \rho_v \Phi_n \mu_0 h_v V^2 m^4 n^2 k_\beta}{\rho^* r h (\mu_0^2 n^2 h_v^2 k_\beta + m^4 + m^2) + \mu_{bj}^* m^4 + \rho_v^* \Phi_n r^2 m^4}$$

с известным решением для круговых арочных трубопроводов с радиусом оси R и с шарнирным закреплением концов (10) при образовании двух полуволн в продольном направлении, при $n=2$:

$$\omega = \frac{1}{2\pi R^2 \alpha^2} \frac{4\pi^2 - \alpha^2}{\sqrt{1 + \frac{3\alpha^2}{4\pi^2}}} \sqrt{\frac{EI}{\rho_0 A_0 + \rho_v A_v}}$$

Для этого необходимо принять $m=1$, $n=2$ и занулить все слагаемые внешней нагрузки при $k_\beta = 1$, приводя к виду

$$\omega_{1n}^2 = \frac{16\mu_0^4 h_v^2 + \mu_0^2}{\rho^* r h (2) + \rho_v^* \Phi_n r^2}. \quad (177)$$

Произведем тестовые расчеты и сведем полученные значения в таблицу 6.3.

Таблица 6.3 – Определение частот свободных колебаний криволинейного трубопровода в зависимости от параметра тонкостенности h/r

h/r	$R/r=8, \rho_v = 1 \text{ Т/м}^3$	
	Формула (10)	Формула (177)
1/40	27,09	29,25
1/50	27,09	26,71
1/60	27,09	24,82

Расчеты показали их достаточно удовлетворительное согласование. Расхождение результатов не превысило 10 %.

6.2 Сравнение и сопоставление решений, полученных в диссертации, с решениями других авторов по теории оболочек

Выполним сравнение полученных в диссертации решений с известными решениями других авторов, полученными по теории оболочек.

Сравнение будем производить с наиболее полной формулой (77) при $m > 1$:

$$\omega_{mn}^2 = \frac{\tilde{\lambda}_n^4 + m^4(m^2 - 1)(m^2 - 1 + p^* - q_{si}^*) + k_{si}^* m^4 - \tilde{\lambda}_n^4 m^4 P n^{-2} + \tilde{\lambda}_n^4 m^4 T^* - \tilde{\lambda}_n^4 \rho_v^* \Phi_{mn} v^2 m^4 h_v}{\rho^* \cdot r \cdot h (\tilde{\lambda}_n^2 h_v + m^2 + m^4) + \mu_b^* m^4 + \rho_v^* \Phi_{mn} r^2 m^4}.$$

1. В первом частном случае принимаем зануляем все внешние воздействия, кроме внутреннего давления $p_0 \neq 0$. Тогда после преобразования получим выражение следующего вида:

$$\omega_{mn}^2 = \frac{\tilde{\lambda}_n^4 + m^4(m^2 - 1)(m^2 - 1 + p^*)}{\rho^* R \cdot h (\tilde{\lambda}_n^2 h_v + m^2 + m^4)}, \quad (178)$$

преобразуем слагаемые:

$$\frac{1}{\rho^* r h} = \frac{1}{\rho \frac{r}{E h h_v^2} r h} = \frac{1}{\frac{\gamma}{g} \frac{r^2 h}{E h h_v^2}} = \frac{E g h_v^2}{\gamma r^2}; \quad p^* = p \frac{r}{E h h_v^2} = p \frac{r}{E h \frac{h^2}{r^2 12(1-v^2)}} = p 12(1-v^2) \frac{r^3}{E h^3};$$

получим известную формулу В.П. Ильина, О.Б. Халецкой [89] для определения частот свободных колебаний надземного тонкостенного трубопровода большого диаметра (17):

$$\omega_{mn}^2 = \frac{E g h_v^2}{\gamma r^2} \frac{\tilde{\lambda}_n^4 + m^4(m^2 - 1)(m^2 - 1 \pm p^*)}{\tilde{\lambda}_n^2 h_v + m^4 + m^2},$$

где $\tilde{\lambda}_n = \frac{n\pi r}{L\sqrt{h_v}}$ или $\frac{\lambda_n}{\sqrt{h_v}}$, $p^* = \frac{pr}{E h h_v^2}$, $h_v = h/r\sqrt{12(1-v^2)}$.

2. Во втором случае приравняем к нулю тангенциальную составляющую сил инерции $\tilde{\lambda}_n^2 h_v$ в формуле (17), в итоге получим формулу С.Н. Кукуджанова (16), приведенную в [129, 130]:

$$\omega_{mn}^2 = \frac{Egh_v^2}{\gamma R^2} \frac{m^4(m^2-1)(m^2-1+p^*) + \alpha_n^4/h_v^2}{m^2(m^2+1)},$$

где $h_v = h/R\sqrt{12(1-\nu^2)}$, $p^* = p_0 12(1-\nu^2) \left(\frac{R}{Eh}\right)^3$, $\alpha_n = \frac{n\pi R}{l}$.

3. Для случая глубоководного трубопровода, если принять все внешние воздействия равными нулю и сохранить влияние скорости потока и присоединенную массу жидкости, а также давление q_0 , после преобразования получим формулу В.Г. Соколова, А.А. Ефимова в (18) [201]:

$$\omega_{mn}^2 = \frac{\lambda_n^4 + m^4(m^2-1)(m^2-1-Gq_0) - G\rho_v\Phi_{mn}U^2h_v\lambda_n^2m^4}{G\rho_0Rh(\lambda_n^2h_v + m^4 + m^2) + G\rho_v\Phi_{mn}R^2m^4}.$$

4. Если принять все внешние воздействия равными нулю, то получим

$$\omega_{mn}^2 = \frac{\lambda_n^4 + m^4(m^2-1)^2}{\rho^* R \cdot h(m^2 + m^4)} \quad (179)$$

при $L = \infty, \lambda_n = 0$.

В случае когда слагаемое $\tilde{\lambda}_n$ обращается в ноль, формула преобразуется к известному виду формулы С.П. Тимошенко для шарнирно опертого кругового кольца, единичной ширины, позволяющей определить частоты свободных колебаний бесконечно длинной трубы:

$$\omega_{mn}^2 = \frac{m^4(m^2-1)^2}{\rho \frac{r}{h^2} r \cdot h(m^2 + m^4)} = \frac{m^2(m^2-1)^2}{r^4} \cdot \frac{D}{\rho_0 h(m^2 + 1)}$$

$$\frac{Eh}{r^2 12(1-\nu^2)}$$

или

$$\omega_{mn} = \frac{m(m^2-1)}{R^2} \sqrt{\frac{D}{\rho_0 h(m^2 + 1)}},$$

где $D = \frac{Eh^3}{12(1-\nu^2)}$ – цилиндрическая жесткость.

Произведем сравнение и сопоставление полученной в диссертации формулы для тороидальной оболочки с решениями других авторов. Сравнение производим с наиболее полной формулой (120)

$$\omega_{mn}^2 = \frac{\mu_0^4 n^4 k_\beta^3 h_v^2 + m^4 (m^2 - 1)(m^2 - 1 + p_0^* - q_{si}^*)}{\rho^* r h (\mu_0^2 n^2 h_v^2 k_\beta + m^4 + m^2) + \mu_{bj}^* m^4 + \rho_v^* \Phi_n r^2 m^4} +$$

$$+ \frac{k_{si}^* m^4 - P \mu_0^4 h_v^2 n^2 k_\beta m^4 + T_{tor}^* \mu_0^2 n^2 k_\beta m^4 + 0,5 \mu_0^2 m^2 (m^2 + 1) - \rho_v \Phi_n \mu_0 h_v V^2 m^4 n^2 k_\beta}{\rho^* r h (\mu_0^2 n^2 h_v^2 k_\beta + m^4 + m^2) + \mu_{bj}^* m^4 + \rho_v^* \Phi_n r^2 m^4}.$$

1. Если занулить все внешние воздействия, оказываемые на тороидальную оболочку и сохранить $\rho_v \neq 0$, $V \neq 0$, $p_0 \neq 0$, то формула приобретает вид выражения, полученного В.Г. Соколовым и А.В. Березневым [199, 200] для надземного трубопровода с потоком жидкости, без побочных коэффициентов:

$$\omega_{mn}^2 = \frac{\mu_0^4 n^4 h_v^2 + m^4 (m^2 - 1)(m^2 - 1 + p_0^*) + 0,5 \mu_0^2 m^2 (m^2 + 1) - \rho_v \Phi_n \mu_0 h_v V^2 m^4 n^2}{\rho^* r h (\mu_0^2 n^2 h_v^2 + m^4 + m^2) + \rho_v^* \Phi_n r^2 m^4}, \quad (180)$$

2. Формула (180) получена для наиболее распространенного шарнирного типа закрепления. В.Г. Соколовым и Е.П. Матвеевым при помощи метода Бубнова–Галеркина было получено решение, позволяющее учесть и другие виды закрепления «шарнир–защемление», «защемление–защемление» в виде [138]:

$$\omega_{mn}^2 = \frac{\mu_0^4 h_v^2 I_{n,i}^{IV} + m^4 (m^2 - 1)(m^2 - 1 + p_0^*) I_{n,m} + 0,5 \mu_0^2 m^2 (m^2 + 1) I_{n,m} - \rho_v \Phi_n \mu_0 h_v V^2 m^4 I_{n,i}''}{(\rho^* r h + \rho_v^* \Phi_n r^2)(m^4 + m^2) I_{n,i} - \frac{r}{R^2} (\rho^* r h + \rho_v^* \Phi_n r^2) I_{n,i}}, \quad (181)$$

где $I_{n,i}^{IV} = \int_0^\alpha f_n^{IV}(\beta) f_i(\beta) d\beta$, $I_{n,i}'' = \int_0^\alpha f_n''(\beta) f_i(\beta) d\beta$, $I_{n,i} = \int_0^\alpha f_n(\beta) f_i(\beta) d\beta$.

6.3 Сравнение и сопоставление решений, полученных в диссертации, с решениями других авторов по результатам численных расчетов с применением МКЭ

В работе А.К. Кохли и В.С. Накра [269] численный анализ свободных изгибных колебаний линейного участка трубопровода с движущейся жидкостью выполнен методом конечных элементов. Наименьшие значения собственных частот ω определены для стальной трубы длиной 500 мм, с наружным диаметром 9,54 мм и толщиной стенки 1 мм. Для материала трубы принят модуль упругости $E = 2,08 \times 10^5$ МПа, а в качестве рабочей среды использовалась вода с постоянной скоростью течения V .

Расчетные соотношения для критической энергии и энергии деформации элементов, адаптированные из исследования Г.В. Хаузнера [263], основаны на

стержневой модели. Результаты численного моделирования, отражающие зависимость частоты колебаний от скорости жидкости, визуализированы в [269] на графике рисунка 314.

Для верификации аналитических решений, полученных в настоящем исследовании по формуле (77), выполнено сравнение с данными работы [269]. Расчеты проводились для идентичных геометрических и физических параметров трубы, а также при тех же значениях скорости потока жидкости, что и в исходном эксперименте. При значениях волновых чисел $m=n=1$ и отсутствии продольных сжимающих сил ($P=0$) формула (77) для частоты трубопровода с шарнирно закрепленными концами принимает следующий вид

$$\omega_{11} = \frac{\tilde{\lambda}_1^4 - \rho_0^* \tilde{\lambda}_1^2 h_v \Phi_{11} V^2}{rh\rho^*(\tilde{\lambda}_1^2 h_v + 2) + \rho_0^* \Phi_{11} r^2}. \quad (182)$$

При скорости жидкости $V=0$ по рисунку имеем $\omega=88,0$ Гц. По расчету по формуле (182) частота $\omega_{11}=93,1$ Гц. Расхождение составило 6 %.

«При скорости жидкости $V=10 \times 10^3$ см/с, согласно рисунку 6.1, частота составляет $\omega=78$ Гц. В этом случае расчет по формуле (182) дает значение $\omega_{11} = 80,8$ Гц, что приводит к расхождению в 3,5 %» [207]. Критическая скорость $V_{кр}$, при которой трубопровод теряет устойчивость (т.е. $\omega=0$), согласно рисунку 6.1, равна $V_{кр}=21,5 \times 10^3$ см/с. Расчет по формуле (182) показывает значение $V_{кр}=20,0 \times 10^3$ см/с, что соответствует расхождению в 7 %.

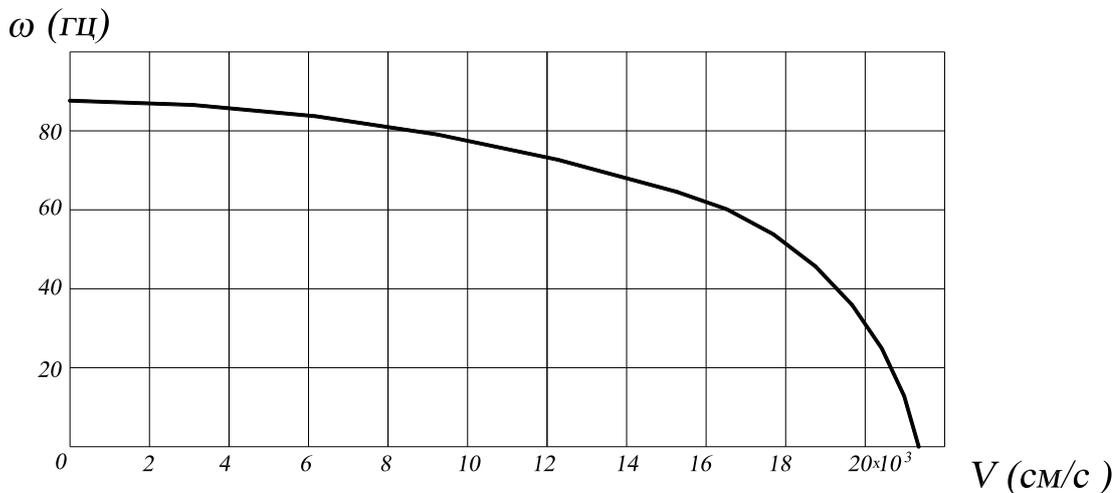


Рисунок 6.1 – График зависимости частоты ω от скорости V протекающей в трубопроводе жидкости (по рис. 2 статьи [269])

Сопоставление результатов расчета собственных изгибных колебаний шарнирно закрепленного линейного участка трубопровода с движущейся жидкостью – аналитического (по формуле (179) диссертации) и численного (метод конечных элементов из работы [264]) выявило их устойчивую корреляцию. Среднее отклонение значений не превышает 7 %, что свидетельствует о достоверности разработанной аналитической модели.

Расчет цилиндрической оболочки в ПК ЛИРА

Для исследования влияния упругой среды на динамические характеристики А.В. Дмитриевым и В.Г. Соколовым [76] был произведен расчет частот цилиндрической оболочки, находящейся в упругой среде. Расчет был выполнен ПК ЛИРА и сопоставлен с формулой (77) при занулении слагаемого, учитывающего влияние скорости потока протекающей жидкости V , внутреннего рабочего давления p и температуры T :

$$\omega_{mn} = \left(\sqrt{\frac{\lambda_n^4 + m^4(m^2 - 1)(m^2 - 1 + p^* - 2q_{ep}^*) + C_{1z}^* m^4 - \lambda_n^4 m^4 p / n^2}{\rho^* R h (\lambda^2 h_v + m^2 + m^4) + \mu_b j m^4}} \right) / 2\pi. \quad (183)$$

А.В. Дмитриев принимал следующие вводные данные: «длина рассматриваемого элемента принята поочередно 8, 10 и 11 м, радиус $R=710$ мм, толщина стенки 0,018 м. Для моделирования закрепления концов оболочки по шарнирно-неподвижной схеме вводилось ограничение перемещения по оси Z и Y . Моделирование оболочки осуществлялось пластинками размером $0,1 \times 0,1$ м, жесткостные характеристики приведены на рисунке 1.

Сравнение результатов проводилось для подземного безнапорного трубопровода с глубиной залегания 1 м от поверхности земли в насыпном неуплотнённом грунте со следующими физико-механическими свойствами:

- плотность грунта $\gamma=16670$ Н/м³;
- модуль упругости грунта $E=3000000$ Н/м²;
- коэффициент Пуассона $=0,27$;
- упругий отпор грунта учитывался заданием коэффициента постели по формуле $C_{1z} = E_0/R(1 + \nu_0) = 3327048$ (Н/м³);

– внешнее давление грунта на стенку цилиндрической оболочки принято из условия глубины заложения трубопровода 1 м, которое равномерно распределено по окружности оболочки со значениям $q_{гр}=16670 \text{ Н/м}^2$ (динамическое нагружение). Такой вид задания нагрузки позволил учесть не только внешнее давление, но и присоединённую массу грунта» [76]. Формы колебаний приведены на рисунке 5 статьи [76].

