

**МИНИСТЕРСТВО НАУКИ И ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ
РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ**

**Федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение высшего
образования «Санкт-Петербургский государственный архитектурно-
строительный университет»**

На правах рукописи

Семенов Алексей Александрович

**ПРОЧНОСТЬ И УСТОЙЧИВОСТЬ ПОДКРЕПЛЕННЫХ
ОРТОТРОПНЫХ ОБОЛОЧЕЧНЫХ КОНСТРУКЦИЙ В ЗАДАЧАХ
СТАТИКИ И ДИНАМИКИ**

Специальность 2.1.9. Строительная механика

Диссертация

на соискание ученой степени

доктора технических наук

Научный консультант:
доктор технических наук,
профессор Карпов В.В.

Санкт-Петербург – 2023

ОГЛАВЛЕНИЕ

ОГЛАВЛЕНИЕ	2
ВВЕДЕНИЕ	9
ГЛАВА 1. МАТЕМАТИЧЕСКИЕ МОДЕЛИ ДЕФОРМИРОВАНИЯ ТОНКОСТЕННЫХ ОРТОТРОПНЫХ ОБОЛОЧЕК ПРИ СТАТИЧЕСКОМ НАГРУЖЕНИИ	27
1.1 ОБОЛОЧКИ ПОКРЫТИЯ СТРОИТЕЛЬНЫХ СООРУЖЕНИЙ	29
1.2 ГЕОМЕТРИЧЕСКИЙ ВИД РАССМАТРИВАЕМЫХ КОНСТРУКЦИЙ	30
1.3 ОСНОВНЫЕ СООТНОШЕНИЯ ТЕОРИИ ОРТОТРОПНЫХ ОБОЛОЧЕК.....	34
1.3.1 Нелинейные геометрические соотношения	35
1.3.2 Физические соотношения при линейно-упругом деформировании	38
1.3.3 Усилия, моменты и поперечные силы	39
1.3.4 Виды статических нагрузок	40
1.3.5 Собственный вес конструкции.....	41
1.4 ФУНКЦИОНАЛ ПОЛНОЙ ПОТЕНЦИАЛЬНОЙ ЭНЕРГИИ ДЕФОРМАЦИИ.....	42
1.4.1 Модель Кирхгофа – Лява.....	43
1.4.2 Модель Тимошенко – Рейсснера	43
1.5 СОПОСТАВЛЕНИЕ С ТЕОРИЕЙ ОБОЛОЧЕК В. В. НОВОЖИЛОВА	44
1.6 КРАЕВЫЕ УСЛОВИЯ.....	46
1.6.1 Модель Кирхгофа – Лява.....	46
1.6.2 Модель Тимошенко – Рейсснера	48
1.7 БЕЗРАЗМЕРНЫЕ ПАРАМЕТРЫ ДЛЯ ГЛАДКИХ ОРТОТРОПНЫХ ОБОЛОЧЕК	49
1.8 ВЫВОДЫ	54

ГЛАВА 2. МАТЕМАТИЧЕСКИЕ МОДЕЛИ ДЕФОРМИРОВАНИЯ ТОНКОСТЕННЫХ ОРТОТРОПНЫХ ОБОЛОЧЕК ПРИ СТАТИЧЕСКОМ НАГРУЖЕНИИ, ИМЕЮЩИХ РЕБРА ИЛИ ВЫРЕЗЫ.... 56

2.1 МЕТОДЫ ЗАДАНИЯ ПОДКРЕПЛЯЮЩИХ ОБОЛОЧКУ ЭЛЕМЕНТОВ И ЖЕСТКОСТНЫЕ ХАРАКТЕРИСТИКИ В УСИЛИЯХ И МОМЕНТАХ.....	61
2.1.1 Модель ребристой оболочки при контакте ребер с обшивкой по линии	64
2.1.2 Модель ребристой оболочки при контакте ребер с обшивкой по полосе.....	65
2.1.3 Модель ребристой оболочки при «размазывании» жесткости ребер	69
2.1.4 Модель ребристой оболочки при «размазывании» жесткости ребер по методу конструктивной анизотропии	71
2.1.5 Модель ребристой оболочки при «размазывании» жесткости ребер по методу конструктивной анизотропии с учетом ортотропии материала	73
2.1.6 Уточненная модель ребристой оболочки при дискретном введении ребер.....	78
2.1.7 Уточненная модель ребристой оболочки при дискретном введении ребер с учетом ортотропии материала.....	82
2.2 СПОСОБЫ ПРЕОБРАЗОВАНИЯ ФУНКЦИОНАЛА ПОЛНОЙ ПОТЕНЦИАЛЬНОЙ ЭНЕРГИИ ДЕФОРМАЦИИ РЕБРИСТЫХ ОБОЛОЧЕК.....	83
2.2.1 Преобразование функционала для ребристой оболочки при контакте ребер с обшивкой по линии.....	83
2.2.2 Преобразование функционала для ребристой оболочки при контакте ребер с обшивкой по полосе.....	84

2.2.3 Преобразование функционала для ребристой оболочки при «размазывании» жесткости ребер по методу конструктивной анизотропии	86
2.2.4 Преобразование функционала для ребристой оболочки при «размазывании» жесткости ребер по методу конструктивной анизотропии с учетом ортотропии материала	86
2.2.5 Преобразование функционала для ребристой оболочки при уточненном варианте модели	89
2.2.6 Преобразование функционала для ребристой оболочки при уточненном варианте модели с учетом ортотропии материала	91
2.3 МЕТОДЫ ЗАДАНИЯ СКВОЗНЫХ ВЫРЕЗОВ	99
2.3.1 Функционал полной потенциальной энергии деформации	99
2.3.2 Ввод вырезов дискретно	100
2.3.3 Ввод вырезов по методу конструктивной анизотропии	101
2.4 УРАВНЕНИЯ В СМЕШАННОЙ ФОРМЕ	103
2.5 БЕЗРАЗМЕРНЫЕ ПАРАМЕТРЫ ДЛЯ ПОДКРЕПЛЕННЫХ ОРТОТРОПНЫХ ОБОЛОЧЕК	111
2.6 ВЫВОДЫ	114
ГЛАВА 3. АЛГОРИТМЫ ИССЛЕДОВАНИЯ ПРОЧНОСТИ И УСТОЙЧИВОСТИ ПОДКРЕПЛЕННЫХ ОРТОТРОПНЫХ ОБОЛОЧЕК ПРИ СТАТИЧЕСКОМ НАГРУЖЕНИИ	116
3.1 МЕТОД РИТЦА СВЕДЕНИЯ ВАРИАЦИОННОЙ ЗАДАЧИ К СИСТЕМЕ НЕЛИНЕЙНЫХ АЛГЕБРАИЧЕСКИХ УРАВНЕНИЙ	116
3.2 ВЫБОР АППРОКСИМИРУЮЩИХ ФУНКЦИЙ ДЛЯ РАЗЛИЧНЫХ ВИДОВ ЗАКРЕПЛЕНИЯ КОНТУРА ОБОЛОЧКИ	117
3.2.1 Модель Кирхгофа – Лява	117
3.2.2 Модель Тимошенко – Рейсснера	118
3.3 ЛИНЕАРИЗАЦИЯ СНАУ МЕТОДАМИ ПРОДОЛЖЕНИЯ РЕШЕНИЯ	124
3.3.1 Метод продолжения решения по наилучшему параметру	127

3.3.2 Ограничения в методе продолжения решения по наилучшему параметру	130
3.4 МЕТОДИКА ИССЛЕДОВАНИЯ УСТОЙЧИВОСТИ ОБОЛОЧЕК ПРИ СТАТИЧЕСКОМ НАГРУЖЕНИИ	131
3.5 МЕТОДИКА ИССЛЕДОВАНИЯ ПРОЧНОСТИ ОБОЛОЧЕК ИЗ ОРТОТРОПНЫХ МАТЕРИАЛОВ ПРИ СТАТИЧЕСКОМ НАГРУЖЕНИИ	135
3.6 ПРОГРАММНАЯ РЕАЛИЗАЦИЯ АЛГОРИТМА.....	139
3.7 ВЫВОДЫ	140
ГЛАВА 4. ПРОЧНОСТЬ И УСТОЙЧИВОСТЬ ПОДКРЕПЛЕННЫХ ОРТОТРОПНЫХ ОБОЛОЧЕК ПРИ ДЕЙСТВИИ СТАТИЧЕСКОЙ НАГРУЗКИ	142
4.1 ТЕОРИИ ПРОЧНОСТИ.....	142
4.1.1 Критерии предельного состояния для изотропного материала	143
4.1.2 Критерии предельного состояния для ортотропного материала.....	144
4.2 НЕКОТОРЫЕ ИЗОТРОПНЫЕ И ОРТОТРОПНЫЕ МАТЕРИАЛЫ И ИХ МЕХАНИЧЕСКИЕ И ПРОЧНОСТНЫЕ ХАРАКТЕРИСТИКИ.....	149
4.3 ВАРИАНТЫ РАССМАТРИВАЕМЫХ КОНСТРУКЦИЙ.....	151
4.4 ИССЛЕДОВАНИЕ ПОЛОГИХ ОБОЛОЧЕК ДВОЯКОЙ КРИВИЗНЫ	155
4.4.1 Пологие оболочки двоякой кривизны без ребер жесткости.....	156
4.4.2 Пологие оболочки двоякой кривизны, подкрепленные ребрами жесткости	160
4.4.3 Пологие оболочки двоякой кривизны, подкрепленные ребрами жесткости с внешней стороны	184
4.5 ИССЛЕДОВАНИЕ ЦИЛИНДРИЧЕСКИХ ПАНЕЛЕЙ	185
4.5.1 Цилиндрические панели без ребер жесткости	187
4.5.2 Цилиндрические панели, подкрепленные ортогональной сеткой ребер	195

4.5.3 Цилиндрические панели, подкрепленные ребрами жесткости в одном направлении.....	209
4.5.4 Цилиндрические панели, подкрепленные ребрами жесткости с внешней стороны.....	212
4.6 ИССЛЕДОВАНИЕ КОНИЧЕСКИХ ПАНЕЛЕЙ.....	215
4.6.1 Конические панели без ребер жесткости	216
4.6.2 Конические панели, подкрепленные ортогональной сеткой ребер	218
4.6.3 Конические панели, подкрепленные ребрами жесткости в одном направлении.....	223
4.7 ИССЛЕДОВАНИЕ СФЕРИЧЕСКИХ КУПОЛОВ	225
4.8 ДОСТОВЕРНОСТЬ ПОЛУЧЕННЫХ РЕЗУЛЬТАТОВ.....	231
4.8.1 Сравнение с результатами, полученными другими авторами.....	231
4.8.2 Сравнение с результатами, полученными в ПК ANSYS	234
4.9 ВЫВОДЫ	241
ГЛАВА 5. МАТЕМАТИЧЕСКИЕ МОДЕЛИ ДЕФОРМИРОВАНИЯ И АЛГОРИТМЫ ИССЛЕДОВАНИЯ ПОДКРЕПЛЕННЫХ ОРТОТРОПНЫХ ОБОЛОЧЕК ПРИ ДЕЙСТВИИ ДИНАМИЧЕСКОЙ НАГРУЗКИ	244
5.1 КИНЕТИЧЕСКАЯ И ПОТЕНЦИАЛЬНАЯ ЭНЕРГИИ ОБОЛОЧКИ	249
5.1.1 Модель Кирхгофа – Лява.....	249
5.1.2 Модель Тимошенко – Рейсснера	250
5.2 БЕЗРАЗМЕРНЫЕ ПАРАМЕТРЫ В ЗАДАЧАХ ДИНАМИКИ.....	252
5.3 МОДЕЛЬ 1. УРАВНЕНИЯ ДВИЖЕНИЯ ОТНОСИТЕЛЬНО УСИЛИЙ И МОМЕНТОВ.....	254
5.3.1 Модель Кирхгофа – Лява.....	254
5.3.2 Модель Тимошенко – Рейсснера	257
5.4 МОДЕЛЬ 2. УРАВНЕНИЯ ДВИЖЕНИЯ В ВИДЕ НАЧАЛЬНОЙ ЗАДАЧИ ДЛЯ СИСТЕМЫ ОБЫКНОВЕННЫХ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ	261

5.4.1	Модель Кирхгофа – Лява.....	261
5.4.2	Модель Тимошенко – Рейсснера	266
5.5	МОДЕЛЬ 3. УРАВНЕНИЯ ДВИЖЕНИЯ В СМЕШАННОЙ ФОРМЕ	273
5.6	МЕТОДЫ РЕШЕНИЯ СИСТЕМ УРАВНЕНИЙ И ПРОГРАММНАЯ РЕАЛИЗАЦИЯ.....	277
5.7	МЕТОДИКА ИССЛЕДОВАНИЯ УСТОЙЧИВОСТИ И НЕЛИНЕЙНЫХ КОЛЕБАНИЙ ОБОЛОЧЕК ПРИ ДЕЙСТВИИ ДИНАМИЧЕСКОЙ НАГРУЗКИ	279
5.7.1	Методика исследования устойчивости.....	279
5.7.2	Методика исследования нелинейных колебаний.....	280
5.8	ВЫВОДЫ	281
ГЛАВА 6. УСТОЙЧИВОСТЬ И НЕЛИНЕЙНЫЕ КОЛЕБАНИЯ ПОДКРЕПЛЕННЫХ ОБОЛОЧЕК ПРИ ДЕЙСТВИИ ДИНАМИЧЕСКОЙ НАГРУЗКИ		283
6.1	УСТОЙЧИВОСТЬ ПОЛОГИХ ОБОЛОЧЕК ДВОЯКОЙ КРИВИЗНЫ	287
6.1.1	Пологие оболочки двоякой кривизны без ребер жесткости.....	288
6.1.2	Пологие оболочки двоякой кривизны, подкрепленные ребрами жесткости	298
6.2	УСТОЙЧИВОСТЬ ЦИЛИНДРИЧЕСКИХ ПАНЕЛЕЙ.....	302
6.2.1	Цилиндрические панели без ребер жесткости	303
6.2.2	Цилиндрические панели, подкрепленные ребрами жесткости	307
6.3	УСТОЙЧИВОСТЬ КОНИЧЕСКИХ ПАНЕЛЕЙ	312
6.3.1	Конические панели без ребер жесткости	313
6.3.2	Конические панели, подкрепленные ребрами жесткости	315
6.4	ИССЛЕДОВАНИЕ НЕЛИНЕЙНЫХ КОЛЕБАНИЙ ПОЛОГИХ ОБОЛОЧЕК ДВОЯКОЙ КРИВИЗНЫ.....	325
6.5	ВЫВОДЫ	329
ЗАКЛЮЧЕНИЕ		331
СПИСОК СОКРАЩЕНИЙ И УСЛОВНЫХ ОБОЗНАЧЕНИЙ.....		334

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ	340
ПРИЛОЖЕНИЕ А. Свидетельство о государственной регистрации программы для ЭВМ «DimShell: dimensionless calculations of orthotropic shells»	373
ПРИЛОЖЕНИЕ Б. Свидетельство о государственной регистрации программы для ЭВМ «DynShell: dynamic buckling and nonlinear vibrations of orthotropic shells»	374
ПРИЛОЖЕНИЕ В. Дипломы Комитета по науке и высшей школе Санкт-Петербурга	375
ПРИЛОЖЕНИЕ Г. Акт о внедрении результатов диссертационной работы 1	381
ПРИЛОЖЕНИЕ Д. Акт о внедрении результатов диссертационной работы 2	382

ВВЕДЕНИЕ

Актуальность темы исследования. Изучение процесса деформирования оболочечных конструкций имеет существенное значение для различных областей промышленности, в том числе авиастроения, судостроения, ракетостроения и других. В строительстве такие конструкции зачастую применяются, в том числе, для покрытия большепролетных сооружений. Например, такая необходимость возникает при строительстве общественных зданий: стадионов, концертных залов, рынков; при строительстве зданий промышленного назначения: складов, ангаров для техники и оборудования, заводских корпусов [71, 149, 226, 255].

Основное требование к оболочкам-покрытиям строительных сооружений – обеспечение безопасной и долговременной работоспособности конструкции при заданных уровнях нагрузок. При этом важным является и уменьшение их материалоемкости. Оболочки покрытия изготавливаются из железобетона, стали или композиционных материалов, которые обладают высокой жесткостью, но при этом существенно более легкие. Однако малое применение композиционных материалов для конструкций большепролетных строительных сооружений связано с дороговизной материала и недостаточной степенью исследования их работоспособности. Некоторые из таких материалов можно рассматривать как ортотропные.

Проведение комплексных исследований процесса деформирования оболочек по наиболее точным математическим моделям позволит аргументированно принимать проектные решения, что будет способствовать их безопасной работе, а также уменьшению материалоемкости конструкции и снижению её себестоимости.

Тонкостенные оболочечные конструкции могут терять работоспособность не только из-за необратимых изменений в материале (потеря прочности), но и из-за потери устойчивости, когда малое изменение нагрузки приводит к существенному быстрому возрастанию перемещений (прогибов). К сожалению, в большинстве известных исследований авторами анализируется только что-то одно – или прочность, или устойчивость. Данное исследование носит комплексный характер,

и рассматривает оба параметра, определяющие надежность и безопасность строительных конструкций.

Подкрепление тонкостенных оболочек различными жесткостными элементами позволяет существенно улучшить эксплуатационные показатели таких конструкций. Оболочки, подкрепленные ребрами жесткости, теряют устойчивость при нагрузках, в несколько раз больших, чем гладкие. Сфера применения таких оболочек довольно обширна – судостроение, авиастроение, ракетостроение, строительство и т.д. Манипулирование способами подкрепления оболочки позволяет снизить напряжения в местах их концентрации и найти оптимальный вариант конструкции [140, 207, 256, 260].

Поэтому актуальным является совместное исследование прочности, устойчивости и закритического поведения подкрепленных ребрами оболочек из ортотропных материалов на основе наиболее точных математических моделей их деформирования, эффективных алгоритмов расчета и специально разработанного программного обеспечения.

Данные исследования были поддержаны Минобрнауки РФ в рамках выполнения государственного задания № 3801 «Комплексное исследование прочности, устойчивости и нелинейных колебаний подкрепленных оболочечных конструкций на основе разработанных программных продуктов» (2015-2016 гг.), грантом РНФ № 18-19-00474 «Разработка математических моделей и методов расчета необратимого деформирования конструкций со сложной реологией материала» (2018-2020 гг.), неоднократно поддерживались грантами Комитета по научной и высшей школе Санкт-Петербурга (2015, 2016, 2017, 2018, 2020, 2021, 2022 гг.). Кроме того, результаты исследования используются в деятельности научной школы «Компьютерные технологии комплексного исследования прочности, устойчивости и нелинейных колебаний строительных конструкций зданий и сооружений», действующей в СПбГАСУ под руководством д.т.н., профессора В. В. Карпова.

Степень разработанности темы исследования.

Теория тонкостенных оболочек начала развиваться в начале XX века. Основополагающую роль в ее развитии сыграли работы В. З. Власова [33], Б. Г. Галеркина [40], А. Л. Гольденвейзера [44], Л. Доннелла [187], Т. Кармана [212], А. И. Лурье [97], А. Лява [236], Х. М. Муштари [106], В. В. Новожилова [110], Г. Рейсснера [259], Э. Рейсснера [258]. Существенный вклад в дальнейшее развитие теории и методов расчета тонкостенных оболочек внесли работы Н. А. Алумяз [6], С. А. Амбарцумяна [9], И. А. Биргера [25], Н. В. Валишвили [28], А. С. Вольмира [35], С. С. Гаврюшина [39, 198], К. З. Галимова [106], Э. И. Григолюка [46, 48], А. Н. Гузя [202], Р. А. Каюмова [80, 219], В. Н. Паймушина [13, 112], В. В. Петрова [116], В. Г. Соколова [139], А. А. Трещева [148, 150], К. Ф. Черных [157], А. П. Янковского [159, 290] и многих других.

Основы теории анизотропных пластин, и, в частности – ортотропных, можно найти в работах С. А. Амбарцумяна [9], В. В. Васильева [29], С. Г. Лехницкого [96] и др. Устойчивость оболочек исследовалась многими авторами, однако большинство публикаций относятся к исследованию изотропных конструкций. Одними из первых работ по исследованию устойчивости оболочек из композиционных материалов были работы Р. Б. Рикардса и Г. А. Тетерса [125]. В этих работах использована модель гладких оболочек, основанная на гипотезах Кирхгофа – Лява. Следует также отметить работы Л. Г. Белозерова и В. А. Киреева [22], И. С. Чернышенко и В. А. Максимюка [239] и др.

Из иностранных ученых, занимающихся устойчивостью оболочек из композитных материалов, следует отметить М. Amabili [165, 166], E. Carrera [181], J. N. Reddy [257] и др. Обширный экспериментальный материал по нахождению предельных значений напряжений для оболочек из композиционных материалов представлен в работах А. А. Смердова [137, 138, 268] и С. В. Цветкова [19, 155].

Различные критерии прочности изотропных и ортотропных материалов описали в своих работах И. И. Гольденблат и В. А. Копнов [43], Ш. О. Кулон, А. А. Лебедев [95], Р. Мизес, Г. С. Писаренко [119], С. В. Цветков [19, 155], L. Fisher [194], O. Hoffman [206], S. W. Tsai и E. M. Wu [279], M.-H. Yu [293] и др.

Основные идеи расчета ребристых оболочек были высказаны в конце 40-х годов XX века А. И. Лурье и В. З. Власовым. А. И. Лурье и В. З. Власов считали, что ребра взаимодействуют с обшивкой по линии и представляют собой одномерные стержневые элементы, работающие только на растяжение-сжатие и изгиб. «Позднее П. А. Жилин [58] предложил оболочку, подкрепленную ребрами жесткости, рассматривать как оболочку дискретно-переменной толщины. Такой же подход использовался в работах Л. В. Енджиевского [55], И. Н. Преображенского [123]» [71] и В. В. Карпова [71]. Следует также отметить работы И. Я. Амиро и В. А. Заруцкого [10], Г. Н. Белосточного [23], Д. П. Голоскокова [42], Е. С. Гребня [45], Б. К. Михайлова [102], С. А. Тимашева [146]. Вопросам расчета сетчатых оболочек посвящены работы В. В. Галишниковой [154].

Также существует подход к расчету ребристой оболочки, который основан на «размазывании» жесткости ребер по всей конструкции, и рассмотрении ее как конструктивно-ортотропной.

Среди зарубежных исследований по ребристым оболочкам следует отметить работы М. Baruch и J. Singer [173, 271], Y.-S. Lee и Y.-W. Kim [222], K. M. Liew [234, 298], Van der Neut [281], T. Y. Ng [243], X. Zhao [234] и др.

Изначально решение задач устойчивости оболочек при статическом нагружении основывалось на применении метода Эйлера, то есть нахождении собственных значений. Таким образом, задача сводилась к решению линейных уравнений. Чтобы исследовать частные и общие формы потери устойчивости оболочек и их закритическое поведение, необходимо решать уравнения, которые являются нелинейными. Эта задача существенно упростилась после опубликования в 1959 году В. В. Петровым [115] метода последовательных нагружений. Позднее был разработан метод продолжения решения по наилучшему параметру (этим параметром являлась длина дуги кривой равновесных состояний), описание которого можно найти в работах В. И. Шалашилина и Е. Б. Кузнецова [158].

С момента начала активных исследований, на протяжении первых трех десятилетий, внимание авторов, занимающихся теорией тонких пластинок и

оболочек, было привлечено, главным образом, к задачам статики. В 70-е годы XX века начинает стремительно развиваться интерес к задачам динамики. В первую очередь, это объясняется запросами авиационной и космической техники. Однако изучение динамического поведения конструкций также имеет существенное значение для судостроения и строительства [264].

Наиболее изученным является поведение оболочечных конструкций при динамическом нагружении для однослойных оболочек из изотропных материалов. В последние десятилетия большой интерес представляют конструкции из композиционных материалов (стеклопластик, графитопластик, боропластик и др.). Поведение оболочек из таких материалов и, в особенности, подкрепленных ребрами жесткости, как в задачах статики, так и в задачах динамики, изучено недостаточно [132].

Основными вопросами исследования оболочечных конструкций при динамическом нагружении являются исследования их устойчивости, прочности и колебаний. Как следует из обзора работ по динамике оболочек, исследованию колебаний (свободных и вынужденных) посвящена большая часть работ, в то время как устойчивости – существенно меньше.

Исследованию процессов деформирования тонкостенных оболочечных конструкций при действии динамических нагрузок посвящены обзорные статьи М. Amabili и М. Р. Païdoussis [166], D. A. Evensen [191], Y. Kumar [228], A. W. Leissa [231], F. Moussaoui и R. Benamar [241], M. S. Qatu, R. W. Sullivan и W. Wang [253], S. K. Sahu и P. K. Datta [262], Е. А. Когана и А. А. Юрченко [83], В. Д. Кубенко и П. С. Ковальчук [91] и монографии Н. А. Абросимова и В. Г. Баженова [1], И. Я. Амиро, В. А. Заруцкого и В. Г. Паламарчук [11], И. В. Андрианова, В. А. Лесничной и Л. И. Маневича [12], Г. И. Беликова [21], И. Н. Преображенского и В. З. Грищак [122] и др. [129].

Отдельно следует отметить обзорную статью Е. А. Когана и А. А. Юрченко [83]. Авторами проанализированы влияние физико-механических, геометрических параметров, структуры пакета слоев, формы пластин в плане, граничных условий

на характер нелинейных колебаний и вид амплитудно-частотных характеристик слоистых пластин и оболочек, а также имеющиеся экспериментальные результаты.

Большинство публикаций в рассматриваемой области относятся к работам, рассматривающим процессы в изотропных конструкциях [8, 20, 53, 54, 80, 100, 120, 160, 240, 248, 285] и др., а расчеты ортотропных конструкций из современных перспективных материалов в литературе представлены существенно меньше [2, 24, 127, 141, 197] и др.

В отношении геометрии рассматриваемых конструкций, подавляющее большинство работ относится к исследованиям замкнутых цилиндрических оболочек [2, 12, 13, 24, 26, 27, 53, 57, 84, 88, 127, 172, 186, 189, 190, 193, 197, 199, 204, 210, 230, 232, 240, 256, 260, 271, 273, 284] и др., так как это связано с решением ряда очень важных практических задач, например, возникновении периодической динамической нагрузки при внутреннем течении жидкости, и такие задачи можно рассматривать как осесимметричные. Исследований по коническим [122, 136, 185, 188, 230, 239, 254, 270, 274] и сферическим [15, 47, 120, 174, 239, 254, 257, 265] замкнутым оболочкам существенно меньше. Также редко рассматриваются задачи замкнутых оболочек в неосесимметричной постановке [89], хотя это важно при расчете конструкций с несовершенствами формы.

Достаточно большой класс конструкций представляют собой пологие оболочки двоякой кривизны ([8, 82, 101, 107, 117, 140, 142, 151, 165, 170, 171, 180, 207, 220, 233, 251, 272, 280, 287, 290, 297] и др.), которые также сравнительно хорошо изучены.

Панели оболочечных конструкций рассматривались в работах [34, 88, 160, 166, 168, 178, 186, 196, 200, 243, 246, 265, 275, 277, 292] и др. (цилиндрические) и [200, 230, 239, 247, 288] (конические).

Исследованию устойчивости при динамическом нагружении посвящены работы [53, 89, 120, 170, 174, 230, 262, 272] и др., среди которых отдельно следует отметить исследования В. А. Крысько и его учеников, а работ по анализу прочности конструкций при динамическом нагружении в доступной литературе найти практически не удалось [34, 43, 80, 105, 124]. Некоторые работы по

критериям прочности, применяемым именно при динамическом нагружении [238, 291], упоминаются в обширном обзоре Mao-Hong Yu [293].

Среди работ, посвященных анализу подкрепленных конструкций, в работах [23, 160, 167, 199, 207, 222, 254] и др. авторы рассматривают дискретный способ учета ребер жесткости (в разных модификациях). Такой подход является наиболее точным, но в то же время и вычислительно трудоемким.

Использование математических моделей в смешанной форме (записанных через функцию вертикальных перемещений и функцию напряжений) показано, например, в работах [30, 53, 89, 144, 170, 175, 186, 224, 250, 274, 285].

По направлению прикладываемой нагрузки чаще исследуется осевое воздействие (например, [53, 57, 189, 192, 199, 200, 204, 243, 250, 256, 266, 274] и др.), и реже – распределенное по поверхности [47, 140, 174, 184, 213, 246, 247, 260, 275] и др. Периодические воздействия рассмотрены в работах [8, 89, 136, 139, 169, 170, 186, 227, 234, 243, 274].

Отдельно следует отметить работы, в которых представлены результаты экспериментальных исследований пластин и оболочек [42, 52, 81, 168, 179, 195, 221, 256, 261] и др.

В работе [261] авторами экспериментально исследована устойчивость при динамическом нагружении цилиндрических оболочек, подкрепленных сеткой ребер, и погруженных в большой водоем на глубину 5 м и подвергнутых радиальному удару.

С точки зрения полноты учета различных факторов, оказывающих существенное влияние на напряженно-деформированное состояние конструкции, наибольший интерес представляют работы М. Rafiee, М. Hejazi и Н. Amoushahi [256], D. H. Bich, D. V. Dung и L. K. Hoa [174], Н. R. Azarboni, R. Ansari и A. Nazarinezhad [170].

В. В. Карповым [67, 71, 72, 214] была «разработана теория оболочек ступенчато-переменной толщины, содержащих ребра, накладки и вырезы. Учитывалось, что контакт ребер с обшивкой происходит по полосе, и при пересечении ребра жестко закреплены друг с другом. Также было доказано, что на

боковой поверхности ребер и краю вырезов выполняется условие свободного края, что важно для оболочек, ослабленных вырезами, так как при этом область, занимаемая оболочкой, является односвязной» [71, 72]. В публикациях В. В. Карпова рассматривались оболочки из изотропного материала, и исследовалась устойчивость только пологих оболочек.

В предлагаемой работе содержатся некоторые уточнения теории ребристых оболочек и распространение ее на оболочки из ортотропного материала (некоторые виды композитов). Исследуется не только устойчивость оболочек, но и прочность. Автором данной работы предложены наиболее точные нелинейные математические модели, в соответствии с которыми разработано программное обеспечение на основе метода продолжения решения по наилучшему параметру, позволяющее получать результаты с любой заданной точностью без смены параметра продолжения (задачи статики). Для нелинейных задач динамики разработано программное обеспечение на основе методов Л. В. Канторовича и Розенброка.

Выполнено комплексное исследование прочности и устойчивости самых различных оболочечных конструкций при различном числе и расположении ребер жесткости для различных материалов, который показал эффективность использования ортотропных материалов в задачах строительства.

Объектом исследования являются тонкостенные ортотропные оболочки, подкрепленные ребрами жесткости.

Предметом исследования является напряженно-деформированное состояние, прочность и устойчивость подкрепленных ортотропных оболочек при статическом или динамическом механическом нагружении.

Цель и задачи исследования.

Цель исследования – развитие теории и методов расчета тонкостенных ортотропных оболочечных конструкций, подкрепленных ребрами жесткости, при статическом или динамическом нагружении.

Задачи исследования:

1. Анализ методов учета ребер жесткости для тонкостенных оболочечных конструкций. Разработка наиболее точного (уточненного) дискретного метода для учета ребер жесткости.
2. Разработка математической модели деформирования ортотропных оболочек при статическом нагружении с учетом геометрической нелинейности, поперечных сдвигов, наличия ребер жесткости в соответствии с рассмотренными методами их учета.
3. Разработка эффективного алгоритма исследования прочности и устойчивости подкрепленных оболочек из ортотропных материалов при статическом нагружении, позволяющего автоматически выбирать оптимальный по точности шаг нагружения и без смены параметра обходить особые точки кривой равновесных состояний.
4. Модификация разработанного автором программного обеспечения расчетов прочности и устойчивости оболочек из ортотропных материалов при статическом нагружении на основе передовых технологий программирования.
5. Анализ критериев предельного состояния материала и выбор наиболее оптимального для определения предельных нагрузок начала невыполнения условий прочности. Анализ процесса развития областей невыполнения условий прочности в закритической области.
6. Выполнение комплексного исследования прочности и устойчивости подкрепленных ортотропных оболочечных конструкций при статическом механическом нагружении в докритической и закритической стадиях.
7. Анализ эффективности подкрепления оболочечных конструкций ребрами жесткости в одном направлении, в двух направлениях, с внутренней или с внешней стороны. Сопоставление результатов расчетов по известным методам учета ребер жесткости и по уточненному дискретному методу, предложенному автором.
8. Разработка математической модели деформирования ортотропных оболочек при динамическом нагружении с учетом геометрической нелинейности,

поперечных сдвигов, инерции вращения, наличия ребер жесткости в соответствии с рассмотренными методами их учета.

9. Разработка эффективного алгоритма исследования устойчивости подкрепленных оболочек из ортотропных материалов при динамическом нагружении.

10. Разработка программного обеспечения расчетов устойчивости оболочек из ортотропных материалов при динамическом нагружении на основе передовых технологий программирования.

11. Анализ устойчивости подкрепленных ортотропных оболочечных конструкций при динамическом механическом нагружении в докритической и закритической стадиях.

Научная новизна исследования заключается в следующем:

1. Разработана математическая модель деформирования ортотропных оболочек при статическом нагружении, учитывающая в совокупности геометрическую нелинейность, поперечные сдвиги, наличие ребер жесткости в соответствии с рассмотренными методами их учета. Все варианты модели могут быть использованы для конструкций разной геометрической формы, которая может быть задана через параметры Ляме и радиусы главных кривизн.

2. Разработан уточненный дискретный метод для учета ребер жесткости тонкостенных оболочечных конструкций. Для ребер, направленных перпендикулярно рассматриваемому направлению, вводится коэффициент приведения, равный отношению ширины ребер этого направления к линейному размеру оболочки в рассматриваемом направлении.

3. Расширена область применения метода конструктивной анизотропии для выполнения расчетов оболочечных конструкций из ортотропного материала. Метод позволяет свести конструкцию дискретно-переменной толщины к равновеликой по жесткости оболочке постоянной толщины.

4. Предложен вариант математической модели, позволяющий исследовать конструкции, когда в ортогонально расположенных жесткостных элементах направление укладки армирующих волокон всегда происходит вдоль ребра.

5. Разработан алгоритм исследования прочности и устойчивости подкрепленных оболочек из ортотропных материалов при статическом нагружении, позволяющий без смены параметра и с адаптивным выбором сетки обходить особые точки кривой равновесных состояний и исследовать закритическое поведение конструкций.

6. Предложена методика исследования прочности и устойчивости подкрепленных оболочечных конструкций при статическом или динамическом нагружении путем нахождения напряженно-деформированного состояния конструкции при последовательном увеличении нагрузки и построении кривой равновесных состояний.

7. Получены значения критических нагрузок потери устойчивости и нагрузки начала невыполнения условий прочности, построены зависимости «нагрузка – прогиб» для разных вариантов конструкций. Выполнен анализ процесса развития областей невыполнения условий прочности в закритической области по нескольким критериям для широкого класса объектов (пологих оболочек двоякой кривизны, цилиндрических и конических панелей, а также сферических куполов).

8. Получены значения критических нагрузок для оболочек с вариантами подкрепления ребрами жесткости в одном направлении, в двух направлениях, с внутренней или с внешней стороны. Максимальные значения критической нагрузки соответствуют варианту подкрепления ортогональной сеткой ребер с внешней стороны.

9. Разработаны несколько вариантов математической модели деформирования ортотропных оболочек при динамическом нагружении. В качестве основной предложено использовать модель в виде системы обыкновенных дифференциальных уравнений первого порядка с учетом геометрической нелинейности, поперечных сдвигов, инерции вращения, наличия ребер жесткости в соответствии с рассмотренными методами их учета. Данная модель получена применением метода Л. В. Канторовича к функционалу полной энергии деформации.

10. Разработан алгоритм исследования устойчивости подкрепленных оболочек из ортотропных материалов при динамическом нагружении, основанный на методе Л. В. Канторовича и методе Розенброка для решения жестких систем ОДУ, к которым относятся уравнения движения тонкостенных оболочечных конструкций.

11. Получены значения критических нагрузок и зависимости «нагрузка – прогиб» подкрепленных ортотропных оболочечных конструкций при действии нагрузки, линейно зависящей от времени, в докритической и закритической стадиях. Результаты представлены для пологих оболочек двоякой кривизны, цилиндрических и конических панелей.

Теоретическая и практическая значимость работы.

Теоретическая значимость заключается в развитии нелинейной теории деформирования подкрепленных ортотропных оболочечных конструкций, разработке нового уточненного метода учета ребер жесткости и адаптации известных методов под новый класс задач, расширении области применения разработанных подходов на задачи динамики.

Практическая значимость заключается в возможности применения разработанных методик и компьютерных программ для исследования напряженно-деформированного состояния, прочности и устойчивости подкрепленных ребрами оболочек из ортотропных материалов при статическом или динамическом нагружении в проектных организациях, научных исследованиях и учебном процессе. Результаты исследования и методики расчета прочности и устойчивости тонкостенных оболочечных конструкций приняты к внедрению в проектно-конструкторской деятельности АО «Институт Гипростроймост – Санкт-Петербург» (подтверждается актом о внедрении, Приложение Г). В учебном процессе ФГБОУ ВО СПбГАСУ результаты используются в учебных дисциплинах «Компьютерное и математическое моделирование», «Компьютерное моделирование нелинейных процессов в строительстве» (подтверждается актом о внедрении, Приложение Д).

Методология и методы исследования – метод Ритца для сведения вариационной задачи нахождения минимума функционала к решению системы нелинейных алгебраических уравнений; метод продолжения решения по наилучшему параметру для решения системы нелинейных алгебраических уравнений; метод Эйлера; дискретный метод учета ребер жесткости «по линии», дискретный метод учета ребер жесткости «по полосе», метод конструктивной анизотропии, уточненный дискретный метод (предложен автором); метод Л. В. Канторовича; метод Розенброка для решения жестких систем ОДУ; методы строительной механики, вычислительной математики и разработки программного обеспечения.

Положения, выносимые на защиту:

1. Математическая модель деформирования ортотропных оболочек при статическом нагружении, учитывающая в совокупности геометрическую нелинейность, поперечные сдвиги, наличие ребер жесткости в соответствии с рассмотренными методами их учета.
2. Уточненный дискретный метод учета ребер жесткости для тонкостенных оболочечных конструкций. Для ребер, направленных перпендикулярно рассматриваемому направлению, вводится коэффициент приведения, равный отношению ширины ребер этого направления к линейному размеру оболочки в рассматриваемом направлении.
3. Модифицированный метод конструктивной анизотропии для выполнения расчетов оболочечных конструкций из ортотропного материала. Метод позволяет свести конструкцию дискретно-переменной толщины к равновеликой по жесткости оболочке постоянной толщины.
4. Алгоритм исследования прочности и устойчивости подкрепленных оболочек из ортотропных материалов при статическом нагружении, позволяющий без смены параметра и с адаптивным выбором сетки обходить особые точки кривой равновесных состояний и исследовать закритическое поведение конструкций.
5. Значения критических нагрузок потери устойчивости и нагрузок начала невыполнения условий прочности, зависимости «нагрузка – прогиб» для

разных вариантов конструкций. В том числе, для оболочек с вариантами подкрепления ребрами жесткости в одном направлении, в двух направлениях, с внутренней или с внешней стороны. Результаты анализа процесса развития областей невыполнения условий прочности в закритической области по нескольким критериям для широкого класса объектов (пологих оболочек двоякой кривизны, цилиндрических и конических панелей, а также сферических куполов).

6. Несколько вариантов математической модели деформирования ортотропных оболочек при динамическом нагружении. В качестве основной предложено использовать модель в виде системы обыкновенных дифференциальных уравнений первого порядка с учетом геометрической нелинейности, поперечных сдвигов, инерции вращения, наличия ребер жесткости в соответствии с рассмотренными методами их учета. Данная модель получена применением метода Л. В. Канторовича к функционалу полной энергии деформации.

7. Алгоритм исследования устойчивости подкрепленных оболочек из ортотропных материалов при динамическом нагружении, основанный на методе Л. В. Канторовича и методе Розенброка для решения жестких систем ОДУ, к которым относятся уравнения движения тонкостенных оболочечных конструкций.

8. Значения критических нагрузок и зависимости «нагрузка – прогиб» подкрепленных ортотропных оболочечных конструкций при действии нагрузки, линейно зависящей от времени, в докритической и закритической стадиях. Результаты представлены для пологих оболочек двоякой кривизны, цилиндрических и конических панелей.

Степень достоверности результатов проведенных исследований обоснована применением апробированных методов строительной механики и вычислительной математики; подтверждена сравнением результатов расчета тестовых задач с некоторыми решениями, полученными другими авторами, а также качественным согласованием результатов расчета с результатами экспериментов других авторов; обеспечена обоснованностью методологии исследования, ее

соответствием поставленной проблеме и глубокой проработкой научной литературы по теме диссертации.

Апробация работы. Результаты работы были представлены на следующих научных конференциях и семинарах:

71-я, 72-я, 73-я и 74-я научная конференция профессоров, преподавателей, научных работников, инженеров и аспирантов университета «Архитектура – Строительство – Транспорт» (7-9 октября 2015 г., 5-7 октября 2016 г., 4-6 октября 2017 г., 3-5 октября 2018 г., Санкт-Петербург).

68-я, 69-я, 70-я и 71-я Всероссийская научно-практическая конференция студентов, аспирантов и молодых ученых «Актуальные проблемы современного строительства» (15-17 апреля 2015 г., 6-8 апреля 2016 г., 5-7 апреля 2017 г., 4-6 апреля 2018 г., Санкт-Петербург).

III и IV Международный научный семинар «Динамическое деформирование и контактное взаимодействие тонкостенных конструкций при воздействии полей различной физической природы» (19-21 октября 2015 г., 15-19 февраля 2016 г., Москва).

XXIV и XXVI Международный симпозиум «Динамические и технологические проблемы механики конструкций и сплошных сред» им. А.Г. Горшкова (19-23 марта 2018 г., 16-20 марта 2020 г., Кремёнки).

Двенадцатая конференция с международным участием «Новые информационные технологии в исследовании сложных структур» (4-8 июня 2018 г., Катунь).

XXVI Международная конференция «Математическое и компьютерное моделирование в механике деформируемых сред и конструкций» (28-30 сентября 2015 г., Санкт-Петербург).

XXVII Международная конференция «Математическое и компьютерное моделирование в механике твердого тела и конструкциях – МКМ 2017» (25-27 сентября 2017 г., Санкт-Петербург).

VI Международная научная конференция «Задачи и методы компьютерного моделирования конструкций и сооружений» («Золотовские чтения») (15 февраля 2017 г., Москва).

X Международная конференция «Проблемы прочности материалов и сооружений на транспорте» (23-25 мая 2017 г., Санкт-Петербург).

X, XI и XIV, XVI Международная конференция «Механика, ресурс и диагностика материалов и конструкций» (16-20 мая 2016 г., 11-15 декабря 2017 г., 9-13 ноября 2020 г., 16-20 мая 2022 г., Екатеринбург).

Международная конференция: Воронежская весенняя математическая школа «Понтрягинские чтения – XXX» (3-9 мая 2019 г., Воронеж).

Международная научно-практическая конференция, посвященная 90-летию СГТУ им. Гагарина Ю.А. «Геометрическое компьютерное моделирование в подготовке специалистов для цифровой экономики» (20-22 мая 2020 г., Саратов).

Полностью диссертация обсуждалась на научном семинаре ФГБОУ ВО СПбГАСУ 08 июня 2022 г., на научном семинаре ФГБОУ ВО НИУ МГСУ 27 января 2023 г., на научном семинаре ФГБОУ ВО СГТУ им. Гагарина Ю.А. 29 сентября 2023 г.

Личный вклад соискателя. Все результаты диссертационной работы принадлежат лично автору. Во всех работах, опубликованных в соавторстве, автору в равной степени принадлежит постановка задач и формулировка основных положений, определяющих научную новизну исследований.

Область исследования соответствует требованиям паспорта научной специальности ВАК: 2.1.9. Строительная механика, а именно: содержанию специальности, каковым являются методы расчета сооружений и их элементов на прочность, устойчивость при силовых воздействиях, а также следующим основным направлениям: п. 2 «Линейная и нелинейная механика конструкций, зданий и сооружений, разработка физико-математических моделей их расчета», п. 4 «Численные и численно-аналитические методы расчета зданий, сооружений и их элементов на прочность, жесткость, устойчивость и динамику при силовых, температурных и других воздействиях».

Публикации. Основные научные результаты диссертации опубликованы в 85 научных работах, в том числе 10 в рецензируемых изданиях из перечня, размещенного на официальном сайте ВАК, 37 в рецензируемых изданиях, индексируемых в базах данных Scopus и/или Web of Science, 3 свидетельства о государственной регистрации программ для ЭВМ. Общим объемом научных работ составляет 40 п.л. (авторских – 25,4 п.л.).

Структура и объем работы. Диссертация состоит из оглавления, введения, шести глав, заключения, списка сокращений и условных обозначений, списка литературы и приложений. Текст диссертации изложен на 383 страницах, содержит 61 таблицу, 109 рисунков, 5 приложений и список использованной литературы из 298 наименований работ отечественных и зарубежных авторов.

Во введении обосновывается актуальность темы диссертации, изложены цели и задачи исследования, отмечены научная новизна и практическая значимость работы. Также приведен краткий обзор литературных источников по теме исследования.

В первой главе диссертации приводится математическая модель деформирования упругих ортотропных оболочек на основе гипотез Тимошенко – Рейсснера в геометрически нелинейной постановке при статическом нагружении; предложен вариант безразмерных параметров для тонкостенных оболочек разных геометрических форм.

Во второй главе диссертации приводится математическая модель деформирования упругих ортотропных оболочек при статическом нагружении, имеющих ребра жесткости или вырезы; рассматриваются несколько методов учета ребер жесткости (дискретный при контакте с обшивкой «по линии», дискретный при контакте с обшивкой «по полосе», метод конструктивной анизотропии и уточненный дискретный, предложенный автором).

В третьей главе приводится алгоритм исследования прочности и устойчивости ортотропных оболочек, подкрепленных ребрами жесткости, при статическом нагружении. Алгоритм основан на методе Ритца, позволяющем свести решение вариационной задачи о нахождении минимума функционала к решению

системы нелинейных алгебраических уравнений и методе продолжения решения по наилучшему параметру, позволяющего последовательно находить решение нелинейной задачи. Детально описаны методики исследования прочности и устойчивости оболочечных конструкций при действии статической нагрузки.

В четвертой главе представлены результаты исследования прочности и устойчивости некоторых видов квадратных в плане пологих оболочек двоякой кривизны, панелей цилиндрических и конических оболочек, а также сферических куполов. Конструкции выполнены как из ортотропных, так и из изотропных материалов. Расчеты выполнены для оболочек с ребрами и без них, анализируется закритическое поведение. Проводится сравнение эффективности применения разных методов учета ребер жесткости, а также выбора схемы подкрепления. Выполнен анализ развития областей невыполнения условий прочности при закритическом деформировании оболочек. Обосновывается достоверность полученных результатов.

В пятой главе диссертации предложено несколько вариантов математической модели деформирования ортотропных оболочек при динамическом нагружении. В качестве основного предложено использовать модель в виде системы обыкновенных дифференциальных уравнений первого порядка с учетом геометрической нелинейности, поперечных сдвигов, инерции вращения, наличия ребер жесткости в соответствии с рассмотренными методами их учета.

В шестой главе диссертации приводятся значения нагрузок потери устойчивости и зависимости «нагрузка – перемещение» ортотропных оболочечных конструкций, усиленных ребрами жесткости, при действии нагрузки, линейно зависящей от времени, в докритической и закритической стадиях. Результаты получены для пологих оболочек двоякой кривизны, цилиндрических и конических панелей.

ГЛАВА 1. МАТЕМАТИЧЕСКИЕ МОДЕЛИ ДЕФОРМИРОВАНИЯ ТОНКОСТЕННЫХ ОРТОТРОПНЫХ ОБОЛОЧЕК ПРИ СТАТИЧЕСКОМ НАГРУЖЕНИИ

Рассматривается математическая модель деформирования тонких оболочечных конструкций, учитывающая ортотропию материала, геометрическую нелинейность, поперечные сдвиги.¹ В данной главе описываются только гладкие оболочки, подкрепленным оболочкам посвящена следующая глава.

В связи с тем, что оболочечные конструкции являются тонкостенными, это позволяет сделать ряд упрощений и вводить некоторые гипотезы, чтобы перейти от решения трехмерной задачи к решению двумерной [3, 71, 110, 114].

Итак, будем считать:

«1. Напряжения, возникающие в оболочке в направлении, перпендикулярном срединной поверхности, в сравнении с другими напряжениями считаются пренебрежимо малыми ($\sigma_z = 0$).

2. Для тонких оболочек $\frac{h}{\min\{R_1; R_2\}} < \frac{1}{20}$. Здесь R_1, R_2 – главные радиусы кривизны; h – толщина оболочки.

3. При выводе основных соотношений теории оболочек пренебрегается величинами большего порядка малости, чем $\frac{h}{\min\{R_1; R_2\}}$ [65].

4. Справедлива гипотеза, согласно которой прямолинейный элемент оболочки, первоначально нормальный к срединной поверхности, остается прямолинейным и в процессе деформирования, но не обязательно нормальным».

¹ По результатам проведенного исследования автором опубликованы, в том числе, работы:

- Семенов, А. А. Уточненный дискретный метод расчета подкрепленных ортотропных оболочек / А. А. Семенов // Вестник ПНИПУ. Механика. – 2022. – № 4. – С. 90–102.
- Semenov, A. Mathematical Modeling in Shell Structure Analysis Tasks / A. Semenov // International Journal for Engineering Modelling. – 2022. – Vol. 35. – No. 1. – P. 43–55.
- Семенов, А. А. Геометрически нелинейная математическая модель расчета прочности и устойчивости ортотропных оболочечных конструкций: дис. ... канд. техн. наук: 05.23.17 / А. А. Семенов. – СПб.: СПбГАСУ, 2014. – 183 с.
- Semenov, A. A. Strength and stability of geometrically nonlinear orthotropic shell structures / A. A. Semenov // Thin-Walled Structures. – 2016. – Vol. 106. – P. 428–436.

Это позволяет свести трехмерную задачу к двумерной относительно деформирования срединной поверхности оболочки и учитывать поперечные сдвиги. Такая модель деформирования оболочки носит название модели Тимошенко – Рейсснера и является более точной, чем модель Кирхгофа – Лява, основанная на гипотезе прямой нормали (не учитываются поперечные сдвиги). В этом случае неизвестными функциями являются три функции перемещений в направлении осей x, y, z : $U(x, y), V(x, y), W(x, y)$ и две функции, характеризующие углы поворота нормали в плоскостях xOz и yOz – $\Psi_x(x, y), \Psi_y(x, y)$ » [71, 104].

5. Все компоненты тензора деформаций в любой точке оболочки малы по сравнению с единицей $\varepsilon_{ij} \ll 1, i, j = 1, 2, 3$. Тот же порядок малости имеют и квадраты углов поворота нормали к срединной поверхности оболочки при ее изгибе $\Psi_i^2 \ll 1, i, j = 1, 2$. При указанных условиях [114] нормальные перемещения срединной поверхности оболочки могут иметь порядок толщины и даже больше, но малы по сравнению с другими размерами. Такой изгиб оболочки называется средним и описывается нелинейными зависимостями.

6. Для пологих оболочек отношение стрелы подъема оболочки d к наименьшему линейному размеру в плане меньше $1/5$.

Математическая модель деформирования тонкой ортотропной оболочки в задачах статики строится на основе функционала полной потенциальной энергии деформации или уравнений равновесия. В данной работе рассматривается вариант математической модели, основанной на функционале, так как в уравнениях равновесия порядок производных искомых функций в два раза выше, чем в функционале, и, кроме того, это позволяет применять более эффективные алгоритмы исследования модели. Варианты таких алгоритмов для изотропных подкрепленных оболочек можно найти в работах [17, 49, 72, 151].

Известно достаточно много работ, где рассматривается модель деформирования оболочек Кирхгофа – Лява, согласно которой неизвестными являются три функции перемещений $U = U(x, y), V = V(x, y), W = W(x, y)$. Как показано в работах [125, 181, 239], такая модель дает существенную погрешность

для ортотропных оболочек [125] и для изотропных, подкрепленных ребрами [67]. Поэтому для таких оболочек необходимо учитывать еще и поперечные сдвиги, т.е. рассматривать модель Тимошенко – Рейсснера (тогда неизвестными будут пять функций – U, V, W и две функции, характеризующие углы поворота нормали в плоскостях xOz, yOz : $\Psi_x = \Psi_x(x, y), \Psi_y = \Psi_y(x, y)$).

1.1 ОБОЛОЧКИ ПОКРЫТИЯ СТРОИТЕЛЬНЫХ СООРУЖЕНИЙ

Изучение процесса деформирования оболочечных конструкций имеет существенное значение для различных областей промышленности, в том числе авиастроения, судостроения, ракетостроения и других [41, 54, 87, 139, 182, 190, 255, 282, 283]. В строительстве такие конструкции зачастую применяются, например, для покрытия большепролетных сооружений [135, 226, 265].

Для каждого вида сооружения предъявляются свои требования к строительным конструкциям, из которых они состоят. Эти требования напрямую зависят от основных функций, выполняемых сооружением. Строительные конструкции могут отличаться друг от друга способом работы под действующими нагрузками, технологией возведения и особенностями эксплуатации. Также, при проектировании строительных сооружений, анализируется экономическая целесообразность применения определенного вида конструкции в каждом конкретном случае.

Одним из наиболее часто встречающихся требований является необходимость перекрытия большой эксплуатируемой площади сооружения без использования промежуточных опор. Например, такая необходимость возникает при строительстве общественных зданий: стадионов, концертных залов, рынков; при строительстве зданий промышленного назначения: складов, ангаров для техники и оборудования, заводских корпусов.

Решить данную задачу возможно при помощи таких элементов строительных конструкций, как преднапряженные железобетонные балки и фермы, стальные фермы, вантовые конструкции, а также оболочечные конструкции, которые

являются наиболее сложными с точки зрения проектирования и расчета напряженно-деформированного состояния под воздействием нагрузок.

Благодаря своей жесткости и особенностям формы, оболочечные конструкции позволяют перекрывать большие пространства при относительно низком расходе материала [31, 87], что отражается на экономической эффективности проекта [118].

Оболочечные конструкции можно классифицировать по различным признакам: функциональному назначению (покрытия, козырьки и навесы, промышленные емкости и др.); по типу опирания (в отдельных точках, по линиям, по поверхности, комбинации этих типов); по гауссовой кривизне (параболические (нулевая гауссова кривизна), гиперболические (отрицательная гауссова кривизна), эллиптические (положительная гауссова кривизна)).

Например, оболочки двоякой кривизны применяют для перекрытия сооружений с крупной квадратной схемой расположения колонн, для перекрытия складов, механических цехов и других производственных помещений, где нужно обеспечить свободное перемещение транспорта или разместить крупногабаритное оборудование. Такие оболочки применяют как в однопролетных, так и в многопролетных зданиях.

Проведение комплексных исследований процесса деформирования оболочек по наиболее точным математическим моделям позволит аргументированно принимать проектные решения, что будет способствовать их безопасной работе, а также уменьшению материалоемкости конструкции и снижению её себестоимости.

1.2 ГЕОМЕТРИЧЕСКИЙ ВИД РАССМАТРИВАЕМЫХ КОНСТРУКЦИЙ

В качестве координатной поверхности оболочки постоянной толщины h будем рассматривать ее срединную поверхность. Эта поверхность занимает область D при изменении ее координат x, y в пределах $0 \leq x \leq a, 0 \leq y \leq b$. Положение точки M на срединной поверхности оболочки характеризуется

значениями ее координат x, y . Для различного вида оболочек используются различные системы координат.

На Рисунках 1.1 – 1.5 представлены тонкостенные оболочки разных геометрических форм с соответствующими принятыми локальными системами координат (ось z всегда направлена по нормали к срединной поверхности в сторону вогнутости) [71, 72].

Для пологой прямоугольной в плане оболочки двоякой кривизны (Рисунок 1.1) оси криволинейных координат x, y направлены по линиям главных кривизн. Исследования конструкций данного вида можно найти, например, в работах [8, 82, 101, 107, 117, 140, 142, 151, 165, 170, 171, 180, 207, 220, 233, 251, 272, 280, 287, 290, 297].

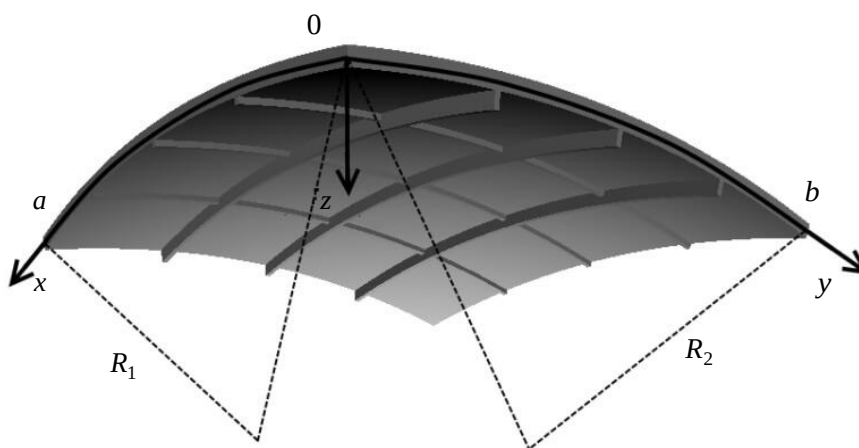


Рисунок 1.1. Пологая оболочка двоякой кривизны

Для таких конструкций параметры Ляме принимают вид $A = B = 1$, а радиусы главных кривизн $R_1 = const$, $R_2 = const$. Параметры Ляме A, B представляют собой коэффициенты, на которые нужно умножить дифференциалы криволинейных координат, чтобы получить дифференциалы длин дуг координатных линий. В таком случае, для перехода от глобальной декартовой системы координат (X, Y, Z) к локальной криволинейной системе (x, y, z) нужно принять [68]:

$$A = \sqrt{\left(\frac{\partial X}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial Y}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial Z}{\partial x}\right)^2}, \quad B = \sqrt{\left(\frac{\partial X}{\partial y}\right)^2 + \left(\frac{\partial Y}{\partial y}\right)^2 + \left(\frac{\partial Z}{\partial y}\right)^2}. \quad (1.1)$$

Для цилиндрической панели (Рисунок 1.2) с радиусом кривизны срединной поверхности R_2 параметры Ляме принимают вид $A=1$, $B=R_2$, притом $R_1=\infty$, $R_2=const$.

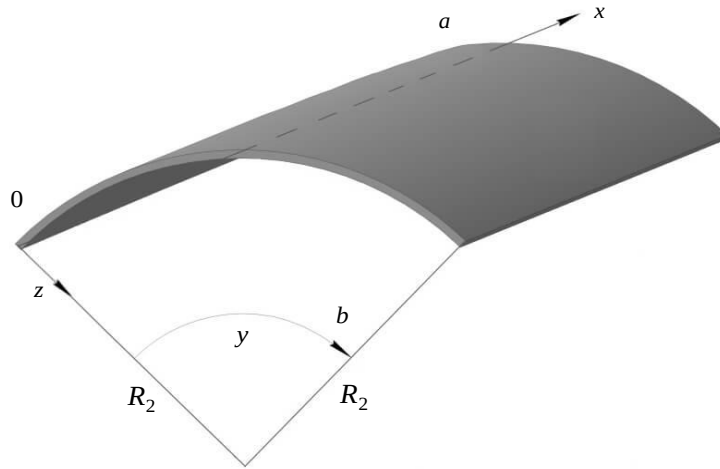


Рисунок 1.2. Цилиндрическая панель

Исследования цилиндрических оболочек (в большинстве случаев, замкнутых), можно найти в работах [2, 12, 13, 24, 26, 27, 53, 57, 88, 127, 172, 186, 189, 190, 193, 197, 199, 204, 210, 230, 232, 240, 256, 260, 271, 273, 284]. Цилиндрические панели рассматривались в работах [34, 88, 160, 166, 168, 178, 196, 200, 243, 246, 265, 277] и др.

Для конической панели (Рисунок 1.3) с углом конусности θ параметры Ляме принимают вид $A=1$, $B=x \sin \theta$, а радиусы главных кривизн $R_1=\infty$, $R_2=x \cdot \operatorname{tg} \theta$.

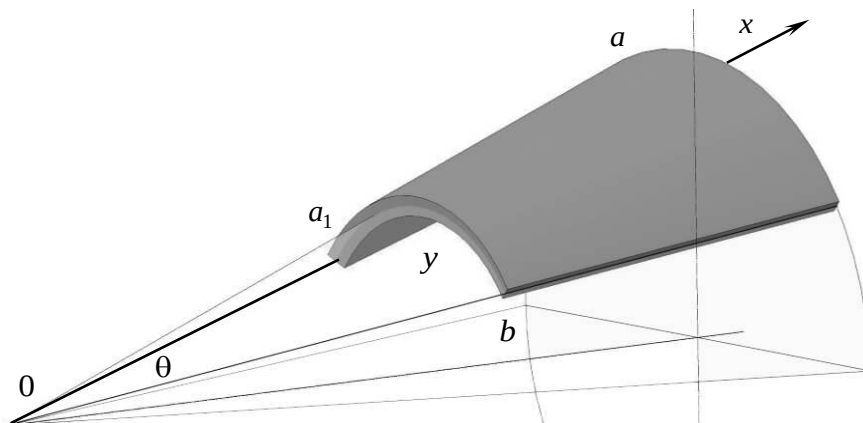


Рисунок 1.3. Панель конической оболочки

Важной отличительной особенностью усеченной конической оболочки является то, что начало координат по оси x не совпадает с началом области конструкции, и смещено на значение a_1 . В дальнейшем, это найдет отражение в

пределах интегрирования, аппроксимирующих функциях, выражениях для жесткостных характеристик ребер жесткости и других соотношениях. Исследования конических панелей можно найти в работах [200, 230, 239, 247, 288].

Для сферической оболочки (Рисунок 1.4 [71]) с радиусом R параметры Ляме принимают вид $A = R$, $B = R \sin \chi$, главный радиус кривизны $R = \text{const}$. Такие конструкции (замкнутые) исследовались в работах [15, 47, 120, 227, 239, 254, 257, 265].

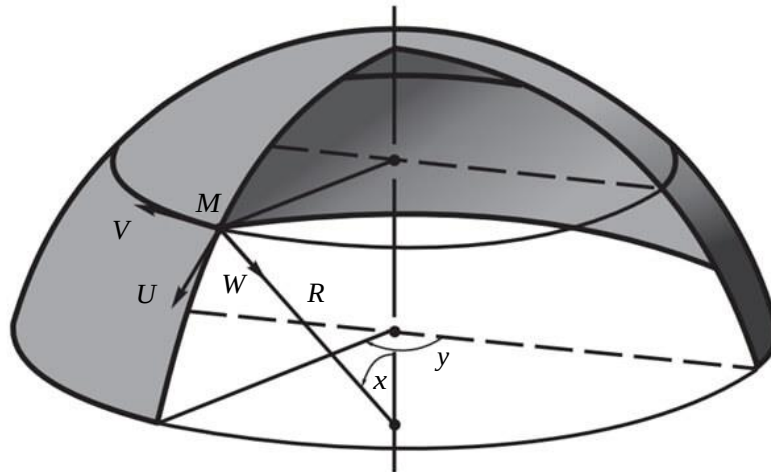


Рисунок 1.4. Сферическая оболочка [71]

Для тороидальной оболочки (Рисунок 1.5 [71]), параметры Ляме принимают вид $A = R$, $B = d_1 + R \sin \chi$, а радиусы главных кривизн $R_1 = R = \text{const}$, $R_2 = \frac{d_1 + R \sin \chi}{\sin \chi}$ [71].

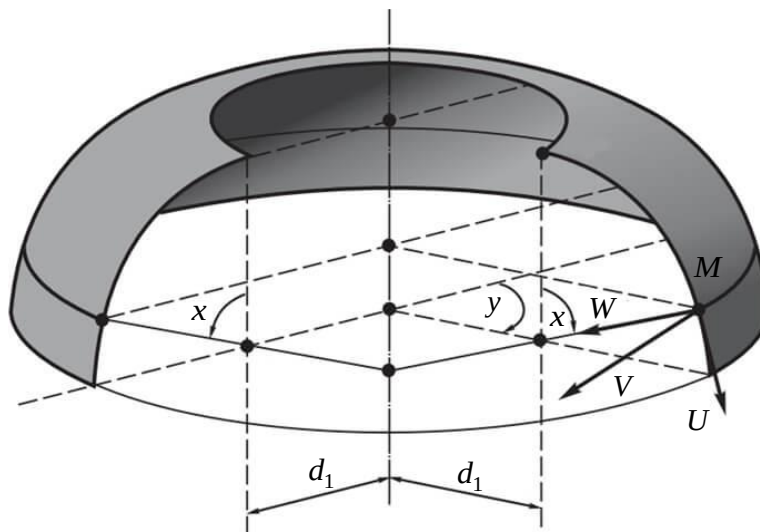


Рисунок 1.5. Тороидальная оболочка [71]

Для рассмотренных выше видов оболочечных конструкций соответствующие параметры Ляме и радиусы главных кривизн показаны в Таблице 1.1.

Таблица 1.1 – Значения параметров Ляме и главных радиусов кривизны для некоторых видов оболочек

Вид конструкции	Параметр			
	A	B	R_1	R_2
Пологая двоякой кривизны	1	1	const	const
Цилиндрическая	1	R_2	∞	const
Коническая	1	$x \cdot \sin \theta$	∞	$x \cdot \operatorname{tg} \theta$
Сферическая	R	$R \cdot \sin x$	R	R
Тороидальная	R	$d_1 + R \cdot \sin x$	R	$\frac{d_1 + R \cdot \sin x}{\sin x}$

1.3 ОСНОВНЫЕ СООТНОШЕНИЯ ТЕОРИИ ОРТОТРОПНЫХ ОБОЛОЧЕК

Соотношения математической модели в теории оболочек можно разделить на три группы:

- геометрические соотношения, связывающие перемещения и деформации;
- физические соотношения, связывающие напряжения и деформации;
- функционал полной энергии деформации оболочки, который включает в себя кинетическую энергию (в задачах динамики), потенциальную энергию и работу внешних сил.

Также вместо функционала энергии могут использоваться уравнения равновесия (в задачах динамики – уравнения движения) или уравнения в смешанной форме.

1.3.1 Нелинейные геометрические соотношения

1.3.1.1 Модель Кирхгофа – Лява

Вначале рассмотрим классическую теорию оболочек, основанную на гипотезах Кирхгофа – Лява [71]. В таком случае, перемещения в слое, отстоящем на z от срединной поверхности, имеют вид:

$$U^z = U + z\theta_1, \quad V^z = V + z\theta_2, \quad W^z = W, \quad (1.2)$$

где $U = U(x, y)$, $V = V(x, y)$, $W = W(x, y)$ – перемещения точек срединной поверхности в направлении осей x, y, z соответственно; θ_1, θ_2 будут описаны ниже.

Геометрические соотношения в срединной поверхности оболочки с учетом геометрической нелинейности принимают вид

$$\begin{aligned} \varepsilon_x &= \frac{1}{A} \frac{\partial U}{\partial x} + \frac{1}{AB} V \frac{\partial A}{\partial y} - k_x W + \frac{1}{2} \theta_1^2, \\ \varepsilon_y &= \frac{1}{B} \frac{\partial V}{\partial y} + \frac{1}{AB} U \frac{\partial B}{\partial x} - k_y W + \frac{1}{2} \theta_2^2, \\ \gamma_{xy} &= \frac{1}{A} \frac{\partial V}{\partial x} + \frac{1}{B} \frac{\partial U}{\partial y} - \frac{1}{AB} U \frac{\partial A}{\partial y} - \frac{1}{AB} V \frac{\partial B}{\partial x} + \theta_1 \theta_2, \end{aligned} \quad (1.3)$$

где $\varepsilon_x, \varepsilon_y$ – деформации удлинения вдоль координат x, y срединной поверхности; γ_{xy} – деформация сдвига в плоскости xOy ;

$$\theta_1 = -\left(\frac{1}{A} \frac{\partial W}{\partial x} + k_x U \right), \quad \theta_2 = -\left(\frac{1}{B} \frac{\partial W}{\partial y} + k_y V \right), \quad k_x = \frac{1}{R_1}, \quad k_y = \frac{1}{R_2}. \quad (1.4)$$

Деформации в точках на расстоянии z от координатной поверхности будут иметь следующий вид [68]

$$\varepsilon_x^z = \varepsilon_x + z\chi_1, \quad \varepsilon_y^z = \varepsilon_y + z\chi_2, \quad \gamma_{xy}^z = \gamma_{xy} + 2z\chi_{12}, \quad (1.5)$$

где

$$\chi_1 = \frac{1}{A} \frac{\partial \theta_1}{\partial x} + \frac{1}{AB} \frac{\partial A}{\partial y} \theta_2, \quad \chi_2 = \frac{1}{B} \frac{\partial \theta_2}{\partial y} + \frac{1}{AB} \frac{\partial B}{\partial x} \theta_1,$$

$$\chi_{12} = \frac{1}{2} \left[\frac{1}{A} \frac{\partial \theta_2}{\partial x} + \frac{1}{B} \frac{\partial \theta_1}{\partial y} - \frac{1}{AB} \left(\frac{\partial A}{\partial y} \theta_1 + \frac{\partial B}{\partial x} \theta_2 \right) \right]. \quad (1.6)$$

1.3.1.2 Модель Тимошенко – Рейсснера

Применяя гипотезу, в соответствии с которой «прямолинейный элемент оболочки, первоначально нормальный к срединной поверхности, остается прямолинейным в процессе деформирования, но не обязательно нормальным (учитываются поперечные сдвиги), сведем деформирование трехмерного тела к деформированию двумерного тела – ее срединной поверхности» [71]. Тогда перемещения в слое, находящимся на расстоянии z от срединной поверхности, примут вид [46, 110, 114]

$$U^z = U + z\Psi_x, \quad V^z = V + z\Psi_y, \quad W^z = W, \quad (1.7)$$

где U, V, W – перемещения точек срединной поверхности вдоль осей x, y, z соответственно; Ψ_x, Ψ_y – углы поворота нормали в плоскостях xOz, yOz .

Геометрические соотношения в срединной поверхности оболочки с учетом геометрической нелинейности принимают вид [46, 77, 110, 114]

$$\begin{aligned} \varepsilon_x &= \frac{1}{A} \frac{\partial U}{\partial x} + \frac{1}{AB} V \frac{\partial A}{\partial y} - k_x W + \frac{1}{2} \theta_1^2, \\ \varepsilon_y &= \frac{1}{B} \frac{\partial V}{\partial y} + \frac{1}{AB} U \frac{\partial B}{\partial x} - k_y W + \frac{1}{2} \theta_2^2, \\ \gamma_{xy} &= \frac{1}{A} \frac{\partial V}{\partial x} + \frac{1}{B} \frac{\partial U}{\partial y} - \frac{1}{AB} U \frac{\partial A}{\partial y} - \frac{1}{AB} V \frac{\partial B}{\partial x} + \theta_1 \theta_2, \\ \gamma_{xz} &= k f(z) [\Psi_x - \theta_1], \\ \gamma_{yz} &= k f(z) [\Psi_y - \theta_2], \\ \theta_1 &= - \left(\frac{1}{A} \frac{\partial W}{\partial x} + k_x U \right), \quad \theta_2 = - \left(\frac{1}{B} \frac{\partial W}{\partial y} + k_y V \right), \quad k_x = \frac{1}{R_1}, \quad k_y = \frac{1}{R_2}, \end{aligned} \quad (1.8)$$

где $\varepsilon_x, \varepsilon_y$ – деформации удлинения вдоль координат x, y срединной поверхности; $\gamma_{xy}, \gamma_{xz}, \gamma_{yz}$ – деформации сдвига в плоскостях xOy, xOz, yOz . Соотношения (1.8)

отличаются от соответствующих соотношений, представленных в работе В. В. Новожилова [110] только тем, что в них добавлены нелинейные члены.

Для оболочек вращения $A = \text{const}$, $B = B(x)$, поэтому $\frac{\partial A}{\partial y} = 0$, и выражения для ε_x и γ_{xy} , как правило, упрощаются. Геометрические соотношения для слоя, отстоящего на расстояние z от срединной поверхности, выражаются следующим образом:

$$\varepsilon_x^z = \varepsilon_x + z\chi_1, \quad \varepsilon_y^z = \varepsilon_y + z\chi_2, \quad \gamma_{xy}^z = \gamma_{xy} + 2z\chi_{12}. \quad (1.9)$$

Функции изменения кривизн χ_1 , χ_2 и кручения χ_{12} для принятой модели принимают вид:

$$\begin{aligned} \chi_1 &= \frac{1}{A} \frac{\partial \Psi_x}{\partial x} + \frac{1}{AB} \frac{\partial A}{\partial y} \Psi_y, \quad \chi_2 = \frac{1}{B} \frac{\partial \Psi_y}{\partial y} + \frac{1}{AB} \frac{\partial B}{\partial x} \Psi_x, \\ \chi_{12} &= \frac{1}{2} \left[\frac{1}{A} \frac{\partial \Psi_y}{\partial x} + \frac{1}{B} \frac{\partial \Psi_x}{\partial y} - \frac{1}{AB} \left(\frac{\partial A}{\partial y} \Psi_x + \frac{\partial B}{\partial x} \Psi_y \right) \right]. \end{aligned} \quad (1.10)$$

Функция $f(z)$ описывает распределение компонент напряжений τ_{xz} , τ_{yz} по толщине оболочки [36]; k – числовой коэффициент, который соответствует выбранной функции $f(z)$. Для гладких оболочек принимается [36]

$$f(z) = 6 \left(\frac{1}{4} - \frac{z^2}{h^2} \right), \quad k = \frac{5}{6}. \quad (1.11)$$

Функция $f(z)$ при $z = -h/2$ и $z = h/2$ (верхняя и нижняя поверхности оболочки) обращается в нуль, а также удовлетворяет условиям [36]:

$$\frac{1}{h} \int_{-h/2}^{h/2} f(z) dz = 1, \quad \frac{1}{h} \int_{-h/2}^{h/2} f^2(z) dz = \frac{1}{k}. \quad (1.12)$$

Как показано в работе [67], для подкрепленных оболочек учет поперечного сдвига существенно влияет на расчет напряженно-деформированного состояния и устойчивости. Для гладких оболочек это влияние несущественно. Также учет поперечных сдвигов необходим при исследовании ортотропных оболочек.