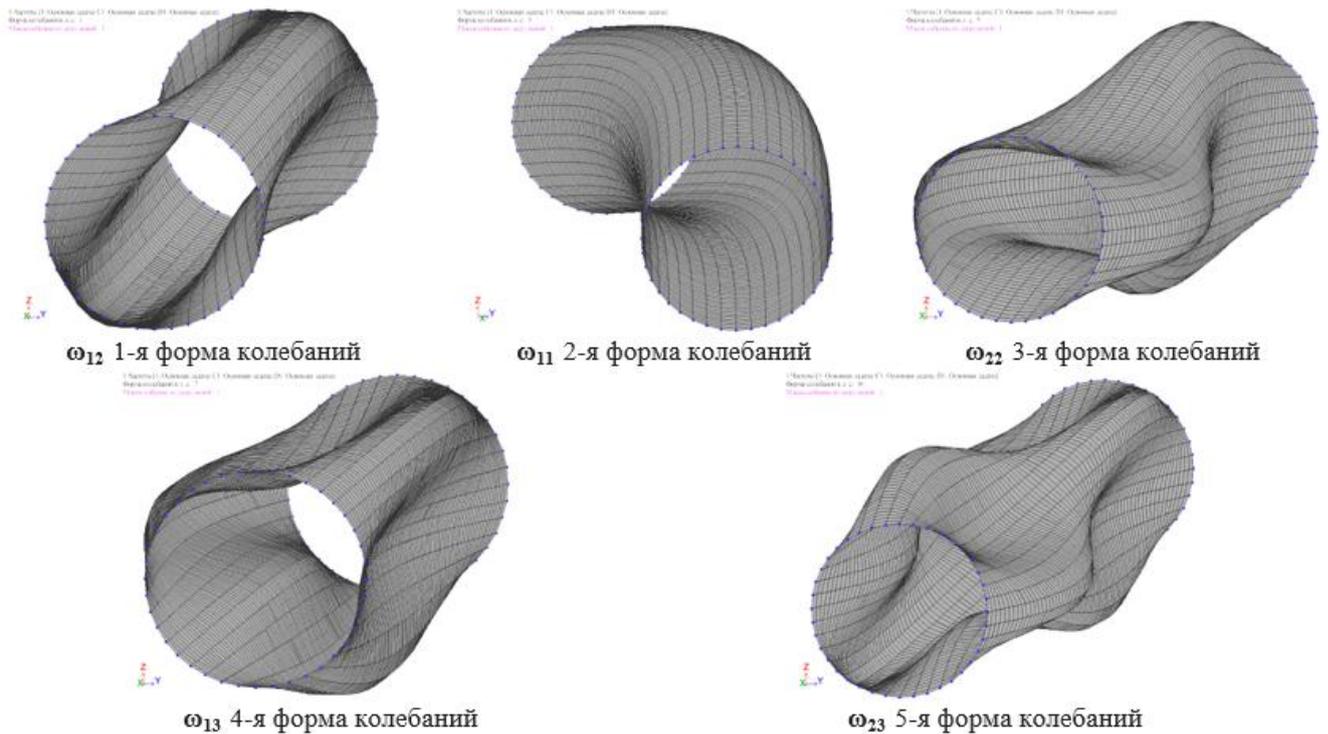


Рисунок 5. Формы колебаний, полученные при расчёте в ПК Lira Sapr

Далее в таблице 1 приведены собственные частоты без учета влияния упругого основания, а в таблице 2 – с его учетом [76].

Таблица №1. Собственная частота цилиндрической оболочки без учёта окружающей среды, определяемые с использованием аналитических выражений и в ПК Lira

Аналит. формула (Гц)	ПК <u>Lira Sapr</u> (Гц)	Аналит. формула (Гц)	ПК <u>Lira Sapr</u> (Гц)	Аналит. формула (Гц)	ПК <u>Lira Sapr</u> (Гц)
результаты расчёта частот без учёта грунтовых условий $q_{гр}=0 \text{ Н/м}^2$, $C_{12}=0 \text{ Н/м}^3$					
L=8 м (R/L=1/11)		L=10 м (R/L=1/14)		L=11 м (R/L=1/15)	
$\omega_{12}=30,88$	$\omega_{12}=30,49$	$\omega_{12}=26,84$	$\omega_{12}=26,61$	$\omega_{12}=25,87$	$\omega_{12}=25,65$
расхождение результатов 1,28%		расхождение результатов 0,86%		расхождение результатов 0,86%	
$\omega_{11}=61,90$	$\omega_{11}=56,18$	$\omega_{11}=39,89$	$\omega_{11}=37,13$	$\omega_{11}=33,03$	$\omega_{11}=31,00$
расхождение результатов 10,18%		расхождение результатов 7,43%		расхождение результатов 6,55%	
$\omega_{22}=81,8$	$\omega_{22}=72,77$	$\omega_{22}=55,48$	$\omega_{22}=53,39$	$\omega_{22}=47,73$	$\omega_{22}=45,55$
расхождение результатов 11,04%		расхождение результатов 3,77%		расхождение результатов 4,79%	
$\omega_{13}=67,53$	$\omega_{13}=67,11$	$\omega_{13}=67,15$	$\omega_{13}=66,56$	$\omega_{13}=67,07$	$\omega_{13}=66,42$
расхождение результатов 0,67%		расхождение результатов 0,87%		расхождение результатов 0,97%	
$\omega_{23}=75,89$	$\omega_{23}=76,78$	$\omega_{23}=70,35$	$\omega_{23}=71,17$	$\omega_{23}=69,07$	$\omega_{23}=69,77$
расхождение результатов 1,17%		расхождение результатов 1,16%		расхождение результатов 1,01%	

Таблица №2. Собственная частота цилиндрической оболочки с учётом давления грунта и упругим отпором грунта, определяемые с использованием аналитических выражений и в ПК Lira

Аналит. формула (Гц)	ПК Lira Sapr (Гц)	Аналит. формула (Гц)	ПК Lira Sapr (Гц)	Аналит. формула (Гц)	ПК Lira Sapr (Гц)
результаты расчёта частот с учётом грунтовых условий $q_{гр}=16670 \text{ Н/м}^2$, $C_{1г}=3327048 \text{ Н/м}^3$					
L=8 м (R/L=1/11)		L=10 м (R/L=1/14)		L=11 м (R/L=1/15)	
$\omega_{12}=11,06$	$\omega_{12}=10,50$	$\omega_{12}=10,07$	$\omega_{12}=9,63$	$\omega_{12}=9,78$	$\omega_{12}=9,42$
расхождение результатов 5,33%		расхождение результатов 4,56%		расхождение результатов 3,82%	
$\omega_{11}=17,79$	$\omega_{11}=16,52$	$\omega_{11}=11,82$	$\omega_{11}=11,48$	$\omega_{11}=10,08$	$\omega_{11}=9,93$
расхождение результатов 7,69%		расхождение результатов 2,96%		расхождение результатов 1,51%	
$\omega_{22}=25,23$	$\omega_{22}=19,98$	$\omega_{22}=17,61$	$\omega_{22}=15,81$	$\omega_{22}=15,45$	$\omega_{22}=14,4$
расхождение результатов 26,28%		расхождение результатов 11,39%		расхождение результатов 7,29%	
$\omega_{13}=23,67$	$\omega_{13}=22,35$	$\omega_{13}=23,52$	$\omega_{13}=19,83$	$\omega_{13}=23,38$	$\omega_{13}=19,79$
расхождение результатов 5,91%		расхождение результатов 21,87%		расхождение результатов 8,14%	
$\omega_{23}=26,59$	$\omega_{23}=22,60$	$\omega_{23}=24,66$	$\omega_{23}=21,06$	$\omega_{23}=24,24$	$\omega_{23}=23,57$
расхождение результатов 17,65%		расхождение результатов 12,75%		расхождение результатов 2,84%	

В данной работе проведено сравнение результатов, полученных с использованием аналитических методов и метода конечных элементов, при этом не учитывалось внутреннее давление в оболочке и воздействие продольной силы. Попытки внедрения продольной силы в программный комплекс Lira не оказали значимого влияния на конечные результаты расчетов. Учет внутреннего давления в процессе модального анализа приводит к заметному снижению частот собственных колебаний, поскольку это давление рассматривается как нагрузка на стенку трубопровода и преобразуется в увесистую присоединенную массу. В этом контексте внутреннее давление выполняет роль демпфера, а не силы, препятствующей деформации поперечного сечения, как это было учтено через коэффициент постели. Применение внутреннего давления в качестве статической нагрузки без его трансформации в инерционные массы влияет исключительно на напряженно-деформированное состояние и не оказывает никакого влияния на частоту собственных колебаний.

Расчет цилиндрической оболочки в ANSYS 2019R3

Для сравнения и сопоставления результатов, полученных в диссертации и в работе [76], выполним аналогичные расчеты определения частот свободных колебаний ω_{mn} в лицензионной программе ANSYS 2019R3, подставим вышеуказанные параметры оболочки в расчет и отразим наименьшие частоты при трех формах колебаний. Результаты расчета представим в таблице 6.4 и проиллюстрируем на рисунках 6.2–6.5.

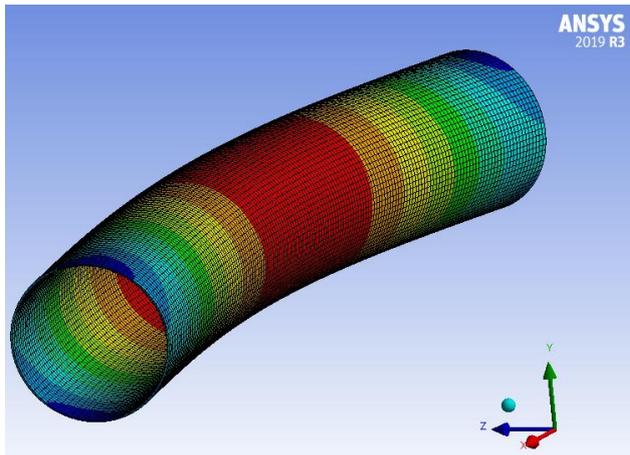
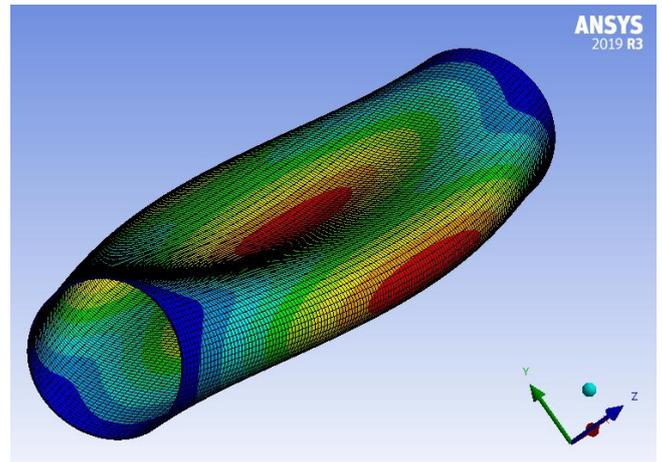
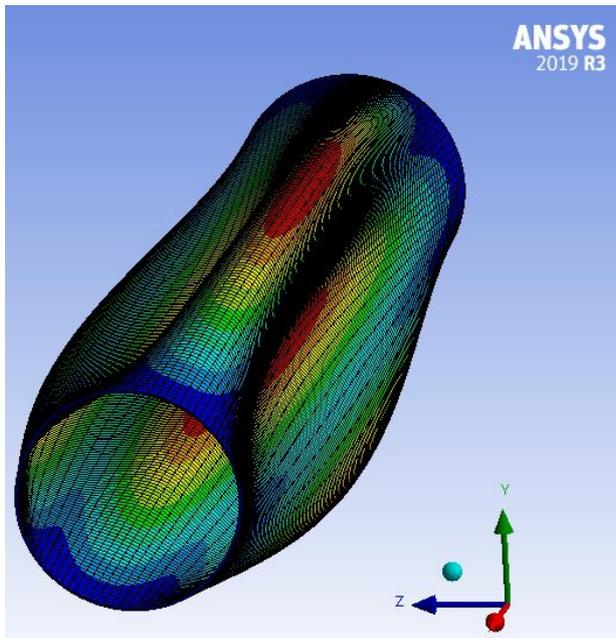
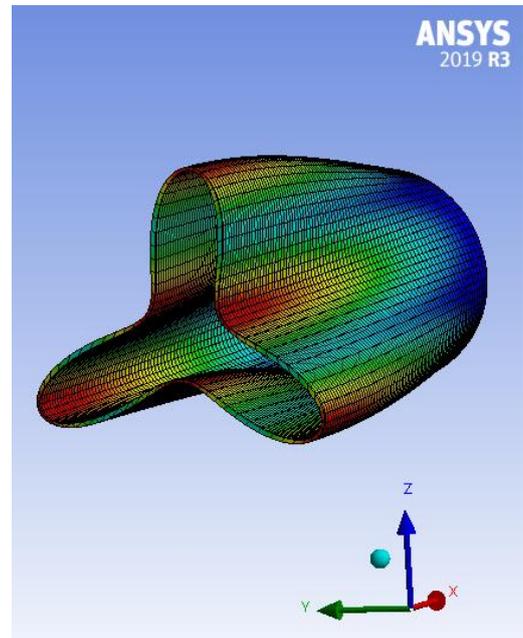
Рисунок 6.2 – ω_{11} – 1-я форма колебанийРисунок 6.3 – ω_{21} – 2-я форма колебанийРисунок 6.4 – ω_{31} – 3-я форма колебанийРисунок 6.5 – ω_{31} – 3-я форма колебаний (поперечное сечение)

Таблица 6.4 – Частоты свободных колебаний цилиндрической оболочки конечной длины (без учета нагрузок)

Аналит. формула (Гц)	Anslys 2019R3	Аналит. Формула (Гц)	Anslys 2019R3	Аналит. Формула (Гц)	Anslys 2019R3
$L=8\text{м}$		$L=10\text{м}$		$L=11\text{м}$	
$\omega_{11} = 61,02$	$\omega_{11} = 55,88$	$\omega_{11} = 36,91$	$\omega_{11} = 39,32$	$\omega_{11} = 32,56$	$\omega_{11} = 30,82$
расхождение результатов 9,78%		расхождение результатов 6,51%		расхождение результатов 5,64%	
$\omega_{21} = 30,42$	$\omega_{21} = 30,83$	$\omega_{21} = 27,07$	$\omega_{21} = 26,44$	$\omega_{21} = 25,48$	$\omega_{21} = 26,14$
расхождение результатов 1,34%		расхождение результатов 2,38%		расхождение результатов 2,59%	
$\omega_{31} = 66,50$	$\omega_{31} = 68,66$	$\omega_{31} = 68,19$	$\omega_{31} = 66,13$	$\omega_{31} = 66,04$	$\omega_{31} = 67,98$
расхождение результатов 3,24%		расхождение результатов 3,11%		расхождение результатов 2,93%	

Определим частоты свободных колебаний цилиндрической оболочки с учетом влияния упругого основания для подземного размещения, как для

наиболее распространенного в производственной практике. В таком случае влияние упругого основания будет наиболее выражено. Полученные значения частот сведем в таблицу 6.5.

Таблица 6.5 – Частоты свободных колебаний цилиндрической оболочки при подземном размещении, с учетом влияния упругого основания при $L=8$ м

Аналит. формула (Гц)	Ansys 2019R3	Аналит. формула (Гц)	Ansys 2019R3	Аналит. формула (Гц)	Ansys 2019R3
Коэффициент упругой среды					
$k_s = 3,32$ МН/м ³		$k_s = 10$ МН/м ³		$k_s = 20$ МН/м ³	
$\omega_{11} = 63,32$	$\omega_{11} = 58,41$	$\omega_{11} = 67,72$	$\omega_{11} = 63,18$	$\omega_{11} = 73,82$	$\omega_{11} = 69,71$
расхождение результатов 8,40 %		расхождение результатов 7,18 %		расхождение результатов 5,89 %	
$\omega_{21} = 37,41$	$\omega_{21} = 37,82$	$\omega_{21} = 48,52$	$\omega_{21} = 48,93$	$\omega_{21} = 61,51$	$\omega_{21} = 61,95$
расхождение результатов 1,09 %		расхождение результатов 0,84 %		расхождение результатов 0,71 %	
$\omega_{31} = 70,41$	$\omega_{31} = 72,49$	$\omega_{31} = 77,68$	$\omega_{31} = 79,65$	$\omega_{31} = 87,44$	$\omega_{31} = 89,31$
расхождение результатов 2,94 %		расхождение результатов 2,53 %		расхождение результатов 2,13 %	

Как видно из расчетов результаты, полученные в ANSYS и в ПК ЛИРА, хорошо согласуются. Следует отметить, что рассматривалась различная плотность сетки и размеры элементов в диапазоне от 10 до 800 мм. Ввиду плавности геометрических форм (без отверстий, разрывов и других включений) достаточно разбить крупную сетку по причине отсутствия различий в определяемых частотах. Более плотная сетка приводит лишь к увеличению машинного времени расчета, но не имеет преимуществ в точности. Расхождения составляют менее 1 %.