Для дальнейших преобразований будет удобно записать выражения для деформаций в векторной форме

$$\{\varepsilon\} = \begin{pmatrix} \varepsilon_x & \varepsilon_y & \gamma_{yz} & \gamma_{xz} & \gamma_{xy} \end{pmatrix}^T. \quad (1.13)$$

Геометрия оболочечной конструкции задается через параметры Ляме и значения радиусов главных кривизн.

В большинстве промышленных программных комплексов задание геометрии оболочки происходит путем ее графического изображения, что создает существенные неудобства.

1.3.2 Физические соотношения при линейно-упругом деформировании

Для связи деформаций и напряжений используются физические соотношения, которые строятся на основе обобщенного закона Гука [1, 7]. Выразив напряжения через деформации, получим физические соотношения для тонкостенной ортотропной оболочки при линейно-упругом деформировании [9, 96].

Считаем, что направления осей ортотропии 1 и 2 совпадают с направлениями осей координат x и y :

$$\begin{aligned} \sigma_x &= \frac{E_1}{1 - \mu_{12}\mu_{21}} \left[\varepsilon_x + \mu_{21}\varepsilon_y + z(\chi_1 + \mu_{21}\chi_2) \right], \\ \sigma_y &= \frac{E_2}{1 - \mu_{12}\mu_{21}} \left[\varepsilon_y + \mu_{12}\varepsilon_x + z(\chi_2 + \mu_{12}\chi_1) \right], \\ \tau_{xy} &= G_{12} \left[\gamma_{xy} + 2z\chi_{12} \right], \\ \tau_{xz} &= G_{13} k f(z) (\Psi_x - \theta_1), \\ \tau_{yz} &= G_{23} k f(z) (\Psi_y - \theta_2). \end{aligned} \quad (1.14)$$

Здесь E_1, E_2 – модули упругости в направлениях x и y ; G_{12}, G_{13}, G_{23} – модули сдвига в плоскостях xOy, xOz, yOz соответственно; μ_{12}, μ_{21} – коэффициенты Пуассона. Для ортотропного материала выполняется равенство $E_1\mu_{21} = E_2\mu_{12}$.

В том случае, если ортогональные направления анизотропии 1 и 2 не совпадают с направлениями локальной ортогональной криволинейной системы

координат x и y , необходимо сделать поворот системы координат. Для модели Кирхгофа – Лява методика поворота системы координат была представлена в работе [7].

В том случае, если оси ортотропии не перпендикулярны друг другу, необходимо произвести перерасчет жесткостных характеристик с учетом угла между ними [143].

1.3.3 Усилия, моменты и поперечные силы

На основе физических соотношений можно сформировать выражения для усилий и моментов. Проинтегрировав напряжения (1.14) по переменной z от $-h/2$ до $h/2$, получим выражения для усилий и моментов, приведенных к срединной поверхности оболочки и приходящихся на единицу длины сечения. Для гладких оболочек они будут иметь вид

$$\begin{aligned}
 N_x &= \frac{E_1 h}{1 - \mu_{12} \mu_{21}} (\varepsilon_x + \mu_{21} \varepsilon_y), \\
 N_y &= \frac{E_2 h}{1 - \mu_{12} \mu_{21}} (\varepsilon_y + \mu_{12} \varepsilon_x), \\
 N_{xy} &= N_{yx} = G_{12} h \gamma_{xy}, \\
 M_x &= \frac{E_1}{1 - \mu_{12} \mu_{21}} \left(\frac{h^3}{12} \right) (\chi_1 + \mu_{21} \chi_2), \\
 M_y &= \frac{E_2}{1 - \mu_{12} \mu_{21}} \left(\frac{h^3}{12} \right) (\chi_2 + \mu_{12} \chi_1), \\
 M_{xy} &= M_{yx} = 2G_{12} \left(\frac{h^3}{12} \right) \chi_{12}, \\
 Q_x &= G_{13} k h (\Psi_x - \theta_1), \\
 Q_y &= G_{23} k h (\Psi_y - \theta_2),
 \end{aligned} \tag{1.15}$$

где N_x, N_y, N_{xy}, N_{yx} – нормальные усилия в направлении осей x, y и сдвиговые усилия в плоскости xOy соответственно; M_x, M_y, M_{xy}, M_{yx} – изгибающие моменты в направлении осей x, y и крутящие моменты; Q_x, Q_y – поперечные силы в плоскостях xOz и yOz . Усилия и моменты для подкрепленных оболочек будут описаны в следующей главе.

Для изотропных оболочек в выражениях (1.14) и (1.15) нужно принять $E_1 = E_2 = E$, $\mu_{12} = \mu_{21} = \mu$, $G_{12} = G_{13} = G_{23} = G = \frac{E}{2(1+\mu)}$.

1.3.4 Виды статических нагрузок

По направлению приложения нагрузки, чаще всего в известных исследованиях встречается осевое воздействие (например, [57, 186, 192, 199, 200, 247, 266, 271, 281] и др.), и значительно реже – распределенное по поверхности [47, 140, 149, 174, 184, 213, 246, 275] и др.

Для математического описания любого внешнего воздействия на конструкцию, оно должно быть разложено на компоненты q, P_x, P_y , соответствующие локальной системе координат. Каждая из этих компонент может зависеть от x, y, z .

Как правило, если внешняя нагрузка приложена по нормали к поверхности оболочки, ее поперечная компонента может быть задана в виде

$$q = q_0(a_{11} + a_{21}x + a_{31}x^2)(a_{12} + a_{22}y + a_{32}y^2) + q_{sv}, \quad (1.16)$$

где q_0 – величина приложенной нагрузки, МПа; q_{sv} – поперечная компонента нагрузки от собственного веса оболочки, МПа. Задавая разные значения коэффициентов $a_{11} - a_{32}$ можно получить наиболее часто встречающиеся варианты нагружения.

1.3.5 Собственный вес конструкции

При анализе процесса деформирования оболочечных конструкций под действием внешних нагрузок, необходимо также учитывать нагрузку, вызванную собственным весом оболочки. Поскольку направление приложения данной нагрузки совпадает с направлением действия силы тяжести, и задается в глобальной системе координат, то возникает необходимость разложения ее на три компоненты в локальной системе координат. Учитывая, что для разных видов оболочек локальная система координат отличается, преобразование следует сделать для каждого вида отдельно.

Полугие оболочки двоякой кривизны

Для начала определим нагрузку от собственного веса, приведенную на единицу площади поверхности оболочки:

$$P_g = \frac{mg}{S_{sh}} = \frac{\rho Vg}{S_{sh}} = \frac{\rho abhg}{ab} = \rho gh. \quad (1.17)$$

Полученное значение будет иметь размерность в Па. Для перехода к МПа его следует умножить на 10^{-6} .

Для перехода к локальной системе координат введем два угла, соответствующие направлениям x и y :

$$\begin{aligned} \alpha_{sv} &= \frac{1}{R_1 + 0.5h} \left(x - \frac{a}{2} \right), \\ \beta_{sv} &= \frac{1}{R_2 + 0.5h} \left(y - \frac{b}{2} \right). \end{aligned} \quad (1.18)$$

Используем их для вычисления компонент нагрузки от собственного веса:

$$\begin{aligned} P_{xsv} &= P_g \sin \alpha_{sv} \cos \beta_{sv}, \\ P_{ysv} &= P_g \cos \alpha_{sv} \sin \beta_{sv}, \\ q_{sv} &= P_g \cos \alpha_{sv} \cos \beta_{sv}. \end{aligned} \quad (1.19)$$

Полученные выражения зависят от x и y , и подставляются в функционал полной энергии деформации для формирования слагаемых, отвечающих за

нагрузку. Например, если на конструкцию действует только внешняя равномерно распределенная поперечная нагрузка и собственный вес, то следует принять

$$P_x = P_{xsv}, \quad P_y = P_{ysv}, \quad q = q_0 + q_{sv}. \quad (1.20)$$

Цилиндрические панели

Выполняя преобразования по аналогии с предыдущим пунктом, для начала определим нагрузку от собственного веса, приведенную на единицу площади поверхности оболочки:

$$P_g = \frac{mg}{S_{sh}} = \frac{\rho Vg}{S_{sh}} = \frac{\rho abR_2hg}{abR_2} = \rho gh. \quad (1.21)$$

Полученное значение будет иметь размерность в Па. Для перехода к МПа его следует умножить на 10^{-6} .

Для перехода к локальной системе координат в данном случае потребуется только один угол, соответствующий направлению оси y :

$$\beta_{sv} = y - \frac{b}{2}. \quad (1.22)$$

Используем его для вычисления компонент нагрузки от собственного веса:

$$\begin{aligned} P_{xsv} &= 0, \\ P_{ysv} &= P_g \sin \beta_{sv}, \\ q_{sv} &= P_g \cos \beta_{sv}. \end{aligned} \quad (1.23)$$

1.4 ФУНКЦИОНАЛ ПОЛНОЙ ПОТЕНЦИАЛЬНОЙ ЭНЕРГИИ ДЕФОРМАЦИИ

В качестве основы для математической модели деформирования оболочечной конструкции при статическом нагружении будем брать функционал полной потенциальной энергии деформации (функционал Лагранжа). Модели, построенные с использованием функционала, также рассматривались многими авторами [2, 47, 161, 172, 209, 220, 228, 234, 239, 254, 272, 280] и др.

Для задач статики представим функционал как разность потенциальной энергии системы и работы внешних сил

$$E_s = E_p - A. \quad (1.24)$$

В большинстве случаев далее будем объединять потенциальную энергию системы и работу внешних сил под общими знаками интеграла для сокращения громоздкости рассуждений и удобства выполнения преобразований. Однако, в следующей главе, для подкрепленных оболочек такое объединение уже нельзя будет делать.

1.4.1 Модель Кирхгофа – Лява

Функционал Лагранжа полной потенциальной энергии деформации оболочки, на которую действует внешняя нагрузка, для модели Кирхгофа – Лява принимает следующий вид:

$$E_s = \frac{1}{2} \int_{a_1}^a \int_0^b \left\{ N_x \varepsilon_x + N_y \varepsilon_y + \frac{1}{2} (N_{xy} + N_{yx}) \gamma_{xy} + M_x \chi_1 + M_y \chi_2 + \right. \quad (1.25)$$

$$\left. + (M_{xy} + M_{yx}) \chi_{12} - 2 \left(P_x U + P_y V + q W \right) \right\} AB dx dy.$$

Переменная a_1 в нижнем пределе интегрирования характерна только для усеченных конических оболочек в силу их геометрии, в остальных случаях $a_1 = 0$.

Следует отметить, что здесь и далее важным является раздельная запись N_{xy} и N_{yx} , M_{xy} и M_{yx} , поскольку при добавлении в модель учета ребер жесткости (в следующей главе) они уже не будут равны друг другу.

1.4.2 Модель Тимошенко – Рейсснера

Функционал Лагранжа полной потенциальной энергии деформации оболочки, на которую действует внешняя нагрузка, для модели Тимошенко – Рейсснера принимает следующий вид:

$$E_s = \frac{1}{2} \int_{a_1}^a \int_0^b \left\{ N_x \varepsilon_x + N_y \varepsilon_y + \frac{1}{2} (N_{xy} + N_{yx}) \gamma_{xy} + M_x \chi_1 + M_y \chi_2 + (M_{xy} + M_{yx}) \chi_{12} + \right. \\ \left. + Q_x (\Psi_x - \theta_1) + Q_y (\Psi_y - \theta_2) - 2 (P_x U + P_y V + q W) \right\} AB dx dy. \quad (1.26)$$

Также функционал (1.26) можно записать через деформации, подставив в него выражения (1.15). Для гладких оболочек получим [215]

$$E_s = \frac{E_1}{2(1 - \mu_{12}\mu_{21})} \int_{a_1}^a \int_0^b \left\{ h \left(\varepsilon_x^2 + \bar{G}_2 \varepsilon_y^2 + 2\mu_{21} \varepsilon_x \varepsilon_y + \bar{G}_{12} \gamma_{xy}^2 + \bar{G}_{13} k (\Psi_x - \theta_1)^2 + \right. \right. \\ \left. \left. + \bar{G}_{23} k (\Psi_y - \theta_2)^2 \right) + \frac{h^3}{12} (\chi_1^2 + \bar{G}_2 \chi_2^2 + 2\mu_{21} \chi_1 \chi_2 + 4\bar{G}_{12} \chi_{12}^2) - \right. \\ \left. - 2 \frac{(1 - \mu_{12}\mu_{21})}{E_1} (P_x U + P_y V + q W) \right\} AB dx dy. \quad (1.27)$$

С учетом того, что для ортотропного материала $E_1 \mu_{21} = E_2 \mu_{12}$, здесь введены обозначения

$$\bar{G}_2 = \frac{E_2}{E_1}, \quad \bar{G}_{12} = \frac{G_{12}(1 - \mu_{12}\mu_{21})}{E_1}, \\ \bar{G}_{13} = \frac{G_{13}(1 - \mu_{12}\mu_{21})}{E_1}, \quad \bar{G}_{23} = \frac{G_{23}(1 - \mu_{12}\mu_{21})}{E_1}. \quad (1.28)$$

В дальнейшем, если не будет указано обратное, в задачах статики будем рассматривать только поперечную компоненту нагрузки q , то есть $P_x = P_y = 0$.

1.5 СОПОСТАВЛЕНИЕ С ТЕОРИЕЙ ОБОЛОЧЕК В. В. НОВОЖИЛОВА

В работе В. В. Новожилова [110] выражения для деформаций, которые происходят в оболочке на расстоянии z от срединной поверхности, записываются в виде (с использованием обозначений, принятых в данной работе)

$$\varepsilon_x^z = \frac{1}{1 + \frac{z}{R_1}} (\varepsilon_x + z \chi_1), \quad \varepsilon_y^z = \frac{1}{1 + \frac{z}{R_2}} (\varepsilon_y + z \chi_2),$$

$$\gamma_{xy}^z = \frac{1}{\left(1 + \frac{z}{R_1}\right)\left(1 + \frac{z}{R_2}\right)} \left\{ \left(1 - \frac{z^2}{R_1 R_2}\right) \gamma_{xy} + 2 \left[1 + \left(\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} \right) \frac{z}{2} \right] z \chi_{12} \right\}. \quad (1.29)$$

Далее в этой работе говорится:

«..Разложив знаменатели этих формул в ряды по степеням z , сохранив в получающихся при этом выражениях степени z до второй включительно, а затем пренебрегая членами, содержащими z^2 , получим.. »

$$\begin{aligned} \varepsilon_x^z &\approx \varepsilon_x + z \left(\chi_1 - \frac{\varepsilon_x}{R_1} \right), \\ \varepsilon_y^z &\approx \varepsilon_y + z \left(\chi_2 - \frac{\varepsilon_y}{R_2} \right), \\ \gamma_{xy}^z &\approx \gamma_{xy} + 2z \left[\chi_{12} - \left(\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} \right) \frac{\gamma_{xy}}{2} \right]. \end{aligned} \quad (1.30)$$

В. В. Новожилов потенциальную энергию деформации оболочки (модель Кирхгофа – Лява) предлагает брать в виде

$$E_p = \frac{1}{2} \iiint \left(\sigma_x \varepsilon_x^z + \sigma_y \varepsilon_y^z + \tau_{xy} \gamma_{xy}^z \right) AB \left(1 + \frac{z}{R_1} \right) \left(1 + \frac{z}{R_2} \right) dx dy dz, \quad (1.31)$$

где

$$\sigma_x = \frac{E}{1 + \mu^2} \left[\varepsilon_x^z + \mu \varepsilon_y^z \right], \quad \sigma_y = \frac{E}{1 + \mu^2} \left[\varepsilon_y^z + \mu \varepsilon_x^z \right], \quad \tau_{xy} = \frac{E}{2(1 + \mu)} \gamma_{xy}^z. \quad (1.32)$$

Подынтегральное выражение раскладывается в ряд по степеням z .

После интегрирования по z получим

$$\begin{aligned} E_p &= \frac{Eh}{2(1 - \mu^2)} \iint \left[(\varepsilon_x + \varepsilon_y)^2 - 2(1 - \mu) \left(\varepsilon_x \varepsilon_y - \frac{\gamma_{xy}^2}{4} \right) \right] AB dx dy + \\ &+ \frac{Eh^3}{24(1 - \mu^2)} \iint \left[(\chi_1 + \chi_2)^2 - 2(1 - \mu) (\chi_1 \chi_2 - \chi_{12}^2) - 2 \left(\frac{1}{R_1} - \frac{1}{R_2} \right) (\varepsilon_x \chi_1 - \varepsilon_y \chi_2) - \right. \\ &\quad \left. - (1 - \mu) \left(\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} \right) \gamma_{xy} \chi_{12} + \left(\frac{1}{R_1} - \frac{1}{R_2} \right) \left(\frac{\varepsilon_x^2}{R_1} - \frac{\varepsilon_y^2}{R_2} \right) + \right. \end{aligned} \quad (1.33)$$

$$+\frac{1-\mu}{2}\left(\frac{1}{R_1^2}-\frac{1}{R_1R_2}+\frac{1}{R_2^2}\right)\gamma_{xy}^2\Big]ABdxdy.$$

Далее, пренебрегая членами $\frac{h}{R}$ и $\frac{h^2}{R^2}$, В. В. Новожилов получает выражения потенциальной энергии деформации для тонких оболочек

$$E_p = \frac{Eh}{2(1-\mu^2)} \iint \left[(\varepsilon_x + \varepsilon_y)^2 - 2(1-\mu) \left(\varepsilon_x \varepsilon_y - \frac{\gamma_{xy}^2}{4} \right) \right] ABdxdy + \quad (1.34)$$

$$+ \frac{Eh^3}{24(1-\mu^2)} \iint \left[(\chi_1 + \chi_2)^2 - 2(1-\mu) (\chi_1 \chi_2 - \chi_{12}^2) \right] ABdxdy.$$

Это выражение для потенциальной энергии полностью совпадает с рассматриваемым в данной работе для гладких оболочек при неучете поперечных сдвигов. Таким образом, оправдано вместо соотношений (1.29) использовать соотношения (1.9). Аналогичные упрощения в теории тонких оболочек вводятся в работах Э. Л. Аксельрада [3], Э. И. Григолюка и В. В. Кабанова [46], А. К. Перцева и Э. Г. Платонова [114] и др.

1.6 КРАЕВЫЕ УСЛОВИЯ

Краевые условия выбираются в зависимости от способа закрепления контура оболочки. Наиболее распространенными в задачах строительства являются шарнирно-неподвижное закрепление, жесткое и шарнирно-подвижное.

1.6.1 Модель Кирхгофа – Лява

При использовании модели Кирхгофа – Лява, на каждом краю оболочки должны выполняться 4 краевых условия. Если область D , занимаемая оболочкой, имеет вид $D\{a_1 \leq x \leq a, 0 \leq y \leq b\}$, тогда естественными краевыми условиями, которые следуют из преобразования вариационного уравнения, являются:

- При $x = a_1, x = a$

$$N_x = 0 \text{ или } U = 0;$$

$$N_{xy} = 0 \text{ или } V = 0,$$

$$N_x \theta_1 + N_{xy} \theta_2 + \frac{\partial M_x}{\partial x} + \frac{\partial M_{xy}}{\partial y} + \frac{\partial M_{yx}}{\partial y} = 0 \text{ или } W = 0, \quad (1.35)$$

$$M_x = 0 \text{ или } \frac{\partial W}{\partial x} = 0;$$

- При $y = 0, y = b$

$$N_{xy} = 0 \text{ или } U = 0;$$

$$N_y = 0 \text{ или } V = 0,$$

$$N_y \theta_2 + N_{xy} \theta_1 + \frac{\partial M_y}{\partial y} + \frac{\partial M_{xy}}{\partial x} + \frac{\partial M_{yx}}{\partial x} = 0 \text{ или } W = 0, \quad (1.36)$$

$$M_y = 0 \text{ или } \frac{\partial W}{\partial y} = 0.$$

Из соотношений (1.35), (1.36) можно сформировать конкретные краевые условия при различном закреплении краев конструкции (Таблица 1.2).

Краевые условия для шарнирно-подвижного закрепления контура конструкции будут описаны далее.

Таблица 1.2 – Краевые условия при различном способе закрепления конструкции

Закрепление	При $x = a_1, x = a$	При $y = 0, y = b$
Шарнирно-неподвижное	$U = V = W = M_x = 0$	$U = V = W = M_y = 0$
Жесткое	$U = V = W = \frac{\partial W}{\partial x} = 0$	$U = V = W = \frac{\partial W}{\partial y} = 0$
Жесткое при $x = a_1, x = a$ и шарнирно-неподвижное при $y = 0, y = b$	$U = V = W = \frac{\partial W}{\partial x} = 0$	$U = V = W = M_y = 0$
Жесткое при $x = a_1, x = a$ и свободный край при $y = 0, y = b$	$U = V = W = \frac{\partial W}{\partial x} = 0$	$N_{xy} = N_y = W = M_y = 0$

1.6.2 Модель Тимошенко – Рейсснера

При использовании модели Тимошенко – Рейсснера, на каждом краю оболочки должны выполняться 5 краевых условий. Если область D , занимаемая оболочкой, имеет вид $D\{a_1 \leq x \leq a, 0 \leq y \leq b\}$, тогда естественными краевыми условиями, которые следуют из вариационного уравнения, являются [71]:

- При $x = a_1, x = a$

$$\begin{aligned} N_x &= 0 \text{ или } U = 0; N_{yx} = 0 \text{ или } V = 0, \\ N_x \theta_1 + N_{yx} \theta_2 - Q_x &= 0 \text{ или } W = 0, \\ \Psi_x &= 0 \text{ или } M_x = 0, M_{yx} = 0 \text{ или } \Psi_y = 0; \end{aligned} \quad (1.37)$$

- При $y = 0, y = b$

$$\begin{aligned} N_{xy} &= 0 \text{ или } U = 0; N_y = 0 \text{ или } V = 0, \\ N_y \theta_2 + N_{xy} \theta_1 - Q_y &= 0 \text{ или } W = 0, \\ \Psi_x &= 0 \text{ или } M_{xy} = 0, M_y = 0 \text{ или } \Psi_y = 0. \end{aligned} \quad (1.38)$$

Из соотношений (1.37), (1.38) можно сформировать конкретные краевые условия при различном закреплении края конструкции (Таблица 1.3).

Таблица 1.3 – Краевые условия при различном способе закрепления конструкции

Закрепление	При $x = a_1, x = a$	При $y = 0, y = b$
Шарнирно-неподвижное	$U = V = W = 0$ $M_x = \Psi_y = 0$	$U = V = W = 0$ $\Psi_x = M_y = 0$
Жесткое	$U = V = W = 0$ $\Psi_x = \Psi_y = 0$	$U = V = W = 0$ $\Psi_x = \Psi_y = 0$
Жесткое и шарнирно-неподвижное	$U = V = W = 0$ $\Psi_x = \Psi_y = 0$	$U = V = W = 0$ $\Psi_x = M_y = 0$
Жесткое и свободный край	$U = V = W = 0$ $\Psi_x = \Psi_y = 0$	$N_{xy} = N_y = Q_y = 0$ $M_{xy} = M_y = 0$

Краевые условия для случая шарнирно-подвижного закрепления будут описаны далее.

1.7 БЕЗРАЗМЕРНЫЕ ПАРАМЕТРЫ ДЛЯ ГЛАДКИХ ОРТОТРОПНЫХ ОБОЛОЧЕК

Введение безразмерных параметров позволяет одним расчетом получить напряженно-деформированное состояние целой серии подобных конструкций и, тем самым, выбрать наиболее рациональные размерные параметры оболочек, а для изотропных конструкций еще и материал [74].²

При расчете пологих изотропных оболочек прямоугольного плана разные варианты безразмерных параметров использовались в работах [70, 88, 116, 117, 153]. Для оболочек вращения в осесимметричной постановке безразмерные параметры использовались в работе Н. В. Валишвили [28], что является частным случаем параметров, предлагаемых в данной работе [74]. Кроме того, в работах [34–36, 159, 199, 219, 250] используются различные безразмерные параметры для каждого конкретного вида оболочек и решаемых задач. Однако, целесообразно разработать единые безразмерные параметры, пригодные для различного вида конструкций независимо от класса решаемой задачи.

Введем безразмерные параметры [74]

$$\begin{aligned}\xi &= \frac{x - a_1}{a - a_1}, \quad \eta = \frac{y}{b}, \quad \bar{\lambda} = \frac{aA}{bB}, \quad k_\xi = hk_x, \quad k_\eta = hk_y, \\ \bar{U} &= \frac{aUA}{h^2}, \quad \bar{V} = \frac{bVB}{h^2}, \quad \bar{W} = \frac{W}{h}, \quad \bar{\Psi}_x = \frac{\Psi_x aA}{h}, \quad \bar{\Psi}_y = \frac{\Psi_y bB}{h}, \\ \bar{\sigma}_x &= \frac{\sigma_x(1 - \mu_{12}\mu_{21})a^2 A^2}{E_1 h^2}, \quad \bar{\sigma}_y = \frac{\sigma_y(1 - \mu_{12}\mu_{21})a^2 A^2}{E_2 h^2}, \quad \bar{\tau}_{xy} = \frac{\tau_{xy} a^2 A^2}{G_{12} h^2}, \\ \bar{P} &= \frac{a^4 A^4 q}{h^4 E_1}, \quad \bar{A} = \frac{aA}{h}, \quad \bar{B} = \frac{bB}{h}, \quad \bar{z} = \frac{z}{h},\end{aligned}\tag{1.39}$$

² По результатам проведенного исследования автором опубликованы, в том числе, работы:

– Карпов, В. В. Безразмерные параметры в теории подкрепленных оболочек / В. В. Карпов, А. А. Семенов // Вестник ПНИПУ. Механика. – 2015. – № 3. – С. 74–94.

где a, b – линейные размеры оболочки в направлении осей x и y соответственно; $\bar{\lambda}$ – безразмерный коэффициент; $\xi, \eta, \bar{z}$ – новая (безразмерная) система координат оболочки [74].

При решении уравнений в смешанной форме вводится функция напряжений в срединной поверхности оболочки $\Phi(x, y)$. В безразмерных параметрах она имеет вид [74]

$$\bar{\Phi}(\xi, \eta) = \frac{\Phi(x, y)}{E_1 h^2}.$$

Важную роль в формулировании безразмерных параметров играют параметры Ляме поверхности оболочки. Значения параметров Ляме A, B для пологих двоякой кривизны, цилиндрических, сферических, конических, тороидальных оболочек были приведены ранее в Таблице 1.1. В расширенном варианте эти данные приводятся в Таблице 1.4 [74]. Здесь d_1 – смещение образующего сектора от оси вращения для тороидальной оболочки; θ – угол конусности конической оболочки.

Таблица 1.4 – Параметры Ляме, радиусы главных кривизн и размерности для основных характеристик [74]

Вид оболочки	A	B	R_1 , м	R_2 , м	a	b
Пологая двоякой кривизны	1	1	const	const	метры	метры
Цилиндрическая	1	R_2	∞	const	метры	радианы
Коническая	1	$x \cdot \sin \theta$	∞	$x \cdot \operatorname{tg} \theta$	метры	радианы
Сферическая	R	$R \cdot \sin x$	R	R	радианы	радианы
Тороидальная	R	$d_1 + R \cdot \sin x$	R	$\frac{d_1 + R \cdot \sin x}{\sin x}$	радианы	радианы

Как видно из Таблицы 1.4, если параметр b – размерный, то B – безразмерный, и наоборот; если параметр a – размерный, то A – безразмерный, и наоборот. Таким

образом, произведения aA и bB всегда будут размерными величинами. Следовательно, используя это, можно ввести безразмерные параметры Ляме следующим образом: $\bar{A} = \frac{aA}{h}$, $\bar{B} = \frac{bB}{h}$, и для всех рассматриваемых видов оболочек они будут безразмерными [74].

Расчет напряженно-деформированного состояния и устойчивости оболочечных конструкций в безразмерных параметрах позволяет получить критическую нагрузку для целой серии подобных оболочек (Рисунки 1.6, 1.7).

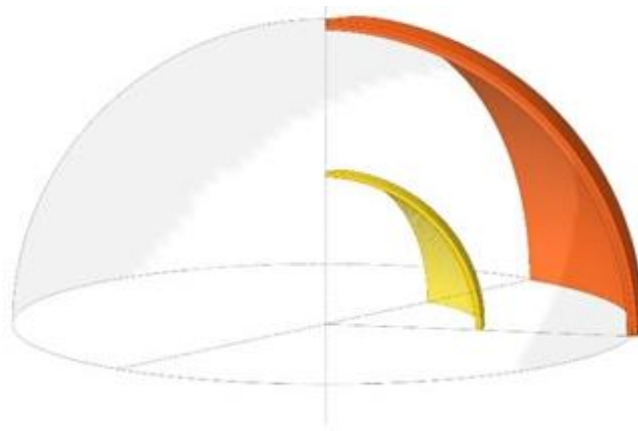


Рисунок 1.6. Подобные сферические оболочки [74]

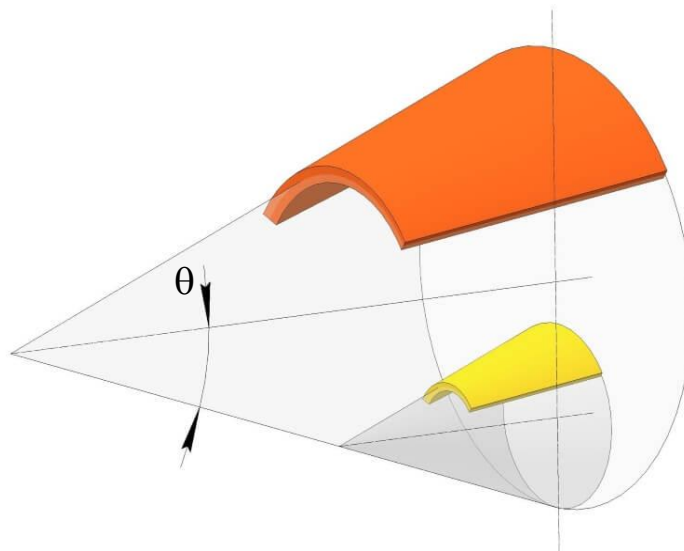


Рисунок 1.7. Подобные конические оболочки [74]

Прогибы, усилия и моменты для различных подобных оболочек находятся масштабированием полученных безразмерных значений этих величин [74].

В выражениях (1.8), (1.10) осуществим переход к безразмерным параметрам (1.39) [74]:

$$\begin{aligned}
\frac{1}{AB} \frac{\partial B}{\partial x} &= \frac{1}{AB} \frac{h}{ab} \frac{\partial \bar{B}}{\partial \xi} = \frac{h}{AaBb} \frac{\partial \bar{B}}{\partial \xi}, \\
\theta_1 &= - \left(\frac{h}{aA} \frac{\partial \bar{W}}{\partial \xi} + \frac{1}{h} k_\xi \frac{h^2}{aA} \bar{U} \right) = - \frac{h}{aA} \left(\frac{\partial \bar{W}}{\partial \xi} + k_\xi \bar{U} \right) = \frac{h}{aA} \bar{\theta}_1, \\
\theta_2 &= - \left(\frac{h}{bB} \frac{\partial \bar{W}}{\partial \eta} + \frac{1}{h} k_\eta \frac{h^2}{bB} \bar{V} \right) = - \frac{h}{aA} \bar{\lambda} \left(\frac{\partial \bar{W}}{\partial \eta} + k_\eta \bar{V} \right) = \frac{h}{aA} \bar{\lambda} \bar{\theta}_2, \\
\varepsilon_x &= \frac{1}{A} \frac{\partial U}{\partial x} + \frac{1}{AB} \frac{\partial A}{\partial y} V - k_x W + \frac{1}{2} \theta_1^2 = \\
&= \frac{h^2}{a^2 A^2} \left(\frac{\partial \bar{U}}{\partial \xi} + \frac{1}{\bar{B}} \bar{\lambda} \frac{\partial \bar{A}}{\partial \eta} \bar{V} - k_\xi \bar{A}^2 \bar{W} + \frac{1}{2} \bar{\theta}_1^2 \right) = \frac{h^2}{a^2 A^2} \bar{\varepsilon}_x, \\
\varepsilon_y &= \frac{1}{B} \frac{\partial V}{\partial y} + \frac{1}{AB} \frac{\partial B}{\partial x} U - k_y W + \frac{1}{2} \theta_2^2 = \\
&= \frac{h^2}{a^2 A^2} \left(\bar{\lambda}^2 \frac{\partial \bar{V}}{\partial \eta} + \frac{1}{\bar{B}} \frac{\partial \bar{B}}{\partial \xi} \bar{U} - k_\eta \bar{A}^2 \bar{W} + \frac{1}{2} \bar{\lambda}^2 \bar{\theta}_2^2 \right) = \frac{h^2}{a^2 A^2} \bar{\varepsilon}_y, \\
\gamma_{xy} &= \frac{1}{A} \frac{\partial V}{\partial x} + \frac{1}{B} \frac{\partial U}{\partial y} - \frac{1}{AB} \frac{\partial A}{\partial y} U - \frac{1}{AB} \frac{\partial B}{\partial x} V + \theta_1 \theta_2 = \\
&= \frac{h^2}{a^2 A^2} \left(\bar{\lambda} \frac{\partial \bar{V}}{\partial \xi} + \bar{\lambda} \frac{\partial \bar{U}}{\partial \eta} - \bar{\lambda} \frac{1}{\bar{A}} \frac{\partial \bar{A}}{\partial \eta} \bar{U} - \bar{\lambda} \frac{1}{\bar{B}} \frac{\partial \bar{B}}{\partial \xi} \bar{V} + \bar{\lambda} \bar{\theta}_1 \bar{\theta}_2 \right) = \frac{h^2}{a^2 A^2} \bar{\lambda} \bar{\gamma}_{xy}, \\
\gamma_{xz} &= k f(z) \left[\Psi_x - \theta_1 \right] = \frac{h}{aA} k f(\bar{z}) \left[\bar{\Psi}_x - \bar{\theta}_1 \right] = \frac{h}{aA} \bar{\gamma}_{xz}, \\
\gamma_{yz} &= k f(z) \left[\Psi_y - \theta_2 \right] = \frac{h}{aA} \bar{\lambda} k f(\bar{z}) \left[\bar{\Psi}_y - \bar{\theta}_2 \right] = \frac{h}{aA} \bar{\gamma}_{yz}, \\
\chi_1 &= \frac{1}{A} \frac{\partial \Psi_x}{\partial x} + \frac{1}{AB} \frac{\partial A}{\partial y} \Psi_y = \frac{1}{A} \frac{h}{Aa^2} \left(\frac{\partial \bar{\Psi}_x}{\partial \xi} + \frac{1}{\bar{B}} \bar{\lambda} \frac{\partial \bar{A}}{\partial \eta} \bar{\Psi}_y \right) = \frac{h}{A^2 a^2} \bar{\chi}_1, \\
\chi_2 &= \frac{1}{B} \frac{\partial \Psi_y}{\partial y} + \frac{1}{AB} \frac{\partial B}{\partial x} \Psi_x = \frac{h}{A^2 a^2} \left(\bar{\lambda}^2 \frac{\partial \bar{\Psi}_y}{\partial \eta} + \frac{1}{\bar{B}} \frac{\partial \bar{B}}{\partial \xi} \bar{\Psi}_x \right) = \frac{h}{A^2 a^2} \bar{\chi}_2, \\
\chi_{12} &= \frac{1}{2} \left(\frac{1}{A} \frac{\partial \Psi_y}{\partial x} + \frac{1}{B} \frac{\partial \Psi_x}{\partial y} - \frac{1}{AB} \frac{\partial A}{\partial y} \Psi_x - \frac{1}{AB} \frac{\partial B}{\partial x} \Psi_y \right) =
\end{aligned} \tag{1.40}$$

$$= \frac{1}{2} \frac{h}{a^2 A^2} \left(\bar{\lambda} \frac{\partial \bar{\Psi}_y}{\partial \xi} + \bar{\lambda} \frac{\partial \bar{\Psi}_x}{\partial \eta} - \bar{\lambda} \frac{1}{\bar{A}} \frac{\partial \bar{A}}{\partial \eta} \bar{\Psi}_x - \bar{\lambda} \frac{1}{\bar{B}} \frac{\partial \bar{B}}{\partial \xi} \bar{\Psi}_y \right) = \frac{h}{a^2 A^2} \bar{\lambda} \bar{\chi}_{12}.$$

Далее перейдем к безразмерным параметрам (1.39) в физических соотношениях (1.14) [74] и получим

$$\begin{aligned} \bar{\sigma}_x &= \left[\bar{\varepsilon}_x + \mu_{21} \bar{\varepsilon}_y + \bar{z} (\bar{\chi}_1 + \mu_{21} \bar{\chi}_2) \right], \quad \sigma_x = \frac{E_1}{1 - \mu_{12} \mu_{21}} \frac{h^2}{a^2 A^2} \bar{\sigma}_x, \\ \bar{\sigma}_y &= \left[\bar{\varepsilon}_y + \mu_{12} \bar{\varepsilon}_x + \bar{z} (\bar{\chi}_2 + \mu_{12} \bar{\chi}_1) \right], \quad \sigma_y = \frac{E_2}{1 - \mu_{12} \mu_{21}} \frac{h^2}{a^2 A^2} \bar{\sigma}_y, \\ \bar{\tau}_{xy} &= \bar{\lambda} \left[\bar{\gamma}_{xy} + 2 \bar{z} \bar{\chi}_{12} \right], \quad \tau_{xy} = G_{12} \frac{h^2}{a^2 A^2} \bar{\tau}_{xy}, \\ \bar{\tau}_{xz} &= k f(\bar{z}) \bar{A} \left[\bar{\Psi}_x - \bar{\theta}_1 \right], \quad \tau_{xz} = G_{13} \frac{h^2}{a^2 A^2} \bar{\tau}_{xz}, \\ \bar{\tau}_{yz} &= k f(\bar{z}) \bar{A} \bar{\lambda} \left[\bar{\Psi}_y - \bar{\theta}_2 \right], \quad \tau_{yz} = G_{23} \frac{h^2}{a^2 A^2} \bar{\tau}_{yz}. \end{aligned} \quad (1.41)$$