Расчет тороидальной оболочки в ANSYS 2019R3

Результаты, полученные для цилиндрической оболочки в ANSYS 2019R3, показали хорошую согласованность с частным случаем полученного в диссертации решения на основании формулы (77). Следует отметить, что целью данного раздела не является разработка отдельных скриптов и модулей для выполнения расчетов, используется только стандартный функционал программы.

В практике трубопроводного строительства распространены отводы холодного гнутья и горячештампованные. Для тестовых расчетов рассмотрим тороидальную оболочку с углом $\beta=90^\circ$, для этого принимаем коэффициент $k_\beta=0,5$.

Преобразуем формулу (120), занулив слагаемые, содержащие параметры μ_{bj}^* , ρ_v , P , T . После преобразования получим выражение вида:

$$\omega_{mn}^2 = \frac{\mu_0^4 n^4 k_\beta^3 h_v^2 + m^4 (m^2 - 1)(m^2 - 1 + p_0^* - q_{si}^*)}{\rho^* r h (\mu_0^2 n^2 h_v^2 k_\beta + m^4 + m^2)} + \frac{k_{si}^* m^4 + 0,5 \mu_0^2 m^2 (m^2 + 1)}{\rho^* r h (\mu_0^2 n^2 h_v^2 k_\beta + m^4 + m^2)}. \quad (184)$$

Рассмотрим колебания пустой тороидальной оболочки с учетом упругого отпора окружающей оболочку среды. Полученные три наименьшие частоты сведем в таблицу 6.6 и проиллюстрируем на рисунках 6.6–6.9.

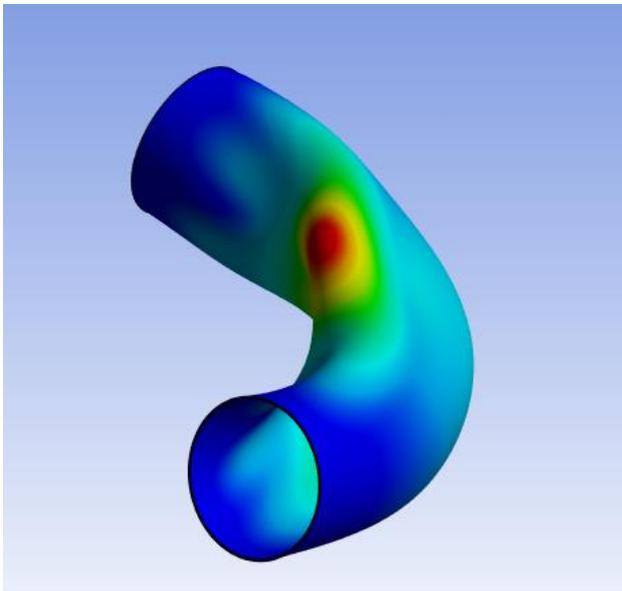


Рисунок 6.6 – ω_{21} – 2-я форма колебаний

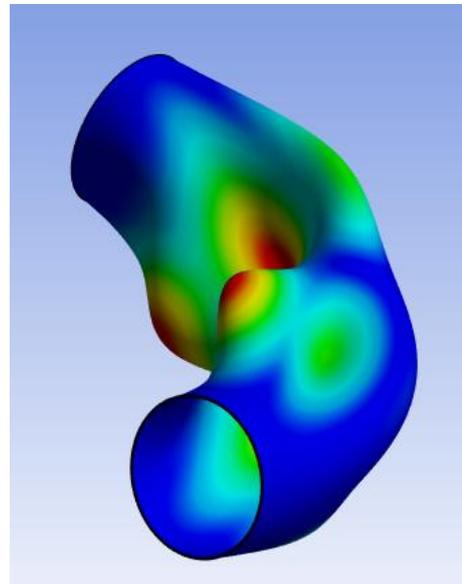


Рисунок 6.7 – ω_{23} – 3-я форма колебаний

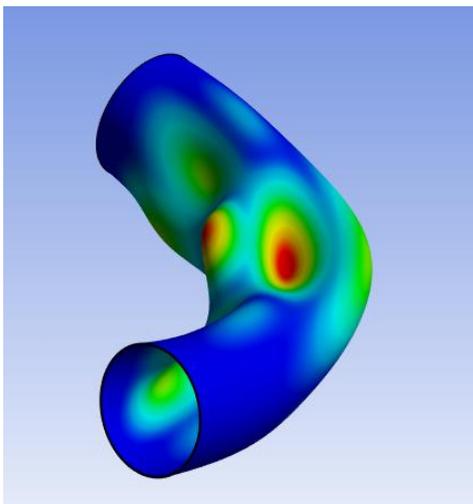


Рисунок 6.8 – ω_{33} – 3-я форма колебаний

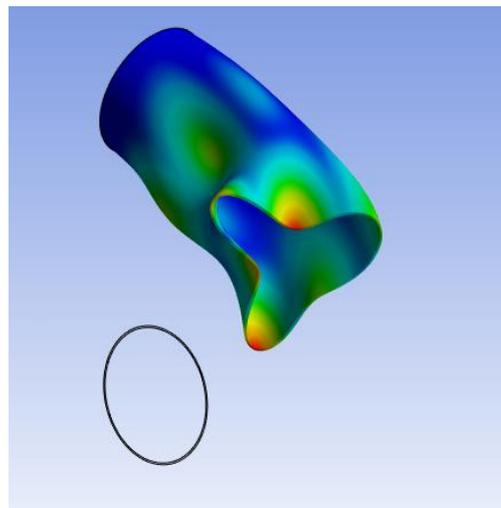


Рисунок 6.9 – ω_{33} – 3-я форма колебаний (сечение)

Таблица 6.6 – Частоты свободных колебаний тороидальной оболочки при подземном размещении с учетом влияния упругого основания при $R=10$ м

Аналит. формула (Гц)	Ansys 2019R3	Аналит. формула (Гц)	Ansys 2019R3	Аналит. формула (Гц)	Ansys 2019R3
Коэффициент упругой среды					
$k_s = 3,32$ МН/м ³		$k_s = 10$ МН/м ³		$k_s = 20$ МН/м ³	
$\omega_{21} = 87,22$	$\omega_{31} = 85,18$	$\omega_{21} = 92,54$	$\omega_{31} = 89,43$	$\omega_{21} = 99,99$	$\omega_{31} = 95,41$
расхождение результатов 2,39%		расхождение результатов 3,47%		расхождение результатов 5%	
$\omega_{23} = 104,84$	$\omega_{23} = 102,72$	$\omega_{23} = 112,06$	$\omega_{23} = 107,8$	$\omega_{23} = 119,04$	$\omega_{23} = 114,43$
расхождение результатов 2,06%		расхождение результатов 3,95%		расхождение результатов 4%	
$\omega_{33} = 107,06$	$\omega_{33} = 126,58$	$\omega_{33} = 115,46$	$\omega_{33} = 130,6$	$\omega_{33} = 124,41$	$\omega_{33} = 136,52$
расхождение результатов 18,23%		расхождение результатов 13,11%		расхождение результатов 9,73%	

На основании представленных результатов можно сделать следующие выводы:

1) полученные значения частот свободных колебаний цилиндрических и тороидальных оболочек хорошо согласуются с расчетами, выполненными в ПК ЛИРА и ANSYS, при частных случаях. Расхождения по наименьшим частотам не превышают 5 %, что подтверждает правильность выбранных в диссертации моделей влияния упругого основания на динамические характеристики;

2) ввиду плавности форм рассматриваемой геометрии оболочек достаточно разбивать сетку размерами элемента 500–800 мм, более плотная сетка не дает существенных изменений в определяемых величинах.

6.4 Сравнение и сопоставление решений, полученных в диссертации, с экспериментальными данными

Среди экспериментальных работ, посвященных анализу собственных частот колебаний оболочечных конструкций, наиболее детально представлены исследования В.Е. Бреславского [28]. В них описаны испытания стальных цилиндрических оболочек замкнутого типа с шарнирным опиранием торцов, подверженных воздействию регулируемого внутреннего давления. В ходе эксперимента давление p_0 варьировалось в диапазоне 0,2–1,2 МПа. Объектами исследования служили образцы длиной $L=70$ см, с радиусом срединной поверхности $r=15$ см и толщиной стенки $h=1$ мм.

Для инициирования изгибных колебаний при заданном p_0 использовался звуковой генератор. Резонанс по форме $m=2$ фиксировался путем отключения внешнего воздействия после достижения устойчивых колебаний, после чего их характеристики регистрировались с помощью шлейфового осциллографа. В продольном направлении оболочки формировалась одиночная полуволна ($n=1$), соответствующая первой форме изгибных колебаний.

Экспериментально полученные значения собственных частот ω_s сравнивались с результатами, полученными по формуле

$$\omega_{m1}^2 = \frac{\lambda_1^4 + m^4(m^2 - 1)(m^2 - 1 + p^*)}{Rhp^*(\lambda_1^2 h_v + m^2 + m^4)}. \quad (185)$$

Экспериментальные значения частот ω_s и теоретические ω_{m1} , рассчитанные по формуле (185), сведены в таблицу 6.7. Анализ данных показывает, что расхождение между экспериментальными и расчетными результатами не превышает 14 %. Таким образом, согласие между аналитической моделью (185) и экспериментальными данными [30] следует считать приемлемым для инженерных расчетов.

Таблица 6.7 – Сравнение экспериментального определения частот свободных колебаний ω_{21} цилиндрической оболочки с внутренним давлением по [28] с результатами, полученными по формуле (185)

Внутреннее давление p_0 , МПа	Частота свободных колебаний ω , Гц		Расхождение, %
	Данные эксперимента по [29] ω_s	Теоретические значения по (185) ω_{21}	
0	490	552	11,0
0,2	–	554	–
0,6	500	579	13,0
0,8	502	581	14,0
1,0	510	585	13,0

В работе Р.Х. Лонга [277] исследуются свободные поперечные колебания однопролетной трубы, содержащей протекающую жидкость. Автор использует приближенное решение дифференциального уравнения движения с бесконечным степенным рядом. Отмечена важность тщательной оценки определителя высокого

порядка для предотвращения ошибочных результатов. Решение показывает, что для свободно опертых и заземленных концов наблюдается небольшое снижение частоты и отсутствие затухания колебаний с увеличением скорости потока. Однако для свободно заземленных концов наблюдается затухание колебаний и небольшое снижение частоты из-за течения жидкости. Экспериментальные результаты в целом согласуются с этими аналитическими решениями, хотя снижение частоты находится в пределах экспериментальной погрешности.

Эксперимент Р.Х. Лонга проводился с дюралевыми трубками с различным типом закрепления, в том числе шарнирно опертыми на концах. Внутри протекает жидкость со скоростью V . В процессе проведения эксперимента при изменении скорости воды от 1,75 м/с до 17,5 м/с замерялись частоты свободных изгибных колебаний экспериментальных образцов. Результаты эксперимента представлены в виде графика зависимости частот ω в герцах от скорости потока.

Исходные данные дюралюминиевых образцов:

$r = 0,238$ дм (0,605 см) – радиус средней линии сечения трубы;

$h = 0,0235$ дм (0,0597 см) – толщина стенки;

$L = 24$ дм (60,96 см) – длина трубы между опорами;

$I = 10^3$ дм⁴ (0,0417 см⁴) – осевой момент инерции сечения трубы;

$E = 10,5 \cdot 10^6$ фунт/дм² (0,738 · 10⁶ кгс/см²) – модуль упругости;

$\nu = 0,3$ – коэффициент Пуассона;

$m = 0,242 \cdot 10^4$ фунт-с²/дм² – масса воды и трубы на единицу длины трубы;

$m_0 = 0,151 \cdot 10^4$ фунт-с²/дм² – масса воды.

Сравним результаты, полученные Р.Х. Лонгом, с результатами, полученными в диссертации. Для этого преобразуем формулу (77) к виду

$$\omega_{mn}^2 = \frac{\bar{\lambda}_n^4 - \bar{\lambda}_n^4 \rho_v^* \Phi_{mn} V^2 m^4 h_v}{2\rho^* \cdot r \cdot h}. \quad (186)$$

Полученные значения сведем в таблицу 6.8.

Таблица 6.8 – Сравнение экспериментальных данных по [277] с аналитическим выражением (187)

Скорость V , м/с	Частота свободных колебаний, Гц		Расхождение, %
	По работе Р.Х. Лонга [277]	По формуле (186)	
1,75	56,70	54,63	3,78
3,50	56,50	54,32	4,00
10,50	56,0	54,12	3,47
17,50	55,0	53,52	2,76

Согласно представленным расчетам, следует расхождение не более 5 %, что показывает достоверность частного случая аналитического выражения.

6.5 Выводы по главе 6

Исследование динамического поведения труб, представляет собой важную прикладную и теоретическую задачу, имеющую широкое значение для энергетики, химической промышленности, аэрокосмической техники и других отраслей, где эксплуатируются протяжённые гибкие конструкции с внутренним потоком. Несмотря на обширную теоретическую базу исследований, экспериментальные данные остаются относительно редкими и ценными, поскольку воспроизведение условий, необходимых для возникновения неустойчивости, требует сложного оборудования и точного контроля параметров системы.

Сравнение и сопоставление результатов, полученных в диссертации, с результатами других авторов показало хорошую сходимость, как с позиции аналитического подхода решения задач, так и с позиции метода конечных элементов и экспериментальных данных, расхождение значений составляет не более 15 %. Однако ввиду отсутствия достаточного количества экспериментальных исследований по данной тематике в настоящее время не представляется возможным произвести сравнение полученных решений, учитывающих наиболее полную модель нагрузок, рассмотренных в диссертации.

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

1. Разработана группа аналитических методов для исследования колебаний и динамической устойчивости тонкостенных трубопроводов большого диаметра, представленных в виде цилиндрических и тороидальных (однослойных и двухслойных) оболочек при наземном, частично заглублённом и подземном размещении. Методы основаны на геометрически нелинейной полубезмоментной теории оболочек среднего изгиба и позволяют учитывать совместное влияние нагрузок, действующих в процессе эксплуатации: внутреннее и внешнее давление, упругий отпор и демпфирующие свойства обводненной внешней грунтовой среды, присоединённые массы, скорость потока транспортируемой жидкости, продольная сила и температурное воздействие.

2. Для описания поведения трубопровода при частичном заглублении в упругую грунтовую среду впервые применены двойные тригонометрические ряды Фурье, позволяющие с учетом импульсной функции описать внешнее давление среды, действующее на сектор вдавливания. Установлено, что частоты колебаний существенно зависят от типа прокладки: при подземном размещении их значения увеличиваются на 30–50 % по сравнению с наземным и частично заглубленным, особенно для полиэтиленовых оболочек.

3. Получены расчетные формулы для определения критических параметров, приводящих к потере статической устойчивости, включая критическое значение параметра продольной сжимающей силы и критическое внешнее давление. Показано, что потеря устойчивости происходит за счет деформации поперечного сечения как тонкостенного элемента, а не за счёт местного смятия стенок, как в тонкостенной оболочке.

4. Анализ значений частот и форм свободных колебаний тонкостенных трубопроводов большого диаметра показал, что:

- трубопроводы с параметрами тонкостенности в диапазоне значений от $1/20$ до $1/70$ обладают минимальными частотами, реализующимися при $n=1,2$ и $m=2,3$, что соответствует оболочечной форме колебаний;

- увеличение давления внутри трубопровода приводит к увеличению частотных характеристик, что объясняется повышением жёсткости за счёт внутреннего давления, которое препятствует овализации поперечного сечения;
- с увеличением параметра длины L/r (для прямолинейного участка) или R/r (для криволинейного участка) частоты снижаются. В зависимости от форм колебаний снижение может составлять от 10 до 70 %.
- с увеличением коэффициента упругого отпора грунта k_s частота свободных колебаний увеличивается, что также свидетельствует об увеличении жёсткости трубопровода за счёт отпора грунта, который препятствует деформации поперечного сечения трубопровода. Увеличение частоты свободных колебаний для газо- и нефтепровода составляет до 30 %;
- при увеличении параметра продольной сжимающей силы частоты для прямолинейных участков (цилиндрических оболочек) имеют сравнительно большую тенденцию снижения частот, чем на криволинейных участках;
- для тонкостенных газопроводов частотные характеристики по сравнению с нефтепроводами при одинаковых параметрах выше на 30–40 %, это объясняется вовлечением в колебательный процесс присоединённой массы жидкости нефтепровода;
- присоединённая масса грунта μ_{bj} способствует снижению частот свободных колебаний в 1,5–2 раза, обладая при этом демпфирующими свойствами, однако как показали расчёты, учитывать её следует не всегда. Учёт присоединённой массы грунтовой среды следует производить для слабых обводнённых грунтов, торфяников или ила, с коэффициентом упругого отпора $k_s < 4,5$ МПа/м, а присоединённая масса для грунтов с коэффициентом упругого отпора $k_s > 4,5$ МПа/м не учитывается, то есть $\mu_{bj} = 0$.