Здесь

$$f(\bar{z}) = 6 \left(\frac{1}{4} - \bar{z}^2 \right).$$

В том случае, если используется форма записи функционала энергии через деформации, то после использования полученных ранее выражений (1.40), получим [74]:

$$\begin{aligned} E_s &= \frac{E_1 h^7}{2(1 - \mu_{12} \mu_{21}) a^4 A^4} \int_0^1 \int_0^1 \left\{ \bar{\varepsilon}_x^2 + \bar{G}_2 \bar{\varepsilon}_y^2 + (\mu_{21} + \bar{G}_2 \mu_{12}) \bar{\varepsilon}_x \bar{\varepsilon}_y + \bar{G}_{12} \bar{\lambda}^2 \bar{\gamma}_{xy}^2 + \right. \\ &+ \frac{1}{12} (\bar{\chi}_1^2 + \bar{G}_2 \bar{\chi}_2^2 + (\mu_{21} + \bar{G}_2 \mu_{12}) \bar{\chi}_1 \bar{\chi}_2 + 4 \bar{G}_{12} \bar{\lambda}^2 \bar{\chi}_{12}^2) + \bar{G}_{13} k \bar{A}^2 (\bar{\Psi}_x - \bar{\theta}_1)^2 + \\ &+ \bar{G}_{23} k \bar{A}^2 \bar{\lambda}^2 (\bar{\Psi}_y - \bar{\theta}_2)^2 - 2(1 - \mu_{12} \mu_{21}) \bar{P} \bar{W} \left. \right\} \bar{A} \bar{B} d\xi d\eta = \\ &= \frac{E_1 h^7}{2 a^4 A^4 (1 - \mu_{12} \mu_{21})} \bar{E}_s. \end{aligned} \quad (1.42)$$

В результате, под знаками интеграла теперь присутствуют только безразмерные слагаемые [74]. Для функционала, записываемого через усилия и моменты, могут потребоваться соответствующие безразмерные выражения [74]:

$$\begin{aligned}
N_x &= \frac{E_1 h}{1 - \mu_{12} \mu_{21}} (\varepsilon_x + \mu_{21} \varepsilon_y) = \frac{E_1 h}{1 - \mu_{12} \mu_{21}} \frac{h^2}{a^2 A^2} (\bar{\varepsilon}_x + \mu_{21} \bar{\varepsilon}_y) = \\
&= \frac{E_1 h}{(1 - \mu_{12} \mu_{21}) \bar{A}^2} (\bar{\varepsilon}_x + \mu_{21} \bar{\varepsilon}_y) = E_1 h \bar{N}_x, \\
N_y &= \frac{E_2 h}{1 - \mu_{12} \mu_{21}} (\varepsilon_y + \mu_{12} \varepsilon_x) = \frac{E_2 h}{1 - \mu_{12} \mu_{21}} \frac{h^2}{a^2 A^2} (\bar{\varepsilon}_y + \mu_{12} \bar{\varepsilon}_x) = E_2 h \bar{N}_y, \\
N_{xy} = N_{yx} &= G_{12} h \gamma_{xy} = G_{12} h \frac{h^2}{a^2 A^2} \bar{\lambda} \bar{\gamma}_{xy} = \frac{G_{12} h}{\bar{A}^2} \bar{\lambda} \bar{\gamma}_{xy} = G_{12} h \bar{N}_{xy}, \quad (1.43) \\
M_x &= \frac{E_1}{1 - \mu_{12} \mu_{21}} \left[\left(\frac{h^3}{12} \right) (\chi_1 + \mu_{21} \chi_2) \right] = \frac{E_1 h^3}{12 (1 - \mu_{12} \mu_{21})} \frac{h}{a^2 A^2} (\bar{\chi}_1 + \mu_{21} \bar{\chi}_2) = \\
&= \frac{E_1 h^3}{12 (1 - \mu_{12} \mu_{21}) \bar{A}^2} (\bar{\chi}_1 + \mu_{21} \bar{\chi}_2) = E_1 h^2 \bar{M}_x, \\
M_y &= \frac{E_2}{1 - \mu_{12} \mu_{21}} \left[\left(\frac{h^3}{12} \right) (\chi_2 + \mu_{12} \chi_1) \right] = \frac{E_2 h^3}{12 (1 - \mu_{12} \mu_{21})} \frac{h}{a^2 A^2} (\bar{\chi}_2 + \mu_{12} \bar{\chi}_1) = E_2 h^2 \bar{M}_y, \\
M_{xy} = M_{yx} &= G_{12} \frac{h^3}{6} \chi_{12} = G_{12} \frac{h^2}{6 \bar{A}^2} \bar{\lambda} \bar{\chi}_{12} = G_{12} h^2 \bar{M}_{xy}, \\
Q_x &= G_{13} k h (\Psi_x - \theta_1) = G_{13} k \frac{h}{A} (\bar{\Psi}_x - \bar{\theta}_1) = G_{13} h \bar{Q}_x, \\
Q_y &= G_{23} k h (\Psi_y - \theta_2) = G_{23} k \frac{h}{A} \bar{\lambda} (\bar{\Psi}_y - \bar{\theta}_2) = G_{23} h \bar{Q}_y.
\end{aligned}$$

1.8 ВЫВОДЫ

Таким образом, в данной главе представлена математическая модель, описывающая процесс деформирования тонкостенных оболочечных конструкций под действием статической нагрузки. В основе модели используются гипотезы Тимошенко – Рейсснера. В основных соотношениях учитываются ортотропия

материала и геометрическая нелинейность. Модель включает в себя геометрические и физические соотношения, а также функционал полной потенциальной энергии деформации оболочки.

Предложен общий вариант безразмерных параметров для всех рассматриваемых видов оболочечных конструкций [74].

Показано сравнение с моделью деформирования оболочечных конструкций Кирхгофа – Лява [74].

Приводятся краевые условия для нескольких вариантов закрепления контура конструкции; значения параметров Ляме и главных радиусов кривизны для основных видов оболочек, которые могут быть исследованы по данной модели [74].

ГЛАВА 2. МАТЕМАТИЧЕСКИЕ МОДЕЛИ ДЕФОРМИРОВАНИЯ ТОНКОСТЕННЫХ ОРТОТРОПНЫХ ОБОЛОЧЕК ПРИ СТАТИЧЕСКОМ НАГРУЖЕНИИ, ИМЕЮЩИХ РЕБРА ИЛИ ВЫРЕЗЫ

Важным при расчете тонкостенных оболочек является учет наличия подкрепления ребрами жесткости [55, 113, 138, 140, 146, 178, 189, 254, 278, 284], так как это позволяет существенно повысить значение критической нагрузки, перераспределить опасные напряжения и тем самым повысить работоспособность конструкции.³

Большая часть исследований устойчивости подкрепленных оболочек была проведена для замкнутых изотропных цилиндрических оболочек [172, 199, 240, 271, 285], так как такие конструкции применяются на практике наиболее часто. Кроме того, в силу симметрии их можно рассматривать в упрощенной постановке. Однако, в дальнейшем, с появлением новых перспективных композитных материалов, область применения оболочечных конструкций существенно расширилась. И, с развитием вычислительной техники, появилась возможность исследовать подкрепленные оболочки различной геометрии и с разными свойствами материала.

В большинстве случаев для подкрепления оболочечных конструкций используется ортогональная сетка ребер (у конических и цилиндрических оболочек это стрингеры – продольные элементы жесткости, и кольца – окружные элементы

³ По результатам проведенного исследования автором опубликованы, в том числе, работы:

- Семенов, А. А. Уточненный дискретный метод расчета подкрепленных ортотропных оболочек / А. А. Семенов // Вестник ПНИПУ. Механика. – 2022. – № 4. – С. 90–102.
- Karpov, V. V. Structural anisotropy method for shells with orthogonal stiffeners / V. V. Karpov, A. A. Semenov // Structures. – 2021. – Vol. 34. – P. 3206–3221.
- Karpov, V. V. Refined model of stiffened shells / V. V. Karpov, A. A. Semenov // International Journal of Solids and Structures. – 2020. – Vol. 199. – P. 43–56.
- Карпов, В. В. Безразмерные параметры в теории подкрепленных оболочек / В. В. Карпов, А. А. Семенов // Вестник ПНИПУ. Механика. – 2015. – № 3. – С. 74–94.
- Каменев, И. В. Обоснование использования метода конструктивной анизотропии при расчете пологих оболочек двойной кривизны, ослабленных вырезами / И. В. Каменев, А. А. Семенов // Вестник ПНИПУ. Механика. – 2016. – № 2. – С. 54–68.
- Семенов, А. А. Геометрически нелинейная математическая модель расчета прочности и устойчивости ортотропных оболочечных конструкций: дис. ... канд. техн. наук: 05.23.17 / А. А. Семенов. – СПб.: СПбГАСУ, 2014. – 183 с.

жесткости). Тем не менее, для некоторых прикладных задач, например, в ракетно-космической или авиационной технике, наиболее эффективными являются сеточные подкрепления, где присутствуют не только ортогональные ребра жесткости, но и перекрестные [209, 283, 296]. Классификация видов подкрепления (с сохранением англоязычной терминологии) показана на Рисунке 2.1 [183, 283].

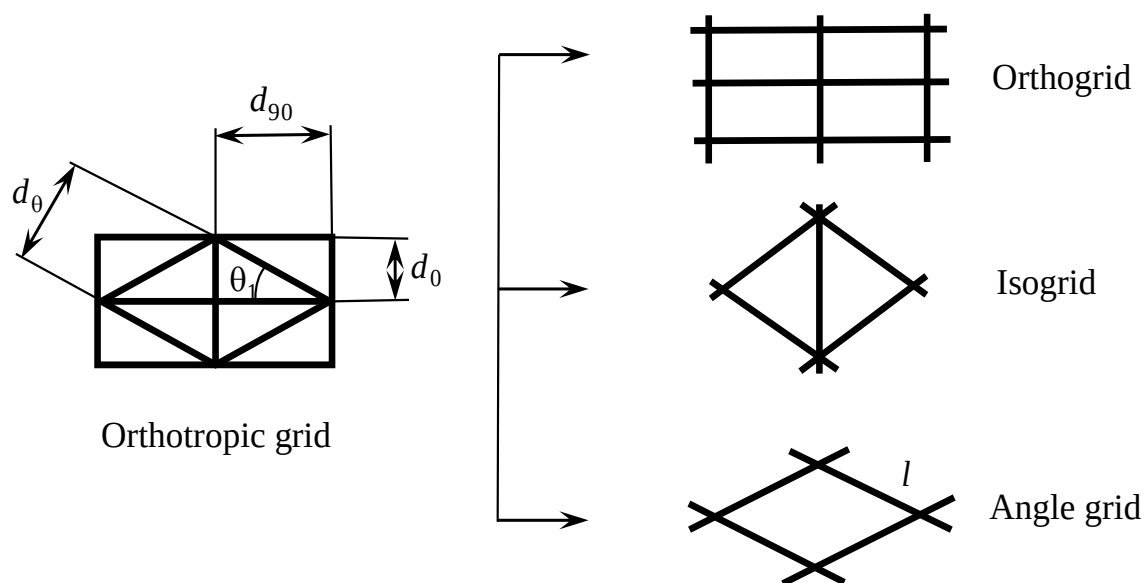


Рисунок 2.1. Классификация видов подкрепления [183, 283]

Вопросы разработки композитных оболочек, имеющих подкрепление ребрами жесткости, в том числе методы их проектирования, расчета и изготовления, описаны в работе В. В. Васильева, В. А. Барынина и А. Ф. Разина [282] и др.

К первым работам по исследованию устойчивости подкрепленных цилиндрических оболочек следует отнести работы Van der Neut (1947) [281], Baruch и Singer [173] и Singer и др. [271].

В статье McElman, Mikulas, и Stein [240] было рассмотрено влияние подкрепления на колебания и флаттер. Колебания также рассматривались Baccocchi и др. [171], Dung и Nam [189], Kim и Lee [222]. Prusty [251] проведен анализ свободных колебаний и потери устойчивости подкрепленных панелей. Также задачи динамики подкрепленных оболочек рассматривались в работах [11, 20, 54, 107, 127, 160, 190, 248, 261, 270].

Для нахождения наиболее эффективного варианта усиления конструкции часто решается задача оптимизации. Для цилиндрических оболочек такие решения получены, например, в работах Bai и др. [172], Chen и др. [182], Нао и др. [204], А. А. Смердова [138].

Существуют несколько подходов к введению ребер жесткости. Так, например, в исследованиях [209, 221] авторы выделяют дискретный подход, который можно найти, например, в работах [23, 100, 127, 160, 167, 207, 222, 254, 285, 286], а также подход с размазыванием жесткости подкрепления ([56, 108, 151, 175, 177, 190, 209, 240, 278] и др.).

Дискретный подход к введению ребер жесткости трудно использовать, когда панель подкреплена более чем в двух направлениях, или когда подкрепление не симметрично относительно срединной поверхности обшивки. Комбинированный подход является более гибким и более точным, и, как правило, включает в себя использование метода конечных элементов (МКЭ) [201] (Gendron и Gurdal, 1993). Однако детальное разбиение каждой конкретной конструкции конечными элементами является долгим и трудоемким, а проведение расчетов требует большой вычислительной мощности и времени.

Дискретный и комбинированный подходы являются вычислительно сложнее, и эти методы обычно используются на финальной стадии проектирования сеточно подкрепленных оболочек [177]. Некоторые авторы работали в этих направлениях, например, Huybrechts и др. [208] и Wang [286].

В подходе, основанном на размазывании жесткости, ребристая оболочка представляется как неподкрепленная оболочка постоянной толщины с эквивалентными ортотропными жесткостями, то есть жесткость ребер «размазывается» в эквивалентный слой.

Эти эквивалентные (или «размазанные») жесткости далее могут быть использованы для выполнения всех необходимых расчетов. Подход с размазыванием жесткости является вычислительно более эффективным для проведения расчетов, и позволяет легко учесть расположение ребер жесткости в любом направлении. На этом подходе основывается метод SSM, который в

большом числе источников представлен в разных вариантах, так как требует вывода отдельных соотношений для каждого конкретного варианта подкрепления [284].

В работе [210] ребра жесткости рассматриваются как изотропные одномерные балочные элементы и «размазываются» по области между ними. Крутильная жесткость ребер учитывается приближенно.

В работе [284] отмечается, что несмотря на свою эффективность, традиционный метод размазывания жесткости (SSM) по-прежнему недостаточно точен из-за принятых допущений. Поэтому в исследовании [284] предложен наиболее эффективный численный метод размазывания жесткости (NSSM) для анализа потери устойчивости подкрепленных оболочек. Сначала сеточно подкрепленная оболочка делится на одинаковые сегменты, а затем к элементарной ячейке применяется вариант метода асимптотической гомогенизации (NIAH). Далее нагрузка потери устойчивости рассчитывается с помощью метода Рэлея – Ритца. По сравнению с результатами, полученными с помощью SSM и МКЭ, наблюдаются высокая точность расчетов, что говорит об эффективности NSSM.

Вариант метода размазывания жесткости ребер, который учитывает взаимодействие ребер жесткости с обшивкой, также был разработан Chen и Tsai [183]. Представленная ими модель эквивалентной жесткости (ESM) может быть использована для сеточных структур, притом конструкция может быть с наличием обшивки или без нее.

Методы размазывания жесткости ребер требуют разработки критериев их применимости. Так, например, Jones [210] в качестве критерия для размазывания жесткости ребер использует расстояние между ними по отношению к ширине их поперечного сечения.

В модели Jaunky и др. [209] для ребристых панелей при «размазывании» жесткости учитываются эффекты взаимодействия обшивки и ребра. Соотношения получены аналитически с использованием принципа минимума потенциальной энергии для задач статики. Результаты потери устойчивости для панелей с разными

вариантами схем подкрепления получены на основе метода Рэлея-Ритца и сравниваются с результатами, полученными на основе МКЭ.

Slinchenko и Verijenko [273] использовали в своей работе подход с размазыванием жесткости, особое внимание уделяя анализу расстояния между ребрами. Рассматривались сеточно-подкрепленные конструкции.

В работе [177] (Buragohain M., Velmurugan R., 2009) ребра жесткости размазываются в эквивалентный слой, а затем нагрузка потери устойчивости рассчитывается с помощью метода Рэлея – Ритца.

Chen и Tsai [183] разработан эффективный SSM для сеточных подкреплений при наличии обшивки или без нее. Однако влияние эксцентриситета ребер жесткости не учитывается, что приводит к неточному расчету нагрузок потери устойчивости [210].

Кроме того, Zhang и др. [296] было предложено учитывать влияние эксцентриситета ребер. В последующих работах Нео и др. был применен метод SSM в анализе устойчивости подкрепленных оболочек ([204]).

На основе анализа усилий и моментов, возникающих в элементарной ячейке, Kidane и др. [221] получили нагрузки потери устойчивости сеточно подкрепленных композитных цилиндров, но без учета поперечных и сдвиговых деформаций для ребер жесткости.

Также в работе [284] показана эффективность NSSM для различных условий нагружения. Численные примеры показывают высокую точность расчетов и широкие возможности применения метода NSSM для различных вариантов подкрепляющей сетки ребер.

Для некоторых классов конструкций также может быть применен метод асимптотической гомогенизации (АНМ) [211]. Метод асимптотической гомогенизации (АНМ) применялся для расчета жесткости композитных пластин и оболочек со сложной микроструктурой в работах Каламкарова ([211] и др.), но тем не менее, отмечается, что его численная реализация по-прежнему является одной из ключевых технических трудностей.

Вычисления, которые связаны с оптимизацией проектируемых конструкций, необходимо выполнять за минимальное время, так как требуется перебрать большое количество вариантов подкрепления и других параметров, влияющих на устойчивость и прочность [260]. Существует подход, основанный на объединении ребер жесткости и обшивки для элементарной ячейки в макро-элемент, результаты для которого потом могут быть масштабированы на всю конструкцию. Этот подход является применимым и эффективным для целого ряда прикладных задач [183, 223, 260]. Таким образом, получаются гибридные модели, полученные одновременным использованием SSM и МКЭ [183, 260]. Такие элементарные ячейки удобны при создании сетки конечных элементов, поскольку они могут вместить любое количество произвольно ориентированных ребер жесткости.

Тем не менее, путем сравнения результатов экспериментов и результатов, полученных с помощью МКЭ, гибридная модель, основанная на SSM, дала большую ошибку [260], что подчеркивает важность совершенствования метода размазывания жесткости подкрепления. Как отмечается в [284], в связи с тем, что предыдущие варианты SSM были в основном разработаны для конкретных моделей сетки [177], в связи с этим, создание более удобного и универсального варианта SSM является очень важной задачей.

Обзоры литературы по подкрепленным оболочкам и применению методов размазывания жесткости можно найти в значимых работах [177, 209, 210, 260, 284].

2.1 МЕТОДЫ ЗАДАНИЯ ПОДКРЕПЛЯЮЩИХ ОБОЛОЧКУ ЭЛЕМЕНТОВ И ЖЕСТКОСТНЫЕ ХАРАКТЕРИСТИКИ В УСИЛИЯХ И МОМЕНТАХ

Проанализируем различные подходы к введению ребер и нахождения в каждом случае жесткостных характеристик подкрепляющих элементов в усилиях и моментах ребристой конструкции.

Схематичное изображение подкрепленной оболочки и способа задания ребер жесткости показаны на Рисунке 2.2.

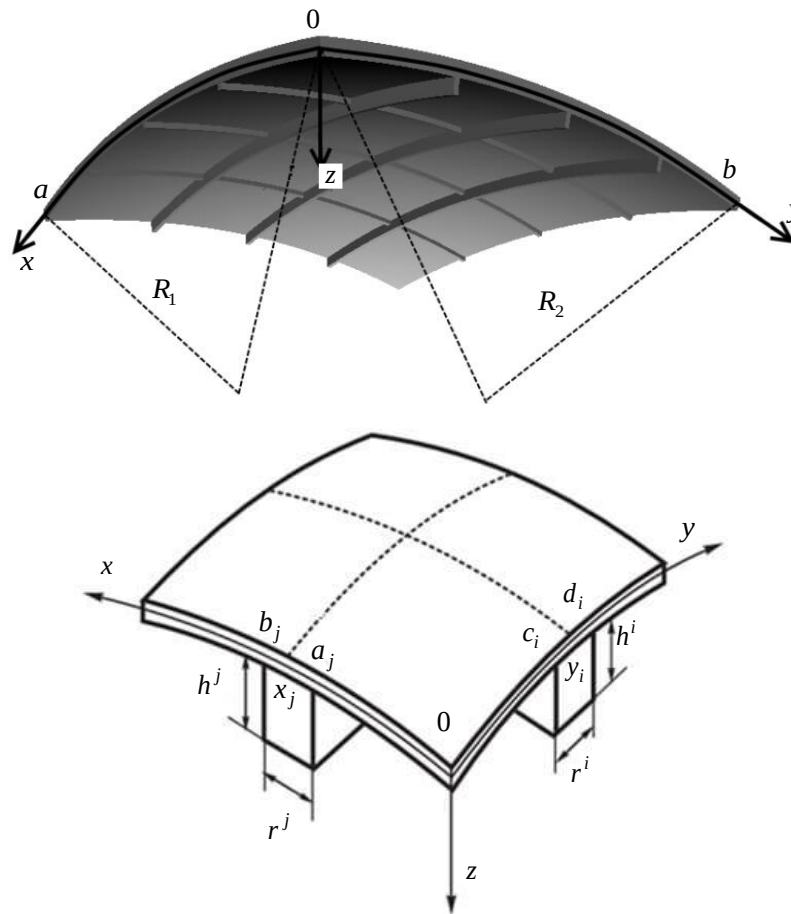


Рисунок 2.2. Схематичное изображение подкрепленной оболочки и способа задания ребер жесткости

Для силовых факторов, действующих в обшивке, выражения для усилий и моментов находятся путем интегрирования напряжений по переменной z в пределах от $-h/2$ до $h/2$.

В обшивке площадь поперечного сечения, приходящаяся на единицу длины сечения, будет одинаковой в направлении осей x и y , и равна $\int_{-h/2}^{h/2} dz = h$;

статический момент сечения, приходящийся на единицу длины сечения, будет равен $\int_{-h/2}^{h/2} z dz = 0$; момент инерции сечения, приходящийся на единицу длины

сечения, будет равен $\int_{-h/2}^{h/2} z^2 dz = \frac{h^3}{12}$.

Поэтому составляющие усилий и моментов, действующие в обшивке (индекс «0»), будут иметь вид

$$\begin{aligned}
N_x^0 &= G_1^0 h (\varepsilon_x + \mu_{21} \varepsilon_y), \quad N_y^0 = G_2^0 h (\varepsilon_y + \mu_{12} \varepsilon_x), \\
M_x^0 &= G_1^0 \frac{h^3}{12} (\chi_1 + \mu_{21} \chi_2), \quad M_y^0 = G_2^0 \frac{h^3}{12} (\chi_2 + \mu_{12} \chi_1), \\
N_{xy}^0 &= N_{yx}^0 = G_{12}^0 h \gamma_{xy}, \\
M_{xy}^0 &= M_{yx}^0 = 2G_{12}^0 \frac{h^3}{12} \chi_{12}, \\
Q_x^0 &= kG_{13}^0 h (\Psi_x - \theta_1), \quad Q_y^0 = kG_{23}^0 h (\Psi_y - \theta_2),
\end{aligned} \tag{2.1}$$

где

$$G_1^0 = \frac{E_1}{1 - \mu_{12}\mu_{21}}, \quad G_2^0 = \frac{E_2}{1 - \mu_{12}\mu_{21}}.$$

Здесь приведены соотношения сразу для случая с учетом ортотропии материала. Однако, ниже, поскольку для некоторых методов учет ортотропии имеет некоторые особенности, отдельно рассматриваются изотропный и ортотропный случаи.

Представим функционал полной потенциальной энергии деформации оболочечной конструкции как сумму двух составляющих

$$E_s = E_s^0 + E_p^R = E_p^0 + E_p^R - A, \tag{2.2}$$

где E_p^R формируется в зависимости от способа задания ребер жесткости, и в общем виде будет

$$\begin{aligned}
E_p^R &= \frac{1}{2} \int_{a_1}^a \int_0^b \left[N_x^R \varepsilon_x + N_y^R \varepsilon_y + \frac{1}{2} (N_{xy}^R + N_{yx}^R) \gamma_{xy} + M_x^R \chi_1 + M_y^R \chi_2 + (M_{xy}^R + M_{yx}^R) \chi_{12} + \right. \\
&\quad \left. + Q_x^R (\Psi_x - \theta_1) + Q_y^R (\Psi_y - \theta_2) \right] AB dx dy,
\end{aligned} \tag{2.3}$$

а часть функционала, имеющая отношение к обшивке, будет

$$\begin{aligned}
E_s^0 &= \frac{1}{2} \int_{a_1}^a \int_0^b \left[N_x^0 \varepsilon_x + N_y^0 \varepsilon_y + \frac{1}{2} (N_{xy}^0 + N_{yx}^0) \gamma_{xy} + M_x^0 \chi_1 + M_y^0 \chi_2 + (M_{xy}^0 + M_{yx}^0) \chi_{12} + \right. \\
&\quad \left. + Q_x^0 (\Psi_x - \theta_1) + Q_y^0 (\Psi_y - \theta_2) - 2(P_x U + P_y V + qW) \right] AB dx dy.
\end{aligned} \tag{2.4}$$

2.1.1 Модель ребристой оболочки при контакте ребер с обшивкой по линии

Во многих работах по исследованию подкрепленных оболочек применяются подходы А. И. Лурье [97] и В. З. Власова [32, 33] (И. Я. Амиро, В. А. Заруцкий и В. Г. Паламарчук [11], Е. С. Гребень [45], И. Е. Милейковский и И. П. Гречанинов [101], Б. К. Михайлов [102], О. И. Теребушко [145], С. А. Тимашев [146] и др.). Из перечисленных авторов только О. И. Теребушко [145] использовал подход В. З. Власова, остальные – подход А. И. Лурье, и записывали усилия и моменты, действующие в ребрах, в виде

$$\begin{aligned}
 N_x^R &= E_1 \sum_{i=1}^n \left(F^i r_i \varepsilon_x + S^i r_i \chi_1 \right) \delta(y - y_i), \\
 N_y^R &= E_2 \sum_{j=1}^m \left(F^j r_j \varepsilon_y + S^j r_j \chi_2 \right) \delta(x - x_j), \quad N_{xy}^R = N_{yx}^R = 0, \\
 M_x^R &= E_1 \sum_{i=1}^n \left(S^i r_i \varepsilon_x + J^i r_i \chi_1 \right) \delta(y - y_i), \\
 M_y^R &= E_2 \sum_{j=1}^m \left(S^j r_j \varepsilon_y + J^j r_j \chi_2 \right) \delta(x - x_j), \quad M_{xy}^R = M_{yx}^R = 0, \\
 Q_x^R &= 0, \quad Q_y^R = 0.
 \end{aligned} \tag{2.5}$$

Здесь F^i, S^i, J^i, r_i, n – площадь поперечного сечения ребер, приходящаяся на единицу длины сечения, для ребер, направленных параллельно оси x ; статический момент и момент инерции этого сечения; ширина ребер этого направления и число ребер этого направления. Аналогично F^j, S^j, J^j, r_j, m – для ребер, параллельных оси y ; $\delta(x - x_j), \delta(y - y_i)$ – дельта-функции.

Несмотря на то, что учет подкрепляющих элементов при контакте с обшивкой «по линии» значительно ускоряет выполнение расчетов, его применение не рекомендуется в связи с тем, что получаемое в итоге решение является недостаточно точным [71]. Например, пренебрегается влиянием ребер на сдвиг и кручение в срединной поверхности обшивки; при пересечении ребра не оказывают друг на друга никакого влияния.

2.1.2 Модель ребристой оболочки при контакте ребер с обшивкой по полосе

Идея представить подкрепленную ребрами жесткости оболочку в качестве конструкции дискретно-переменной толщины принадлежит П. А. Жилину [58]. Позднее, аналогичный подход был использован в работах Л. В. Енджиевского [55], И. Н. Преображенского и В. В. Карпова [71].

В работе Л. В. Енджиевского [55] для узких ребер приняты соотношения (2.5), а для широких ребер рассматриваются поверхности $z_1(x, y) = -h/2$ и $z_2(x, y) = h/2 + \sum_{i=1}^n h^i \Gamma_0^*(y_i) + \sum_{j=1}^m h^j \Gamma_0^*(x_j)$, где h^i, h^j – высота ребер в двух направлениях, а $\Gamma_0^*(y_i), \Gamma_0^*(x_j)$ – по сути дела разности двух единичных функций по соответствующей ширине ребра. В них также учитывается, что области, где происходит пересечение ребер, используются один раз, то есть делается вычитание.

Усилия и моменты, действующие в обшивке и ребрах, вычисляются в работе [55] следующим образом (для изотропного материала, то есть $E_1 = E_2 = E$, $\mu_{12} = \mu_{21} = \mu$):

$$\begin{aligned}
 N_x &= B^* \varepsilon_x + \mu B^* \varepsilon_y + C^* \chi_1 + \mu C^* \chi_2, \\
 N_y &= B^* \varepsilon_y + \mu B^* \varepsilon_x + C^* \chi_2 + \mu C^* \chi_1, \\
 N_{xy} &= N_{yx} = \frac{1-\mu}{2} B^* \gamma_{xy} + (1-\mu) C^* \chi_{12}, \\
 M_x &= C^* \varepsilon_x + \mu C^* \varepsilon_y + D^* \chi_1 + \mu D^* \chi_2, \\
 M_y &= C^* \varepsilon_y + \mu C^* \varepsilon_x + D^* \chi_2 + \mu D^* \chi_1, \\
 M_{xy} &= M_{yx} = (1-\mu) C^* \gamma_{xy} + 2(1-\mu) D^* \chi_{12}.
 \end{aligned} \tag{2.6}$$

Здесь

$$B^* = \frac{E}{1-\mu^2} \left(h + \sum_{i=1}^n h^i \Gamma_0^*(y_i) + \sum_{j=1}^m h^j \Gamma_0^*(x_j) \right),$$

$$C^* = \frac{E}{1-\mu^2} \left(\sum_{i=1}^n h^i \eta_i \Gamma_0^*(y_i) + \sum_{j=1}^m h^j \eta_j \Gamma_0^*(x_j) \right), \quad (2.7)$$

$$D^* = \frac{E}{12(1-\mu^2)} \left(h^3 + \sum_{i=1}^n \left((h^i)^3 + h^i \eta_i^2 \right) \Gamma_0^*(y_i) + \sum_{j=1}^m \left((h^j)^3 + h^j \eta_j^2 \right) \Gamma_0^*(x_j) \right),$$

где η_i, η_j – расстояние от срединной поверхности оболочки до центра тяжести ребра.

Следовательно, усилия и моменты, действующие только в ребрах, при переходе к обозначениям, принятым в данной работе, будут иметь вид:

$$\begin{aligned} N_x^R &= G_1^R \left(F^* (\varepsilon_x + \mu \varepsilon_y) + S^* (\chi_1 + \mu \chi_2) \right), \\ N_y^R &= G_2^R \left(F^* (\varepsilon_y + \mu \varepsilon_x) + S^* (\chi_2 + \mu \chi_1) \right), \\ N_{xy}^R &= N_{yx}^R = G_{12}^R \left(F^* \gamma_{xy} + 2S^* \chi_{12} \right), \\ M_x^R &= G_1^R \left(S^* (\varepsilon_x + \mu \varepsilon_y) + J^* (\chi_1 + \mu \chi_2) \right), \\ M_y^R &= G_2^R \left(S^* (\varepsilon_y + \mu \varepsilon_x) + J^* (\chi_2 + \mu \chi_1) \right), \\ M_{xy}^R &= M_{yx}^R = G_{12}^R \left(2S^* \gamma_{xy} + 4J^* \chi_{12} \right). \end{aligned} \quad (2.8)$$

Здесь

$$\begin{aligned} F^* &= \sum_{i=1}^n h^i \Gamma_0^*(y_i) + \sum_{j=1}^m h^j \Gamma_0^*(x_j), \\ S^* &= \sum_{i=1}^n h^i \eta_i \Gamma_0^*(y_i) + \sum_{j=1}^m h^j \eta_j \Gamma_0^*(x_j), \\ J^* &= \frac{1}{12} \left(\sum_{i=1}^n \left((h^i)^3 + h^i \eta_i^2 \right) \Gamma_0^*(y_i) + \sum_{j=1}^m \left((h^j)^3 + h^j \eta_j^2 \right) \Gamma_0^*(x_j) \right). \end{aligned} \quad (2.9)$$

Поскольку вариант модели, представленный в работе [55], записан для изотропного материала, то необходимо принять $G_1^R = G_2^R = \frac{E}{1-\mu^2}$,

$$G_{12}^R = G_{13}^R = G_{23}^R = \frac{E}{2(1+\mu)}.$$

По сути дела, в жесткостных характеристиках ребер участвуют площадь поперечного или продольного сечения ребер, приходящиеся на единицу длины сечения, статический момент и момент инерции этого сечения.

В. В. Карповым была разработана геометрически нелинейная модель оболочек ступенчато-переменной толщины, имеющих ребра, накладки и вырезы, в которой учитывалось дискретное расположение ребер и вырезов, их ширина, учет взаимодействия ребер и обшивки по полосе, жесткое соединение ребер при пересечении, сдвиговая и крутильная жесткость ребер, поперечные сдвиги, то есть все наиболее важные факторы, влияющие на напряженно-деформированное состояние и устойчивость оболочек, которыми раньше пренебрегали из-за сложности их учета. Им была доказана эквивалентность подходов В. З. Власова и А. И. Лурье к расчету ребристых оболочек.

Дискретный слой подкрепляющих оболочку ребер задавался функцией $H(x, y)$, характеризующей высоту и места расположения ребер по оболочке.

$$H(x, y) = \sum_{j=1}^m h^j \bar{\delta}(x - x_j) + \sum_{i=1}^n h^i \bar{\delta}(y - y_i) - \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^m h^{ij} \bar{\delta}(x - x_j) \bar{\delta}(y - y_i), \quad (2.10)$$

где h^i, h^j – высота ребер; индексы i и j указывают номер ребра, расположенного параллельно оси x и y соответственно; n, m – количество ребер; $h^{ij} = \min\{h^i, h^j\}$, то есть общая часть пересечения ребер; $\bar{\delta}(x - x_j)$ и $\bar{\delta}(y - y_i)$ – единичные столбчатые функции, которые представляют собой разности двух единичных функций $\bar{\delta}(x - x_j) = U(x - a_j) - U(x - b_j)$; $\bar{\delta}(y - y_i) = U(y - c_i) - U(y - d_i)$, где $a_j = x_j - r_j / (2A)$, $b_j = x_j + r_j / (2A)$, $c_i = y_i - r_i / (2B)$, $d_i = y_i + r_i / (2B)$, (ширина ребер r_i, r_j задается в метрах для любых оболочек вращения).

Так как для рассматриваемых оболочек вращения параметр Ляме A равен константе, а параметр Ляме B равен $B(x)$, то a_j, b_j – константы. А чтобы i -е ребра были одной ширины при любом x , $c_i = c_i(x)$, $d_i = d_i(x)$.

При таком способе задания расположения ребер, контакт обшивки и ребер происходит по полосе. Ребра при пересечении являются жестко закрепленными между собой. Следовательно, толщина всей конструкции равна $h + H$, где h – толщина обшивки. В работах В. В. Карпова [60, 214] показано, что если в функционале используются единичные столбчатые функции $\bar{\delta}(x - x_j), \bar{\delta}(y - y_i)$, путем предельного перехода можно перейти к дельта-функциям $\delta(x - x_j), \delta(y - y_i)$. Таким образом, может быть получена модель, рассмотренная ранее, когда контакт обшивки и ребер происходит по линии [109].

Доказано, что на боковой поверхности ребер выполняются краевые условия свободного края, поэтому приняв $h^j = 0, h^i = 0, h^{ij} = h$ получаем вариант оболочек, ослабленных сквозными вырезами [68, 79].

Путем выполнения расчетов было показано, что для конструкций, подкрепленных ребрами жесткости, учет поперечных сдвигов оказывает существенное влияние на НДС конструкции [71, 72].

Естественно предположить, что для усилий и моментов, действующих в ребрах, жесткостные характеристики можно вычислить интегрированием по переменной z в пределах от $h/2$ до $h/2 + H$. В результате, получим

$$\begin{aligned} \int_{h/2}^{h/2+H} dz &= \bar{F} = \sum_{i=1}^n F^i \bar{\delta}(y - y_i) + \sum_{j=1}^m F^j \bar{\delta}(x - x_j) - \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^m F^{ij} \bar{\delta}(x - x_j) \bar{\delta}(y - y_i), \\ \int_{h/2}^{h/2+H} z dz &= \bar{S} = \sum_{i=1}^n S^i \bar{\delta}(y - y_i) + \sum_{j=1}^m S^j \bar{\delta}(x - x_j) - \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^m S^{ij} \bar{\delta}(x - x_j) \bar{\delta}(y - y_i), \quad (2.11) \\ \int_{h/2}^{h/2+H} z^2 dz &= \bar{J} = \sum_{i=1}^n J^i \bar{\delta}(y - y_i) + \sum_{j=1}^m J^j \bar{\delta}(x - x_j) - \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^m J^{ij} \bar{\delta}(x - x_j) \bar{\delta}(y - y_i). \end{aligned}$$

Здесь

$$\begin{aligned} F^i &= h^i, \quad F^j = h^j, \quad F^{ij} = h^{ij}, \\ S^i &= \frac{h^i(h + h^i)}{2}, \quad S^j = \frac{h^j(h + h^j)}{2}, \quad S^{ij} = \frac{h^{ij}(h + h^{ij})}{2}, \\ J^i &= 0.25h^2h^i + 0.5h(h^i)^2 + \frac{1}{3}(h^i)^3, \end{aligned} \quad (2.12)$$

$$J^j = 0.25h^2h^j + 0.5h(h^j)^2 + \frac{1}{3}(h^j)^3, \quad J^{ij} = 0.25h^2h^{ij} + 0.5h(h^{ij})^2 + \frac{1}{3}(h^{ij})^3.$$

Следовательно, усилия и моменты, действующие в ребрах, примут вид

$$\begin{aligned} N_x^R &= G_1^R \left[\bar{F}(\varepsilon_x + \mu_{21}\varepsilon_y) + \bar{S}(\chi_1 + \mu_{21}\chi_2) \right], \\ N_y^R &= G_2^R \left[\bar{F}(\varepsilon_y + \mu_{12}\varepsilon_x) + \bar{S}(\chi_2 + \mu_{12}\chi_1) \right], \\ N_{xy}^R &= G_{12}^R \left[\bar{F}\gamma_{xy} + 2\bar{S}\chi_{12} \right], \quad N_{yx}^R = G_{12}^R \left[\bar{F}\gamma_{xy} + 2\bar{S}\chi_{12} \right], \\ M_x^R &= G_1^R \left[\bar{S}(\varepsilon_x + \mu_{21}\varepsilon_y) + \bar{J}(\chi_1 + \mu_{21}\chi_2) \right], \quad M_y^R = G_2^R \left[\bar{S}(\varepsilon_y + \mu_{12}\varepsilon_x) + \bar{J}(\chi_2 + \mu_{12}\chi_1) \right], \\ M_{xy}^R &= G_{12}^R \left[\bar{S}\gamma_{xy} + 2\bar{J}\chi_{12} \right], \quad M_{yx}^R = G_{12}^R \left[\bar{S}\gamma_{xy} + 2\bar{J}\chi_{12} \right], \\ Q_x^R &= G_{13}^R k\bar{F}(\Psi_x - \theta_1), \quad Q_y^R = G_{23}^R k\bar{F}(\Psi_y - \theta_2). \end{aligned} \quad (2.13)$$

2.1.3 Модель ребристой оболочки при «размазывании» жесткости ребер

Существует несколько вариантов «размазывания» жесткости ребер по всей области оболочки. Рассмотрим вначале вариант, когда влиянием подкрепляющих элементов на сдвиг и кручение срединной поверхности обшивки пренебрегаем, а также не учитываем взаимное влияние ребер жесткости при пересечении. Последующее изложение в данном пункте взято из работы [63].

Подкрепления (эксцентричные) характеризуются следующими величинами [63]: F_i – площадь подкрепляющего элемента; S_i, J_i – соответственно статический момент и момент инерции поперечного сечения подкрепляющего элемента относительно оси, проходящей через срединную поверхность обшивки; l_i – среднее расстояние между подкреплениями; E_1^0, E_2^0 – модуль упругости подкрепления [63].

$$\begin{aligned} N_{11} &= B_{11}(\varepsilon_1 + \mu\varepsilon_2) + A_{11}(\chi_1 + \mu\chi_2) \quad (1 \leftrightarrow 2), \\ N_{12} &= B_{33}\gamma_{12} + 2A_{33}\chi_{12}, \\ M_{11} &= A_{11}(\varepsilon_1 + \mu\varepsilon_2) + D_{11}(\chi_1 + \mu\chi_2) \quad (1 \leftrightarrow 2), \\ M_{12} &= A_{33}\gamma_{12} + 2D_{33}\chi_{12}. \end{aligned} \quad (2.14)$$

Представим выражения для коэффициентов жесткости этих формулировок в виде

$$A_{ij} = \tilde{A}_{ij} + A_{ij}^0, \quad B_{ij} = \tilde{B}_{ij} + B_{ij}^0, \quad D_{ij} = \tilde{D}_{ij} + D_{ij}^0,$$

где $\tilde{A}_{ij}, \tilde{B}_{ij}, \tilde{D}_{ij}$ характеризуют жесткостные параметры обшивки, а $A_{ij}^0, B_{ij}^0, D_{ij}^0$ характеризуют жесткостные параметры подкрепления, приведенные к срединной поверхности обшивки. Эти коэффициенты принимают вид

$$\begin{aligned} B_{ii}^0 &= \frac{E_i^0 F_i}{l_i} \quad (i=1, 2), \quad B_{12}^0 = B_{21}^0 = B_{33}^0 = 0, \\ A_{ii}^0 &= \frac{E_i^0 S_i}{l_i} \quad (i=1, 2), \quad A_{12}^0 = A_{21}^0 = A_{33}^0 = 0, \\ D_{ii}^0 &= \frac{E_i^0 J_i}{l_i} \quad (i=1, 2), \quad D_{12}^0 = D_{21}^0 = D_{33}^0 = 0. \end{aligned} \quad (2.15)$$

Если обозначить через z_{0i} расстояние от центра тяжести поперечного сечения подкрепления до срединной поверхности обшивки, то

$$S_i = F_i z_{0i}, \quad J_i = J_{0i} + z_{0i}^2 F_i, \quad (2.16)$$

где J_{0i} – собственный момент инерции поперечного сечения подкрепления.

В результате, усилия и моменты, действующие только в ребрах, при использовании обозначений, принятых в данной работе, будут иметь вид:

$$\begin{aligned} N_x^R &= \frac{E_1 F_1}{l_1} (\varepsilon_x + \mu \varepsilon_y) + \frac{E_1 S_1}{l_1} (\chi_1 + \mu \chi_2), \\ N_y^R &= \frac{E_2 F_2}{l_2} (\varepsilon_y + \mu \varepsilon_x) + \frac{E_2 S_2}{l_2} (\chi_2 + \mu \chi_1), \quad N_{xy}^R = 0, \\ M_x^R &= \frac{E_1 S_1}{l_1} (\varepsilon_x + \mu \varepsilon_y) + \frac{E_1 J_1}{l_1} (\chi_1 + \mu \chi_2), \\ M_y^R &= \frac{E_2 S_2}{l_2} (\varepsilon_y + \mu \varepsilon_x) + \frac{E_2 J_2}{l_2} (\chi_2 + \mu \chi_1), \quad M_{xy}^R = 0. \end{aligned} \quad (2.17)$$

Этот вариант модели можно считать первым приближением к решению рассматриваемой проблемы.

2.1.4 Модель ребристой оболочки при «размазывании» жесткости ребер по методу конструктивной анизотропии

Метод конструктивной анизотропии для изотропных оболочек был предложен и разработан В. В. Карповым [68, 218].

Рассмотрим составляющие усилия N_x^R для пологой оболочки двоякой кривизны. Усилие в направлении оси x состоит из $N_x^{LR} = \sum_{i=1}^n N_x^{Li} \bar{\delta}(y - y_i)$ и

$$N_x^{BR} = \sum_{j=1}^m N_x^{Bj} \bar{\delta}(x - x_j).$$

«В N_x^{LR} участвует жесткость i -х ребер, параллельных оси x и расположенных при $0 \leq x \leq a$. Следовательно, эта составляющая N_x^R с приведенной жесткостью ребер будет иметь вид (коэффициент приведения равен a/a)

$$N_x^{LR} \approx \sum_{i=1}^n \left(\frac{r_i}{b} N_x^{Li} \right) \frac{a}{a} = G_1^R \sum_{i=1}^n \left(\frac{F^i r_i}{b} (\varepsilon_x + \mu \varepsilon_y) + \frac{S^i r_i}{b} (\chi_1 + \mu \chi_2) \right). \quad (2.18)$$

В N_x^{BR} участвует жесткость j -х ребер, параллельных оси y , которые в направлении оси x расположены при $a_j \leq x \leq b_j$ ($b_j - a_j = r_j$) и фрагменты ребер, которые являются общей частью пересечения ребер разных направлений. Следовательно, эта составляющая N_x^R с приведенной жесткостью ребер будет иметь вид (коэффициент приведения равен $\frac{r_j}{a}$)» [68, 71]

$$N_x^{BR} \approx \sum_{j=1}^m \left(\frac{r_j}{a} N_x^{Bj} \right) \frac{r_j}{a} = G_1^R \sum_{j=1}^m \left[\left(\frac{F^j r_j}{a} - \sum_{i=1}^n \frac{F^{ij} r_i r_j}{ab} \right) \frac{r_j}{a} (\varepsilon_x + \mu \varepsilon_y) + \left(\frac{S^j r_j}{a} - \sum_{i=1}^n \frac{S^{ij} r_i r_j}{ab} \right) \frac{r_j}{a} (\chi_1 + \mu \chi_2) \right]. \quad (2.19)$$

Если обозначить

$$F_x = \sum_{i=1}^n \frac{F^i r_i}{b} + \sum_{j=1}^m \left(\frac{F^j r_j}{a} - \sum_{i=1}^n \frac{F^{ij} r_i r_j}{ab} \right) \frac{r_j}{a}, \quad S_x = \sum_{i=1}^n \frac{S^i r_i}{b} + \sum_{j=1}^m \left(\frac{S^j r_j}{a} - \sum_{i=1}^n \frac{S^{ij} r_i r_j}{ab} \right) \frac{r_j}{a}, \quad (2.20)$$

то усилия N_x^R можно записать в виде [68, 71]

$$N_x^R = G_1^R \left(F_x (\varepsilon_x + \mu \varepsilon_y) + S_x (\chi_1 + \mu \chi_2) \right).$$

Аналогично можно записать N_y^R в виде [68, 71]

$$N_y^R = G_2^R \left(F_y (\varepsilon_y + \mu \varepsilon_x) + S_y (\chi_2 + \mu \chi_1) \right),$$

где

$$F_y = \sum_{j=1}^m \frac{F^j r_j}{a} + \sum_{i=1}^n \left(\frac{F^i r_i}{b} - \sum_{j=1}^m \frac{F^{ij} r_i r_j}{ab} \right) \frac{r_i}{b}, \quad S_y = \sum_{j=1}^m \frac{S^j r_j}{a} + \sum_{i=1}^n \left(\frac{S^i r_i}{b} - \sum_{j=1}^m \frac{S^{ij} r_i r_j}{ab} \right) \frac{r_i}{b}. \quad (2.21)$$

И кроме того,

$$J_x = \sum_{i=1}^n \frac{J^i r_i}{b} + \sum_{j=1}^m \left(\frac{J^j r_j}{a} - \sum_{i=1}^n \frac{J^{ij} r_i r_j}{ab} \right) \frac{r_j}{a}, \quad J_y = \sum_{j=1}^m \frac{J^j r_j}{a} + \sum_{i=1}^n \left(\frac{J^i r_i}{b} - \sum_{j=1}^m \frac{J^{ij} r_i r_j}{ab} \right) \frac{r_i}{b}. \quad (2.22)$$

Для произвольного вида оболочек в (2.20)–(2.22) нужно вместо a взять $\tilde{a}$, а вместо b нужно взять $\tilde{b}$ [218], где $\tilde{a} = (a - a_1)A$, $\tilde{b} = bB$, $B = B(x) = B(a/2)$, тогда $\tilde{a}$ и $\tilde{b}$ будут измеряться в метрах, но a и b могут измеряться в радианах.

Усилия и моменты, которые будут соответствовать слою «размазывания», будут иметь вид [71]

$$\begin{aligned} N_x^R &= G_1^R \left[F_x (\varepsilon_x + \mu \varepsilon_y) + S_x (\chi_1 + \mu \chi_2) \right], \\ N_y^R &= G_2^R \left[F_y (\varepsilon_y + \mu \varepsilon_x) + S_y (\chi_2 + \mu \chi_1) \right], \\ M_x^R &= G_1^R \left[S_x (\varepsilon_x + \mu \varepsilon_y) + J_x (\chi_1 + \mu \chi_2) \right], \\ M_y^R &= G_2^R \left[S_y (\varepsilon_y + \mu \varepsilon_x) + J_y (\chi_2 + \mu \chi_1) \right], \\ N_{xy}^R &= G_{12}^R \left[F_y \gamma_{xy} + 2S_y \chi_{12} \right], \quad N_{yx}^R = G_{12}^R \left[F_x \gamma_{xy} + 2S_x \chi_{12} \right], \end{aligned} \quad (2.23)$$

$$M_{xy}^R = G_{12}^R [S_y \gamma_{xy} + 2J_y \chi_{12}], \quad M_{yx}^R = G_{12}^R [S_x \gamma_{xy} + 2J_x \chi_{12}],$$

$$Q_x^R = G_{13}^R F_x k(\Psi_x - \theta_1), \quad Q_y^R = G_{23}^R F_y k(\Psi_y - \theta_2).$$

Еще раз отметим, что поскольку вариант модели, использующий метод конструктивной анизотропии, записан для изотропного материала, то необходимо принять $G_1^R = G_2^R = \frac{E}{1-\mu^2}$, $G_{12}^R = G_{13}^R = G_{23}^R = \frac{E}{2(1+\mu)}$.

2.1.5 Модель ребристой оболочки при «размазывании» жесткости ребер по методу конструктивной анизотропии с учетом ортотропии материала

Важной особенностью подкрепленных оболочек, выполненных из ортотропных материалов, является то, что направление усиливающих волокон (или арматуры) в материале ребер может не совпадать с направлением волокон в обшивке. Во многом, расположение волокон (арматуры) зависит от способа изготовления конструкции. Например, если вся сетка ребер создается из единого листа материала, и между модулями упругости разница сравнительно небольшая (не достигает порядка), то направление волокон в ребрах может совпадать с направлением волокон в обшивке. Такой подход можно использовать, например, при рассмотрении стеклопластиковых конструкций [134].

Ситуация складывается иначе, если армирующие элементы для каждого ребра укладываются отдельно, и дают более существенный эффект. В таком случае, имеет смысл для ортогональной сетки ребер армирующие элементы укладывать вдоль каждого ребра, несмотря на направление элементов в обшивке. Однако, следует учитывать, что при таком подходе могут возникать сложности со связью подкрепления и обшивки, и при изготовлении конструкции на это нужно обращать внимание [218].

Следствием необходимости учета разных направлений материала в обшивке и ребрах является то, что функционал полной энергии деформации приходится разделять на две части – соответствующие обшивке и ребрам. Кроме того, это

позволяет не только манипулировать направлением армирования, но и выбирать для обшивки и ребер принципиально разные материалы, что может быть полезно при расчете усиления уже существующих конструкций. Однако, могут возникнуть трудности, если материалы обладают разной сдвиговой жесткостью.

С учетом ортотропии материала, выражения для усилий и моментов, действующих в слое, эквивалентном по жесткости ребрам, будут иметь вид [130]

$$\begin{aligned}
 N_x^R &= G_1^R \left[F_x (\varepsilon_x + \mu_{21}^R \varepsilon_y) + S_x (\chi_1 + \mu_{21}^R \chi_2) \right], \\
 N_y^R &= G_2^R \left[F_y (\varepsilon_y + \mu_{12}^R \varepsilon_x) + S_y (\chi_2 + \mu_{12}^R \chi_1) \right], \\
 M_x^R &= G_1^R \left[S_x (\varepsilon_x + \mu_{21}^R \varepsilon_y) + J_x (\chi_1 + \mu_{21}^R \chi_2) \right], \\
 M_y^R &= G_2^R \left[S_y (\varepsilon_y + \mu_{12}^R \varepsilon_x) + J_y (\chi_2 + \mu_{12}^R \chi_1) \right], \\
 N_{xy}^R &= G_{12}^R \left[F_y \gamma_{xy} + 2S_y \chi_{12} \right], \quad N_{yx}^R = G_{12}^R \left[F_x \gamma_{xy} + 2S_x \chi_{12} \right], \\
 M_{xy}^R &= G_{12}^R \left[S_y \gamma_{xy} + 2J_y \chi_{12} \right], \quad M_{yx}^R = G_{12}^R \left[S_x \gamma_{xy} + 2J_x \chi_{12} \right], \\
 Q_x^R &= G_{13}^R F_x k (\Psi_x - \theta_1), \quad Q_y^R = G_{23}^R F_y k (\Psi_y - \theta_2).
 \end{aligned} \tag{2.24}$$

Еще раз отметим, что для ортотропного материала необходимо принять

$$G_1^R = \frac{E_1^R}{1 - \mu_{12}^R \mu_{21}^R}, \quad G_2^R = \frac{E_2^R}{1 - \mu_{12}^R \mu_{21}^R}.$$

Следует учитывать, что соотношения для усилий и моментов должны иметь возможность расчета ребер с расположением материала не только как в обшивке, но также и с расположением в разных направлениях.

В связи с этим, запишем жесткостные характеристики ребер как суммы из двух слагаемых

$$\begin{aligned}
 F_x &= F_{x1} + F_{x2}, \quad F_y = F_{y1} + F_{y2}, \quad S_x = S_{x1} + S_{x2}, \quad S_y = S_{y1} + S_{y2}, \\
 J_x &= J_{x1} + J_{x2}, \quad J_y = J_{y1} + J_{y2},
 \end{aligned} \tag{2.25}$$

тогда (коэффициент d_{E2} будет объяснен далее)

$$\begin{aligned}
F_{x1} &= \sum_{i=1}^n \frac{F^i r_i}{bB}, \quad F_{y1} = \sum_{j=1}^m \frac{F^j r_j}{(a-a_1)A}, \quad S_{x1} = \sum_{i=1}^n \frac{S^i r_i}{bB}, \quad S_{y1} = \sum_{j=1}^m \frac{S^j r_j}{(a-a_1)A}, \\
J_{x1} &= \sum_{i=1}^n \frac{J^i r_i}{bB}, \quad J_{y1} = \sum_{j=1}^m \frac{J^j r_j}{(a-a_1)A}, \\
F_{x2} &= d_{E2} \sum_{j=1}^m \left(\frac{F^j r_j}{(a-a_1)A} - \sum_{i=1}^n \frac{F^{ij} r_i r_j}{(a-a_1)AbB} \right) \frac{r_j}{(a-a_1)A}, \\
F_{y2} &= d_{E2} \sum_{i=1}^n \left(\frac{F^i r_i}{bB} - \sum_{j=1}^m \frac{F^{ij} r_i r_j}{(a-a_1)AbB} \right) \frac{r_i}{bB}, \\
S_{x2} &= d_{E2} \sum_{j=1}^m \left(\frac{S^j r_j}{(a-a_1)A} - \sum_{i=1}^n \frac{S^{ij} r_i r_j}{(a-a_1)AbB} \right) \frac{r_j}{(a-a_1)A}, \\
S_{y2} &= d_{E2} \sum_{i=1}^n \left(\frac{S^i r_i}{bB} - \sum_{j=1}^m \frac{S^{ij} r_i r_j}{(a-a_1)AbB} \right) \frac{r_i}{bB}, \\
J_{x2} &= d_{E2} \sum_{j=1}^m \left(\frac{J^j r_j}{(a-a_1)A} - \sum_{i=1}^n \frac{J^{ij} r_i r_j}{(a-a_1)AbB} \right) \frac{r_j}{(a-a_1)A}, \\
J_{y2} &= d_{E2} \sum_{i=1}^n \left(\frac{J^i r_i}{bB} - \sum_{j=1}^m \frac{J^{ij} r_i r_j}{(a-a_1)AbB} \right) \frac{r_i}{bB}.
\end{aligned} \tag{2.26}$$

Подставив выражения и раскрыв скобки, получим

$$\begin{aligned}
N_x^R &= G_1^R \left(F_{x1} (\varepsilon_x + \mu_{21}^R \varepsilon_y) + F_{x2} (\varepsilon_x + \mu_{21}^R \varepsilon_y) + \right. \\
&\quad \left. + S_{x1} (\chi_1 + \mu_{21}^R \chi_2) + S_{x2} (\chi_1 + \mu_{21}^R \chi_2) \right), \\
N_y^R &= G_2^R \left(F_{y1} (\varepsilon_y + \mu_{12}^R \varepsilon_x) + F_{y2} (\varepsilon_y + \mu_{12}^R \varepsilon_x) + \right. \\
&\quad \left. + S_{y1} (\chi_2 + \mu_{12}^R \chi_1) + S_{y2} (\chi_2 + \mu_{12}^R \chi_1) \right), \\
M_x^R &= G_1^R \left(S_{x1} (\varepsilon_x + \mu_{21}^R \varepsilon_y) + S_{x2} (\varepsilon_x + \mu_{21}^R \varepsilon_y) + \right.
\end{aligned} \tag{2.27}$$

$$\begin{aligned}
& + J_{x1}(\chi_1 + \mu_{21}^R \chi_2) + J_{x2}(\chi_1 + \mu_{21}^R \chi_2) \Big), \\
M_y^R &= G_2^R \left(S_{y1}(\varepsilon_y + \mu_{12}^R \varepsilon_x) + S_{y2}(\varepsilon_y + \mu_{12}^R \varepsilon_x) + \right. \\
& \left. + J_{y1}(\chi_2 + \mu_{12}^R \chi_1) + J_{y2}(\chi_2 + \mu_{12}^R \chi_1) \right), \\
Q_x^R &= G_{13}^R (F_{x1} + F_{x2}) k(\Psi_x - \theta_1), \quad Q_y^R = G_{23}^R (F_{y1} + F_{y2}) k(\Psi_y - \theta_2).
\end{aligned}$$

Для усилий и моментов, где у жесткостных характеристик есть двойные индексы, что соответствует сдвигу в плоскости xOy , разделять $F_x, F_y, S_x, S_y, J_x, J_y$ на две части не будем, они сохраняют вид (2.20)–(2.22), поэтому сохраним используемые обозначения

$$\begin{aligned}
N_{xy}^R &= G_{12}^R \left[F_y \gamma_{xy} + 2S_y \chi_{12} \right], \quad N_{yx}^R = G_{12}^R \left[F_x \gamma_{xy} + 2S_x \chi_{12} \right], \\
M_{xy}^R &= G_{12}^R \left[S_y \gamma_{xy} + 2J_y \chi_{12} \right], \quad M_{yx}^R = G_{12}^R \left[S_x \gamma_{xy} + 2J_x \chi_{12} \right].
\end{aligned} \tag{2.28}$$

Коэффициенты, корректирующие жесткостные характеристики, обозначим как $d_{E1}, d_{E2}, d_{\mu 12}, d_{\mu 21}, d_{G13}, d_{G23}$.

Смысл ввода этих коэффициентов заключается в том, чтобы при несовпадении направлений укладки волокон в обшивке и ребрах, скорректировать жесткостные характеристики должным образом, а при совпадении направлений эти коэффициенты должны быть равны 1, то есть не играть роли.

В корректирующих коэффициентах нижний индекс указывает на то, к какой характеристике этот коэффициент осуществляет переход. Итак, имеем

$$d_{E1} = \frac{E_1}{E_2}, d_{E2} = \frac{E_2}{E_1}, d_{\mu 12} = \frac{\mu_{12}}{\mu_{21}}, d_{\mu 21} = \frac{\mu_{21}}{\mu_{12}}, d_{G13} = \frac{G_{13}}{G_{23}}, d_{G23} = \frac{G_{23}}{G_{13}}. \tag{2.29}$$

Сначала для усилий и моментов с индексом “у” введем коэффициент d_{E1} , получим

$$N_x^R = G_1^R \left[F_{x1}(\varepsilon_x + \mu_{21}^R \varepsilon_y) + \underline{F_{x2}(\varepsilon_x + \mu_{21}^R \varepsilon_y)} \right]$$

$$\begin{aligned}
& + S_{x1}(\chi_1 + \mu_{21}^R \chi_2) + \underline{S_{x2}(\chi_1 + \mu_{21}^R \chi_2)} \Big], \\
N_y^R &= d_{E1} G_2^R \left[\underline{F_{y1}(\varepsilon_y + \mu_{12}^R \varepsilon_x)} + F_{y2}(\varepsilon_y + \mu_{12}^R \varepsilon_x) + \right. \\
& \left. + \underline{S_{y1}(\chi_2 + \mu_{12}^R \chi_1)} + S_{y2}(\chi_2 + \mu_{12}^R \chi_1) \right], \\
M_x^R &= G_1^R \left[S_{x1}(\varepsilon_x + \mu_{21}^R \varepsilon_y) + \underline{S_{x2}(\varepsilon_x + \mu_{21}^R \varepsilon_y)} + \right. \\
& \left. + J_{x1}(\chi_1 + \mu_{21}^R \chi_2) + \underline{J_{x2}(\chi_1 + \mu_{21}^R \chi_2)} \right], \\
M_y^R &= d_{E1} G_2^R \left[\underline{S_{y1}(\varepsilon_y + \mu_{12}^R \varepsilon_x)} + S_{y2}(\varepsilon_y + \mu_{12}^R \varepsilon_x) + \right. \\
& \left. + \underline{J_{y1}(\chi_2 + \mu_{12}^R \chi_1)} + J_{y2}(\chi_2 + \mu_{12}^R \chi_1) \right].
\end{aligned} \tag{2.30}$$

Для усилий и моментов, где у жесткостных характеристик есть двойные индексы, что соответствует сдвигу в плоскости xOy , все оставим без изменений

$$\begin{aligned}
N_{xy}^R &= G_{12}^R \left[F_y \gamma_{xy} + 2S_y \chi_{12} \right], \quad N_{yx}^R = G_{12}^R \left[F_x \gamma_{xy} + 2S_x \chi_{12} \right], \\
M_{xy}^R &= G_{12}^R \left[S_y \gamma_{xy} + 2J_y \chi_{12} \right], \quad M_{yx}^R = G_{12}^R \left[S_x \gamma_{xy} + 2J_x \chi_{12} \right],
\end{aligned} \tag{2.31}$$

а в поперечных (перерезывающих) силах для вторых направлений ребер необходимо ввести d_{G13}, d_{G23} следующим образом:

$$\begin{aligned}
Q_x^R &= G_{13}^R (F_{x1} + d_{G23} d_{E1} F_{x2}) k(\Psi_x - \theta_1), \\
Q_y^R &= G_{23}^R (d_{G13} F_{y1} + d_{E1} F_{y2}) k(\Psi_y - \theta_2).
\end{aligned} \tag{2.32}$$

Здесь, чтобы не вводить дополнительные обозначения для жесткостных характеристик у перерезывающих сил, применен искусственный прием: у F_{x2}, F_{y2}

сделано умножение на d_{E1} (что равносильно делению на d_{E2} , т.к. $d_{E1} = \frac{E_1^R}{E_2^R} = \frac{1}{d_{E2}}$),

что позволяет нейтрализовать коэффициент, добавленный в (2.26).

Поскольку при изменении направления армирования у второго направления ребер меняется соответствующий коэффициент Пуассона, в (2.30) в подчеркнутых слагаемых необходимо добавить коэффициенты $d_{\mu 12}$, $d_{\mu 21}$, в результате получим

$$\begin{aligned}
 N_x^R &= G_1^R \left[F_{x1}(\varepsilon_x + \mu_{21}^R \varepsilon_y) + \underline{F_{x2}(\varepsilon_x + d_{\mu 12} \mu_{21}^R \varepsilon_y)} + \right. \\
 &\quad \left. + S_{x1}(\chi_1 + \mu_{21}^R \chi_2) + \underline{S_{x2}(\chi_1 + d_{\mu 12} \mu_{21}^R \chi_2)} \right], \\
 N_y^R &= d_{E1} G_2^R \left[\underline{F_{y1}(\varepsilon_y + d_{\mu 21} \mu_{12}^R \varepsilon_x)} + F_{y2}(\varepsilon_y + \mu_{12}^R \varepsilon_x) + \right. \\
 &\quad \left. + \underline{S_{y1}(\chi_2 + d_{\mu 21} \mu_{12}^R \chi_1)} + S_{y2}(\chi_2 + \mu_{12}^R \chi_1) \right], \tag{2.33} \\
 M_x^R &= G_1^R \left[S_{x1}(\varepsilon_x + \mu_{21}^R \varepsilon_y) + \underline{S_{x2}(\varepsilon_x + d_{\mu 12} \mu_{21}^R \varepsilon_y)} + \right. \\
 &\quad \left. + J_{x1}(\chi_1 + \mu_{21}^R \chi_2) + \underline{J_{x2}(\chi_1 + d_{\mu 12} \mu_{21}^R \chi_2)} \right], \\
 M_y^R &= d_{E1} G_2^R \left[\underline{S_{y1}(\varepsilon_y + d_{\mu 21} \mu_{12}^R \varepsilon_x)} + S_{y2}(\varepsilon_y + \mu_{12}^R \varepsilon_x) + \right. \\
 &\quad \left. + \underline{J_{y1}(\chi_2 + d_{\mu 21} \mu_{12}^R \chi_1)} + J_{y2}(\chi_2 + \mu_{12}^R \chi_1) \right].
 \end{aligned}$$

2.1.6 Уточненная модель ребристой оболочки при дискретном введении ребер

Рассмотренную в п. 2.1.2 модель ребристой оболочки можно уточнить.

Слой подкрепления конструкции – дискретный, причем жесткость этого слоя в направлениях x, y может быть различной. Поэтому жесткостные характеристики в усилиях и моментах, действующих в ребрах (индекс « R ») не будут точно совпадать с площадью поперечного или продольного сечения ребер, приходящуюся на единицу длины сечения, статическим моментом и моментом инерции этого сечения (2.13) [217].

В разработанном В. В. Карповым варианте метода конструктивной анизотропии [71, 214] при учете жесткости ребер, направленных перпендикулярно рассматриваемому направлению, вводится под знаком суммы коэффициент приведения, равный отношению ширины ребер этого направления к линейному размеру оболочки в рассматриваемом направлении.

Автором предлагается вводить такой же коэффициент приведения в жесткостных характеристиках и при дискретном подкреплении оболочек ребрами жесткости.

Жесткость подкрепления состоит из жесткости ребер рассматриваемого направления, и жесткости ребер ортогонального ему направления.

Рассмотрим усилия, действующие в направлении оси x в ребрах

$$N_x^R = G_1^R \left[\bar{F}_x (\varepsilon_x + \mu \varepsilon_y) + \bar{S}_x (\chi_1 + \mu \chi_2) \right]. \quad (2.34)$$

Это усилие можно представить в виде

$$N_x^R = N_x^{LR} + N_x^{BR}. \quad (2.35)$$

Здесь « LR » обозначает, что рассматриваются продольные ребра, то есть ребра, параллельные оси x .

$$N_x^{LR} = \sum_{i=1}^n G_1^R \left(F^i (\varepsilon_x + \mu \varepsilon_y) + S^i (\chi_1 + \mu \chi_2) \right) \bar{\delta}(y - y_i) K_{11}. \quad (2.36)$$

Наличие дискретности ребер, параллельных оси x , задается единичной столбчатой функцией $\bar{\delta}(y - y_i)$, и эти ребра расположены вдоль всей оболочки, то есть от $x = 0$ до $x = a$, поэтому сомножитель $K_{11} = a / a$.

Индекс « BR » обозначает, что рассматриваются ребра, перпендикулярные оси x .

$$N_x^{BR} = \sum_{j=1}^m \left[G_1^R \left(F^j (\varepsilon_x + \mu \varepsilon_y) + S^j (\chi_1 + \mu \chi_2) \right) - \right. \\ \left. - \sum_{i=1}^n G_1^R \left(F^{ij} (\varepsilon_x + \mu \varepsilon_y) + S^{ij} (\chi_1 + \mu \chi_2) \right) \bar{\delta}(y - y_i) \right] \bar{\delta}(x - x_j) K_{12}. \quad (2.37)$$

Дискретность ребер, перпендикулярных оси x , задается единичной столбчатой функцией $\bar{\delta}(x - x_j)$. Поперечные ребра шириной r_j / A расположены не сплошь вдоль оси x , а дискретно, и, к тому же, N_x^{BR} при $x = a_j, x = b_j$ равно 0 [66]. Поэтому сомножитель $K_{12} = r_j / (aA)$.