5. Сформированы критерии выбора расчётной схемы, представленные в виде безразмерных параметров L^* (для цилиндрических) и R^* (для тороидальных оболочек). Эти критерии позволяют определять границу применимости решений, полученных в диссертации на основе теории оболочек, для наиболее точного

определения динамических характеристик трубопроводов в зависимости от заданных нагрузок и геометрических параметров.

6. Установлено, что тороидальные оболочки обладают уникальными динамическими свойствами: их криволинейная геометрия обеспечивает стабилизирующий эффект, делающий их практически нечувствительными к продольным сжимающим силам и температурным воздействиям. Это подтверждает их эффективность в качестве компенсаторов продольных перемещений в магистральных трубопроводах.

7. Для двухслойных тороидальных оболочек показано, что увеличение толщины защитного слоя приводит не только к увеличению жесткости рассматриваемого участка, но и к росту веса конструкции, что способствует снижению частот свободных колебаний. При одинаковых условиях сталебетонные покрытия обеспечивают более значительное снижение частот (до 10 %) по сравнению со стеклопластиковыми, что обусловлено большей плотностью материала.

8. Разработан аналитический метод оценки динамической устойчивости тонкостенных трубопроводов большого диаметра с позиции замкнутых цилиндрических и тороидальных оболочек, взаимодействующих с упругой средой. Метод базируется на основе уравнений Матье и построения модифицированных диаграмм Айнса–Стретта, что позволяет определять границы областей динамической неустойчивости при нестационарных воздействиях пульсирующего потока. Установлено, что демпфирующие свойства упругой обводненной среды сужают эти области, особенно для лёгких оболочек (полиэтилен, тонкая сталь).

9. Анализ построенных областей динамической неустойчивости для прямолинейных и криволинейных участков трубопроводов при наземном, частично заглубленном и подземном размещении показал, что:

- главные области динамической неустойчивости реализуются при коэффициенте $i=1$, при $\omega_{mn} = \frac{\gamma}{2}$. Второстепенные области неустойчивости при $i>1$ имеют значительно меньшую ширину и обычно перекрываются главной областью;

- с увеличением параметра продольной сжимающей силы область динамической неустойчивости расширяется и стремится занять всю свободную область графика;
- оболочки (трубы) с соотношением $h/R=1/40 - 1/50$ более опасны с позиции динамической устойчивости, чем трубы $h/R=1/20$ и $1/30$. Возможность возникновения параметрического резонанса в таких задачах увеличивается за счет расширения области динамической неустойчивости и её резкого смещения вниз, в сторону уменьшения значений γ ;
- с ростом значений коэффициента упругого отпора грунтовой среды k_s , область динамической неустойчивости заметно сужается и смещается в сторону роста значений γ , это особенно заметно для случая подземного размещения, при котором взаимодействие грунтовой среды происходит по всей внешней поверхности трубы. Для подземного размещения область уже и выше, чем при наземном размещении, что уменьшает возможность возникновения параметрического резонанса;
- область динамической неустойчивости при фиксированных геометрических и механических параметров для нефтепроводов значительно шире, чем для газопроводов.

10. Влияние присоединённой массы и демпфирования наиболее существенно для оболочек с малой массой. Увеличение коэффициента вязкости среды приводит к резкому снижению частот колебаний, а при достижении критических значений частоты стремятся к нулю, что приводит к существенному гашению колебаний.

11. Для подземного размещения рассмотрены и применены четыре модели давления грунта, что позволяет адаптировать расчёт к реальным условиям строительства (траншейный и бестраншейный тип). Это обеспечивает гибкость аналитических решений при их практическом применении.

12. Сравнение полученных аналитических решений с результатами других авторов численными расчётами (МКЭ) и экспериментальными данными показало хорошую сходимость, что подтверждает достоверность и точность разработанных решений. Анализ показал, что побочные коэффициенты в системе уравнений

оказывают пренебрежимо малое влияние ($<1\%$) на результат, что позволяет использовать упрощённые аналитические формулы в инженерных расчётах.

13. Результаты исследования и методы динамического расчета тонкостенных трубопроводов в виде цилиндрических и тороидальных оболочек апробированы на конференциях различного уровня, в том числе международного, приняты в ООО «Газпром ВНИИГАЗ», г. Москва (подтверждается актом о принятии к внедрению, Приложение Б) для использования в учебном процессе ФГБОУ ВО «Тюменский индустриальный университет» в учебных дисциплинах «Теория расчета пластин и оболочек» (подтверждается актом о внедрении, Приложение А).

Выполненные в диссертации исследования могут быть развиты в следующих направлениях:

– разработка методов определения частот свободных колебаний на стыке прямых и кривых участков, при переходе цилиндрической оболочки в тороидальную;

– разработка методов определения частот свободных колебаний и динамической устойчивости для односвязного основания;

– разработка методов определения частот свободных колебаний и динамической устойчивости тройниковых соединений с позиции теории оболочек;

– разработка методов определения частот свободных колебаний и динамической устойчивости цилиндрических и тороидальных оболочек, взаимодействующих с упругим основанием при граничных условиях, отличных от шарнирного.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Аблокулов, Ш. З., Колебания вязкоупругих цилиндрических оболочек с жидкостью / Ш. З. Аблокулов, Ж. Р. Бутунов // *Universum: технические науки*. – 2022. – №3–2 (96).
2. Айнбиндер, А. Б. Расчет магистральных и промысловых трубопроводов на прочность и устойчивость: справочное пособие. / А.Б. Айнбиндер. – М: Недра, 1991. – 288 с.
3. Аксельрад, Э.Л. К теории неоднородных изотропных оболочек / Э.Л. Аксельрад // *Известия АН СССР. ОТН. Механика и машиностроение*. – 1958. – № 6.
4. Аксельрад, Э. Л. Расчет трубопроводов / Э.Л. Аксельрад, В.П. Ильин. – Л.: Машиностроение, 1972. – 240 с.
5. Алфутов, Н.А. Основы расчета на устойчивость упругих систем / Н.А. Алфутов. – М.: Машиностроение, 1978. – 310 с.
6. Амбарцумян, С.А. К расчету двухслойных ортотропных оболочек / *Известия АН СССР. Механика и машиностроение*. – 1957. – № 7. – С. 57–64.
7. Амбарцумян, С.А. Теория анизотропных оболочек / С.А. Амбарцумян. – М.: Физматгиз, 1961. – 384 с.
8. Ананьев, И.В. Справочник по расчету собственных колебаний упругих систем. — Москва, Ленинград : Гостехиздат, 1946. — 223 с.
9. Андронов, А.А. О колебаниях системы с периодически меняющимися параметрами / А. А. Андронов, М. А. Леонтович // *ЖРФХО*. – 1927. – Т. 59. – С. 115–127.
10. Анни, Т.Е. Гидроупругая неустойчивость труб постоянного радиуса кривизны с жидкостью / Т.Е. Анни, Е.Л. Мартин, Р.Н. Дьюби // *Прикл. мех.* – 1970. – № 3. – С. 244–249.
11. Асланян, А.Г. Распределение собственных частот тонких упругих оболочек / А.Г. Асланян, В.Б. Лидский. – М.: Наука, 1974. – 156 с.

12. Ахмедов, М. Ш. О собственных колебаниях вязкоупругой тороидальной оболочки с протекающей идеальной жидкостью / М. Ш. Ахмедов, Н. К. Эсанов, Ш. Н. Алмуратов // Материалы XXII Международной конференции по вычислительной механике и современным прикладным программным системам (ВМСППС'2021). Алушта, 04–13 сентября 2021 года. – М.: ФГБОУ ВПО «Московский авиационный институт (национальный исследовательский университет)», 2021. – С. 158–160. – EDN SSGITB.

13. Баженов, В.А. Изгиб цилиндрических оболочек в упругой среде / В.А. Баженов. – Львов: Вища школа, 1975. – 167 с.

14. Бакиров, Р.О. Динамический расчет и оптимальное проектирование подземных сооружений: учеб. пособие для студентов, обучающихся по строит. спец. / Р.О. Бакиров, Ф.В. Лой; под ред. Р.О. Бакирова. – М., Казань: Стройиздат, ГУП ПИК Идел-Пресс, 2002. – 462 с.

15. Беляев, Н.М. Устойчивость призматических стержней под действием переменных продольных сил / Н.М. Беляев // Инженерные сооружения и строительная механика. – Л.: Путь, 1924. – С. 27–108.

16. Березнев, А. В. Частоты и формы собственных колебаний криволинейных участков стальных и полиэтиленовых трубопроводов с протекающей жидкостью / А.В. Березнев // Вестник гражданских инженеров. – 2005. – № 3 (4). – С. 20–24. – EDN KVQZIJ.

17. Бикбулатов, А.Л. Особенности напряженно-деформированного состояния двухслойных труб в условиях нестационарных термомеханических воздействий / А.Л. Бикбулатов, Р.Р. Багманов, К.М. Гумеров // Проблемы сбора, подготовки и транспорта нефти и нефтепродуктов. – 2015. – № 2 – С. 120–126.

18. Биргер, И.А. Прочность, устойчивость, колебания. В 3 т. / И.А. Биргер; под общ. ред. Я.Г. Пановко. – Т. 3. – М.: Машиностроение, 1968. – 568 с.

19. Боголюбов, Н.Н. Асимптотические методы в теории нелинейных колебаний / Н.Н. Боголюбов, Ю.А. Митропольский. – М.: Наука, 1974. – 503 с.

20. Болотин, В.В. Динамическая устойчивость упругих систем / В.В. Болотин. – М.: Гос. изд-во технико-теоретической литературы, 1956. – 600 с.

21. Болотин, В.В. О плотности частот собственных колебаний тонких упругих оболочек / В.В. Болотин // Прикладная математика и механика. – 1963. – Т. 27, Вып. 2. – С. 138–142.
22. Болотин, В.В. Вибрации в технике: монография / под общ. ред. В.В. Болотина. – М.: Машиностроение, 1978. – 352 с.
23. Болотин, В.В. Колебания и устойчивость упругой цилиндрической оболочки в потоке сжимаемой жидкости / В.В. Болотин // Инженерный сборник. – 1956. – Т. 24. – С. 3–16.
24. Болотин, В.В. Конечные деформации гибких трубопроводов / В.В. Болотин // Труды московского энергетического института. – 1956. – Вып. XIX. – С.272–291.
25. Болотин, В.В. Некоторые новые задачи динамики оболочек // Расчёты на прочность. – 1959 – № 4. – С. 331–365.
26. Болотин, В.В. Механика многослойных оболочек. – М.: Наука, 1980.
27. Бородавкин, П.П. Прочность магистральных трубопроводов / П.П. Бородавкин, А. М. Синюков. – М.: Недра, 1984. – 243 с.
28. Бочкарев, С. А. Собственные колебания композитных цилиндрических оболочек, частично заполненных жидкостью / С. А. Бочкарев, С. В. Лекомцев, В.П. Матвеев // Вестник Санкт-Петербургского университета. Математика. Механика. Астрономия. – 2023. – № 4.
29. Бочкарев, С. А. Собственные колебания цилиндрической оболочки, частично лежащей на упругом основании / С. А. Бочкарев // Вычислительная механика сплошных сред. – 2017. – Т. 10, № 4. – С. 406–415. – DOI 10.7242/1999-6691/2017.10.4.32.
30. Бреславский, В.Е. Собственные колебания круговой цилиндрической оболочки, находящейся под действием гидростатического давления / В.Е. Бреславский. – М.: Известия АН СССР. – 1956. – № 12. – С.117–120.
31. Булыгин, А.В. Колебания и устойчивость тороидальной оболочки, нагруженной нормальным давлением / А.В. Булыгин // Известия вузов. Авиационная техника. – 1981. – № 2. – С. 18–22.

32. Вельмисов, П.А. Исследование динамической устойчивости трубопровода / П. А. Вельмисов, Ю. А. Тамарова, П. М. Абрашкин, А. В. Ликанин // Journal of Advanced Research in Technical Science. – 2025. – № 46. – С. 34–41. – DOI 10.26160/2474-5901-2025-46-34-41. – EDN EJXPAF.

33. Вельмисов, П.А. К задаче определения собственных частот колебаний трубопровода / П. А. Вельмисов, Ю. А. Тамарова, С. В. Петров, А. И. Шингарова // Вестник Ульяновского государственного технического университета. – 2021. – № 4(96). – С. 36–38. – EDN ZGLVDH.

34. Вельмисов, П. А. Исследование динамической устойчивости изгибно-крутильных деформаций трубопровода / П. А. Вельмисов, Ю. А. Тамарова, Ю.В. Покладова // Журнал Средневолжского математического общества. – 2021. – Т. 23, № 1. – С. 72–81. – DOI 10.15507/2079-6900.23.202101.72-81. – EDN WCMDYX.

35. Вагнер, В.В. Механизм формирования арочного выброса подземного трубопровода в период паводковых явлений / В.В. Вагнер, А.И. Горковенко // Горные ведомости. – 2008. – №8. – С. 72–75.

36. Вайнберг, Д.В. Механические колебания и их роль в технике / Д.В. Вайнберг, Г.С. Писаренко. – М.: Наука, 196. – 276 с.

37. Валиев, М.И. Собственные и параметрические колебания криволинейных участков трубопровода при пульсирующем движении слабосжимаемой жидкости / М. И. Валиев, В. В. Жолобов, Е. И. Тарновский // Наука и технологии трубопроводного транспорта нефти и нефтепродуктов. – 2013. – № 2(10). – С. 48–54.

38. Васильев, В.А. Собственные колебания газового тора в жидкости / В.А. Васильев // Акустический журнал. – 1979. – Т. 25, № 5. – С. 653–660.

39. Васина, В.Н. Параметрические колебания участка трубопровода с протекающей жидкостью / В.Н. Васина // Вестник МЭИ. – 2007. – № 1. – С. 1–1.

40. Власов, В.З. Общая теория оболочек и ее приложения в технике / В.З. Власов. – М.: Гостехиздат, 1949. – 784 с.

41. Волынец, С.И. Колебания тонкостенных неоднородных оболочек в упругой среде с учетом внутреннего рабочего давления // Вести газовой науки. – 2021. – № 4 (49).
42. Вольмир, А.С. Оболочки в потоке жидкости и газа. Задачи аэроупругости / А.С. Вольмир. – М.: Наука, 1976. – 416 с.
43. Вольмир, А.С. Собственные нелинейные колебания оболочек / А.С. Вольмир, А.А. Логвинская, В.В. Рогалевич // Докл. АН СССР. – 1972. – Т. 205, № 2. – С. 44–46.
44. Вольмир, А.С. Гибкие пластины и оболочки / А.С. Вольмир. – М.: Гостехтеориздат, 1959. – 420 с.
45. Вольмир, А.С. Колебания оболочки с протекающей жидкостью / А.С. Вольмир, М.С. Грач // Изв. АН СССР, МТТ. – 1973. – № 6. – С. 162–166.
46. Вольмир, А.С. Нелинейная динамика пластин и оболочек / А.С. Вольмир. – М.: Наука, 1972. – 432 с.
47. Вольмир, А.С. Оболочки в потоке жидкости и газа. Задачи гидроупругости / А.С. Вольмир. – М.: Наука, 1979. – 320 с.
48. Вольмир, А.С. Устойчивость упругих систем / А.С. Вольмир. – М.: Физматгиз, 1963. – 880 с.
49. Ворович, И.И. О методе Бубнова–Галёркина в нелинейной теории колебаний пологих оболочек // Докл. АН СССР. – 1956. – Т. 110, № 5. – С. 25–34.
50. Вялов, С.С. Реологические основы механики грунтов: учеб. пособие для строит. Вузов / С.С. Вялов. – М.: Высшая школа, 1978. – 447 с.
51. Галёркин, Б.Г. Об устойчивости цилиндрической оболочки / Б.Г. Галёркин // Прикладная математика и механика. – 1943. – Т. 7, Вып. 1. – С. 68–90.
52. Галеркин, Б.Г. Напряжение и перемещения в круговом цилиндрическом трубопроводе / Б.Г. Галеркин, Я.И. Перельман // Известия ВНИИТ. – 1940. – Т. 27. – С. 160–192.
53. Гастев, В.А. Поперечные колебания и устойчивость стержней при действии периодически повторяющихся продольных импульсов / В.А. Гастев // Труды Ленинградского института авиаприборостроения. – 1949. – Вып. 1.