Второй сомножитель в выражении N_x^{BR} соответствует общей части пересечения ребер (эта часть уже присутствовала в выражении N_x^{LR} , поэтому ее нужно вычесть). Окончательно для N_x^R получим [217]

$$N_x^R = G_1^R \left[\sum_{i=1}^n \left(F^i(\varepsilon_x + \mu\varepsilon_y) + S^i(\chi_1 + \mu\chi_2) \right) \bar{\delta}(y - y_i) + \right. \quad (2.38)$$

$$+ \sum_{j=1}^m \left(F^j(\varepsilon_x + \mu\varepsilon_y) + S^j(\chi_1 + \mu\chi_2) \right) \bar{\delta}(x - x_j) \frac{r_j}{aA} -$$

$$\left. - \sum_{j=1}^m \sum_{i=1}^n \left(F^{ij}(\varepsilon_x + \mu\varepsilon_y) + S^{ij}(\chi_1 + \mu\chi_2) \right) \bar{\delta}(y - y_i) \bar{\delta}(x - x_j) \frac{r_j}{aA} \right]$$

или в более компактной форме

$$N_x^R = G_1^R \left(\bar{F}_x(\varepsilon_x + \mu\varepsilon_y) + \bar{S}_x(\chi_1 + \mu\chi_2) \right), \quad (2.39)$$

где

$$\bar{F}_x = \sum_{i=1}^n F^i \bar{\delta}(y - y_i) + \left[\sum_{j=1}^m r_a F^j \bar{\delta}(x - x_j) - \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^m r_a F^{ij} \bar{\delta}(x - x_j) \bar{\delta}(y - y_i) \right], \quad (2.40)$$

$$\bar{S}_x = \sum_{i=1}^n S^i \bar{\delta}(y - y_i) + \left[\sum_{j=1}^m r_a S^j \bar{\delta}(x - x_j) - \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^m r_a S^{ij} \bar{\delta}(x - x_j) \bar{\delta}(y - y_i) \right].$$

Остальные усилия и моменты, действующие в ребрах, можно записать в виде

$$M_x^R = G_1^R \left[\bar{S}_x(\varepsilon_x + \mu\varepsilon_y) + \bar{J}_x(\chi_1 + \mu\chi_2) \right], \quad (2.41)$$

$$N_y^R = G_2^R \left[\bar{F}_y(\varepsilon_y + \mu\varepsilon_x) + \bar{S}_y(\chi_2 + \mu\chi_1) \right],$$

$$M_y^R = G_2^R \left[\bar{S}_y(\varepsilon_y + \mu\varepsilon_x) + \bar{J}_y(\chi_2 + \mu\chi_1) \right],$$

$$N_{xy}^R = G_{12}^R \left[\bar{F}_{xy} \gamma_{xy} + 2 \bar{S}_{xy} \chi_{12} \right], \quad M_{xy}^R = G_{12}^R \left[\bar{S}_{xy} \gamma_{xy} + \bar{J}_{xy} \chi_{12} \right],$$

$$Q_x^R = G_{13}^R k \bar{F}_x (\Psi_x - \theta_1), \quad Q_y^R = G_{23}^R k \bar{F}_y (\Psi_y - \theta_2).$$

Здесь [217]

$$\bar{F}_x = \sum_{i=1}^n F^i \bar{\delta}(y - y_i) + \left[\sum_{j=1}^m r_a F^j \bar{\delta}(x - x_j) - \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^m r_a F^{ij} \bar{\delta}(x - x_j) \bar{\delta}(y - y_i) \right], \quad (2.42)$$

$$\bar{F}_y = \sum_{j=1}^m F^j \bar{\delta}(x - x_j) + \left[\sum_{i=1}^n r_b F^i \bar{\delta}(y - y_i) - \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^m r_b F^{ij} \bar{\delta}(x - x_j) \bar{\delta}(y - y_i) \right],$$

$$\bar{S}_x = \sum_{i=1}^n S^i \bar{\delta}(y - y_i) + \left[\sum_{j=1}^m r_a S^j \bar{\delta}(x - x_j) - \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^m r_a S^{ij} \bar{\delta}(x - x_j) \bar{\delta}(y - y_i) \right],$$

$$\bar{S}_y = \sum_{j=1}^m S^j \bar{\delta}(x - x_j) + \left[\sum_{i=1}^n r_b S^i \bar{\delta}(y - y_i) - \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^m r_b S^{ij} \bar{\delta}(x - x_j) \bar{\delta}(y - y_i) \right],$$

$$\bar{J}_x = \sum_{i=1}^n J^i \bar{\delta}(y - y_i) + \left[\sum_{j=1}^m r_a J^j \bar{\delta}(x - x_j) - \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^m r_a J^{ij} \bar{\delta}(x - x_j) \bar{\delta}(y - y_i) \right],$$

$$\bar{J}_y = \sum_{j=1}^m J^j \bar{\delta}(x - x_j) + \left[\sum_{i=1}^n r_b J^i \bar{\delta}(y - y_i) - \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^m r_b J^{ij} \bar{\delta}(x - x_j) \bar{\delta}(y - y_i) \right],$$

$$\begin{aligned} \bar{F}_{xy} &= \frac{1}{2} (\bar{F}_x + \bar{F}_y) = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n F^i (1 + r_b) \bar{\delta}(y - y_i) + \frac{1}{2} \sum_{j=1}^m F^j (1 + r_a) \bar{\delta}(x - x_j) - \\ &- \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^m F^{ij} r_{ab} \bar{\delta}(x - x_j) \bar{\delta}(y - y_i), \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \bar{S}_{xy} &= \frac{1}{2} (\bar{S}_x + \bar{S}_y) = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n S^i (1 + r_b) \bar{\delta}(y - y_i) + \frac{1}{2} \sum_{j=1}^m S^j (1 + r_a) \bar{\delta}(x - x_j) - \\ &- \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^m S^{ij} r_{ab} \bar{\delta}(x - x_j) \bar{\delta}(y - y_i), \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \bar{J}_{xy} &= \frac{1}{2} (\bar{J}_x + \bar{J}_y) = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n J^i (1 + r_b) \bar{\delta}(y - y_i) + \frac{1}{2} \sum_{j=1}^m J^j (1 + r_a) \bar{\delta}(x - x_j) - \\ &- \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^m J^{ij} r_{ab} \bar{\delta}(x - x_j) \bar{\delta}(y - y_i), \end{aligned}$$

где

$$r_a = \frac{r_j}{(a - a_1)A}, \quad r_b = \frac{r_i}{bB}, \quad r_{ab} = \frac{r_a + r_b}{2}. \quad (2.43)$$

2.1.7 Уточненная модель ребристой оболочки при дискретном введении ребер с учетом ортотропии материала

При дискретном уточненном вводе ребер жесткости с учетом ортотропии материала будем использовать тот же принцип, что и ранее для метода конструктивной анизотропии:

$$\begin{aligned} \bar{F}_x &= \bar{F}_{x1} + \bar{F}_{x2}, & \bar{F}_y &= \bar{F}_{y1} + \bar{F}_{y2}, & \bar{S}_x &= \bar{S}_{x1} + \bar{S}_{x2}, & \bar{S}_y &= \bar{S}_{y1} + \bar{S}_{y2}, \\ \bar{J}_x &= \bar{J}_{x1} + \bar{J}_{x2}, & \bar{J}_y &= \bar{J}_{y1} + \bar{J}_{y2}, \end{aligned} \quad (2.44)$$

тогда, с учетом добавления коэффициента d_{E2} , из (2.42), (2.43) получим [135]

$$\begin{aligned} \bar{F}_{x1} &= \sum_{i=1}^n F^i \bar{\delta}(y - y_i), & \bar{F}_{y1} &= \sum_{j=1}^m F^j \bar{\delta}(x - x_j), \\ \bar{S}_{x1} &= \sum_{i=1}^n S^i \bar{\delta}(y - y_i), & \bar{S}_{y1} &= \sum_{j=1}^m S^j \bar{\delta}(x - x_j), \\ \bar{J}_{x1} &= \sum_{i=1}^n J^i \bar{\delta}(y - y_i), & \bar{J}_{y1} &= \sum_{j=1}^m J^j \bar{\delta}(x - x_j), \\ \bar{F}_{x2} &= d_{E2} \left[\sum_{j=1}^m r_a F^j \bar{\delta}(x - x_j) - \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^m r_a F^{ij} \bar{\delta}(x - x_j) \bar{\delta}(y - y_i) \right], \\ \bar{F}_{y2} &= d_{E2} \left[\sum_{i=1}^n r_b F^i \bar{\delta}(y - y_i) - \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^m r_b F^{ij} \bar{\delta}(x - x_j) \bar{\delta}(y - y_i) \right], \\ \bar{S}_{x2} &= d_{E2} \left[\sum_{j=1}^m r_a S^j \bar{\delta}(x - x_j) - \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^m r_a S^{ij} \bar{\delta}(x - x_j) \bar{\delta}(y - y_i) \right], \\ \bar{S}_{y2} &= d_{E2} \left[\sum_{i=1}^n r_b S^i \bar{\delta}(y - y_i) - \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^m r_b S^{ij} \bar{\delta}(x - x_j) \bar{\delta}(y - y_i) \right], \\ \bar{J}_{x2} &= d_{E2} \left[\sum_{j=1}^m r_a J^j \bar{\delta}(x - x_j) - \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^m r_a J^{ij} \bar{\delta}(x - x_j) \bar{\delta}(y - y_i) \right], \end{aligned} \quad (2.45)$$

$$\bar{J}_{y2} = d_{E2} \left[\sum_{i=1}^n r_b J^i \bar{\delta}(y - y_i) - \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^m r_b J^{ij} \bar{\delta}(x - x_j) \bar{\delta}(y - y_i) \right].$$

Здесь используются коэффициенты из (2.29):

$$d_{E1} = \frac{E_1}{E_2}, \quad d_{E2} = \frac{E_2}{E_1}, \quad d_{\mu 12} = \frac{\mu_{12}}{\mu_{21}}, \quad d_{\mu 21} = \frac{\mu_{21}}{\mu_{12}}, \quad d_{G13} = \frac{G_{13}}{G_{23}}, \quad d_{G23} = \frac{G_{23}}{G_{13}}.$$

2.2 СПОСОБЫ ПРЕОБРАЗОВАНИЯ ФУНКЦИОНАЛА ПОЛНОЙ ПОТЕНЦИАЛЬНОЙ ЭНЕРГИИ ДЕФОРМАЦИИ РЕБРИСТЫХ ОБОЛОЧЕК

Для того, чтобы применить к математической модели численные методы, и далее разработать программу для ЭВМ, необходимо привести ее к определенному виду. В частности, необходимо выражения для усилий и моментов подставить в функционал, а для случаев дискретного ввода подкрепляющих элементов – еще и выполнить переход от единичных столбчатых функций (или, в случае ввода ребер «по линии», дельта-функций) к суммам интегралов.

2.2.1 Преобразование функционала для ребристой оболочки при контакте ребер с обшивкой по линии

В этом случае, после подстановки выражений для усилий и моментов (2.5), функционал потенциальной энергии ребер жесткости E_p^R примет вид

$$\begin{aligned} E_p^R &= \frac{1}{2} \int_{a_1}^a \int_0^b \left[N_x^R \varepsilon_x + N_y^R \varepsilon_y + M_x^R \chi_1 + M_y^R \chi_2 \right] AB dx dy = \\ &= \frac{1}{2} \int_{a_1}^a \int_0^b \left[E_1 \sum_{i=1}^n \left(F^i r_i \varepsilon_x^2 + S^i r_i \chi_1 \varepsilon_x \right) \delta(y - y_i) + E_2 \sum_{j=1}^m \left(F^j r_j \varepsilon_y^2 + S^j r_j \chi_2 \varepsilon_y \right) \delta(x - x_j) + \right. \\ &\quad \left. + E_1 \sum_{i=1}^n \left(S^i r_i \varepsilon_x \chi_1 + J^i r_i \chi_1^2 \right) \delta(y - y_i) + E_2 \sum_{j=1}^m \left(S^j r_j \varepsilon_y \chi_2 + J^j r_j \chi_2^2 \right) \delta(x - x_j) \right] AB dx dy. \end{aligned} \quad (2.46)$$

Это выражение запишем в виде

$$E_p^R = \frac{1}{2} \int_{a_1}^a \int_0^b \left[\sum_{i=1}^n A_{1i} \delta(y - y_i) + \sum_{j=1}^m A_{2j} \delta(x - x_j) \right] dx dy, \quad (2.47)$$

где

$$A_{1i} = E_1 \left(F^i r_i \varepsilon_x^2 + S^i r_i \chi_1 \varepsilon_x + S^i r_i \chi_1 \varepsilon_x + J^i r_i \chi_1^2 \right) AB, \quad (2.48)$$

$$A_{2j} = E_2 \left(F^j r_j \varepsilon_y^2 + S^j r_j \chi_2 \varepsilon_y + S^j r_j \chi_2 \varepsilon_y + J^j r_j \chi_2^2 \right) AB.$$

Следовательно,

$$E_p^R = \frac{1}{2} \int_{a_1}^a \sum_{i=1}^n \left(A_{1i} \Big|_{y=y_i} \right) dx + \frac{1}{2} \int_0^b \sum_{j=1}^m \left(A_{2j} \Big|_{x=x_j} \right) dy. \quad (2.49)$$

2.2.2 Преобразование функционала для ребристой оболочки при контакте ребер с обшивкой по полосе

Подставим в функционал (2.3) выражения для усилий и моментов (2.13)

$$\begin{aligned} E_p^R = & \frac{1}{2} \int_{a_1}^a \int_0^b \left[G_1^R \left[\bar{F}(\varepsilon_x + \mu_{21} \varepsilon_y) + \bar{S}(\chi_1 + \mu_{21} \chi_2) \right] \varepsilon_x + \right. \\ & + G_2^R \left[\bar{F}(\varepsilon_y + \mu_{12} \varepsilon_x) + \bar{S}(\chi_2 + \mu_{12} \chi_1) \right] \varepsilon_y + \\ & + \frac{1}{2} \left(G_{12}^R \left[\bar{F} \gamma_{xy} + 2 \bar{S} \chi_{12} \right] + G_{12}^R \left[\bar{F} \gamma_{xy} + 2 \bar{S} \chi_{12} \right] \right) \gamma_{xy} + \\ & + G_1^R \left[\bar{S}(\varepsilon_x + \mu_{21} \varepsilon_y) + \bar{J}(\chi_1 + \mu_{21} \chi_2) \right] \chi_1 + \\ & + G_2^R \left[\bar{S}(\varepsilon_y + \mu_{12} \varepsilon_x) + \bar{J}(\chi_2 + \mu_{12} \chi_1) \right] \chi_2 + \\ & + \left(G_{12}^R \left[\bar{S} \gamma_{xy} + 2 \bar{J} \chi_{12} \right] + G_{12}^R \left[\bar{S} \gamma_{xy} + 2 \bar{J} \chi_{12} \right] \right) \chi_{12} + \\ & + G_{13}^R k \bar{F}(\Psi_x - \theta_1)(\Psi_x - \theta_1) + G_{23}^R k \bar{F}(\Psi_y - \theta_2)(\Psi_y - \theta_2) \Big] AB dx dy = \quad (2.50) \\ = & \frac{1}{2} \int_{a_1}^a \int_0^b \left[\bar{F} \left[G_1^R (\varepsilon_x + \mu_{21} \varepsilon_y) \varepsilon_x + G_2^R (\varepsilon_y + \mu_{12} \varepsilon_x) \varepsilon_y + G_{12}^R \gamma_{xy}^2 + G_{13}^R k (\Psi_x - \theta_1)^2 + \right. \right. \\ & \left. \left. + G_{23}^R k (\Psi_y - \theta_2)^2 \right] + \bar{S} \left[G_1^R (\chi_1 + \mu_{21} \chi_2) \varepsilon_x + G_2^R (\chi_2 + \mu_{12} \chi_1) \varepsilon_y + \right. \right. \end{aligned}$$

$$+G_1^R(\varepsilon_x + \mu_{21}\varepsilon_y)\chi_1 + G_2^R(\varepsilon_y + \mu_{12}\varepsilon_x)\chi_2 + 4G_{12}^R\gamma_{xy}\chi_{12} \Big] + \bar{J} \Big[G_1^R(\chi_1 + \mu_{21}\chi_2)\chi_1 + \\ + G_2^R(\chi_2 + \mu_{12}\chi_1)\chi_2 + 4G_{12}^R\chi_{12}^2 \Big] \Big] AB dx dy.$$

После использования выражений (2.11), (2.12) получим

$$E_p^R = \frac{1}{2} \int_{a_1}^a \int_0^b \left[\sum_{i=1}^n A_{1i} \bar{\delta}(y - y_i) + \sum_{j=1}^m A_{2j} \bar{\delta}(x - x_j) - \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^m A_{3ij} \bar{\delta}(x - x_j) \bar{\delta}(y - y_i) \right] dx dy, \quad (2.51)$$

где

$$A_{1i} = \left[F^i \left(G_1^R(\varepsilon_x + \mu_{21}\varepsilon_y)\varepsilon_x + G_2^R(\varepsilon_y + \mu_{12}\varepsilon_x)\varepsilon_y + G_{12}^R\gamma_{xy}^2 + G_{13}^R k(\Psi_x - \theta_1)^2 + \right. \right. \\ \left. \left. + G_{23}^R k(\Psi_y - \theta_2)^2 \right) + S^i \left(G_1^R(\chi_1 + \mu_{21}\chi_2)\varepsilon_x + \right. \right. \\ \left. \left. + G_2^R(\chi_2 + \mu_{12}\chi_1)\varepsilon_y + G_1^R(\varepsilon_x + \mu_{21}\varepsilon_y)\chi_1 + \right. \right. \\ \left. \left. + G_2^R(\varepsilon_y + \mu_{12}\varepsilon_x)\chi_2 + 4G_{12}^R\chi_{12}\gamma_{xy} \right) + \right. \\ \left. + J^i \left(G_1^R(\chi_1 + \mu_{21}\chi_2)\chi_1 + G_2^R(\chi_2 + \mu_{12}\chi_1)\chi_2 + 4G_{12}^R\chi_{12}^2 \right) \right] AB, \\ A_{2j} = \left[F^j \left(G_1^R(\varepsilon_x + \mu_{21}\varepsilon_y)\varepsilon_x + G_2^R(\varepsilon_y + \mu_{12}\varepsilon_x)\varepsilon_y + G_{12}^R\gamma_{xy}^2 + G_{13}^R k(\Psi_x - \theta_1)^2 + \right. \right. \\ \left. \left. + G_{23}^R k(\Psi_y - \theta_2)^2 \right) + S^j \left(G_1^R(\chi_1 + \mu_{21}\chi_2)\varepsilon_x + \right. \right. \\ \left. \left. + G_2^R(\chi_2 + \mu_{12}\chi_1)\varepsilon_y + G_1^R(\varepsilon_x + \mu_{21}\varepsilon_y)\chi_1 + \right. \right. \\ \left. \left. + G_2^R(\varepsilon_y + \mu_{12}\varepsilon_x)\chi_2 + 4G_{12}^R\chi_{12}\gamma_{xy} \right) + \right. \\ \left. + J^j \left(G_1^R(\chi_1 + \mu_{21}\chi_2)\chi_1 + G_2^R(\chi_2 + \mu_{12}\chi_1)\chi_2 + 4G_{12}^R\chi_{12}^2 \right) \right] AB, \\ A_{3ij} = \left[F^{ij} \left(G_1^R(\varepsilon_x + \mu_{21}\varepsilon_y)\varepsilon_x + G_2^R(\varepsilon_y + \mu_{12}\varepsilon_x)\varepsilon_y + G_{12}^R\gamma_{xy}^2 + \right. \right. \\ \left. \left. + G_{13}^R k(\Psi_x - \theta_1)^2 + G_{23}^R k(\Psi_y - \theta_2)^2 \right) + \right. \\ \left. + S^{ij} \left(G_1^R(\chi_1 + \mu_{21}\chi_2)\varepsilon_x + G_2^R(\chi_2 + \mu_{12}\chi_1)\varepsilon_y + G_1^R(\varepsilon_x + \mu_{21}\varepsilon_y)\chi_1 + \right. \right. \\ \left. \left. + G_2^R(\varepsilon_y + \mu_{12}\varepsilon_x)\chi_2 + 4G_{12}^R\chi_{12}\gamma_{xy} \right) + \right. \\ \left. + J^{ij} \left(G_1^R(\chi_1 + \mu_{21}\chi_2)\chi_1 + G_2^R(\chi_2 + \mu_{12}\chi_1)\chi_2 + 4G_{12}^R\chi_{12}^2 \right) \right] AB. \quad (2.52)$$

Функционал (2.51) можно записать в виде

$$E_p^R = \frac{1}{2} \int_{a_1}^a dx \sum_{i=1}^n \int_{c_i}^{d_i} A_{1i} dy + \frac{1}{2} \int_0^b dy \sum_{j=1}^m \int_{a_j}^{b_j} A_{2j} dx - \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^m \int_{a_j}^{b_j} \int_{c_i}^{d_i} A_{3ij} dx dy. \quad (2.53)$$

2.2.3 Преобразование функционала для ребристой оболочки при «размазывании» жесткости ребер по методу конструктивной анизотропии

Подставим в функционал (2.3) выражения для усилий и моментов (2.23), в результате получим [130]

$$\begin{aligned} E_p^R = & \frac{1}{2} \int_{a_1}^a \int_0^b \left[F_x \left(G_1^R (\varepsilon_x + \mu \varepsilon_y) \varepsilon_x + \frac{1}{2} G_{12}^R \gamma_{xy}^2 + G_{13}^R k (\Psi_x - \theta_1)^2 \right) + \right. \\ & + F_y \left(\frac{1}{2} G_{12}^R \gamma_{xy}^2 + G_2^R (\varepsilon_y + \mu \varepsilon_x) \varepsilon_y + G_{23}^R k (\Psi_y - \theta_2)^2 \right) + \\ & + S_y \left(2G_{12}^R \chi_{12} \gamma_{xy} + G_2^R (\chi_2 + \mu \chi_1) \varepsilon_y + G_2^R (\varepsilon_y + \mu \varepsilon_x) \chi_2 \right) + \\ & + S_x \left(2G_{12}^R \chi_{12} \gamma_{xy} + G_1^R (\chi_1 + \mu \chi_2) \varepsilon_x + G_1^R (\varepsilon_x + \mu \varepsilon_y) \chi_1 \right) + \\ & \left. + J_y \left(2G_{12}^R \chi_{12}^2 + G_2^R (\chi_2 + \mu \chi_1) \chi_2 \right) + J_x \left(G_1^R (\chi_1 + \mu \chi_2) \chi_1 + 2G_{12}^R \chi_{12}^2 \right) \right] AB dx dy. \quad (2.54) \end{aligned}$$

2.2.4 Преобразование функционала для ребристой оболочки при «размазывании» жесткости ребер по методу конструктивной анизотропии с учетом ортотропии материала

Подставив полученные выражения (2.32), (2.33) в функционал (2.3), получим

$$\begin{aligned} E_p^R = & \frac{1}{2} \int_{a_1}^a \int_0^b \left[G_1^R \left[F_{x1} (\varepsilon_x^2 + \mu_{21}^R \varepsilon_x \varepsilon_y) + \underline{F_{x2} (\varepsilon_x^2 + d_{\mu 12} \mu_{21}^R \varepsilon_x \varepsilon_y)} + S_{x1} (\varepsilon_x \chi_1 + \mu_{21}^R \varepsilon_x \chi_2) + \right. \right. \\ & \left. \left. + \underline{S_{x2} (\varepsilon_x \chi_1 + d_{\mu 12} \mu_{21}^R \varepsilon_x \chi_2)} \right] + \right. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& +d_{E1}G_2^R \left[\underline{F_{y1}(\varepsilon_y^2 + d_{\mu 21}\mu_{12}^R \varepsilon_x \varepsilon_y)} + F_{y2}(\varepsilon_y^2 + \mu_{12}^R \varepsilon_x \varepsilon_y) + \right. \\
& \quad \left. + \underline{S_{y1}(\varepsilon_y \chi_2 + d_{\mu 21}\mu_{12}^R \varepsilon_y \chi_1)} + S_{y2}(\varepsilon_y \chi_2 + \mu_{12}^R \varepsilon_y \chi_1) \right] + \quad (2.55) \\
& + \frac{1}{2} (N_{xy}^R + N_{yx}^R) \gamma_{xy} + G_1^R \left[S_{x1}(\varepsilon_x \chi_1 + \mu_{21}^R \varepsilon_y \chi_1) + \underline{S_{x2}(\varepsilon_x \chi_1 + d_{\mu 12}\mu_{21}^R \varepsilon_y \chi_1)} + \right. \\
& + J_{x1}(\chi_1^2 + \mu_{21}^R \chi_1 \chi_2) + \underline{J_{x2}(\chi_1^2 + d_{\mu 12}\mu_{21}^R \chi_1 \chi_2)} \left. \right] + d_{E1}G_2^R \left[\underline{S_{y1}(\varepsilon_y \chi_2 + d_{\mu 21}\mu_{12}^R \varepsilon_x \chi_2)} + \right. \\
& + S_{y2}(\varepsilon_y \chi_2 + \mu_{12}^R \varepsilon_x \chi_2) + \underline{J_{y1}(\chi_2^2 + d_{\mu 21}\mu_{12}^R \chi_1 \chi_2)} + J_{y2}(\chi_2^2 + \mu_{12}^R \chi_1 \chi_2) \left. \right] + \\
& + (M_{xy}^R + M_{yx}^R) \chi_{12} + G_{13}^R (F_{x1} + d_{G23}d_{E1}F_{x2}) k(\Psi_x - \theta_1)^2 + \\
& + G_{23}^R (d_{G13}F_{y1} + d_{E1}F_{y2}) k(\Psi_y - \theta_2)^2 \left. \right] AB dx dy.
\end{aligned}$$

Начнем раскрывать скобки, а также подставим в функционал выражения (2.31)

$$\begin{aligned}
E_p^R = & \frac{1}{2} \int_a^b \int_0^b \left[G_1^R \left[(F_{x1} + F_{x2}) \varepsilon_x^2 + (F_{x1} + d_{\mu 12}F_{x2}) \mu_{21}^R \varepsilon_x \varepsilon_y + S_{x1} \varepsilon_x \chi_1 + S_{x1} \mu_{21}^R \varepsilon_x \chi_2 + S_{x2} \varepsilon_x \chi_1 + \right. \right. \\
& \quad \left. + S_{x2} d_{\mu 12} \mu_{21}^R \varepsilon_x \chi_2 \right] + d_{E1}G_2^R \left[F_{y1} \varepsilon_y^2 + F_{y1} d_{\mu 21} \mu_{12}^R \varepsilon_x \varepsilon_y + F_{y2} \varepsilon_y^2 + \right. \\
& \quad \left. + F_{y2} \mu_{12}^R \varepsilon_x \varepsilon_y + S_{y1} \varepsilon_y \chi_2 + S_{y1} d_{\mu 21} \mu_{12}^R \varepsilon_y \chi_1 + S_{y2} \varepsilon_y \chi_2 + S_{y2} \mu_{12}^R \varepsilon_y \chi_1 \right] + \quad (2.56) \\
& + \frac{1}{2} \left(G_{12}^R \left[F_y \gamma_{xy}^2 + 2S_y \gamma_{xy} \chi_{12} \right] + G_{12}^R \left[F_x \gamma_{xy}^2 + 2S_x \gamma_{xy} \chi_{12} \right] \right) + G_1^R \left[S_{x1} \varepsilon_x \chi_1 + S_{x1} \mu_{21}^R \varepsilon_y \chi_1 + \right. \\
& + S_{x2} \varepsilon_x \chi_1 + S_{x2} d_{\mu 12} \mu_{21}^R \varepsilon_y \chi_1 + J_{x1} \chi_1^2 + J_{x1} \mu_{21}^R \chi_1 \chi_2 + J_{x2} \chi_1^2 + J_{x2} d_{\mu 12} \mu_{21}^R \chi_1 \chi_2 \left. \right] + \\
& + d_{E1}G_2^R \left[S_{y1} \varepsilon_y \chi_2 + S_{y1} d_{\mu 21} \mu_{12}^R \varepsilon_x \chi_2 + S_{y2} \varepsilon_y \chi_2 + \right. \\
& + S_{y2} \mu_{12}^R \varepsilon_x \chi_2 + J_{y1} \chi_2^2 + J_{y1} d_{\mu 21} \mu_{12}^R \chi_1 \chi_2 +
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& + J_{y2} \chi_2^2 + J_{y2} \mu_{12}^R \chi_1 \chi_2 \Big] + \left(G_{12}^R \left[S_y \gamma_{xy} \chi_{12} + 2 J_y \chi_{12}^2 \right] + G_{12}^R \left[S_x \gamma_{xy} \chi_{12} + 2 J_x \chi_{12}^2 \right] \right) + \\
& + G_{13}^R (F_{x1} + d_{G23} d_{E1} F_{x2}) k(\Psi_x - \theta_1)^2 + G_{23}^R (d_{G13} F_{y1} + d_{E1} F_{y2}) k(\Psi_y - \theta_2)^2 \Big] AB dx dy.
\end{aligned}$$

Перегруппировав некоторые слагаемые, получим

$$\begin{aligned}
E_p^R = & \frac{1}{2} \int_{a_1}^a \int_0^b \left[G_1^R \left[(F_{x1} + F_{x2}) \varepsilon_x^2 + (F_{x1} + F_{y1} + d_{\mu 12} (F_{x2} + F_{y2})) \mu_{21}^R \varepsilon_x \varepsilon_y + 2(S_{x1} + S_{x2}) \varepsilon_x \chi_1 + \right. \right. \\
& + (S_{x1} + S_{y1} + d_{\mu 12} (S_{x2} + S_{y2})) (\varepsilon_x \chi_2 + \varepsilon_y \chi_1) \mu_{21}^R + (J_{x1} + J_{x2}) \chi_1^2 + \\
& \left. \left. + (J_{x1} + J_{y1} + d_{\mu 12} (J_{x2} + J_{y2})) \mu_{21}^R \chi_1 \chi_2 \right] + \right. \\
& + d_{E1} G_2^R \left[(F_{y1} + F_{y2}) \varepsilon_y^2 + 2(S_{y1} + S_{y2}) \varepsilon_y \chi_2 + (J_{y1} + J_{y2}) \chi_2^2 \right] + \\
& + G_{12}^R \left[\frac{1}{2} (F_x + F_y) \gamma_{xy}^2 + 2(S_x + S_y) \gamma_{xy} \chi_{12} + 2(J_x + J_y) \chi_{12}^2 \right] + \\
& \left. + G_{13}^R (F_{x1} + d_{G23} d_{E1} F_{x2}) k(\Psi_x - \theta_1)^2 + G_{23}^R (d_{G13} F_{y1} + d_{E1} F_{y2}) k(\Psi_y - \theta_2)^2 \right] AB dx dy.
\end{aligned} \tag{2.57}$$

Здесь учтено, что, в связи с особенностями ортотропного материала,

$$d_{E1} \cdot d_{\mu 21} = \frac{E_1^R}{E_2^R} \cdot \frac{\mu_{21}^R}{\mu_{12}^R} = \frac{E_1^R \mu_{21}^R}{E_1^R \mu_{21}^R} = 1, \quad d_{E2} \cdot d_{\mu 12} = \frac{E_2^R}{E_1^R} \cdot \frac{\mu_{12}^R}{\mu_{21}^R} = \frac{E_2^R \mu_{12}^R}{E_2^R \mu_{12}^R} = 1. \tag{2.58}$$

Учитывая обозначения (1.28), и то, что

$$G_1^R = \frac{E_1^R}{1 - \mu_{12}^R \mu_{21}^R}, \quad G_2^R = \frac{E_2^R}{1 - \mu_{12}^R \mu_{21}^R},$$

вынесем G_1^R перед знаком интеграла

$$\begin{aligned}
E_p^R = & \frac{G_1^R}{2} \int_{a_1}^a \int_0^b \left[(F_{x1} + F_{x2}) \varepsilon_x^2 + (F_{x1} + F_{y1} + d_{\mu 12} (F_{x2} + F_{y2})) \mu_{21}^R \varepsilon_x \varepsilon_y + 2(S_{x1} + S_{x2}) \varepsilon_x \chi_1 + \right. \\
& + (S_{x1} + S_{y1} + d_{\mu 12} (S_{x2} + S_{y2})) (\varepsilon_x \chi_2 + \varepsilon_y \chi_1) \mu_{21}^R + (J_{x1} + J_{x2}) \chi_1^2 + \\
& \left. + (J_{x1} + J_{y1} + d_{\mu 12} (J_{x2} + J_{y2})) \mu_{21}^R \chi_1 \chi_2 + \right.
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& +d_{E1}\bar{G}_2^R\left[\left(F_{y1}+F_{y2}\right)\varepsilon_y^2+2\left(S_{y1}+S_{y2}\right)\varepsilon_y\chi_2+\left(J_{y1}+J_{y2}\right)\chi_2^2\right]+ \\
& +\bar{G}_{12}^R\left[\frac{1}{2}\left(F_x+F_y\right)\gamma_{xy}^2+2\left(S_x+S_y\right)\gamma_{xy}\chi_{12}+2\left(J_x+J_y\right)\chi_{12}^2\right]+ \quad (2.59) \\
& +\bar{G}_{13}^R\left(F_{x1}+d_{G23}d_{E1}F_{x2}\right)k\left(\Psi_x-\theta_1\right)^2+\bar{G}_{23}^R\left(d_{G13}F_{y1}+d_{E1}F_{y2}\right)k\left(\Psi_y-\theta_2\right)^2\Big]ABdx dy.
\end{aligned}$$

Следует также обратить внимание, что при последующем переходе к безразмерным параметрам, чтобы потенциальную энергию обшивки и потенциальную энергию ребер можно было суммировать, необходимо будет ввести множитель G_1^R / G_1 .

2.2.5 Преобразование функционала для ребристой оболочки при уточненном варианте модели

Разбиение функционала (2.2) на две части вызвано тем, что во втором слагаемом необходимо вычислять интегралы не только на отрезках $[0, a], [0, b]$, но и суммы интегралов на отрезках $[a_j, b_j], [c_i, d_i]$.

Двойной интеграл разбивается на повторные и для их вычисления используется метод Симпсона. Внешним интегралом является интеграл по переменной x , потому что при каждом значении x сначала вычисляется интеграл по переменной y , так как в нем есть член, зависящий от x $\left(r_b = \frac{r_i}{bB(x)}\right)$.

После подстановки в (2.3) выражений усилий и моментов получим

$$E_p^R = \frac{1}{2} \int_{a_1}^a \int_0^b \left[\sum_{i=1}^n A_{1i} \bar{\delta}(y - y_i) + \sum_{j=1}^m A_{2j} \bar{\delta}(x - x_j) - \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^m A_{3ij} \bar{\delta}(x - x_j) \bar{\delta}(y - y_i) \right] dx dy. \quad (2.60)$$

Здесь

$$\begin{aligned}
A_{1i} = & \left[G_1^R \left(F^i(\varepsilon_x + \mu\varepsilon_y) \varepsilon_x + S^i(\chi_1 + \mu\chi_2) \varepsilon_x \right) + \right. \\
& \left. + G_2^R \left(F^i(\varepsilon_y + \mu\varepsilon_x) \varepsilon_y + S^i(\chi_2 + \mu\chi_1) \varepsilon_y \right) r_b + \right.
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& + \frac{1}{2} G_{12}^R \left(F^i \gamma_{xy}^2 + 2S^i \chi_{12} \gamma_{xy} \right) (1+r_b) + G_1^R \left(S^i (\varepsilon_x + \mu \varepsilon_y) \chi_1 + J^i (\chi_1 + \mu \chi_2) \chi_1 \right) + \\
& + G_2^R \left(S^i (\varepsilon_y + \mu \varepsilon_x) \chi_2 + J^i (\chi_2 + \mu \chi_1) \chi_2 \right) r_b + \\
& + G_{12}^R \left(S^i \gamma_{xy} \chi_{12} + 2J^i \chi_{12}^2 \right) (1+r_b) + \\
& + G_{13}^R k F^i (\Psi_x - \theta_1)^2 + G_{23}^R k F^i (\Psi_y - \theta_2)^2 r_b \Big] AB, \\
A_{2j} = & \left[G_1^R \left(F^j (\varepsilon_x + \mu \varepsilon_y) \varepsilon_x + S^j (\chi_1 + \mu \chi_2) \varepsilon_x \right) r_a + \right. \\
& + G_2^R \left(F^j (\varepsilon_y + \mu \varepsilon_x) \varepsilon_y + S^j (\chi_2 + \mu \chi_1) \varepsilon_y \right) + \\
& + \frac{1}{2} G_{12}^R \left(F^j \gamma_{xy}^2 + 2S^j \chi_{12} \gamma_{xy} \right) (1+r_a) + \\
& + G_1^R \left(S^j (\varepsilon_x + \mu \varepsilon_y) \chi_1 + J^j (\chi_1 + \mu \chi_2) \chi_1 \right) r_a + \\
& + G_2^R \left(S^j (\varepsilon_y + \mu \varepsilon_x) \chi_2 + J^j (\chi_2 + \mu \chi_1) \chi_2 \right) + G_{12}^R \left(S^j \gamma_{xy} \chi_{12} + 2J^j \chi_{12}^2 \right) (1+r_a) + \\
& \left. + G_{13}^R k F^j (\Psi_x - \theta_1)^2 r_a + G_{23}^R k F^j (\Psi_y - \theta_2)^2 r_b \right] AB, \\
A_{3ij} = & \left[G_1^R \left(F^{ij} (\varepsilon_x + \mu \varepsilon_y) \varepsilon_x + S^{ij} (\chi_1 + \mu \chi_2) \varepsilon_x \right) r_a + \right. \\
& + G_2^R \left(F^{ij} (\varepsilon_y + \mu \varepsilon_x) \varepsilon_y + S^{ij} (\chi_2 + \mu \chi_1) \varepsilon_y \right) r_b + G_{12}^R \left(F^{ij} \gamma_{xy}^2 + 2S^{ij} \chi_{12} \gamma_{xy} \right) r_{ab} + \\
& + G_1^R \left(S^{ij} (\varepsilon_x + \mu \varepsilon_y) \chi_1 + J^{ij} (\chi_1 + \mu \chi_2) \chi_1 \right) r_a + \\
& + G_2^R \left(S^{ij} (\varepsilon_y + \mu \varepsilon_x) \chi_2 + J^{ij} (\chi_2 + \mu \chi_1) \chi_2 \right) r_b + \\
& \left. + 2G_{12}^R \left(S^{ij} \gamma_{xy} \chi_{12} + 2J^{ij} \chi_{12}^2 \right) r_{ab} + G_{13}^R k F^{ij} (\Psi_x - \theta_1)^2 r_a + G_{23}^R k F^{ij} (\Psi_y - \theta_2)^2 r_b \right] AB.
\end{aligned} \tag{2.61}$$

Функционал (2.60) можно записать в виде

$$E_p^R = \frac{1}{2} \int_{a_1}^a dx \sum_{i=1}^n \int_{c_i}^{d_i} A_{ii} dy + \frac{1}{2} \int_0^b dy \sum_{j=1}^m \int_{a_j}^{b_j} A_{jj} dx - \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^m \int_{a_j}^{b_j} \int_{c_i}^{d_i} A_{3ij} dx dy. \tag{2.62}$$

2.2.6 Преобразование функционала для ребристой оболочки при уточненном варианте модели с учетом ортотропии материала

Поскольку все преобразования усилий, моментов и функционала для случая дискретной уточненной модели совпадают с преобразованиями в модели, основанной на методе конструктивной анизотропии, то далее будем использовать полученное ранее выражение (2.59). Подставим в него (2.42), (2.43), (2.45)

$$\begin{aligned}
E_p^R = & \frac{G_1^R}{2} \int_{a_1}^a \int_0^b \left[\left(\sum_{i=1}^n F^i \bar{\delta}(y - y_i) + \right. \right. \\
& + d_{E2} \left[\sum_{j=1}^m r_a F^j \bar{\delta}(x - x_j) - \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^m r_a F^{ij} \bar{\delta}(x - x_j) \bar{\delta}(y - y_i) \right] \Big) \varepsilon_x^2 + \\
& + \left(\sum_{i=1}^n F^i \bar{\delta}(y - y_i) + \sum_{j=1}^m F^j \bar{\delta}(x - x_j) + \right. \\
& + d_{\mu 12} d_{E2} \left[\sum_{j=1}^m r_a F^j \bar{\delta}(x - x_j) - \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^m r_a F^{ij} \bar{\delta}(x - x_j) \bar{\delta}(y - y_i) \right] + \\
& + d_{\mu 12} d_{E2} \left[\sum_{i=1}^n r_b F^i \bar{\delta}(y - y_i) - \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^m r_b F^{ij} \bar{\delta}(x - x_j) \bar{\delta}(y - y_i) \right] \Big) \mu_{21}^R \varepsilon_x \varepsilon_y + \\
& + 2 \left(\sum_{i=1}^n S^i \bar{\delta}(y - y_i) + d_{E2} \left[\sum_{j=1}^m r_a S^j \bar{\delta}(x - x_j) - \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^m r_a S^{ij} \bar{\delta}(x - x_j) \bar{\delta}(y - y_i) \right] \right) \varepsilon_x \chi_1 + \\
& + \left(\sum_{i=1}^n S^i \bar{\delta}(y - y_i) + \sum_{j=1}^m S^j \bar{\delta}(x - x_j) + \right. \\
& + d_{\mu 12} d_{E2} \left[\sum_{j=1}^m r_a S^j \bar{\delta}(x - x_j) - \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^m r_a S^{ij} \bar{\delta}(x - x_j) \bar{\delta}(y - y_i) \right] + \\
& + d_{\mu 12} d_{E2} \left[\sum_{i=1}^n r_b S^i \bar{\delta}(y - y_i) - \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^m r_b S^{ij} \bar{\delta}(x - x_j) \bar{\delta}(y - y_i) \right] \Big) (\varepsilon_x \chi_2 + \varepsilon_y \chi_1) \mu_{21}^R + \\
& + \left(\sum_{i=1}^n J^i \bar{\delta}(y - y_i) + d_{E2} \left[\sum_{j=1}^m r_a J^j \bar{\delta}(x - x_j) - \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^m r_a J^{ij} \bar{\delta}(x - x_j) \bar{\delta}(y - y_i) \right] \right) \chi_1^2 +
\end{aligned} \tag{2.63}$$

$$\begin{aligned}
& + \left(\sum_{i=1}^n J^i \bar{\delta}(y - y_i) + \sum_{j=1}^m J^j \bar{\delta}(x - x_j) \right) + \\
& + d_{\mu 12} \left(d_{E2} \left[\sum_{j=1}^m r_a J^j \bar{\delta}(x - x_j) - \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^m r_a J^{ij} \bar{\delta}(x - x_j) \bar{\delta}(y - y_i) \right] + \right. \\
& \left. + d_{E2} \left[\sum_{i=1}^n r_b J^i \bar{\delta}(y - y_i) - \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^m r_b J^{ij} \bar{\delta}(x - x_j) \bar{\delta}(y - y_i) \right] \right) \mu_{21}^R \chi_1 \chi_2 + \\
& + d_{E1} \bar{G}_2^R \left[\left(\sum_{j=1}^m F^j \bar{\delta}(x - x_j) + d_{E2} \left[\sum_{i=1}^n r_b F^i \bar{\delta}(y - y_i) - \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^m r_b F^{ij} \bar{\delta}(x - x_j) \bar{\delta}(y - y_i) \right] \right) \varepsilon_y^2 + \right. \\
& + 2 \left(\sum_{j=1}^m S^j \bar{\delta}(x - x_j) + d_{E2} \left[\sum_{i=1}^n r_b S^i \bar{\delta}(y - y_i) - \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^m r_b S^{ij} \bar{\delta}(x - x_j) \bar{\delta}(y - y_i) \right] \right) \varepsilon_y \chi_2 + \\
& \left. + \left(\sum_{j=1}^m J^j \bar{\delta}(x - x_j) + d_{E2} \left[\sum_{i=1}^n r_b J^i \bar{\delta}(y - y_i) - \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^m r_b J^{ij} \bar{\delta}(x - x_j) \bar{\delta}(y - y_i) \right] \right) \chi_2^2 \right] + \\
& + \bar{G}_{12}^R \left[\frac{1}{2} \left(\sum_{i=1}^n F^i \bar{\delta}(y - y_i) + \left[\sum_{j=1}^m r_a F^j \bar{\delta}(x - x_j) - \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^m r_a F^{ij} \bar{\delta}(x - x_j) \bar{\delta}(y - y_i) \right] + \right. \right. \\
& + \sum_{j=1}^m F^j \bar{\delta}(x - x_j) + \left. \left[\sum_{i=1}^n r_b F^i \bar{\delta}(y - y_i) - \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^m r_b F^{ij} \bar{\delta}(x - x_j) \bar{\delta}(y - y_i) \right] \right) \gamma_{xy}^2 + \\
& + 2 \left(\sum_{i=1}^n S^i \bar{\delta}(y - y_i) + \left[\sum_{j=1}^m r_a S^j \bar{\delta}(x - x_j) - \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^m r_a S^{ij} \bar{\delta}(x - x_j) \bar{\delta}(y - y_i) \right] + \right. \\
& + \sum_{j=1}^m S^j \bar{\delta}(x - x_j) + \left. \left[\sum_{i=1}^n r_b S^i \bar{\delta}(y - y_i) - \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^m r_b S^{ij} \bar{\delta}(x - x_j) \bar{\delta}(y - y_i) \right] \right) \gamma_{xy} \chi_{12} + \\
& + 2 \left(\sum_{i=1}^n J^i \bar{\delta}(y - y_i) + \left[\sum_{j=1}^m r_a J^j \bar{\delta}(x - x_j) - \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^m r_a J^{ij} \bar{\delta}(x - x_j) \bar{\delta}(y - y_i) \right] + \right. \\
& + \sum_{j=1}^m J^j \bar{\delta}(x - x_j) + \left. \left[\sum_{i=1}^n r_b J^i \bar{\delta}(y - y_i) - \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^m r_b J^{ij} \bar{\delta}(x - x_j) \bar{\delta}(y - y_i) \right] \right) \chi_{12}^2 \right] + \\
& + \bar{G}_{13}^R \left(\sum_{i=1}^n F^i \bar{\delta}(y - y_i) + d_{G23} d_{E1} d_{E2} \left[\sum_{j=1}^m r_a F^j \bar{\delta}(x - x_j) - \right. \right.
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& - \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^m r_a F^{ij} \bar{\delta}(x - x_j) \bar{\delta}(y - y_i) \Bigg] k(\Psi_x - \theta_1)^2 + \\
& + \bar{G}_{23}^R \left(d_{G13} \sum_{j=1}^m F^j \bar{\delta}(x - x_j) + d_{E2} d_{E1} \left[\sum_{i=1}^n r_b F^i \bar{\delta}(y - y_i) - \right. \right. \\
& \left. \left. - \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^m r_b F^{ij} \bar{\delta}(x - x_j) \bar{\delta}(y - y_i) \right] k(\Psi_y - \theta_2)^2 \right] AB dx dy.
\end{aligned}$$

Соберем отдельно слагаемые, в которых присутствуют единичные столбчатые функции $\bar{\delta}(y - y_i)$, $\bar{\delta}(x - x_j)$ и их произведение $\bar{\delta}(y - y_i) \bar{\delta}(x - x_j)$

$$\begin{aligned}
& \sum_{i=1}^n F^i \bar{\delta}(y - y_i) \varepsilon_x^2 + \\
& + \left(\sum_{i=1}^n F^i \bar{\delta}(y - y_i) + d_{\mu 12} d_{E2} \sum_{i=1}^n r_b F^i \bar{\delta}(y - y_i) \right) \mu_{21}^R \varepsilon_x \varepsilon_y + 2 \sum_{i=1}^n S^i \bar{\delta}(y - y_i) \varepsilon_x \chi_1 + \\
& + \left(\sum_{i=1}^n S^i \bar{\delta}(y - y_i) + d_{\mu 12} d_{E2} \sum_{i=1}^n r_b S^i \bar{\delta}(y - y_i) \right) (\varepsilon_x \chi_2 + \varepsilon_y \chi_1) \mu_{21}^R + \\
& + \sum_{i=1}^n J^i \bar{\delta}(y - y_i) \chi_1^2 + \left(\sum_{i=1}^n J^i \bar{\delta}(y - y_i) + d_{\mu 12} d_{E2} \sum_{i=1}^n r_b J^i \bar{\delta}(y - y_i) \right) \mu_{21}^R \chi_1 \chi_2 + \\
& + d_{E1} \bar{G}_2^R \left[\left(d_{E2} \sum_{i=1}^n r_b F^i \bar{\delta}(y - y_i) \right) \varepsilon_y^2 + 2 \left(d_{E2} \sum_{i=1}^n r_b S^i \bar{\delta}(y - y_i) \right) \varepsilon_y \chi_2 + \right. \\
& \quad \left. + d_{E2} \left[\sum_{i=1}^n r_b J^i \bar{\delta}(y - y_i) \right] \chi_2^2 \right] + \\
& + \bar{G}_{12}^R \left[\frac{1}{2} \left(\sum_{i=1}^n F^i \bar{\delta}(y - y_i) + \left[\sum_{i=1}^n r_b F^i \bar{\delta}(y - y_i) \right] \right) \gamma_{xy}^2 + \right. \\
& \quad + 2 \left(\sum_{i=1}^n S^i \bar{\delta}(y - y_i) + \left[\sum_{i=1}^n r_b S^i \bar{\delta}(y - y_i) \right] \right) \gamma_{xy} \chi_{12} + \\
& \quad \left. + 2 \left(\sum_{i=1}^n J^i \bar{\delta}(y - y_i) + \left[\sum_{i=1}^n r_b J^i \bar{\delta}(y - y_i) \right] \right) \chi_{12}^2 \right] +
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& +\bar{G}_{13}^R\left(\sum_{i=1}^n F^i\bar{\delta}(y-y_i)\right)k(\Psi_x-\theta_1)^2+ \\
& +\bar{G}_{23}^R\left(d_{E2}d_{E1}\sum_{i=1}^n r_b F^i\bar{\delta}(y-y_i)\right)k(\Psi_y-\theta_2)^2, \\
& \left(d_{E2}\sum_{j=1}^m r_a F^j\bar{\delta}(x-x_j)\right)\varepsilon_x^2+\left(\sum_{j=1}^m F^j\bar{\delta}(x-x_j)+d_{\mu 12}d_{E2}\sum_{j=1}^m r_a F^j\bar{\delta}(x-x_j)\right)\mu_{21}^R\varepsilon_x\varepsilon_y+ \\
& +2\left(d_{E2}\sum_{j=1}^m r_a S^j\bar{\delta}(x-x_j)\right)\varepsilon_x\chi_1+ \\
& +\left(\sum_{j=1}^m S^j\bar{\delta}(x-x_j)+d_{\mu 12}d_{E2}\sum_{j=1}^m r_a S^j\bar{\delta}(x-x_j)\right)(\varepsilon_x\chi_2+\varepsilon_y\chi_1)\mu_{21}^R+ \\
& +\left(d_{E2}\sum_{j=1}^m r_a J^j\bar{\delta}(x-x_j)\right)\chi_1^2+\left(\sum_{j=1}^m J^j\bar{\delta}(x-x_j)+d_{\mu 12}d_{E2}\left[\sum_{j=1}^m r_a J^j\bar{\delta}(x-x_j)\right]\right)\mu_{21}^R\chi_1\chi_2+ \\
& +d_{E1}\bar{G}_2^R\left[\left(\sum_{j=1}^m F^j\bar{\delta}(x-x_j)\right)\varepsilon_y^2+2\left(\sum_{j=1}^m S^j\bar{\delta}(x-x_j)\right)\varepsilon_y\chi_2+\left(\sum_{j=1}^m J^j\bar{\delta}(x-x_j)\right)\chi_2^2\right]+ \\
& +\bar{G}_{12}^R\left[\frac{1}{2}\left(\left[\sum_{j=1}^m r_a F^j\bar{\delta}(x-x_j)\right]+\sum_{j=1}^m F^j\bar{\delta}(x-x_j)\right)\gamma_{xy}^2+ \right. \\
& +2\left(\left[\sum_{j=1}^m r_a S^j\bar{\delta}(x-x_j)\right]+\sum_{j=1}^m S^j\bar{\delta}(x-x_j)\right)\gamma_{xy}\chi_{12}+ \\
& \left.+2\left(\left[\sum_{j=1}^m r_a J^j\bar{\delta}(x-x_j)\right]+\sum_{j=1}^m J^j\bar{\delta}(x-x_j)\right)\chi_{12}^2\right]+ \\
& +\bar{G}_{13}^R\left(d_{G23}d_{E1}d_{E2}\left[\sum_{j=1}^m r_a F^j\bar{\delta}(x-x_j)\right]\right)k(\Psi_x-\theta_1)^2+ \\
& +\bar{G}_{23}^R\left(d_{G13}\sum_{j=1}^m F^j\bar{\delta}(x-x_j)\right)k(\Psi_y-\theta_2)^2, \\
& -\left[\left(d_{E2}\left[\sum_{i=1}^n\sum_{j=1}^m r_a F^{ij}\bar{\delta}(x-x_j)\bar{\delta}(y-y_i)\right]\right)\varepsilon_x^2+ \right.
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& + \left(d_{\mu 12} d_{E2} \left[\sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^m r_a F^{ij} \bar{\delta}(x - x_j) \bar{\delta}(y - y_i) \right] + \right. \\
& + d_{\mu 12} d_{E2} \left[\sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^m r_b F^{ij} \bar{\delta}(x - x_j) \bar{\delta}(y - y_i) \right] \Big) \mu_{21}^R \varepsilon_x \varepsilon_y + \\
& + 2 \left(d_{E2} \left[\sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^m r_a S^{ij} \bar{\delta}(x - x_j) \bar{\delta}(y - y_i) \right] \right) \varepsilon_x \chi_1 + \\
& + \left(d_{\mu 12} d_{E2} \left[\sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^m r_a S^{ij} \bar{\delta}(x - x_j) \bar{\delta}(y - y_i) \right] + \right. \\
& + d_{\mu 12} d_{E2} \left[\sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^m r_b S^{ij} \bar{\delta}(x - x_j) \bar{\delta}(y - y_i) \right] \Big) (\varepsilon_x \chi_2 + \varepsilon_y \chi_1) \mu_{21}^R + \\
& + \left(d_{E2} \left[\sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^m r_a J^{ij} \bar{\delta}(x - x_j) \bar{\delta}(y - y_i) \right] \right) \chi_1^2 + \\
& + \left(d_{\mu 12} \left(d_{E2} \left[\sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^m r_a J^{ij} \bar{\delta}(x - x_j) \bar{\delta}(y - y_i) \right] + \right. \right. \\
& + d_{E2} \left[\sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^m r_b J^{ij} \bar{\delta}(x - x_j) \bar{\delta}(y - y_i) \right] \Big) \Big) \mu_{21}^R \chi_1 \chi_2 + \\
& + d_{E1} \bar{G}_2^R \left[\left(d_{E2} \left[\sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^m r_b F^{ij} \bar{\delta}(x - x_j) \bar{\delta}(y - y_i) \right] \right) \varepsilon_y^2 + \right. \\
& + 2 \left(d_{E2} \left[\sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^m r_b S^{ij} \bar{\delta}(x - x_j) \bar{\delta}(y - y_i) \right] \right) \varepsilon_y \chi_2 + \\
& + \left. \left(d_{E2} \left[\sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^m r_b J^{ij} \bar{\delta}(x - x_j) \bar{\delta}(y - y_i) \right] \right) \chi_2^2 \right] + \\
& + \bar{G}_{12}^R \left[\frac{1}{2} \left(\left[\sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^m r_a F^{ij} \bar{\delta}(x - x_j) \bar{\delta}(y - y_i) \right] + \left[\sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^m r_b F^{ij} \bar{\delta}(x - x_j) \bar{\delta}(y - y_i) \right] \right) \gamma_{xy}^2 + \right.
\end{aligned} \tag{2.64}$$

$$\begin{aligned}
& +2 \left(\left[\sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^m r_a S^{ij} \bar{\delta}(x-x_j) \bar{\delta}(y-y_i) \right] + \left[\sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^m r_b S^{ij} \bar{\delta}(x-x_j) \bar{\delta}(y-y_i) \right] \right) \gamma_{xy} \chi_{12} + \\
& +2 \left(\left[\sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^m r_a J^{ij} \bar{\delta}(x-x_j) \bar{\delta}(y-y_i) \right] + \left[\sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^m r_b J^{ij} \bar{\delta}(x-x_j) \bar{\delta}(y-y_i) \right] \right) \chi_{12}^2 + \\
& + \bar{G}_{13}^R \left(d_{G23} d_{E1} d_{E2} \left[\sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^m r_a F^{ij} \bar{\delta}(x-x_j) \bar{\delta}(y-y_i) \right] \right) k(\Psi_x - \theta_1)^2 + \\
& + \bar{G}_{23}^R \left(d_{E1} d_{E2} \left[\sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^m r_b F^{ij} \bar{\delta}(x-x_j) \bar{\delta}(y-y_i) \right] \right) k(\Psi_y - \theta_2)^2.
\end{aligned}$$

Теперь вынесем единичные столбчатые функции за скобки

$$\begin{aligned}
& \sum_{i=1}^n \bar{\delta}(y-y_i) \left[F^i \varepsilon_x^2 + (F^i + d_{\mu 12} d_{E2} r_b F^i) \mu_{21}^R \varepsilon_x \varepsilon_y + 2S^i \varepsilon_x \chi_1 + \right. \\
& \quad \left. + (S^i + d_{\mu 12} d_{E2} r_b S^i) (\varepsilon_x \chi_2 + \varepsilon_y \chi_1) \mu_{21}^R + J^i \chi_1^2 + \right. \\
& \quad \left. + (J^i + d_{\mu 12} d_{E2} r_b J^i) \mu_{21}^R \chi_1 \chi_2 + d_{E1} \bar{G}_2^R \left[d_{E2} r_b F^i \varepsilon_y^2 + 2d_{E2} r_b S^i \varepsilon_y \chi_2 + d_{E2} r_b J^i \chi_2^2 \right] + \right. \\
& \quad \left. + \bar{G}_{12}^R \left[\frac{1}{2} (F^i + r_b F^i) \gamma_{xy}^2 + 2(S^i + r_b S^i) \gamma_{xy} \chi_{12} + 2(J^i + r_b J^i) \chi_{12}^2 \right] + \right. \\
& \quad \left. + \bar{G}_{13}^R F^i k(\Psi_x - \theta_1)^2 + \bar{G}_{23}^R d_{E1} d_{E2} r_b F^i k(\Psi_y - \theta_2)^2 \right], \quad (2.65) \\
& \sum_{j=1}^m \bar{\delta}(x-x_j) \left[d_{E2} r_a F^j \varepsilon_x^2 + (F^j + d_{\mu 12} d_{E2} r_a F^j) \mu_{21}^R \varepsilon_x \varepsilon_y + \right. \\
& \quad \left. + 2d_{E2} r_a S^j \varepsilon_x \chi_1 + (S^j + d_{\mu 12} d_{E2} r_a S^j) (\varepsilon_x \chi_2 + \varepsilon_y \chi_1) \mu_{21}^R + \right. \\
& \quad \left. + d_{E2} r_a J^j \chi_1^2 + (J^j + d_{\mu 12} d_{E2} r_a J^j) \mu_{21}^R \chi_1 \chi_2 + d_{E1} \bar{G}_2^R \left[F^j \varepsilon_y^2 + 2S^j \varepsilon_y \chi_2 + J^j \chi_2^2 \right] + \right. \\
& \quad \left. + \bar{G}_{12}^R \left[\frac{1}{2} (r_a F^j + F^j) \gamma_{xy}^2 + 2(r_a S^j + S^j) \gamma_{xy} \chi_{12} + 2(r_a J^j + J^j) \chi_{12}^2 \right] + \right. \\
& \quad \left. + \bar{G}_{13}^R d_{G23} d_{E1} d_{E2} r_a F^j k(\Psi_x - \theta_1)^2 + \bar{G}_{23}^R d_{G13} F^j k(\Psi_y - \theta_2)^2 \right],
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& -\sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^m \bar{\delta}(x-x_j) \bar{\delta}(y-y_i) \times \\
& \times \left[d_{E2} r_a F^{ij} \varepsilon_x^2 + (d_{\mu 12} d_{E2} r_a F^{ij} + d_{\mu 12} d_{E2} r_b F^{ij}) \mu_{21}^R \varepsilon_x \varepsilon_y + \right. \\
& + 2d_{E2} r_a S^{ij} \varepsilon_x \chi_1 + (d_{\mu 12} d_{E2} r_a S^{ij} + d_{\mu 12} d_{E2} r_b S^{ij}) (\varepsilon_x \chi_2 + \varepsilon_y \chi_1) \mu_{21}^R + \\
& + d_{E2} r_a J^{ij} \chi_1^2 + (d_{\mu 12} (d_{E2} r_a J^{ij} + d_{E2} r_b J^{ij})) \mu_{21}^R \chi_1 \chi_2 + \\
& + d_{E1} \bar{G}_2^R \left[d_{E2} r_b F^{ij} \varepsilon_y^2 + 2d_{E2} r_b S^{ij} \varepsilon_y \chi_2 + d_{E2} r_b J^{ij} \chi_2^2 \right] + \\
& + \bar{G}_{12}^R \left[\frac{1}{2} (r_a F^{ij} + r_b F^{ij}) \gamma_{xy}^2 + 2(r_a S^{ij} + r_b S^{ij}) \gamma_{xy} \chi_{12} + 2(r_a J^{ij} + r_b J^{ij}) \chi_{12}^2 \right] + \\
& + \bar{G}_{13}^R d_{G23} d_{E1} d_{E2} r_a F^{ij} k(\Psi_x - \theta_1)^2 + \bar{G}_{23}^R d_{E1} d_{E2} r_b F^{ij} k(\Psi_y - \theta_2)^2 \Big].
\end{aligned}$$

В полученных выражениях сгруппируем слагаемые около $F^i, S^i, J^i, F^j, S^j, J^j, F^{ij}, S^{ij}, J^{ij}$

$$\begin{aligned}
& \sum_{i=1}^n \bar{\delta}(y-y_i) \left[F^i \left(\varepsilon_x^2 + (1 + d_{\mu 12} d_{E2} r_b) \mu_{21}^R \varepsilon_x \varepsilon_y + d_{E1} \bar{G}_2^R d_{E2} r_b \varepsilon_y^2 + \frac{1}{2} \bar{G}_{12}^R (1 + r_b) \gamma_{xy}^2 + \right. \right. \\
& + \bar{G}_{13}^R k(\Psi_x - \theta_1)^2 + \bar{G}_{23}^R d_{E1} d_{E2} r_b k(\Psi_y - \theta_2)^2 \Big) + \\
& + 2S^i \left(\varepsilon_x \chi_1 + \frac{1}{2} (1 + d_{\mu 12} d_{E2} r_b) (\varepsilon_x \chi_2 + \varepsilon_y \chi_1) \mu_{21}^R + \right. \\
& + d_{E1} \bar{G}_2^R d_{E2} r_b \varepsilon_y \chi_2 + (1 + r_b) \bar{G}_{12}^R \gamma_{xy} \chi_{12} \Big) + \\
& + J^i \left(\chi_1^2 + (1 + d_{\mu 12} d_{E2} r_b) \mu_{21}^R \chi_1 \chi_2 + d_{E1} \bar{G}_2^R d_{E2} r_b \chi_2^2 + 2(1 + r_b) \bar{G}_{12}^R \chi_{12}^2 \right) \Big], \\
& \sum_{j=1}^m \bar{\delta}(x-x_j) \left[F^j \left(d_{E2} r_a \varepsilon_x^2 + (1 + d_{\mu 12} d_{E2} r_a) \mu_{21}^R \varepsilon_x \varepsilon_y + d_{E1} \bar{G}_2^R \varepsilon_y^2 + \frac{1}{2} (r_a + 1) \bar{G}_{12}^R \gamma_{xy}^2 + \right. \right. \\
& + \bar{G}_{13}^R d_{G23} d_{E1} d_{E2} r_a k(\Psi_x - \theta_1)^2 + \bar{G}_{23}^R d_{G13} k(\Psi_y - \theta_2)^2 \Big) +
\end{aligned} \tag{2.66}$$

$$\begin{aligned}
& +2S^j \left(d_{E2} r_a \varepsilon_x \chi_1 + \frac{1}{2} (1 + d_{\mu 12} d_{E2} r_a) (\varepsilon_x \chi_2 + \varepsilon_y \chi_1) \mu_{21}^R + \right. \\
& \quad \left. + d_{E1} \bar{G}_2^R \varepsilon_y \chi_2 + (r_a + 1) \bar{G}_{12}^R \gamma_{xy} \chi_{12} \right) + \\
& + J^j \left(d_{E2} r_a \chi_1^2 + (1 + d_{\mu 12} d_{E2} r_a) \mu_{21}^R \chi_1 \chi_2 + d_{E1} \bar{G}_2^R \chi_2^2 + 2(r_a + 1) \bar{G}_{12}^R \chi_{12}^2 \right) \Bigg], \\
& - \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^m \bar{\delta}(x - x_j) \bar{\delta}(y - y_i) \times \\
& \times \left[F^{ij} \left(d_{E2} r_a \varepsilon_x^2 + (d_{\mu 12} d_{E2} r_a + d_{\mu 12} d_{E2} r_b) \mu_{21}^R \varepsilon_x \varepsilon_y + d_{E1} \bar{G}_2^R d_{E2} r_b \varepsilon_y^2 + \right. \right. \\
& + \frac{1}{2} (r_a + r_b) \bar{G}_{12}^R \gamma_{xy}^2 + \bar{G}_{13}^R d_{G23} d_{E1} d_{E2} r_a k(\Psi_x - \theta_1)^2 + \bar{G}_{23}^R d_{E1} d_{E2} r_b k(\Psi_y - \theta_2)^2 \Bigg) + 2S^{ij} \times \\
& \times \left(d_{E2} r_a \varepsilon_x \chi_1 + \frac{1}{2} d_{\mu 12} d_{E2} (r_a + r_b) (\varepsilon_x \chi_2 + \varepsilon_y \chi_1) \mu_{21}^R + \right. \\
& \quad \left. + d_{E1} \bar{G}_2^R d_{E2} r_b \varepsilon_y \chi_2 + (r_a + r_b) \bar{G}_{12}^R \gamma_{xy} \chi_{12} \right) + \\
& + J^{ij} \left(d_{E2} r_a \chi_1^2 + (d_{\mu 12} (d_{E2} r_a + d_{E2} r_b)) \mu_{21}^R \chi_1 \chi_2 + d_{E1} \bar{G}_2^R d_{E2} r_b \chi_2^2 + 2(r_a + r_b) \bar{G}_{12}^R \chi_{12}^2 \right) \Bigg].
\end{aligned}$$

Как уже ранее отмечалось, в связи с особенностями ортотропного материала имеют место равенства (2.58), и, кроме того

$$d_{E1} \cdot d_{E2} = \frac{E_1^R}{E_2^R} \cdot \frac{E_2^R}{E_1^R} = 1. \quad (2.67)$$

Используя (2.60), (2.62), (2.66), (2.67), в результате получим

$$E_p^R = \frac{1}{2} \int_{a_1}^a dx \sum_{i=1}^n \int_{c_i}^{d_i} A_{1i} dy + \frac{1}{2} \int_0^b dy \sum_{j=1}^m \int_{a_j}^{b_j} A_{2j} dx - \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^m \int_{a_j}^{b_j} \int_{c_i}^{d_i} A_{3ij} dx dy, \quad (2.68)$$

где

$$\begin{aligned}
A_{1i} = F^i \Bigg(\varepsilon_x^2 + (1 + r_b) \mu_{21}^R \varepsilon_x \varepsilon_y + \bar{G}_2^R r_b \varepsilon_y^2 + \frac{1}{2} \bar{G}_{12}^R (1 + r_b) \gamma_{xy}^2 + \bar{G}_{13}^R k(\Psi_x - \theta_1)^2 + \\
+ \bar{G}_{23}^R r_b k(\Psi_y - \theta_2)^2 \Bigg) +
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& +2S^i \left(\varepsilon_x \chi_1 + \frac{1}{2}(1+r_b)(\varepsilon_x \chi_2 + \varepsilon_y \chi_1) \mu_{21}^R + \bar{G}_2^R r_b \varepsilon_y \chi_2 + (1+r_b) \bar{G}_{12}^R \gamma_{xy} \chi_{12} \right) + \\
& + J^i \left(\chi_1^2 + (1+r_b) \mu_{21}^R \chi_1 \chi_2 + \bar{G}_2^R r_b \chi_2^2 + 2(1+r_b) \bar{G}_{12}^R \chi_{12}^2 \right), \\
& A_{2j} = F^j \left(d_{E2} r_a \varepsilon_x^2 + (1+r_a) \mu_{21}^R \varepsilon_x \varepsilon_y + d_{E1} \bar{G}_2^R \varepsilon_y^2 + \frac{1}{2}(r_a+1) \bar{G}_{12}^R \gamma_{xy}^2 + \right. \\
& \quad \left. + \bar{G}_{13}^R d_{G23} r_a k (\Psi_x - \theta_1)^2 + \bar{G}_{23}^R d_{G13} k (\Psi_y - \theta_2)^2 \right) + \\
& + 2S^j \left(d_{E2} r_a \varepsilon_x \chi_1 + \frac{1}{2}(1+r_a)(\varepsilon_x \chi_2 + \varepsilon_y \chi_1) \mu_{21}^R + d_{E1} \bar{G}_2^R \varepsilon_y \chi_2 + (r_a+1) \bar{G}_{12}^R \gamma_{xy} \chi_{12} \right) + \\
& + J^j \left(d_{E2} r_a \chi_1^2 + (1+r_a) \mu_{21}^R \chi_1 \chi_2 + d_{E1} \bar{G}_2^R \chi_2^2 + 2(r_a+1) \bar{G}_{12}^R \chi_{12}^2 \right), \quad (2.69) \\
& A_{3ij} = F^{ij} \left(d_{E2} r_a \varepsilon_x^2 + (r_a+r_b) \mu_{21}^R \varepsilon_x \varepsilon_y + \bar{G}_2^R r_b \varepsilon_y^2 + \right. \\
& \quad \left. + \frac{1}{2}(r_a+r_b) \bar{G}_{12}^R \gamma_{xy}^2 + \bar{G}_{13}^R d_{G23} r_a k (\Psi_x - \theta_1)^2 + \bar{G}_{23}^R r_b k (\Psi_y - \theta_2)^2 \right) + \\
& + 2S^{ij} \left(d_{E2} r_a \varepsilon_x \chi_1 + \frac{1}{2}(r_a+r_b)(\varepsilon_x \chi_2 + \varepsilon_y \chi_1) \mu_{21}^R + \bar{G}_2^R r_b \varepsilon_y \chi_2 + (r_a+r_b) \bar{G}_{12}^R \gamma_{xy} \chi_{12} \right) + \\
& + J^{ij} \left(d_{E2} r_a \chi_1^2 + (r_a+r_b) \mu_{21}^R \chi_1 \chi_2 + \bar{G}_2^R r_b \chi_2^2 + 2(r_a+r_b) \bar{G}_{12}^R \chi_{12}^2 \right).
\end{aligned}$$

2.3 МЕТОДЫ ЗАДАНИЯ СКВОЗНЫХ ВЫРЕЗОВ

2.3.1 Функционал полной потенциальной энергии деформации

Для оболочек, ослабленных сквозными вырезами, вид функционала энергии будет идентичен функционалу для ребристой оболочки (отличия будут заключаться в выражениях для жесткостных характеристик), поэтому для модели Тимошенко – Рейсснера будут справедливы выражения (2.2), (2.3), (2.4). Для удобства изложения приведем их здесь еще раз:

$$E_s = E_s^0 + E_p^R = E_p^0 + E_p^R - A,$$

$$E_p^R = \frac{1}{2} \int_{a_1}^a \int_0^b \left[N_x^R \varepsilon_x + N_y^R \varepsilon_y + \frac{1}{2} (N_{xy}^R + N_{yx}^R) \gamma_{xy} + M_x^R \chi_1 + M_y^R \chi_2 + (M_{xy}^R + M_{yx}^R) \chi_{12} + \right. \\ \left. + Q_x^R (\Psi_x - \theta_1) + Q_y^R (\Psi_y - \theta_2) \right] AB dx dy, \quad (2.70)$$

$$E_s^0 = \frac{1}{2} \int_{a_1}^a \int_0^b \left[N_x^0 \varepsilon_x + N_y^0 \varepsilon_y + \frac{1}{2} (N_{xy}^0 + N_{yx}^0) \gamma_{xy} + M_x^0 \chi_1 + M_y^0 \chi_2 + (M_{xy}^0 + M_{yx}^0) \chi_{12} + \right. \\ \left. + Q_x^0 (\Psi_x - \theta_1) + Q_y^0 (\Psi_y - \theta_2) - 2(P_x U + P_y V + qW) \right] AB dx dy.$$

Идея использовать для расчета перфорированных конструкций ту же математическую модель, что и для ребристых оболочек, притом, как с дискретным учетом вырезов, так и по методу конструктивной анизотропии, была предложена в работах В. В. Карпова [67, 214].

2.3.2 Ввод вырезов дискретно

Подход к дискретному учету наличия в конструкции вырезов аналогичен подходу к дискретному учету ребер жесткости. Места расположения вырезов оболочки можно задать функцией, являющейся частным случаем функции (2.10) [61]:

$$H(x, y) = - \sum_{j=1}^m \sum_{i=1}^n h \bar{\delta}(x - x_j) \bar{\delta}(y - y_i), \quad (2.71)$$

где n, m – количество вырезов вдоль осей x и y соответственно.

Интегрируя напряжения в диапазоне от $h/2$ до $h/2 + H$, получим [61]

$$N_x^R = G_1^R \left[\bar{F}(\varepsilon_x + \mu_{21} \varepsilon_y) + \bar{S}(\chi_1 + \mu_{21} \chi_2) \right], \\ N_y^R = G_2^R \left[\bar{F}(\varepsilon_y + \mu_{12} \varepsilon_x) + \bar{S}(\chi_2 + \mu_{12} \chi_1) \right], \\ N_{xy}^R = G_{12}^R \left[\bar{F} \gamma_{xy} + 2 \bar{S} \chi_{12} \right], \quad N_{yx}^R = G_{12}^R \left[\bar{F} \gamma_{xy} + 2 \bar{S} \chi_{12} \right], \quad (2.72) \\ M_x^R = G_1^R \left[\bar{S}(\varepsilon_x + \mu_{21} \varepsilon_y) + \bar{J}(\chi_1 + \mu_{21} \chi_2) \right],$$

$$\begin{aligned}
M_y^R &= G_2^R \left[\bar{S} (\varepsilon_y + \mu_{12} \varepsilon_x) + \bar{J} (\chi_2 + \mu_{12} \chi_1) \right], \\
M_{xy}^R &= G_{12}^R \left[\bar{S} \gamma_{xy} + 2 \bar{J} \chi_{12} \right], \quad M_{yx}^R = G_{12}^R \left[\bar{S} \gamma_{xy} + 2 \bar{J} \chi_{12} \right], \\
Q_x^R &= G_{13}^R k \bar{F} (\Psi_x - \theta_1), \quad Q_y^R = G_{23}^R k \bar{F} (\Psi_y - \theta_2).
\end{aligned}$$

Зададим жесткостные характеристики вырезов следующим образом:

$$\bar{F} = - \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^m F^{ij} \bar{\delta}(x - x_j) \bar{\delta}(y - y_i), \quad \bar{S} = 0, \quad \bar{J} = - \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^m J^{ij} \bar{\delta}(x - x_j) \bar{\delta}(y - y_i). \quad (2.73)$$

Учитывая (2.12), и то, что вырезы сквозные, получим

$$\bar{F} = -h \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^m \bar{\delta}(x - x_j) \bar{\delta}(y - y_i), \quad \bar{S} = 0, \quad \bar{J} = -\frac{h^3}{12} \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^m \bar{\delta}(x - x_j) \bar{\delta}(y - y_i). \quad (2.74)$$

С использованием (2.74), выражения (2.72) существенно упростятся

$$\begin{aligned}
N_x^R &= G_1^R \left[\bar{F} (\varepsilon_x + \mu_{21} \varepsilon_y) \right], \quad N_y^R = G_2^R \left[\bar{F} (\varepsilon_y + \mu_{12} \varepsilon_x) \right], \\
N_{xy}^R &= N_{yx}^R = G_{12}^R \left[\bar{F} \gamma_{xy} \right], \\
M_x^R &= G_1^R \left[\bar{J} (\chi_1 + \mu_{21} \chi_2) \right], \quad M_y^R = G_2^R \left[\bar{J} (\chi_2 + \mu_{12} \chi_1) \right], \\
M_{xy}^R &= M_{yx}^R = G_{12}^R \left[2 \bar{J} \chi_{12} \right], \\
Q_x^R &= G_{13}^R k \bar{F} (\Psi_x - \theta_1), \quad Q_y^R = G_{23}^R k \bar{F} (\Psi_y - \theta_2).
\end{aligned} \quad (2.75)$$

2.3.3 Ввод вырезов по методу конструктивной анизотропии

При использовании метода конструктивной анизотропии, выражения для усилий и моментов, приведенные к срединной поверхности оболочки, можно записать в виде:

$$\begin{aligned}
N_x^R &= G_1^R \left[F_x (\varepsilon_x + \mu_{21} \varepsilon_y) + S_x (\chi_1 + \mu_{21} \chi_2) \right], \\
N_y^R &= G_2^R \left[F_y (\varepsilon_y + \mu_{12} \varepsilon_x) + S_y (\chi_2 + \mu_{12} \chi_1) \right], \\
M_x^R &= G_1^R \left[S_x (\varepsilon_x + \mu_{21} \varepsilon_y) + J_x (\chi_1 + \mu_{21} \chi_2) \right],
\end{aligned} \quad (2.76)$$

$$M_y^R = G_2^R \left[S_y (\varepsilon_y + \mu_{12} \varepsilon_x) + J_y (\chi_2 + \mu_{12} \chi_1) \right],$$

$$N_{xy}^R = G_{12}^R \left[F_y \gamma_{xy} + 2S_y \chi_{12} \right],$$

$$N_{yx}^R = G_{12}^R \left[F_x \gamma_{xy} + 2S_x \chi_{12} \right],$$

$$M_{xy}^R = G_{12}^R \left[S_y \gamma_{xy} + 2J_y \chi_{12} \right],$$

$$M_{yx}^R = G_{12}^R \left[S_x \gamma_{xy} + 2J_x \chi_{12} \right],$$

$$Q_x^R = G_{13}^R F_x k (\Psi_x - \theta_1), \quad Q_y^R = G_{23}^R F_y k (\Psi_y - \theta_2).$$

Используя подходы метода конструктивной анизотропии, зададим жесткостные характеристики вырезов следующим образом:

$$F_x = F_y = F_p = -h A_p, \quad S_x = S_y = 0, \quad J_x = J_y = J_p = -\frac{h^3}{12} A_p, \quad (2.77)$$

где

$$A_p = \sum_{j=1}^m \sum_{i=1}^n \frac{r_i r_j}{(a - a_1) b A B}.$$

С учетом (2.77), выражения (2.76) могут быть упрощены и записаны в виде

$$N_x^R = G_1^R \left[F_p (\varepsilon_x + \mu_{21} \varepsilon_y) \right],$$

$$N_y^R = G_2^R \left[F_p (\varepsilon_y + \mu_{12} \varepsilon_x) \right],$$

$$M_x^R = G_1^R \left[J_p (\chi_1 + \mu_{21} \chi_2) \right],$$

(2.78)

$$M_y^R = G_2^R \left[J_p (\chi_2 + \mu_{12} \chi_1) \right],$$

$$N_{xy}^R = N_{yx}^R = G_{12}^R \left[F_p \gamma_{xy} \right],$$

$$M_{xy}^R = M_{yx}^R = G_{12}^R \left[2J_p \chi_{12} \right],$$

$$Q_x^R = G_{13}^R F_p k (\Psi_x - \theta_1),$$

$$Q_y^R = G_{23}^R F_p k (\Psi_y - \theta_2).$$

2.4 УРАВНЕНИЯ В СМЕШАННОЙ ФОРМЕ

Такие уравнения для пологих оболочек двойкой кривизны использовались в работах В. З. Власова (1949) [33], В. В. Петрова (1975) [116], В. А. Крысько (1976) [90] и др., и до сих пор применяются достаточно часто (W.-Z. Feng и др., 2016 [193]; К. Е. Никитин, Л. Ю. Ступишин и А. Н. Ватанин, 2012 [108]; А. А. Коломоец и А. С. Модин, 2014 [84]; J. Zhang и D. Н. van Campen, 2003 [297]; D. Н. van Campen, V. P. Bouwman, G. Q. Zhang и B. J. W. ter Weeme, 2002 [180]; S. Huang и P. Qiao, 2020 [207]; D. Н. Bich и D. G. Ninh, 2017 [175]; В. В. Карпов [71, 213] и др.).