54. Гениев, Г.А. Радиальные колебания цилиндрических оболочек при движении в них потока идеальной жидкости / Г.А. Гениев, А.Н. Зубков // Строительная механика и расчёт сооружений. – 1987. – № 3. – С. 40–43.

55. Герштейн, М.С. Распространение волн в многослойной цилиндрической оболочке с протекающей жидкостью / М.С. Герштейн // Строит. мех. и расчет соор. – 1979. – № 2.

56. Герштейн, М.С. Свободные колебания многослойных труб / М.С. Герштейн, С.С. Халюк // Многослойные сварные конструкции: материалы I Всесоюзн. конференции. – Киев, 1984.

57. Гладких, П.А. Вибрации в трубопроводах и методы их устранения / П.А. Гладких, С.А. Хачатурян. – М.: Машгиз, 1969. – 230 с.

58. Гольденблат, И.И. Справочник по расчёту строительных конструкций на устойчивость и колебания / И.И. Гольденблат., А.Н. Сизов. – М.: Госстройиздат, 1952. – 330 с.

59. Гольденблат, И.И. Некоторые вопросы колебаний и динамической устойчивости упругих систем / И.И. Гольденблат // Исследовательские работы по инженерным конструкциям: сб. статей. – Стройиздат, 1948. – С. 4–12.

60. Гольденвейзер А.Л. О плотности частот колебаний тонкой упругой оболочки / И.И. Гольденблат. – М.: Прикладная математика и механика. – 1970. – Т. 34, Вып. 5. – С. 46–52.

61. Гольденвейзер, А.Л. Свободные колебания тонких упругих оболочек / А.Л. Гольденвейзер, Б.Б. Лидский, П.Е. Товстик. – М.: Наука, 1979. – 384 с.

62. Гольденвейзер, А.Л. Теория упругих тонких оболочек / А.Л. Гольденвейзер. – М.: Наука, 1976. – 512 с.

63. Гонткевич, В.С. Исследование колебаний тороидальных оболочек / В.С. Гонткевич // Динамика систем твёрдых и жидких тел: тр. семинара по динамике Института Механики АН УССР. – 1965. – С. 22–24.

64. Горковенко, А.И. Высотное положение вертикальной арки при воздействии гидростатических сил выталкивания / А.И. Горковенко // Известия вузов. Нефть и газ. – 2006. – № 2. – С.55–58.

65. Градштейн, В.В. Таблицы интегралов, сумм, рядов и произведений / В.В. Градштейн, И.М. Рыжик. – М.: Физматгиз, 1963. – 1100 с.
66. Григолюк, Э.И. Нелинейные колебания и устойчивость пологих оболочек и стержней / Э.И. Григолюк // Изв. АН СССР. Отд-ние техн. наук. Механика и машиностроение. – 1955. – № 3. – С. 33–68.
67. Григолюк, Э.И. О прочности и устойчивости цилиндрических биметаллических оболочек / Э.И. Григолюк // Инженерный сборник. – 1953. – Т. 16.
68. Григолюк, Э.И. Тонкие биметаллические оболочки и пластины // Э.И. Григолюк // Инженерный сборник. – 1953. – Т. ХУЛ.
69. Григолюк, Э.И. Устойчивость и колебания трёхслойных оболочек / Э.И. Григолюк, П.П. Чулков. – М.: Машиностроение, 1973. – 172 с.
70. Григолюк, Э.И. Устойчивость оболочек / Э.И. Григолюк, В.В. Кабанов. – М.: Наука, 1978. – 360 с.
71. Гусейнов, С. А. Нелинейные колебания трехслойных неоднородных круговых цилиндрических оболочек / С. А. Гусейнов // ВЕЖПТ. – 2014. – № 7 (69).
72. Двайт, Г.Б. Таблицы интегралов и другие математические формулы / Г.Б. Двайт. – М.: Наука. 1983. – 176 с.
73. Денисов, Г.В. Собственные колебания заглубленных магистральных трубопроводов при сейсмическом воздействии / Г.В. Денисов, В.В. Лалин // Трубопроводный транспорт: теория и практика. – 2013. – № 4 (38). – С. 14–17.
74. Дерябин, В.С. О колебаниях трубопроводов постоянной кривизны / В.С. Дерябин, П.Д. Доценко // Прикл. мех. – 1975. – Т. 11, Вып. 1. – С. 131–137.
75. Дмитриев, А. В. Исследование параметра длины и продольной сжимающей силы по определению частот свободных колебаний подземных тонкостенных газопроводов большого диаметра / А.В. Дмитриев, В.Г. Соколов, А.В. Березнев // Транспортные сооружения. – 2019. – Т. 6, № 3. – С. 36.
76. Дмитриев, А. В. Сравнение аналитического подхода с методом конечных элементов при определении частот собственных колебаний цилиндрической оболочки / А. В. Дмитриев, В. Г. Соколов // Строительная механика и расчет

сооружений. – 2024. – № 4 (315). – С. 41–48. – DOI 10.37538/0039-2383.2024.4.41.48. – EDN KODFLN.

77. Доценко, П.Д. Некоторые результаты исследования собственных колебаний прямолинейных трубопроводов с жидкостью / П.Д. Доценко // Прикл. механика. – 1979. – Т. XV, № 1. – С. 69–75

78. Доценко, П.Д. О постановке задач устойчивости и колебаний трубопроводов с жидкостью / П.Д. Доценко // Динамика систем, несущих подвижную распределительную нагрузку. – Харьков, 1978. – Вып. 1. – С. 21–32.

79. Доценко, П.Д. Об уравнениях малых колебаний криволинейного трубопровода / П.Д. Доценко // Механика твёрдого тела. – 1974. – № 5. – С. 104–112.

80. Дьяконов, В.М. Справочник по алгоритмам и программам / В.М. Дьяконов. – М.: Наука, 1989. – 240 с.

81. Евстифеева, О.В. О расчёте тонкостенных криволинейных труб с протекающей жидкостью / О.В. Евстифеева. – Л.: ЛИСИ, 1991. – 33 с. Деп. ВИНТИ 18.02.92. № 574 – В92.

82. Егоров, А. В. Устойчивость цилиндрических оболочек в жесткой среде // Инженерный журнал: наука и инновации. – 2017. – №9 (69).

83. Емельянова, Т.А. Разрешающее уравнение свободных колебаний трехслойной цилиндрической оболочки, подкреплённой ребрами жесткости / Т.А. Емельянова // Вестник Херсонского национального технического университета. – 2016. – № 2 (57).

84. Ефимов, А.А. Собственные колебания морского глубоководного нефтепровода большого диаметра / А.А. Ефимов // Вестник гражданских инженеров. – 2008. – № 4 (17). – С. 26–29.

85. Зайцев А.И. Современные направления развития производства и применения двухслойных сталей / А.И. Зайцев, И.Г. Радионова, А.В. Амежнов, А.А. Павлов // Технология колесных и гусеничных машин. – 2013. – № 3 (7) – С. 17–22.

86. Иванюта, Э.И. О влиянии тангенциальных сил инерции на величину частоты свободных колебаний тонкой цилиндрической оболочки / Э.И. Иванюта,

Р.М. Финкельштейн // Исследования по упругости и пластичности. – 1963. – Вып. 2. – С. 212–215.

87. Ильгамов, М. А. Вынужденные и параметрические колебания трубопровода / М. А. Ильгамов, М. М. Шакирьянов // Известия Уфимского научного центра РАН. – 2020. – № 3. – С. 5–11. – DOI 10.31040/2222-8349-2020-0-3-5-11.

88. Ильгамов, М.А. Колебания упругих оболочек, содержащих жидкости газ / М.А. Ильгамов. – М.: Наука, 1969. – 184 с.

89. Ильин, В.П. О применении полубезмоментной теории к определению частот свободных колебаний круговой цилиндрической оболочки / В.П. Ильин, О.Б. Халецкая // Исследования по расчету строительных конструкций. Труды ЛИСИ. – 1974. – № 89. – С. 49–60.

90. Ильин, В.П. Параметрические колебания цилиндрических оболочек с потоком жидкости / В.П. Ильин // Вестник российской академии Архитектуры и строит. наук. ОСН. – 1996. – Вып. 1. – С. 15–21.

91. Ильин, В.П. К определению гидродинамического давления жидкости, протекающей в тороидальной оболочке / В.П. Ильин, В.Г. Соколов // Исследования по механике строительных конструкций и материалов. Межвузовский тематический сборник трудов. – СПб., 1999. – С. 16–21.

92. Ильин, В.П. О свободных колебаниях цилиндрических оболочек с учётом влияния протекающей жидкости / В.П. Ильин, В.Г. Соколов // Известия вузов. Строительство и архитектура. – 1979. – № 12. – С. 26–31.

93. Ильин, В.П. Свободные колебания тороидальной оболочки со стационарным потоком жидкости / В.П. Ильин, В.Г. Соколов // Исследования по механике строительных конструкций и материалов. Межвузовский тематический сборник трудов. – СПб.: СПбГАСУ, 2000. – С. 42–49.

94. Ильин, В. П. Исследование параметрического резонанса в трубопроводах, содержащих пульсирующий поток жидкости / В.П. Ильин, В.Г. Соколов // Вопросы механики строительных конструкций и материалов. Межвузовский тематический сборник. – Л., 1987. – С. 6–10.

95. Ильин, В.П. Влияние закрепления концов магистральных трубопроводов большого диаметра на частоты свободных колебаний / В.П. Ильин, В.Г. Соколов // Промышленное и гражданское строительство. – 2009. – № 12. – С. 52–54.

96. Ильин, В.П. О применении полубезмоментной теории к определению частот свободных колебаний круговой цилиндрической оболочки / В. П. Ильин, О.Б. Халецкая // Исследования по расчету строительных конструкций. Труды ЛИСИ. – 1974. – № 89. – С. 49–60.

97. Ильин, В.П. Применение полубезмоментной теории к задачам расчета тонкостенных труб / В. П. Ильин // Проблемы расчета пространственных конструкций. Труды МИСИ. – М.: 1980. – С.45–55.

98. Ильин, В.П. Собственные частоты и формы свободных колебаний тонкостенных труб / В.П. Ильин, О.Б. Халецкая // Строительство трубопроводов. – № 1. – 1974. – С. 22.

99. Индейкин, А. В. Динамическая устойчивость внецентренно сжатых тонкостенных стержней металлических конструкций / А.В. Индейкин // Известия ПГУПС. – 2008. – Вып. 4. – С. 23–33.

100. Исанбаева, Ф.С. Определение нижней критической нагрузки цилиндрической оболочки при всестороннем сжатии // Изв. Казан. фил. АН СССР. – 1955. – Т. 7 – С. 51–59.

101. Ишемгужин, И.Е. Демпфирование параметрических колебаний трубопровода / И. Е. Ишемгужин, Т. И. Габбасов, И. А. Шаммазов [и др.] // Нефтегазовое дело. – 2011. – № 3. – С. 84–93.

102. Каган, М.Л. Параметрический резонанс в трубопроводах инженерных систем, строительных машин и оборудования / М.Л. Каган, Д.Ю. Густов // Вестник МГСУ. – 2011. – № 4.

103. Камалов, А.З. К вопросу исследования напряженно-деформированного состояния и устойчивости арочных сооружений / А.З. Камалов, А.А. Хамидуллина // Известия КазГАСУ. – 2012. – № 4 (22).

104. Камерштейн, А.Г. Расчет трубопроводов на прочность. Справочная книга / А.Г. Камерштейн, В.В. Рождественский, М. Н. Ручимский. – М.: Недра, 1969. – 440 с.
105. Каплан, Ю.И. Балочные колебания цилиндрических оболочек с учётом деформации контура / Ю.И. Каплан // Прикладная механика. – 1968. – № 4. – С. 11–18.
106. Карпов, В.В. Геометрически нелинейные задачи для пластин и оболочек и методы их решения / В.В. Карпов. – СПб.: Изд. АСВ, 1999. – 155 с.
107. Картвелишвили, Н. А. Поперечные колебания и динамическая прочность напорных трубопроводов в связи с кавитационными явлениями в турбинах / Н. А. Картвелишвили // Известия Всесоюзного НИИ гидротехники. – 1958. – Т. 49. – С. 31–53.
108. Катаев, В. П. Динамика трубопроводов с нестационарным потоком жидкости / В.П. Катаев, А.Е. Плуталов // Изв. вузов. Авиационная техника. – 1971. – № 2. – С. 95–97.
109. Катаев, В.П. Динамическая устойчивость трубопровода с потоком жидкости / В.П. Катаев // Динамика и прочность машин. – 1970. – Т. XIV, В. II. – С. 116–120.
110. Каширин, С.В. Исследование параметрических резонансов трубопровода, возбуждаемых упругими деформациями сечения / С.В. Каширин, Г.А. Щеглов // Вестник МГТУ им. Н. Э. Баумана. Сер.: Естественные науки. – 2008. – № 3. URL: <https://cyberleninka.ru/article/n/issledovanie-parametriceskih-rezonansov-truboprovoda-vozbuzhdaemyh-uprugimi-deformatsiyami-secheniya> (дата обращения: 09.10.2024).
111. Кидильбеков, И.Г. Исследование собственных нелинейных колебаний цилиндрической оболочки / И.Г. Кидильбеков // Прикладная механика. – 1977. – Т. 13, № 11. – С. 46–52.
112. Кидильбеков, И.Г. Собственные нелинейные колебания круговой цилиндрической оболочки / И.Г. Кидильбеков // Тр. VIII Всесоюзн. конф. по теории оболочек и пластин. – Ростов н /Д, 1971. – С. 211–220.

113. Киселев, В.А. Строительная механика. Специальный курс: Динамика и устойчивость сооружений. 3-е изд., исп. и доп. – М.: Стройиздат, 1980. – 616 с.
114. Клейн, Г.К. Расчет труб, уложенных в земле / Г.К. Клейн. – М.: Стройиздат, 1956 – 100 с.
115. Кобелев, В.Н. Динамика многослойных оболочек / В.Н. Кобелев. – Ростов н/Д: Изд-во Ростовского университета, 1985. – 159 с.
116. Ковревский, А. П. Экспериментальное и теоретическое исследование колебаний труб, содержащих протекающую жидкость / А. П. Ковревский // Известия вузов. Энергетика. – 1964. – № 4. – С. 89–94.
117. Ковревский, А.П. Динамика трубопроводов, содержащих неустановившийся поток жидкости / А.П. Ковревский // Прикл. мех. – 1970. – Т. VI, Вып. 8. – С. 97–102.
118. Козлов, А.С. Учет присоединенных масс жидкости в математических моделях сильфонных чувствительных элементов систем управления / А.С. Козлов, Р.Я. Лабковская, О.И. Пирожникова, В.Л. Ткалич // Известия высших учебных заведений. Приборостроение. – 2015. – Т. 58, № 12. – С. 1016–1021. – DOI 10.17586/0021-3454-2015-58-12-1016-1021.
119. Козлов, В.В. Конечные деформации тороидальной оболочки / В.В. Козлов, А.А. Маркин // Вестник Томского гос. ун-та. Математика и механика. – 2021. – № 71.
120. Коллатц, Л. Задачи на собственные значения / Л. Коллатц. – М.: Наука, 1968. – 503 с.
121. Комаров, А.А. О параметрических колебаниях трубопроводов / А.А. Комаров // Вопросы надёжности гидравлических систем. – Вып. 3. – Киев: Киевский институт инженеров гражданской авиации, 1964. – С. 16–21.
122. Комаров, А.А. Трубопроводы и соединения для гидросистем / А.А. Комаров. – М.: Машиностроение, 1967. – 230 с.
123. Кондрашев, Н.С. Параметрические колебания трубопроводов на упругодемпфирующих опорах, вызываемые пульсирующим потоком /

Н.С. Кондрашев // Рассеяние энергии при колебаниях механических систем. – Киев, 1968. – С. 427–433.

124. Королев, В.И. Тонкие двухслойные пластины и оболочки / В.И. Королев // Инженерный сборник. – 1954. – Т. XXII.

125. Коротков, А. В. Параметрические колебания тонкостенных криволинейных труб из армированных пластиков / А.В. Коротков, Ю.А. Куликов // Учен. записки Казан. ун-та. Сер.: Физ.-матем. науки. – 2010. – № 4.

126. Крылов, Н.М. Исследование явлений резонанса при поперечных колебаниях стержней, находящихся под воздействием периодических нормальных сил / Н.М. Крылов, Н.Н. Боголюбов. – М.: ОНТИ. исследование колебаний конструкций. – 1935. – С. 28–40.

127. Кубенко, В.Д. Нелинейные колебания цилиндрических оболочек / В.Д. Кубенко, П.С. Ковальчук, Н.П. Подгасов. – Киев: Вища шк., 1989. – 208 с.

128. Кузнецова, Е.Л. Собственные колебания трехслойных круговых цилиндрических оболочек в упругой среде / Е. Л. Кузнецова, Д. В. Леоненко, Э. И. Старовойтов // Известия Российской академии наук. Механика твердого тела. – 2015. – № 3. – С. 152–160.

129. Кукуджанов, С.Н. Колебания и динамическая устойчивость оболочек вращения, близких к цилиндрическим, находящихся под действием нормального давления и меридиальных усилий / С.Н. Кукуджанов // Изв. РАН. МТТ. – 2006. – № 2. – С. 48–59.

130. Кукуджанов, С.Н. О влиянии нормального давления на частоты собственных колебаний оболочек вращения, близких к цилиндрическим / С.Н. Кукуджанов // Изв. РАН, МТТ. – 1996. – № 6. – С. 121–126.

131. Кукуджанов, С.Н. О свободных колебаниях предварительно напряжённой цилиндрической оболочки переменной толщины / С.Н. Кукуджанов // Прикл. мех. – 1983. – Т. XIX, № 2. – С. 33–37.

132. Кукуджанов, С.Н. О влиянии неоднородного кручения и нормального давления на собственные колебания цилиндрической оболочки /

С.Н. Кукуджанов // Строительная механика и расчет сооружений. – 1987. – № 3. – С. 43–47.

133. Кукуджанов, С.Н. О влиянии нормального давления на частоты собственных колебаний цилиндрических оболочек / С.Н. Кукуджанов // Механика твердого тела. – 1968. – № 3. – С. 14–20.

134. Лалин, В.В. Динамическое поведение бесконечных стержневых элементов на упруго-вязком основании под действием точечного источника возмущения / В.В. Лалин, Г.В. Денисов // Научный вестник Воронежского государственного архитектурно-строительного университета. Строительство и архитектура. – 2013. – № 2 (30). – С. 105–113.

135. Лурье, А.И. Аналитическая механика / А.И. Лурье. – М.: Физматгиз, 1961. – 824 с.

136. Лурье, А.И. Статика упругих тонкостенных оболочек / А.И. Лурье. – М.; Л.: Гос. Издательство технико-теорет. Литературы, 1947. – 252 с.

137. Мандельштам, Л.И. Лекции по теории колебаний. Собрание сочинений / Л.И. Мандельштам. – Т. IV. – М.: Изд. АН СССР, 1955.

138. Матвеев, Е.П. Собственные колебания криволинейных участков трубопроводов с протекающей жидкостью при разных закреплениях на концах: дис. ... канд. техн. наук: 05.23.17 / Матвеев Евгений Петрович. – СПб., 2010. – 126 с.

139. Михайлов, Б.К. Пологие прямоугольные в плане оболочки с двумя упругими противоположными кромками и двухволновые покрытия из пологих оболочек / Б.К. Михайлов // Исследования по математической и экспериментальной физике и механике. – Л., 1965. – С. 104–116.

140. Мовчан, А.А. Об одной задаче устойчивости трубы при протекании через неё жидкости / А.А. Мовчан // ПММ. – 1965. – Вып. 4. – С. 760–762.

141. Мухин, А.А. Динамический критерий устойчивости трубопровода с протекающей жидкостью / А.А. Мухин // Изв. АН СССР, Механика. – 1965. – № 3. – С. 154–155.

142. Муштари, Х.М. Об устойчивости цилиндрических и конических оболочек кругового сечения при совместном действии осевого сжатия и внешнего

нормального давления / Х.М. Муштари, А.В. Саченков // Прикладная математика и механика. – 1954. – Т. 18, Вып. 6. – С. 667–674.

143. Муштари, Х.М. Нелинейная теория упругих оболочек / Х.М. Муштари, К.З. Галимов. – Казань: Таткнигоиздат, 1957. – 520 с.

144. Мяченков, В.И. Влияние граничных условий на собственные частоты колебаний цилиндрических оболочек / В.И. Мяченков, А.А. Репин // Прикладная механика. – 1971. – № 6.

145. Натанзон, М. С. Параметрические колебания трубопровода, возбуждаемые пульсирующим расходом жидкости / М. С. Натанзон // Изв. АН СССР. Мех. и маш. – 1962. – № 4. – С. 42–46.

146. Николаи, Е.Л. Труды по механике. Серия: Библиотека русской науки / Е.Л. Николаи. – М., Техничко-теоретическая литература, 1955. – 583 с.

147. Новичков, Ю.Н. Исследование спектров частот собственных колебаний цилиндрических оболочек, содержащих сжимаемую жидкость / Ю.Н. Новичков // VI Всесоюзная конференция по теории оболочек и пластинок. – М.: Наука, 1966. – С. 600–606.

148. Новожилов, В.В. Теория тонких оболочек / В.В. Новожилов. – Л.: Судпрогаз, 1962. – 430 с.

149. Нормы расчета на прочность оборудования трубопроводов атомных Энергетических установок ПНАЭ Г-7-002–86. – М.: Энергоатомиздат, 1989. – 525 с.

150. Огибалов, П.М. Вопросы динамики и устойчивости оболочек / П.М. Огибалов. – М.: Изд-во Моск. ун-та, 1963. – 418 с.

151. Ониашвили, О.Д. Некоторые динамические задачи теории оболочек / О.Д. Ониашвили. – М.: Изд. АН СССР. – 1957. – 195 с.

152. Ониашвили, О.Д. О динамической устойчивости оболочек / О.Д. Ониашвили // Сообщения АН Груз. ССР. – 1950. – № 3. – С.3–12.

153. Орлов, В.А. Трубопроводные сети. Автоматизированное сопровождение проектных разработок: учебное пособие / В.А. Орлов. – СПб.: Лань, 2015. – 160 с.

154. Оселедько, А.И. Влияние упругости закрепления концов круговой арки на частоту её собственных колебаний / А.И. Оселедько // Исследователя по теории сооружений. – Вып. 5. – М.: Стройиздат, 1949.

155. Панов, Д.Ю. Об устойчивости биметаллических оболочек при нагреве / Д.Ю. Панов // ЛММ. – 1947. – Т.У, 6.

156. Пановко, Я.Г. Основы прикладных теорий колебаний / Я.Г. Пановко. – М.: Машиностроение, 1967. – 316 с.

157. Пановко, Я.Г. Устойчивость и колебание упругих систем / Я.Г. Пановко, И.И. Губанова. – М.: Наука, 1979. – 384 с.

158. Патент РФ №2012155948/02, 21.12.2012. Способ производства длинномерных многослойных биметаллических труб большого диаметра с повышенным ресурсом эксплуатации в агрессивных средах для транспортировки углеводородов с повышенным содержанием серы // Патент России №2523407. – 2014. – Бюл. №20. – Сафьянов А.В., Федоров А.А. [и др.].

159. Постнов, В.А. Вибрация корабля. / В.А. Постнов, В.С. Калинин, Д. Ростовец - М.; Л.: Судостроение, 1983. – 248 с.

160. Пратусевич, Я.А. О колебаниях упругих арок / Я.А. Пратусевич // Тр. МИИТ. – 1952. – Вып. 76.

161. Прочность, устойчивость, колебания: справочник; под ред. И.А. Биргера, Я.Г. Пановко. – Том. 3. – М.: Машиностроение, 1968. – 567 с.

162. Пшенчнов, Г.И. Свободные и вынужденные осесимметричные колебания тонких упругих оболочек вращения / Г.И. Пшенчнов // Материалы VI Всесоюз. конф. по теории оболочек и пластинок. – М., 1966. – С. 707–710.

163. Пшеничкина, В. А. Вероятностный анализ динамических характеристик системы «сооружение–слоистое основание» / В.А. Пшеничкина, С.С. Рекунов, С.Ю. Иванов // Известия высших учебных заведений. Строительство. – 2024. – № 8 (788). – С. 32–43. – DOI 10.32683/0536-1052-2024-788-8-32-43. – EDN XZEYVI.

164. Пшеничкина, В. А. Амплитудно-частотные характеристики слоистой модели «сооружение–основание» / В.А. Пшеничкина, В.В. Дроздов,

А.С. Жиденко // Сейсмостойкое строительство. Безопасность сооружений. – 2023. – № 2. – С. 8–23. – DOI 10.37153/2618-9283-2023-2-8-23. – EDN NYENPO.

165. Пшеничкина, В.А. Применение слоистой модели к расчетам динамических характеристик зданий при сейсмических воздействиях / В.А. Пшеничкина, С.С. Рекунов, С.Ю. Иванов [и др.] // Вестник Волгоградского государственного архитектурно-строительного университета. Серия: Строительство и архитектура. – 2022. – № 1 (86). – С. 43–56. – EDN BYWYNS.

166. Радионова, И.Г. Разработка коррозионностойких биметаллических материалов с высокопрочным соединением слоев путем использования электрошлаковой наплавки: автореф. дис. ... д-ра тех. наук. Центральный научно-исследовательский институт черной металлургии им. И.П. Бардина, Москва, 2005

167. Разов, И.О. Влияние параметра тонкостенности поперечного сечения на параметрические колебания магистральных нефте и газопроводов при наземной прокладке / В.Г. Соколов, И.О. Разов, В.В. Пассек // Промышленное и гражданское строительство. – 2017. – № 12. – С. 92–96.

168. Разов, И.О. Влияние температуры окружающей среды на частоты свободных колебаний тонкостенных магистральных газопроводов большого диаметра при надземной прокладке / И.О. Разов // Вестник гражданских инженеров. – 2022. – № 6(95). – С. 39–46.

169. Разов, И.О. Исследование свободных колебаний тонкостенных полимерных прямолинейных трубопроводов большого диаметра при полуподземной прокладке / И.О. Разов, С.И. Волынец, Е.А. Жайсамбаев // Вестник евразийской науки. – 2020. – Т. 12, № 3. – С. 10.

170. Разов, И.О. Исследование свободных колебаний тонкостенных прямолинейных газопроводов большого диаметра при полуподземной прокладке / В.Г. Соколов, И.О. Разов, С.И. Волынец // Вестник гражданских инженеров. – 2019. – № 6 (77). – С. 149–156. – DOI 10.23968/1999-5571-2019-16-5-149-156.

171. Разов, И.О. Исследование частот свободных колебаний полиэтиленовых магистральных газопроводов, уложенных на грунт / И.О. Разов, В.Г. Соколов,

О.В. Ашихмин [и др.] // Промышленное и гражданское строительство. – 2017. – № 10.

172. Разов, И.О. Колебания тороидальной оболочки-трубопровода в грунте с учетом продольной сжимающей силы и температуры / И.О. Разов // Промышленное и гражданское строительство – 2024. – № 11. – С. 63–70.

173. Разов, И.О. Напряжения и перемещения на контактной поверхности наземного трубопровода большого диаметра / И.О. Разов // Вестник гражданских инженеров. – 2015. – № 3 (50). – С. 105–108.

174. Разов, И.О. Определение частот свободных колебаний для подземного нефтепровода большого диаметра с учетом влияния демпфера / И.О. Разов, В.Г. Соколов, А.В. Дмитриев // Вестник гражданских инженеров. – 2022. – № 3 (92). – С. 53–61.

175. Разов, И.О. Параметрические колебания подземного и наземного нефтепровода / И.О. Разов, В.Г. Соколов, А.В. Дмитриев, А.В. Березнев // Архитектура, строительство, транспорт. – 2023. – № 3 (105). – С. 48–60.

176. Разов, И.О. Свободные колебания неоднородных тонких цилиндрических оболочек, заглубленных в грунт / В.Г. Соколов, И.О. Разов, С.И. Волынец // Вести газовой науки. – 2021. – № 1 (46). – С. 190–195.

177. Разов, И.О. Свободные колебания тонкостенного двухслойного трубопровода с учетом влияния продольной сжимающей силы при полуподземной прокладке / В.Г. Соколов, И.О. Разов, Е.И. Лободенко, С.И. Волынец // Архитектура, строительство, транспорт. – 2022. – № 2. – С. 47–57.

178. Разов, И.О. Свободные колебания тонкостенного криволинейного участка магистрального газопровода при подземной бестраншейной прокладке / И.О. Разов, В.Г. Соколов // Инновации и инвестиции. – 2023. – № 8. – С. 281–285.

179. Разов, И.О. Свободные колебания тонкостенного криволинейного участка магистрального нефтепровода при наземной прокладке / В.Г. Соколов, И.О. Разов, Т.В. Мальцева // Транспортные сооружения. – 2021. – Т. 8, № 4. – С. 1–20.

180. Разов, И.О. Свободные колебания тонкостенного криволинейного участка магистрального газопровода при наземной прокладке / В.Г. Соколов, И.О. Разов // Вестник евразийской науки. – 2021. – Т. 13, № 2. – С. 1–10.

181. Разов, И.О. Свободные колебания тонкостенных газопроводов большого диаметра при полуподземной прокладке / В.Г. Соколов, И.О. Разов // Вестник гражданских инженеров. – 2016. – № 6 (59). – С. 114–120.

182. Разов, И.О. Сравнение вариантов учета давления грунта на внешнюю поверхность наземного магистрального трубопровода / И.О. Разов // Нефть. Газ. Новации. – 2022. – № 11 (264). – С. 79–82.

183. Разов, И.О. Аналитические методы расчета динамических характеристик прямолинейных тонкостенных трубопроводов большого диаметра при наземной прокладке / И.О. Разов, В.Г. Соколов, А.Н. Коркишко, А.Н. Ермолаев. – М.: КОНВЕРТ, 2019. – 128 с. – ISBN 978-5-6043840-6-0. – EDN RNRTBO.

184. Раппопорт, Л.Д. Расчёт собственных колебаний предварительно ненагруженных круговых цилиндрических оболочек / Л.Д. Раппопорт // Известия вузов. Авиационная техника. – 1960. – № 3. – С. 30–35.

185. Релей, Дж. Теория звука. – Т. I. – М.: Гостехиздат, 1940. – 430 с.

186. Салиева, О.К. Собственные крутильные колебания цилиндрической оболочки в упругой среде / О.К. Салиева, Н.Р. Шарипова // Universum: технические науки. – 2019. – № 12-1 (69).

187. Саргсян, А.Е. Строительная механика. Основы теории с примерами расчетов / А.Е. Саргсян, А.Т. Демченко, Н.В. Дворянчиков, Г.А. Джинчвелашвили; под. ред. А.Е. Саргсяна. – 2-е изд., испр. и доп. – М.: Высш. шк., 2000. – 416 с.

188. Сафаров, И. И., Теоретико-экспериментальные исследование колебания подземного оболочечного сооружения при сейсмозрывных воздействиях / И.И. Сафаров, Ш.З. Аблокулов, Ж.Р. Бутунов // Universum: технические науки. – 2020. – № 2-1 (71).

189. Сафаров, И.И. Собственные линейные колебания цилиндрической оболочки в упругой среде / И.И. Сафаров, М.Ш. Ахмедов, А.О. Умаров // Вестник

Пермского университета. Серия: Математика. Механика. Информатика. – 2015. – № 3 (30). – С. 40–45.

190. Саченков, А.В. Об устойчивости цилиндрической оболочки при произвольных краевых условиях под действием поперечного давления / А.В. Саченков // Изв. Казан. фил. АН СССР. – 1958. – № 12. – С.127–132.

191. Светлицкий, В.А. Механика стержней / В.А. Светлицкий. – М.: Высшая школа, 1987. – Часть I, 316 с.; часть II, 302 с.

192. Светлицкий, В.А. Механика трубопроводов и шлангов / В.А. Светлицкий. – М.: Машиностроение, 1982. – 280 с.

193. Светлицкий, В.А. Колебаний гибких труб с протекающей жидкостью / В.А. Светлицкий // Известия вузов. Машиностроение. – 1966. – № 3.

194. Светлицкий, В.А. Малые колебания труб с протекающей жидкостью / В.А.Светлицкий, Н.К.Купесов // Известия вузов. – Машиностроение, 1970. – №5

195. Светлицкий, В.А. О критических скоростях установившегося потока / жидкости / В.А.Светлицкий, Р.А.Мирошник // Прикл.мех. – 1973. – Т.9, №5.

196. Синева, Н.Ф. Расчет цилиндрической оболочки переменной жесткости, взаимодействующей с нелинейно-деформируемым основанием / Н.Ф. Синева, Ф.С. Селиванов, Д.В. Никитюк // Вестник СГТУ. – 2011. – № 2 (60).

197. Смирнов, А.Ф. Динамика и устойчивость. Спецкурс / А.Ф. Смирнов и др. – М.: Стройиздат, 1984.

198. Соколов, В.Г. Свободные колебания криволинейного трубопровода, содержащего поток жидкости / В.Г. Соколов // Строительство трубопроводов. – 1981. – № 6. – С. 25–26.

199. Соколов, В.Г. Решение задачи о свободных колебаниях криволинейных участков трубопроводов с потоком жидкости / В.Г. Соколов, А.В. Березнёв // Изв. вузов. Нефть и газ. – 2005. – № 1. – С. 80–84.

200. Соколов, В.Г. Уравнение движения криволинейного участка трубопровода с потоком жидкости / В.Г. Соколов, А.В. Березнёв // Изв. вузов. Нефть и газ. – 2004. – № 6. – С. 76–80.

201. Соколов, В.Г. Колебания и устойчивость магистральных газопроводов при подводной прокладке / В.Г. Соколов, А.А. Ефимов // Вестник гражданских инженеров. – 2007. – № 1 (10), – С. 36–41.

202. Соколов, В.Г. Параметрические колебания и динамическая устойчивость магистральных газопроводов при наземной прокладке / В.Г. Соколов, И.О. Разов // Вестник гражданских инженеров. – 2014. – № 2 (43). – С. 65–68.

203. Соколов, В.Г. Свободные колебания и статическая устойчивость нефтепровода большого диаметра с учетом потока жидкости, продольной сжимающей силы и упругого основания / В.Г. Соколов, И.О. Разов // Вестник гражданских инженеров. – 2014. – № 1 (42). – С. 49–53.

204. Соколов, В.Г. Свободные колебания подземных прямолинейных тонкостенных участков газопроводов / В.Г. Соколов, А.В. Дмитриев // Вестник гражданских инженеров. – 2019. – № 2 (73). – С. 29–34. – DOI 10.23968/1999-5571-2019-16-2-29-34.

205. Соколов, В.Г. Собственные колебания тонкостенной тороидальной оболочки с учётом протекающей жидкости: монография / В.Г. Соколов, А.В. Березнев, Ю.В. Огороднова. – Тюмень: Тюменский индустриальный университет, 2017. – 80 с. – ISBN 978-5-9961-1425-2. – EDN ZDRXWT.

206. Соколов, В.Г. Динамическая устойчивость стальных газопроводов при подводной прокладке / В.Г. Соколов, А.А. Ефимов // Известия высших учебных заведений. Нефть и газ. – 2007. – № 4. – С. 47–50.

207. Соколов, В.Г. Колебания, статическая и динамическая устойчивость трубопроводов большого диаметра: дис. ... доктор. техн. наук: 05.23.17 / Соколов Владимир Григорьевич. – СПб., 2011. – 314 с.

208. Соколов, В.Г. О демпфирующем влиянии воды на свободные колебания морских глубоководных трубопроводов / В.Г. Соколов // Вестник гражданских инженеров. – 2010. – № 3 (24). – С. 39–41.

209. Соколов, В.Г. Свободные колебания тонкостенных газопроводов большого диаметра при полуподземной прокладке / В.Г. Соколов, И.О. Разов // Вестник гражданских инженеров. – 2016. – № 6 (59). – С. 114–120.

210. Султангареев, Р.Х. Обеспечение работоспособности газопроводов в зонах геодинамической активности: автореф. дис. ... канд. тех. наук. Уфа: УГНТУ, 2009. – 24 с.

211. Теренин, Б.М. Колебания замкнутых цилиндрических оболочек / Исслед. по теории сооружений. – Вып. 18. – М.: Стройиздат, 1970. – С. 32–35.

212. Тимошенко, С.П. Пластинки и оболочки / С.П. Тимошенко., С. Войновский–Кригер. – М.: Наука, 1966. – 635 с.

213. Тимошенко, С.П. Колебания в инженерном деле / С.П. Тимошенко. – М.: Наука, 1967. – 444 с.

214. Толстов, Г.П. Ряды Фурье / Г.П. Толстов. – 2-е изд., испр. – М.: Физматгиз, 1960. – 360 с.

215. Устарханов, О.М. Исследование напряжённно-деформированного состояния трехслойной цилиндрической оболочки / О.М. Устарханов, Х.М. Муселемов, И.Т. Ярахмедов // Известия вузов. Северо-Кавказский регион. Серия: Технические науки. – 2021. – № 3 (211).

216. Ушаков, В.С. Колебания криволинейных участков трубопроводов самолётных гидросистем при протекании через них жидкости / В.С. Ушаков // Научно-технич. сборник. – Вып. 26. – Рига, ВИАВУ, 1956. – С. 22–31.

217. Феодосьев, В.И. О колебаниях и устойчивости трубы при протекании через нее жидкости / В.И. Феодосьев // Инж. сборник. – 1952. – Т. 10. – С. 169–170.

218. Филин, А. Прикладная механика твердого деформируемого тела. Т. 3.: Динамика и устойчивость деформируемых систем / А. Филин. – М.: Наука, Гл. ред. физ.-мат. литературы, 1981. – 480 с.

219. Филиппов, А.П. Колебания механических систем / А.П. Филиппов. – Киев: Наук. думка, 1955. – 96 с.

220. Филиппов, А.П. Колебания цилиндрических оболочек / А.П. Филиппов // Прикладная математика и механика. – 1937. – Т.1, Вып. 1. – С. 117.

221. Филиппов, С.Б. Колебания трехслойных цилиндрических оболочек / С.Б. Филиппов, Н.В. Наумова, Д.Н. Иванов // Вестник Санкт-Петербургского университета. Математика. Механика. Астрономия. – 2007. – № 2.

222. Филиппова, В.Р. Автоматизированный расчет величины присоединенной массы жидкости при колебаниях трубопровода подводного перехода нефтепровода / В. Р. Филиппова, А.Г. Поздеев // Вестник науки и образования. – 2020. – № 15–2 (93). – С 5–8. – doi:10.24411/2312-8089-2020-11502.

223. Фисенко, Е.Н. Устойчивость трехслойной цилиндрической оболочки с закрепленными краями, нагруженной внешним давлением / Е.Н. Фисенко, А.В. Лопатин // Актуальные проблемы авиации и космонавтики. – 2015. – № 11.

224. Флюгге, В. Статика и динамика оболочек / В. Флюгге. – М.: Госстройиздат, 1961 – 306 с.

225. Халецкая, О.Б. Свободные колебания тонкостенной криволинейной трубы // Известия вузов. Строительство и архитектура. – 1975. – № 11. – С. 34–39.

226. Челомей, В.Н. (пред.) Колебания линейных систем / В.Н. Челомей; под ред. В.В. Болотина. – М.: Машиностроение, 1978 – Т. 1. – 352 с.

227. Челомей, С.В. О динамической устойчивости упругих систем при протекании через них пульсирующей жидкости / С.В. Челомей // Механика твёрдого тела. – 1984. – № 5. – С. 170–174.

228. Чижов, В.Ф. Динамика и устойчивость трубопровода / В.Ф. Чижов // Строительная механика и расчет сооружений. – 1987. – № 4. – С. 33–34.

229. Шевляков, А. Г. Колебания цилиндрических трубопроводов, заполненных жидкостью, обусловленные поперечным импульсом внешнего давления / А. Г. Шевляков // Строительная механика инженерных конструкций и сооружений. – 2009. – № 2. – С. 65–74.

230. Шитикова, М.В. Численный анализ нелинейных колебаний пластины на вязкоупругом основании под действием подвижной осциллирующей нагрузки на основе моделей с дробными производными / А. И. Круссер, М. В. Шитикова // Вестник Самарского государственного технического университета. Серия: Физико-математические науки. – 2022. – Т. 26, № 4. – С. 694–714. – DOI 10.14498/vsgtu1957. – EDN DOBLOB.

231. Шитикова, М. В. Упругой пластинки на вязкоупругом основании при наличии внутреннего резонанса один к одному / М. В. Шитикова, В. В. Канду //

Известия высших учебных заведений. Строительство. – 2020. – № 3(735). – С. 5–22. – DOI 10.32683/0536-1052-2020-735-3-5-22. – EDN VUGFIN.

232. Шмидт, Г. Параметрические колебания / Г. Шмидт. – М.: Мир, 1978 – 336 с.

233. Шульман, С.Г. Некоторые случаи свободных колебаний пластин и цилиндрических оболочек, соприкасающихся с жидкостью // VI всесоюзная конференция по теории оболочек и пластинок. – М.: Наука, 1966. – С. 939–944.

234. Щеглов, Г.А. Динамическая устойчивость прямого трубопровода с протекающей жидкостью под действием двух параметрических возбуждений: автореф. дис. ... канд. физ.-мат. наук: 05.13.16 / Щеглов Георгий Александрович; [МГТУ им. Баумана]. – М., 1999. – 15 с.

235. Якушев, Н.З. Вынужденные нелинейные колебания длинной цилиндрической оболочки / Н.З. Якушев // Исследования по теории пластин и оболочек. – 1967. – № 5. – С. 388–395.

236. Янке, Е. Специальные функции / Е. Янке, Ф. Эмде, Ф. Леш. – М.: Наука, 1964. – 344 с.

237. Ahmed, M.K. Natural frequencies and mode shapes of variable thickness elastic cylindrical shells resting on a Pasternak foundation / M.K. Ahmed // Journal of Vibration and Control. –2016.– Vol. 22, no. 1. – Pp. 37–50.

238. Amabili, M., Arziera, R., & Negri, A. (2002). EXPERIMENTAL STUDY ON LARGE-AMPLITUDE VIBRATIONS OF WATER-FILLED CIRCULAR CYLINDRICAL SHELLS. Journal of Fluids and Structures, 16, 213–227. <https://doi.org/10.1006/JFLS.2001.0412>.

239. Arnold, R.N. Flexural vibrations of the walls of thin cylindrical shells having freely supported ends / R.N. Arnold, N. Ronald, G. B. Warburton // Proceedings of the Royal Society of London. Series A. Mathematical and Physical Sciences. – 1949. – Vol. 197. – Pp. 238–256.

240. Ashley, H. Bending vibrations of a pipeline, containing flowing fluid [Text] / H. Ashley, G. Haviland // Journ. Appl. Mech. – 1950. – Vol. 17, № 3. – Pp. 229–232.

241. Benjamin, T.B. Dynamics of a system of articulated pipes conveying fluid. I Theory. II Experiments // Proc. of the Roy. Soc. Ser. A. Vol. 261. 1961. London, pp. 457–499.
242. Bochkarev, S. (2022). Natural Vibrations of a Cylindrical Shell with Fluid Partly Resting on a Two-Parameter Elastic Foundation. *International Journal of Structural Stability and Dynamics*. <https://doi.org/10.1142/s0219455422500717>.
243. Chang, H.H., On the flexural vibrations of a pipeline containing flowing fluid // Proc. Teoret. And Appl. Mech. India, 1957, p. 254.
244. Chen S.S. Instability of uniformly curved tube conveying fluid // Jour. Appl. Mech, vol. 38 and Trans ASME, vol. 93, Ser E., dec. 1971, p. 1087.
245. Chen S.S. Out-of-plane vibration and stability of curved tubes conveying fluid // Journ. Appl. Mech, vol. 40, № 2, Ser. E., 1973, pp. 975–979.
246. Chen S.S. Vibration and stability of a uniformly curved tube conveying fluid // Journ. Acoust. Soc. Amer., vol. 51, № 1, pr. 2, 1972, pp. 223–232.
247. Chen, H. Vibration of a Pipeline Containing Fluid Flow with Elastic Support / H. Chen // M. Sc. Thesis, Ohio University. – 1991. – P. 61.
248. Chen, S. S. Dynamic stability of tube conveying fluid / S.S. Chen // Journ. Of the Eng. Mech. Division. – October, 1971. – Vol. 97. – Pp. 1469–1485.
249. Chen, S. S. Free vibration of fluid conveying cylindrical sheells / S. S. Chen, G. S. Rosenberg // Journ of Eng of India. – 1974. – vol. 9. – № 2. – Pp. 420–526.
250. Chiba, M., Yamaki, N., & Tani, J. (1984). Free vibration of a clamped-free circular cylindrical shell partially filled with liquid–part III: Experimental results. *Thin-walled Structures*, 3, 1–14. [https://doi.org/10.1016/0263-8231\(85\)90016-3](https://doi.org/10.1016/0263-8231(85)90016-3).
251. Djondjorov, P. On the critical velocities of pipes on variable elastic foundations / P. Djondjorov // Journal of Theoretical and Applied Mechanics. – 2001. – Vol. 31. – Pp. 73–81.
252. Djondjorov, P. Dynamic stability of fluid conveying cantilevered pipes on elastic foundations / P. Djondjorov, V. Vassilev, Dzhupanov // Journal of Sound and Vibration. – 2001. – Vol. 247 (3) – Pp. 537–546.

253. Doare, O. Local and global instability of fluid-conveying pipes on elastic foundations / O. Doare, E. de Langre // *Journal of Fluids and Structures*. – 2002. – Vol. 16. – Pp. 1–14.

254. Donnel, L.H. A new theory for the buckling of thin cylinders under axial compression and bending / L.H. Donnel // *Trans. ASMF*. Vol. 56, № 11, November 1934, pp. 86–94.

255. Federhofer, K. Zur Schwingzahlberechnung des Dünnwandigen Hohlzylinders / *Ingr – Arch.* 10–11, 1939–1940.

256. Forsberg, K. Influence of boundary conditions on the modal characteristics of thin cylindrical shells. « *AIAA Journal* », 1964, 2, № 12.

257. Fung, Y. C. On the vibrations of thin cylindrical shells under internal pressure / Y. C Fung // *J. Aeronaut. Sci.* – 1957. – Vol. 24. – № 9.

258. Gottenberg, W. (1960). Experimental Study of the Vibrations of a Circular Cylindrical Shell. *Journal of the Acoustical Society of America*, 32, 1002–1006. <https://doi.org/10.1121/1.1908262>.

259. Greenspoon, I.E. Effect of external and internal static pressure on the natural frequencies of unsteffened, cross-stiffened, and sandwich cylindrical shells // *Journ. Acous. Soc. Amer.*, 39, № 2, 1966.

260. Harings, I.A. Instability of thin - walled cylinders subjected to internal pressure // *Philips Research Report*, 7, 1952, pp. 112–118.

261. Heinrich, G. Vibrations of tubes with flow // *Zeitschrift für angewandte Math. und Mech.*, 36, 1956, pp. 417–427.

262. Hill, J.L., Davis C.G. The effect of initial forces on the hydroelastic vibration of planar curved tubes // *Journ. of Appl. Mech.*, vol. 41, № 2, June 1974, pp. 355–359.

263. Housner, G.W. Bending vibrations of a pipe line containing flowing fluid // *Journ. of Appl. Mech.*, 19 № 2, 1952, pp. 205–208.

264. Hsu, C. S. On the parametric excitation of a dynamic system having multiple degrees of freedom / C. S. Hsu // *J. Appl. Mech.* – 1963. – Vol. 30, № 3. – Pp. 367–372.

265. Hsu, T., Min, E.A. A theory of laminated cylindrical shell consisting of layers of orthotropic laminae // *AIAA Journ.*, V.12, 1970.

266. Hu, H.H. and Tsoon W.S. On the flexural vibrations of a pipe containing flowing fluid // Proc. of theor. and Apl. Mech. (India), pp. 203–216.
267. Kairov, A. (1998). An experimental study of the vibrations of cylindrical shells with holes. Journal of Mathematical Sciences, 90, 1879–1882. <https://doi.org/10.1007/BF02432831>.
268. Kim, Y. Free vibration analysis of FGM cylindrical shell partially resting on Pasternak elastic foundation with an oblique edge / Y. Kim // Compos. Part B-Eng., – 2015. –Vol. 70, Pp. 263–276.
269. Kohli, A.K. Vibration analysis of straight and curved tubes conveying fluid by means of straight beam finite elements / A.K. Kohli, B.S. Nakra // Journ. of sound and vibration. – 1984. – 93(2). – Pp. 307–311.
270. Kordes, E.E. Vibration analyses of toroidal shells of circular cross section / Dokt. Diss. Politechn. Inst., 1960, 118 p.
271. Kouretzis, G.P. Analysis of buried pipelines subjected to ground surface settlement and heave / G.P. Kouretzis, D. Karamitros, S.W. Sloan // Canadian Geotechnical Journal. – 2015. – Vol. 52 – Pp. 1058–1071.
272. Kumar, A., & Patel, B. (2015). Experimental Study on Nonlinear Vibration of Cantilever Cylindrical Shell. International Journal of Structural Stability and Dynamics, 15, 1450085. <https://doi.org/10.1142/S0219455414500850>.
273. Lee, S. Y. Stability of a Timosenko Beam Resting on a Winkler Elastic Foundation // S. Y. Lee and Y. H. Kuo and F. Y. Lin // Journal of Sound and Vibration. – 1992. Vol. 153 (2). – Pp. 193–202.
274. Liepins A.A. Free vibrations of prestressed toroidal membrane // AIAA Journal, 1965, 3, № 10, pp. 152–160.
275. Lilkova–Markova, S.V. Vibration of a pipe on elastic foundation / S.V Lilkova–Markova and D.S. Lolov // Sadhana. – 2004. – № 29 (3). – Pp. 259–262.
276. Li F., Wei B., Zhao X., Shao X., Cai R. Analysis on bimetallic lined pipe for sour service in oil and gas field. ICPTT 2013: Trenchless Technology – The Best Choice for Underground Pipeline Construction and Renewal, Proceedings of the International Conference on Pipelines and Trenchless Technology, 2013. pp. 935–941

277. Long, R.A. Experimental and theoretical study of transverse vibration of a tube containing flowing fluid // *Journ. of Appl. Mech.*, 22, 1955, pp. 65–68.

278. Lottati, I. The effect of an elastic foundation and of dissipative forces on the stability of fluid-conveying pipes / I. Lottati, A. Kornecki // *Journal of Sound and Vibration*. – 1986. – Vol. 2 (109). – Pp. 327–338.

279. Love, A.E.H. On the small free vibrations and deformation of thin elastic shell // *Phil. Trans. Roy. Soc.*, v. 179(A). 1888, pp. 520.

280. Mahrenholtz, O.H. Beam on viscoelastic foundation: an extension of Winkler's model // O. H. Mahrenholtz // *Archive of Applied Mechanics*. – 2010. – Vol. 80(1). – Pp. 93–102.

281. Massa, A.L. The Influence of Internal Pressure on Pipeline Natural Frequency / A.L. Massa, N.S. Galgoul, N.O. Junior, A.C. Fernandes, F.M. Coelho, S.F. Neto. – 2009.

282. Ming, R. S., Pan, J., & Norton, M. P. (2002). Free vibrations of elastic circular toroidal shells. *Applied Acoustics*, 63, 513–528. [https://doi.org/10.1016/S0003-682X\(01\)00051-2](https://doi.org/10.1016/S0003-682X(01)00051-2)

283. Mc Gill, D.J. Axisymmetric free oscillations of thick toroidal shells. *Doct. Diss. Univ. Kans.*, 1966.

284. Mc Gill, D.J., Lenzen K.H. Cirkumferential axisymmetric free oscillations of thick hollowed tori // « *Internat. J. Sjlids and struct* » 1967, 3, № 5, pp. 28–31.

285. Mc Gill, D.J., Lenzen K.H. Polar axisymmetric free oscillations of thick hollowed tori // « *S'IAM J. Appl. Math* », 1967, 15, № 3, pp. 82–94.

286. Naguleswaran, S. and Williams C.J. Lateral vibrations of a pipe conveying fluid // *The Journ. of Mech. Eng. Sci.*, 10, 1968, pp. 228–238.

287. Nawras, H.M. Effect of a Viscoelastic Foundation on the Dynamic Stability of a Fluid Conveying Pipe // Nawras, H.M. // *International Journal of Applied Science and Engineering*. – 2014. Vol. 12 (1). – Pp. 59 – 74.

288. Niordson, R.I. Vibrations of a cylindrical tube containing flowin fluid / R.I. Niordson // *Kunliga Tekniska Hogskolans Hongligar*. – 1953. – № 73.

289. Olson Mervyn, D. Some experimental observations on the nonlinear vibration of cylindrical shells // *AIAA Journal*. 1965, 3, № 9, pp. 1775–1777.
290. Paidoussis, M.P., Denise J. P. Flutter of thin cylindrical shells conveying fluid // *Journ. of sound and vibrations*. v. 20, 1972, № 1, pp. 9–26.
291. Paidoussis, M. P. Dynamic stability of pipes conveying fluid / M.P.Paidoussis, N.T.Issid // *Journ. of sound and vibr.* – 1974. – 33 (3). – Pp. 264 – 294.
292. Paidoussis, M.P. Experiments on parametric resonance of pipes containing pulsate flow / M.P. Paidoussis, N.T. Issid // *Trans of ASME*. – June 1976. – Pp. 198–202.
293. Paidoussis, M.P. Flow–induced instabilities of cylindrical structures / M.P. Paidoussis // *Appl. Mech. Revius*. – 1987.–Vol.40. – Pp. 162–175.
294. Paidoussis, M.P. Flutter of thin cylindrical shells conveying fluid / M.P. Paidoussis, J.P. Denise // *Journ .of sound and vibrations*. – 1972. – Vol. 20(1). – Pp. 9–26.
295. Paliwal, D.N. Free vibrations of circular cylindrical shell on Winkler and Pasternak foundations. / D.N. Paliwal, R.K. Pandey, T. Nath // *International Journal of Pressure Vessels and Piping*, – 1996. – Vol. 69. – Pp. 79–89.
296. Permyakov, D., Pantileev, A., & Makhnovich, S. (2018). Calculated and Experimental Study of Free Vibrations of a Cylindrical Shell. *Proceedings of the 4th International Conference on Industrial Engineering*. https://doi.org/10.1007/978-3-319-95630-5_3.
297. Razov, I. Effect of internal pressure on parametric vibrations and dynamic stability of thin-walled ground pipeline larger diameter connect with elastic foundation / V. Sokolov, I. Razov, Y. Ogorodnova // *MATEC Web of Conferences* 2016.
298. Razov, I. Investigation of the frequencies of free oscillations of the above-ground main pipelines depending on the type of fastening / V. Sokolov, I. Razov, E. Koinov and A. Korkishko // *MATEC Web Conf.*, 193 (2018) 02033, Pp. 1–10.
299. Razov, I. Free oscillations of semi-underground trunk thin-wall oil pipelines of big diameter / V. Sokolov, I. Razov // *International Scientific Conference Energy Management of Municipal Facilities and Sustainable Energy Technologies EMMFT*

2018. EMMFT–2018 2018. Advances in Intelligent Systems and Computing, vol. 982. Springer, Cham. 2020. Pp. 615–627

300. Razov, I. Free vibrations of thin-walled semi-underground main gas pipelines of large diameter, with the attached ground mass / V. Sokolov, I. Razov // MATEC Web of Conferences, vol. 106. Pp. 1–11. 2017.

301. Razov, I. Parametric vibrations of the underground oil pipeline / I. Razov, V. Sokolov, A. Dmitriev, Ju. Ogorodnova // E3s web of conferences : XV International Scientific Conference on Precision Agriculture and Agricultural Machinery Industry “State and Prospects for the Development of Agribusiness – INTERAGROMASH 2022”, Rostov-on-Don, 25–27.05.2022. Vol. 363. – EDP Sciences: EDP Sciences, 2022. – Pp. 1–10.

302. Ross, C., Johns, T., & Stanton, R. (1992). Vibrations of Circular Cylindrical Shells under External Water Pressure. Proceedings of the Institution of Mechanical Engineers, Part C: Journal of Mechanical Engineering Science, 206, 79–86. https://doi.org/10.1243/PIME_PROC_1992_206_101_02.

303. Ruocco, E. An Exponential Matrix Method for the Buckling Analysis of Underground Pipelines Subjected to Landslide Loads / E. Ruocco, R.D. Laora, V. Minutolo //Procedia Earth and Planetary Science. – 2016. – Pp. 25–34.

304. Shah, A. (2023). VIBRATIONAL ANALYSIS OF SUBMERGED CYLINDRICAL SHELLS BASED ON ELASTIC FOUNDATIONS. Pakistan Journal of Science. <https://doi.org/10.57041/pjs.v66i3.190>.

305. Sharma, C.B. Vibration characteristics of a clamped – free and clampedring – stiffened circular cylindrical shells / C.B. Sharma., D.J. Johns // Journ. of sound and vibr., 14, № 4, 1971.

306. Smith, T.E. Stability of a beam on an elastic foundation subjected to follower forces / T.E Smith, G. Hermann // Journal of applied mechanics. – 1972 – №39. – Pp. 628–629.

307. Sofiyev A.H. Effects of elastic foundation on the vibration of laminated non-homogeneous orthotropic circular cylindrical shells / A.H. Sofiyev, S.N. Keskin, Ali H. Sofiyev // Shock Vib. – 2004. – Vol. 11, no. 2. – Pp. 89–101.

308. Sokolov, V. Free oscillations of thin-walled bimetallic pipelines of large diameter on an elastic foundation / V. Sokolov, I. Razov, E. Koynov // MATEC Web of Conferences, Ho Chi Minh City, 02–05.03.2018. Vol. 193. – Ho Chi Minh City: EDP Sciences, 2018. – P. 02027. – DOI 10.1051/mateconf/201819302027. – EDN TYUGQT.

309. Sokolov, V. Effect of internal pressure on parametric vibrations and dynamic stability of thin-walled ground pipeline larger diameter connect with elastic foundation / V. Sokolov, I. Razov, Y. Ogorodnova // MATEC Web of Conferences 73, 04002 (2016).

310. Sokolov, V. Influence of the length parameter of an underground oil pipeline on the frequency of free oscillation / V. Sokolov, I. Razov, A. Dmitriev // E3S Web of Conferences : Topical Problems of Green Architecture, Civil and Environmental Engineering, TPACEE 2019, Moscow, 20–22.11.2019. Vol. 164. – Moscow: EDP Sciences, 2020. – Pp. 1–10.

311. Sokolov, V. Influence of the stiffness coefficient of an elastic foundation on the frequency of free oscillations of polyethylene pipes in a semi-underground laying / V. Sokolov, I. Razov, S. Volinets // E3S Web of Conferences : 22nd International Scientific Conference on Construction the Formation of Living Environment, FORM 2019, Tashkent, 18–21 апреля 2019 года. Vol. 97. – Tashkent: EDP Sciences, 2019. – Pp. 1–5.

312. Stein, R. A. Vibration of pipes containing flowing fluids / R.A. Stein, M.W. Torbiner // Journ. of Appl. Mech. – 1970. – Vol. 92. – Pp. 906–916.

313. Strutt, J.W. (Lord Rayleigh). The theory of sound, 2 vols., London, 1877–1878 (2nd 1894–1896).

314. Torkaman-Asadi, M.A. Free vibration analysis of cylindrical shells partially resting on an elastic foundation. / M.A. Torkaman-Asadi, R.D. Firouz-Abadi // Meccanica – 2016. – Vol. 51. – Pp. 1113–1125

315. Wagner, H.N.R. Buckling of cylindrical shells under axial compression with loading imperfections: An experimental and numerical campaign on low knockdown factors / H.N.R. Wagner, C. Hühne, M. Janssen // Thin-Walled Structures, Volume 151, 2020, 106764.

316. Watari, A., Voshimura M. In plane lateral vibrations and stability of a curved tube conveying fluid // Trans. of the Japan Soc. of Mech. Eng.,v. 42, № 353,1976, pp. 127–133.

317. Weaver, D.S. On the dynamic stability of fluid conveying pipes / D.S. Weaver, T.E. Unny // Journ .Appl. Mech. – 1973. – Vol. 40. – Pp. 51–54.

318. Xü, W. Study on vortex-induced vibrations (VIV) of free spanning pipeline considering pipe-soil interaction boundary conditions. / W.-H. Xü, W.-D. Xie, X.-F. Gao, Y.-X. Ma // Chuan Bo Li Xue/Journal of Ship Mechanics. – 2018. – Vol. 51. – Pp. 446–453.

319. Yang, H. Parametric resonance of submerged floating pipelines with bi-frequency parametric and vortex-induced oscillations excitations / H. Yang, Z. Wang, F. Xiao // Ships and Offshore Structures, – 2017. – Vol. 12 – Pp. 395–403.

320. Zippo, A., Barbieri, M., Iarriccio, G., & Pellicano, F. (2020). Nonlinear vibrations of circular cylindrical shells with thermal effects: an experimental study. *Nonlinear Dynamics*, 99, 373–391. <https://doi.org/10.1007/S11071-018-04753-1>.

ПРИЛОЖЕНИЕ А**СПРАВКА**

о принятии к использованию результатов диссертационной работы Разова Игоря Олеговича, кандидата технических наук, доцента, на тему:
«Аналитические методы динамического расчета тонкостенных трубопроводов большого диаметра в виде цилиндрических и тороидальных оболочек при наземном, частично заглубленном и подземном размещении»

Разработанные в диссертационной работе кандидата технических наук, доцента Игоря Олеговича Разова методы расчета динамических характеристик, замкнутых цилиндрических и тороидальных оболочек в упругой среде, были приняты к внедрению на кафедрах Строительного института Тюменского индустриального университета. В диссертационной работе на тему: «Аналитические методы динамического расчета тонкостенных трубопроводов большого диаметра в виде цилиндрических и тороидальных оболочек при наземном, частично заглубленном и подземном размещении» предложено развитие моделей нагружения замкнутых цилиндрических и тороидальных оболочек в упругой среде и методы определения динамических характеристик с учетом влияния стационарного и нестационарного внутреннего рабочего давления, продольной сжимающей силы, температуры, упругих свойств грунта, инерционных характеристик материала оболочки, а также присоединенной массы и скорости потока протекающей жидкости. Результаты исследований имеют прикладной характер и могут быть использованы при проектировании и эксплуатации тонкостенных трубопроводов для оптимизации работы перекачивающих установок и предотвращения резонансных явлений. Методы расчета позволяют вычислить спектр частот свободных колебаний как прямолинейных, так и криволинейных участков трубопроводов, что способствует повышению надежности их эксплуатации. Эти подходы могут быть использованы не только в магистральном транспорте, но и в таких областях, как атомная энергетика и аэрокосмическое строительство, где применяются тонкостенные оболочки, взаимодействующие с упругими средами. Разделы диссертации находят применение в учебных дисциплинах кафедры строительной механики, включая курс «Теория расчета пластин и оболочек».

Директор Строительного института
ФГБОУ ВО «Тюменский индустриальный университет»

к.т.н., доцент



А.В. Набоков

ПРИЛОЖЕНИЕ Б



Общество с ограниченной ответственностью
«Научно-исследовательский институт
природных газов и газовых технологий –
Газпром ВНИИГАЗ»
(ООО «Газпром ВНИИГАЗ»)

пр-кт Малоохтинский, д. 45, литера А, помещ. 2-Н, офис 812,
вн.тер.г. муниципальный округ Малая Охта, г. Санкт-Петербург, 195112
тел.: +7 (812) 704-01-01
e-mail: vniigaz@vniigaz.gazprom.ru, vniigaz.gazprom.ru
ОКПО 31323949, ОГРН 1025000651598, ИНН 5003028155, КПП 780601001

№ 5/г от 5/Н
на № _____ от _____

СПРАВКА

о принятии к использованию результатов работы, представленной на
соискание ученой степени доктора технических наук

«Аналитические методы динамического расчета тонкостенных
трубопроводов большого диаметра в виде цилиндрических и тороидальных
оболочек при наземном, частично заглубленном и подземном размещении»

(автор - Разов Игорь Олегович)

Данная справка подтверждает, что результаты полученные в рамках
диссертационной работы «Аналитические методы динамического расчета
тонкостенных трубопроводов большого диаметра в виде цилиндрических и
тороидальных оболочек при наземном, частично заглубленном и подземном
размещении», представленной на соискание ученой степени доктора
технических наук, приняты к использованию в ООО «Газпром ВНИИГАЗ»
при формировании новых, и актуализации существующих нормативных
документов разрабатываемых для группы компаний ПАО «Газпром», а
именно:

1. Методы определения частот свободных колебаний цилиндрических и тороидальных оболочек в упругой среде (грунте), представляющих собой расчетные модели участков газопроводов.
2. Методы определения предельных параметров, приводящих к статической потере устойчивости.
3. Критерий применимости теории цилиндрических и тороидальных (однородных и неоднородных) оболочек при оценке динамической устойчивости газопроводов.
4. Методы оценки динамической устойчивости и параметрических колебаний оболочечных систем в упругой среде при нестационарных внешних воздействиях.

2

Использование полученных результатов позволит повысить точность
определения динамических характеристик газопроводов в грунте, что
способствует повышению надежности трубопроводной системы в процессе
эксплуатации.

Главный инженер

кандидат технических наук, доцент



И.Г. Волынец