Будем учитывать в математической модели поперечные сдвиги. Также учтем, что оболочка является полой, примем допущение, что [69, 79]

$$\frac{1}{A} \frac{\partial W}{\partial x} \gg k_x U, \quad \frac{1}{B} \frac{\partial W}{\partial y} \gg k_y V. \quad (2.79)$$

В качестве геометрических соотношений воспользоваться формулами (1.3), но по-другому запишем θ_1, θ_2 [216]:

$$\begin{aligned} \varepsilon_x &= \frac{1}{A} \frac{\partial U}{\partial x} + \frac{1}{AB} \frac{\partial A}{\partial y} V - k_x W + \frac{1}{2} \theta_1^2, & \varepsilon_y &= \frac{1}{B} \frac{\partial V}{\partial y} + \frac{1}{AB} \frac{\partial B}{\partial x} U - k_y W + \frac{1}{2} \theta_2^2, \\ \gamma_{xy} &= \frac{1}{A} \frac{\partial V}{\partial x} + \frac{1}{B} \frac{\partial U}{\partial y} V - \frac{1}{AB} \frac{\partial A}{\partial y} U - \frac{1}{AB} \frac{\partial B}{\partial x} V + \theta_1 \theta_2. \end{aligned} \quad (2.80)$$

С учетом (2.79), имеем

$$\theta_1 = -\frac{1}{A} \frac{\partial W}{\partial x}, \quad \theta_2 = -\frac{1}{B} \frac{\partial W}{\partial y}. \quad (2.81)$$

Функции χ_1, χ_2 и χ_{12} записываются в форме (1.10). Кроме того, для использования в дальнейшем уравнения совместности деформаций, воспользуемся упрощенным видом функций изменения кривизн и кручения, которые относятся к модели Кирхгофа – Лява [69]:

$$\tilde{\chi}_1 = \frac{1}{A} \frac{\partial \theta_1}{\partial x} + \frac{1}{AB} \frac{\partial A}{\partial y} \theta_2, \quad \tilde{\chi}_2 = \frac{1}{B} \frac{\partial \theta_2}{\partial y} + \frac{1}{AB} \frac{\partial B}{\partial x} \theta_1,$$

$$\tilde{\chi}_{12} = \frac{1}{2} \left[\frac{1}{A} \frac{\partial \theta_2}{\partial x} + \frac{1}{B} \frac{\partial \theta_1}{\partial y} - \frac{1}{AB} \left(\frac{\partial A}{\partial y} \theta_1 + \frac{\partial B}{\partial x} \theta_2 \right) \right]. \quad (2.82)$$

Возьмем уравнения равновесия для ребристых оболочек, которые с учетом ортотропии материала имеют вид

$$\begin{aligned} \frac{\partial B N_x}{\partial x} - N_y \frac{\partial B}{\partial x} + \frac{1}{2} A \frac{\partial (N_{xy} + N_{yx})}{\partial y} + (N_{xy} + N_{yx}) \frac{\partial A}{\partial y} + A B P_x &= 0, \\ \frac{\partial A N_y}{\partial y} - N_x \frac{\partial A}{\partial y} + \frac{1}{2} B \frac{\partial (N_{xy} + N_{yx})}{\partial x} + (N_{xy} + N_{yx}) \frac{\partial B}{\partial x} + A B P_y &= 0, \end{aligned} \quad (2.83)$$

$$\begin{aligned} A B (k_x N_x + k_y N_y) - \frac{\partial}{\partial x} B \left(N_x \theta_1 + \frac{1}{2} (N_{xy} + N_{yx}) \theta_2 \right) - \\ - \frac{\partial}{\partial y} A \left(N_y \theta_2 + \frac{1}{2} (N_{xy} + N_{yx}) \theta_1 \right) + \frac{\partial B Q_x}{\partial x} + \frac{\partial A Q_y}{\partial y} + A B q &= 0, \\ \frac{\partial B M_x}{\partial x} - M_y \frac{\partial B}{\partial x} + \frac{1}{2} A \frac{\partial (M_{xy} + M_{yx})}{\partial y} + (M_{xy} + M_{yx}) \frac{\partial A}{\partial y} - A B Q_x &= 0, \\ \frac{\partial A M_y}{\partial y} - M_x \frac{\partial A}{\partial y} + \frac{1}{2} B \frac{\partial (M_{xy} + M_{yx})}{\partial x} + (M_{xy} + M_{yx}) \frac{\partial B}{\partial x} - A B Q_y &= 0. \end{aligned}$$

Усилия и моменты в этих уравнениях, с учетом ортотропии материала и наличия ребер жесткости, выглядят следующим образом (в случае использования метода конструктивной анизотропии и с учетом (1.15) и (2.23))

$$\begin{aligned} N_x &= \frac{E_1}{1 - \mu_{12}\mu_{21}} \left[(h + F_x) (\varepsilon_x + \mu_{21}\varepsilon_y) + S_x (\chi_1 + \mu_{21}\chi_2) \right], \\ N_y &= \frac{E_2}{1 - \mu_{12}\mu_{21}} \left[(h + F_y) (\varepsilon_y + \mu_{12}\varepsilon_x) + S_y (\chi_2 + \mu_{12}\chi_1) \right], \\ N_{xy} &= G_{12} \left((h + F_y) \gamma_{xy} + 2S_y \chi_{12} \right), \quad N_{yx} = G_{12} \left((h + F_x) \gamma_{xy} + 2S_x \chi_{12} \right), \end{aligned}$$

$$M_x = \frac{E_1}{1 - \mu_{12}\mu_{21}} \left[S_x (\varepsilon_x + \mu_{21}\varepsilon_y) + \left(\frac{h^3}{12} + J_x \right) (\chi_1 + \mu_{21}\chi_2) \right], \quad (2.84)$$

$$M_y = \frac{E_2}{1 - \mu_{12}\mu_{21}} \left[S_y (\varepsilon_y + \mu_{12}\varepsilon_x) + \left(\frac{h^3}{12} + J_y \right) (\chi_2 + \mu_{12}\chi_1) \right],$$

$$M_{xy} = G_{12} \left[S_y \gamma_{xy} + 2 \left(\frac{h^3}{12} + J_y \right) \chi_{12} \right], \quad M_{yx} = G_{12} \left[S_x \gamma_{xy} + 2 \left(\frac{h^3}{12} + J_x \right) \chi_{12} \right],$$

$$Q_x = G_{13}k(h + F_x)(\Psi_x - \theta_1), \quad Q_y = G_{23}k(h + F_y)(\Psi_y - \theta_2).$$

В рамках этого параграфа для удобства преобразований будем рассматривать выражения усилий и моментов для обшивки и для ребер вместе.

Далее применим известный прием: введем функцию напряжений $\Phi(x, y)$. Притом так, чтобы в первом и втором уравнениях равновесия равенство выполнялось тождественно [79, 216]. Таким образом, функция напряжений $\Phi(x, y)$ будет связана с усилиями зависимостями (2.85) [114, 216]:

$$\begin{aligned} N_x &= \frac{1}{B} \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{1}{B} \frac{\partial \Phi}{\partial y} \right) + \frac{1}{A^2 B} \frac{\partial B}{\partial x} \frac{\partial \Phi}{\partial x} = F_1(\Phi), \\ N_y &= \frac{1}{A} \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{1}{A} \frac{\partial \Phi}{\partial x} \right) + \frac{1}{AB^2} \frac{\partial A}{\partial y} \frac{\partial \Phi}{\partial y} = F_2(\Phi), \\ \frac{1}{2} (N_{xy} + N_{yx}) &= \frac{1}{AB} \left(\frac{1}{A} \frac{\partial A}{\partial y} \frac{\partial \Phi}{\partial x} + \frac{1}{B} \frac{\partial B}{\partial x} \frac{\partial \Phi}{\partial y} - \frac{\partial^2 \Phi}{\partial x \partial y} \right) = F_3(\Phi), \end{aligned} \quad (2.85)$$

где $F_1(\Phi), F_2(\Phi), F_3(\Phi)$ – обозначения усилий, выраженных через функции W и Φ . Будем использовать их для краткости записи.

Рассмотрим теперь еще раз систему уравнений (2.83), но уже с учетом (2.85). Если считать $P_x = P_y = 0$ и использовать выражения (2.85), то равенства будут выполняться [71].

Последние три уравнения в (2.83), после подстановки в них (2.85), представляют собой три уравнения в смешанной форме [71]. Четвертое уравнение получается из уравнения совместности деформаций после выражения деформаций через функцию W и Φ .

Далее из (2.84), используя (2.85), получим выражения для $\varepsilon_x, \varepsilon_y, \gamma_{xy}$, зависящие уже от W и Φ [69].

Так как в четвертом и пятом уравнениях в (2.83) помимо усилий встречаются еще и моменты, их также необходимо выразить через функции W и Φ . Для этого выразим вначале из соотношений для усилий (2.84) с учетом (2.85) деформации $\varepsilon_x, \varepsilon_y, \gamma_{xy}$ [216]:

$$\begin{aligned}\varepsilon_x &= \frac{\tilde{F}_x}{E_1 h} F_1(\Phi) - \frac{\tilde{F}_y}{E_2 h} \mu_{21} F_2(\Phi) - \tilde{S}_x (\chi_1 + \mu_{21} \chi_2) + \tilde{S}_y \mu_{21} (\chi_2 + \mu_{12} \chi_1), \\ \varepsilon_y &= \frac{\tilde{F}_y}{E_2 h} F_2(\Phi) - \frac{\tilde{F}_x}{E_1 h} \mu_{12} F_1(\Phi) - \tilde{S}_y (\chi_2 + \mu_{12} \chi_1) + \tilde{S}_x \mu_{12} (\chi_1 + \mu_{21} \chi_2), \\ \gamma_{xy} &= \frac{\tilde{F}_{xy}}{G_{12}} F_3(\Phi) - 2\tilde{S}_{xy} \chi_{12},\end{aligned}\quad (2.86)$$

где

$$\begin{aligned}\tilde{F}_x &= \frac{h}{h + F_x} = 1 - \frac{F_x}{h + F_x}, \quad \tilde{F}_y = \frac{h}{h + F_y} = 1 - \frac{F_y}{h + F_y}, \quad \tilde{F}_{xy} = \frac{2}{2h + F_x + F_y}, \\ \tilde{S}_x &= \frac{S_x}{(h + F_x)(1 - \mu_{12}\mu_{21})}, \quad \tilde{S}_y = \frac{S_y}{(h + F_y)(1 - \mu_{12}\mu_{21})}, \quad \tilde{S}_{xy} = \frac{S_x + S_y}{(2h + F_x + F_y)}.\end{aligned}\quad (2.87)$$

Подставив найденные выражения деформаций (2.86) в моменты (2.84), получим [216]

$$\begin{aligned}M_x &= \tilde{S}_x F_1(\Phi)(1 - \mu_{12}\mu_{21}) - \tilde{J}_x (\chi_1 + \mu_{21}\chi_2), \\ M_y &= \tilde{S}_y F_2(\Phi)(1 - \mu_{12}\mu_{21}) - \tilde{J}_y (\chi_2 + \mu_{12}\chi_1), \\ M_{xy} &= \tilde{F}_{xy} S_y F_3(\Phi) - \tilde{J}_{yx} 2G_{12}\chi_{12}, \quad M_{yx} = \tilde{F}_{xy} S_x F_3(\Phi) - \tilde{J}_{xy} 2G_{12}\chi_{12}.\end{aligned}\quad (2.88)$$

Здесь

$$\tilde{J}_x = \frac{E_1}{1 - \mu_{12}\mu_{21}} \left(\frac{S_x^2}{h + F_x} - \frac{h^3}{12} - J_x \right), \quad \tilde{J}_y = \frac{E_2}{1 - \mu_{12}\mu_{21}} \left(\frac{S_y^2}{h + F_y} - \frac{h^3}{12} - J_y \right), \quad (2.89)$$

$$\tilde{J}_{xy} = S_x \tilde{S}_{xy} - \frac{h^3}{12} - J_x, \quad \tilde{J}_{yx} = S_y \tilde{S}_{xy} - \frac{h^3}{12} - J_y.$$

Теперь, подставив выражения (2.85) и (2.88) в третье, четвертое и пятое уравнения (2.83), получим [216]

$$\begin{aligned} & AB(k_x F_1(\Phi) + k_y F_2(\Phi)) - \frac{\partial}{\partial x} B(F_1(\Phi)\theta_1 + F_3(\Phi)\theta_2) - \\ & - \frac{\partial}{\partial y} A(F_2(\Phi)\theta_2 + F_3(\Phi)\theta_1) + \frac{\partial BQ_x}{\partial x} + \frac{\partial AQ_y}{\partial y} + ABq = 0, \quad (2.90) \\ & \frac{\partial}{\partial x} \left[B(\tilde{S}_x F_1(\Phi)(1 - \mu_{12}\mu_{21}) - \tilde{J}_x(\chi_1 + \mu_{21}\chi_2)) \right] - \\ & - \frac{\partial B}{\partial x} \left[\tilde{S}_y F_2(\Phi)(1 - \mu_{12}\mu_{21}) - \tilde{J}_y(\chi_2 + \mu_{12}\chi_1) \right] + \\ & + A \frac{\partial}{\partial y} \left[\tilde{S}_{xy} F_3(\Phi) - (\tilde{J}_{xy} + \tilde{J}_{yx}) G_{12} \chi_{12} \right] + \frac{\partial A}{\partial y} \left[\tilde{S}_{xy} F_3(\Phi) - (\tilde{J}_{xy} + \tilde{J}_{yx}) G_{12} \chi_{12} \right] - ABQ_x = 0, \\ & \frac{\partial}{\partial y} \left[A(\tilde{S}_y F_2(\Phi)(1 - \mu_{12}\mu_{21}) - \tilde{J}_y(\chi_2 + \mu_{12}\chi_1)) \right] - \\ & - \frac{\partial A}{\partial y} \left[\tilde{S}_x F_1(\Phi)(1 - \mu_{12}\mu_{21}) - \tilde{J}_x(\chi_1 + \mu_{21}\chi_2) \right] + \\ & + \frac{1}{2} B \frac{\partial}{\partial x} \left[\tilde{S}_{xy} F_3(\Phi) - (\tilde{J}_{xy} + \tilde{J}_{yx}) G_{12} \chi_{12} \right] + \\ & + \frac{\partial B}{\partial x} \left[\tilde{S}_{xy} F_3(\Phi) - (\tilde{J}_{xy} + \tilde{J}_{yx}) G_{12} \chi_{12} \right] - ABQ_y = 0. \end{aligned}$$

Далее воспользуемся третьим уравнением совместности деформаций [44], тогда [69, 79]:

$$\begin{aligned}
& \frac{\partial}{\partial x} \left[\frac{1}{A} \left(\frac{\partial B \varepsilon_y}{\partial x} - \frac{1}{2} \frac{\partial A \gamma_{xy}}{\partial y} - \varepsilon_x \frac{\partial B}{\partial x} - \frac{1}{2} \gamma_{xy} \frac{\partial A}{\partial y} \right) \right] + \\
& + \frac{\partial}{\partial y} \left[\frac{1}{B} \left(\frac{\partial A \varepsilon_x}{\partial y} - \frac{1}{2} \frac{\partial B \gamma_{xy}}{\partial x} - \varepsilon_y \frac{\partial A}{\partial y} - \frac{1}{2} \gamma_{xy} \frac{\partial B}{\partial x} \right) \right] = \\
& = -AB \left(\tilde{\chi}_{12}^2 - \tilde{\chi}_1 \tilde{\chi}_2 + k_x \tilde{\chi}_2 + k_y \tilde{\chi}_1 \right). \tag{2.91}
\end{aligned}$$

Здесь $\tilde{\chi}_1, \tilde{\chi}_2, \tilde{\chi}_{12}$ имеют вид (2.82).

Подставим в уравнение (2.91) выражения для деформаций (2.86):

$$\begin{aligned}
& -AB \left(k_x \tilde{\chi}_2 + k_y \tilde{\chi}_1 - \tilde{\chi}_1 \tilde{\chi}_2 + \tilde{\chi}_{12}^2 \right) = \\
& = \frac{\partial}{\partial x} \left[\frac{1}{A} \left(-\frac{\partial A}{\partial y} \left(\frac{\tilde{F}_{xy}}{G_{12}} F_3(\Phi) - 2\tilde{S}_{xy} \chi_{12} \right) - \frac{1}{2} A \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\tilde{F}_{xy}}{G_{12}} F_3(\Phi) - 2\tilde{S}_{xy} \chi_{12} \right) \right) + \right. \\
& \quad + \frac{\partial B}{\partial x} \left((1 + \mu_{21}) \left(\frac{\tilde{F}_y}{E_2 h} F_2(\Phi) - \tilde{S}_y (\chi_2 + \mu_{12} \chi_1) \right) - \right. \\
& \quad \left. \left. - (1 + \mu_{12}) \left(\frac{\tilde{F}_x}{E_1 h} F_1(\Phi) - \tilde{S}_x (\chi_1 + \mu_{21} \chi_2) \right) \right) \right] + \\
& + B \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\tilde{F}_y}{E_2 h} F_2(\Phi) - \frac{\tilde{F}_x}{E_1 h} \mu_{12} F_1(\Phi) - \tilde{S}_y (\chi_2 + \mu_{12} \chi_1) + \tilde{S}_x \mu_{12} (\chi_1 + \mu_{21} \chi_2) \right) \Bigg] + \tag{2.92} \\
& + \frac{\partial}{\partial y} \left[\frac{1}{B} \left(-\frac{\partial B}{\partial x} \left(\frac{\tilde{F}_{xy}}{G_{12}} F_3(\Phi) - 2\tilde{S}_{xy} \chi_{12} \right) - \frac{1}{2} B \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\tilde{F}_{xy}}{G_{12}} F_3(\Phi) - 2\tilde{S}_{xy} \chi_{12} \right) \right) + \right. \\
& \quad + \frac{\partial A}{\partial y} \left((1 + \mu_{12}) \left(\frac{\tilde{F}_x}{E_1 h} F_1(\Phi) - \tilde{S}_x (\chi_1 + \mu_{21} \chi_2) \right) - \right. \\
& \quad \left. \left. - (1 + \mu_{21}) \left(\frac{\tilde{F}_y}{E_2 h} \mu_{21} F_2(\Phi) + \tilde{S}_y (\chi_2 + \mu_{12} \chi_1) \right) \right) \right] +
\end{aligned}$$

$$+A\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\tilde{F}_x}{E_1h}F_1(\Phi)-\frac{\tilde{F}_y}{E_2h}\mu_{21}F_2(\Phi)-\tilde{S}_x(\chi_1+\mu_{21}\chi_2)+\tilde{S}_y\mu_{21}(\chi_2+\mu_{12}\chi_1)\right)\right)\right].$$

Таким образом, получены уравнения в смешанной форме, которые с учетом всех преобразований в итоге имеют вид

$$\begin{aligned} & AB(k_xF_1(\Phi)+k_yF_2(\Phi))-\frac{\partial}{\partial x}B(F_1(\Phi)\theta_1+F_3(\Phi)\theta_2)-\frac{\partial}{\partial y}A(F_2(\Phi)\theta_2+F_3(\Phi)\theta_1)+ \\ & +\frac{\partial BQ_x}{\partial x}+\frac{\partial AQ_y}{\partial y}+ABq=0, \\ & \frac{\partial}{\partial x}\left[B(\tilde{S}_xF_1(\Phi)(1-\mu_{12}\mu_{21})-\tilde{J}_x(\chi_1+\mu_{21}\chi_2))\right]- \\ & -\frac{\partial B}{\partial x}\left[\tilde{S}_yF_2(\Phi)(1-\mu_{12}\mu_{21})-\tilde{J}_y(\chi_2+\mu_{12}\chi_1)\right]+ \\ & +A\frac{\partial}{\partial y}\left[\tilde{S}_{xy}F_3(\Phi)-(\tilde{J}_{xy}+\tilde{J}_{yx})G_{12}\chi_{12}\right]+\frac{\partial A}{\partial y}\left[\tilde{S}_{xy}F_3(\Phi)-(\tilde{J}_{xy}+\tilde{J}_{yx})G_{12}\chi_{12}\right]-ABQ_x=0, \\ & \frac{\partial}{\partial y}\left[A(\tilde{S}_yF_2(\Phi)(1-\mu_{12}\mu_{21})-\tilde{J}_y(\chi_2+\mu_{12}\chi_1))\right]- \\ & -\frac{\partial A}{\partial y}\left[\tilde{S}_xF_1(\Phi)(1-\mu_{12}\mu_{21})-\tilde{J}_x(\chi_1+\mu_{21}\chi_2)\right]+ \\ & +\frac{1}{2}B\frac{\partial}{\partial x}\left[\tilde{S}_{xy}F_3(\Phi)-(\tilde{J}_{xy}+\tilde{J}_{yx})G_{12}\chi_{12}\right]+ \\ & +\frac{\partial B}{\partial x}\left[\tilde{S}_{xy}F_3(\Phi)-(\tilde{J}_{xy}+\tilde{J}_{yx})G_{12}\chi_{12}\right]-ABQ_y=0, \\ & -AB(k_x\tilde{\chi}_2+k_y\tilde{\chi}_1-\tilde{\chi}_1\tilde{\chi}_2+\tilde{\chi}_{12}^2)= \\ & =\frac{\partial}{\partial x}\left[\frac{1}{A}\left(-\frac{\partial A}{\partial y}\left(\frac{\tilde{F}_{xy}}{G_{12}}F_3(\Phi)-2\tilde{S}_{xy}\chi_{12}\right)-\frac{1}{2}A\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\tilde{F}_{xy}}{G_{12}}F_3(\Phi)-2\tilde{S}_{xy}\chi_{12}\right)\right)+\right. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& + \frac{\partial B}{\partial x} \left((1 + \mu_{21}) \left(\frac{\tilde{F}_y}{E_2 h} F_2(\Phi) - \tilde{S}_y (\chi_2 + \mu_{12} \chi_1) \right) - (1 + \mu_{12}) \left(\frac{\tilde{F}_x}{E_1 h} F_1(\Phi) - \tilde{S}_x (\chi_1 + \mu_{21} \chi_2) \right) \right) + \\
& + B \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\tilde{F}_y}{E_2 h} F_2(\Phi) - \frac{\tilde{F}_x}{E_1 h} \mu_{12} F_1(\Phi) - \tilde{S}_y (\chi_2 + \mu_{12} \chi_1) + \tilde{S}_x \mu_{12} (\chi_1 + \mu_{21} \chi_2) \right) + \\
& + \frac{\partial}{\partial y} \left[\frac{1}{B} \left(-\frac{\partial B}{\partial x} \left(\frac{\tilde{F}_{xy}}{G_{12}} F_3(\Phi) - 2\tilde{S}_{xy} \chi_{12} \right) - \frac{1}{2} B \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\tilde{F}_{xy}}{G_{12}} F_3(\Phi) - 2\tilde{S}_{xy} \chi_{12} \right) \right) + \right. \\
& + \frac{\partial A}{\partial y} \left((1 + \mu_{12}) \left(\frac{\tilde{F}_x}{E_1 h} F_1(\Phi) - \tilde{S}_x (\chi_1 + \mu_{21} \chi_2) \right) - \right. \\
& \left. \left. - (1 + \mu_{21}) \left(\frac{\tilde{F}_y}{E_2 h} \mu_{21} F_2(\Phi) + \tilde{S}_y (\chi_2 + \mu_{12} \chi_1) \right) \right) \right] + \\
& + A \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\tilde{F}_x}{E_1 h} F_1(\Phi) - \frac{\tilde{F}_y}{E_2 h} \mu_{21} F_2(\Phi) - \tilde{S}_x (\chi_1 + \mu_{21} \chi_2) + \tilde{S}_y \mu_{21} (\chi_2 + \mu_{12} \chi_1) \right) \Bigg]. \quad (2.93)
\end{aligned}$$

Следует отметить, что в полученной системе (2.93) неизвестными функциями являются $W(x, y), \Phi(x, y), \Psi_x(x, y), \Psi_y(x, y)$.

При выводе уравнений в смешанной форме на оболочку накладывается ограничение: она должна быть полой, т.е. отношение стрелы подъема оболочки d к линейному размеру не должно превышать 0,2. При этом условия Ляме будут мало изменяемы в пределах рассматриваемой области, т.е. $\frac{\partial B}{\partial x} \approx 0, \quad \frac{\partial A}{\partial y} \approx 0$ [143].

Выведем краевые условия для уравнений в смешанной форме, если закрепление контура оболочки шарнирно-подвижное (модель Тимошенко – Рейсснера).

При $x=0, x=a$

$$U \neq 0, \quad N_x = 0, \quad V = 0, \quad W = 0, \quad M_x = 0, \quad \Psi_y = 0. \quad (2.94)$$

Из условия $N_x = \frac{1}{B} \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{1}{B} \frac{\partial \Phi}{\partial y} \right) + \frac{1}{A^2 B} \frac{\partial B}{\partial x} \frac{\partial \Phi}{\partial x} = F_1(\Phi) = 0$ следует, что $\frac{\partial^2 \Phi}{\partial y^2} = 0$,

а из условий $V = 0$, $W = 0$ следует, что $\frac{\partial V}{\partial y} = 0$, $\frac{\partial W}{\partial y} = 0$, и тогда

$$\varepsilon_y = \frac{1}{B} \frac{\partial V}{\partial y} + \frac{1}{AB} \frac{\partial B}{\partial x} U - k_y W + \frac{1}{2} \left(\frac{1}{B} \frac{\partial W}{\partial y} \right)^2 = 0,$$

но

$$\varepsilon_y = \frac{\tilde{F}_y}{E_2 h} F_2(\Phi) - \frac{\tilde{F}_x}{E_1 h} \mu_{12} F_1(\Phi) - \tilde{S}_y (\chi_2 + \mu_{12} \chi_1) + \tilde{S}_x \mu_{12} (\chi_1 + \mu_{21} \chi_2),$$

следовательно, учитывая, что $\Psi_y = 0$ и $\frac{\partial \Psi_y}{\partial y} = 0$, получим $F_2(\Phi) = 0$ или $\frac{\partial^2 \Phi}{\partial x^2} = 0$.

Из условия $M_x = \tilde{S}_x F_1(\Phi) (1 - \mu_{12} \mu_{21}) - \tilde{J}_x (\chi_1 + \mu_{21} \chi_2) = 0$ следует, что $\frac{\partial \Psi_x}{\partial x} = 0$.

Итак, при $x = 0$, $x = a$

$$\frac{\partial^2 \Phi}{\partial y^2} = 0, \quad \frac{\partial^2 \Phi}{\partial x^2} = 0, \quad W = 0, \quad \frac{\partial \Psi_x}{\partial x} = 0, \quad \Psi_y = 0. \quad (2.95)$$

Аналогично получим при $y = 0$, $y = b$

$$\frac{\partial^2 \Phi}{\partial x^2} = 0, \quad \frac{\partial^2 \Phi}{\partial y^2} = 0, \quad W = 0, \quad \frac{\partial \Psi_y}{\partial y} = 0, \quad \Psi_x = 0. \quad (2.96)$$

2.5 БЕЗРАЗМЕРНЫЕ ПАРАМЕТРЫ ДЛЯ ПОДКРЕПЛЕННЫХ ОРТОТРОПНЫХ ОБОЛОЧЕК

Для подкрепленных оболочек помимо предложенных ранее параметров (1.39) необходимо ввести дополнительные безразмерные параметры [74]

$$\bar{F}_x = \frac{F_x}{h}, \quad \bar{F}_y = \frac{F_y}{h}, \quad \bar{S}_x = \frac{S_x}{h^2}, \quad \bar{S}_y = \frac{S_y}{h^2}, \quad \bar{J}_x = \frac{J_x}{h^3}, \quad \bar{J}_y = \frac{J_y}{h^3}, \quad \bar{H} = \frac{H}{h},$$

$$f(z) = -\frac{6}{(1+\bar{H})^2} \left(\bar{z} + \frac{1}{2} \right) \left(\bar{z} - \frac{1}{2} - \bar{H} \right) = f(\bar{z}),$$

$$\bar{x}_j = \frac{x_j}{a}, \quad \bar{r}_j = \frac{r_j}{a}, \quad \bar{h}^j = \frac{h^j}{h}, \quad \bar{a}_j = \frac{a_j}{a}, \quad \bar{b}_j = \frac{b_j}{a},$$

$$\bar{y}_i = \frac{y_i}{b}, \quad \bar{r}_i = \frac{r_i}{b}, \quad \bar{h}^i = \frac{h^i}{h}, \quad \bar{c}_i = \frac{c_i}{b}, \quad \bar{d}_i = \frac{d_i}{b}.$$

Толщина всей конструкции будет равна $1 + \bar{H}$.

Функционал полной потенциальной энергии деформации будет иметь вид [74]

$$E_s = \frac{E_1 h^7}{2a^4 A^4 (1 - \mu_{12}\mu_{21})} \int_0^1 \int_0^1 \left\{ (1 + \bar{F}_x) \bar{\varepsilon}_x^2 + \bar{G}_2 (1 + \bar{F}_y) \bar{\varepsilon}_y^2 + \mu_{21} (2 + \bar{F}_x + \bar{F}_y) \bar{\varepsilon}_x \bar{\varepsilon}_y + \right.$$

$$+ \frac{1}{2} \bar{G}_{12} (2 + \bar{F}_x + \bar{F}_y) \bar{\lambda}^2 \bar{\gamma}_{xy}^2 + \bar{G}_{13} k \bar{A}^2 (1 + \bar{F}_x) (\bar{\Psi}_x - \bar{\theta}_1)^2 + \bar{G}_{23} k \bar{A}^2 \bar{\lambda}^2 (1 + \bar{F}_y) (\bar{\Psi}_y - \bar{\theta}_2)^2 +$$

$$+ 2 \bar{S}_x \bar{\varepsilon}_x \bar{\chi}_1 + \mu_{21} (\bar{S}_x + \bar{S}_y) \bar{\varepsilon}_x \bar{\chi}_2 + \mu_{21} (\bar{S}_x + \bar{S}_y) \bar{\varepsilon}_y \bar{\chi}_1 +$$

$$+ 2 \bar{G}_2 \bar{S}_y \bar{\varepsilon}_y \bar{\chi}_2 + 2 \bar{G}_{12} (\bar{S}_x + \bar{S}_y) \bar{\lambda}^2 \bar{\gamma}_{xy} \bar{\chi}_{12} + \left(\frac{1}{12} + \bar{J}_x \right) \bar{\chi}_1^2 + \bar{G}_2 \left(\frac{1}{12} + \bar{J}_y \right) \bar{\chi}_2^2 +$$

$$+ \mu_{21} \left(\frac{1}{6} + \bar{J}_x + \bar{J}_y \right) \bar{\chi}_1 \bar{\chi}_2 + 2 \bar{G}_{12} \left(\frac{1}{6} + \bar{J}_x + \bar{J}_y \right) \bar{\lambda}^2 \bar{\chi}_{12}^2 - 2(1 - \mu_{12}\mu_{21}) \bar{P} \bar{W} \Big\} \bar{A} \bar{B} d\xi d\eta$$

$$= \frac{E_1 h^7}{2a^4 A^4 (1 - \mu_{12}\mu_{21})} \bar{E}_s. \quad (2.98)$$

Выражения усилий и моментов для подкрепленных ортотропных оболочек запишутся следующим образом [74]:

$$\bar{N}_x = \frac{1}{1 - \mu_{12}\mu_{21}} \frac{h^2}{a^2 A^2} \left((1 + \bar{F}_x) (\bar{\varepsilon}_x + \mu_{21} \bar{\varepsilon}_y) + \bar{S}_x (\bar{\chi}_1 + \mu_{21} \bar{\chi}_2) \right), \quad N_x = E_1 h \bar{N}_x,$$

$$\bar{N}_y = \frac{1}{1 - \mu_{12}\mu_{21}} \frac{h^2}{a^2 A^2} \left((1 + \bar{F}_y) (\bar{\varepsilon}_y + \mu_{12} \bar{\varepsilon}_x) + \bar{S}_y (\bar{\chi}_2 + \mu_{12} \bar{\chi}_1) \right), \quad N_y = E_2 h \bar{N}_y,$$

$$\bar{N}_{xy} = \bar{\lambda} \frac{h^2}{a^2 A^2} \left((1 + \bar{F}_y) \bar{\gamma}_{xy} + 2 \bar{S}_y \bar{\chi}_{12} \right), \quad N_{xy} = G_{12} h \bar{N}_{xy},$$

$$\bar{N}_{yx} = \bar{\lambda} \frac{h^2}{a^2 A^2} \left((1 + \bar{F}_x) \bar{\gamma}_{xy} + 2 \bar{S}_x \bar{\chi}_{12} \right), \quad N_{yx} = G_{12} h \bar{N}_{yx}, \quad (2.99)$$

$$\bar{M}_x = \frac{1}{1 - \mu_{12} \mu_{21}} \frac{h^2}{a^2 A^2} \left[\bar{S}_x (\bar{\varepsilon}_x + \mu_{21} \bar{\varepsilon}_y) + \left(\frac{1}{12} + \bar{J}_x \right) (\bar{\chi}_1 + \mu_{21} \bar{\chi}_2) \right], \quad M_x = E_1 h^2 \bar{M}_x,$$

$$\bar{M}_y = \frac{1}{1 - \mu_{12} \mu_{21}} \frac{h^2}{a^2 A^2} \left[\bar{S}_y (\bar{\varepsilon}_y + \mu_{12} \bar{\varepsilon}_x) + \left(\frac{1}{12} + \bar{J}_y \right) (\bar{\chi}_2 + \mu_{12} \bar{\chi}_1) \right], \quad M_y = E_2 h^2 \bar{M}_y,$$

$$\bar{M}_{xy} = \bar{\lambda} \frac{h^2}{a^2 A^2} \left[\bar{S}_y \bar{\gamma}_{xy} + 2 \left(\frac{1}{12} + \bar{J}_y \right) \bar{\chi}_{12} \right], \quad M_{xy} = G_{12} h^2 \bar{M}_{xy},$$

$$\bar{M}_{yx} = \bar{\lambda} \frac{h^2}{a^2 A^2} \left[\bar{S}_x \bar{\gamma}_{xy} + 2 \left(\frac{1}{12} + \bar{J}_x \right) \bar{\chi}_{12} \right], \quad M_{yx} = G_{12} h^2 \bar{M}_{yx},$$

$$\bar{Q}_x = k \frac{h}{aA} (1 + \bar{F}_x) (\bar{\Psi}_x - \bar{\theta}_1), \quad Q_x = G_{13} h \bar{Q}_x,$$

$$\bar{Q}_y = k \frac{h}{aA} (1 + \bar{F}_y) (\bar{\Psi}_y - \bar{\theta}_2), \quad Q_y = G_{23} h \bar{Q}_y.$$

В том случае, если необходимо использовать модель в безразмерных параметрах, записанную через усилия и моменты, ее можно получить, используя (2.99), (1.39), (1.40), (2.3), (2.4). Часть, имеющая отношение к ребрам

$$\begin{aligned} E_p^R = & \frac{1}{2} \int_0^1 \int_0^1 \left[E_1 h \bar{N}_x^R \frac{h^2}{a^2 A^2} \bar{\varepsilon}_x + E_2 h \bar{N}_y^R \frac{h^2}{a^2 A^2} \bar{\varepsilon}_y + \frac{1}{2} (G_{12} h \bar{N}_{xy}^R + G_{12} h \bar{N}_{yx}^R) \frac{h^2}{a^2 A^2} \bar{\lambda} \bar{\gamma}_{xy} + \right. \\ & + E_1 h^2 \bar{M}_x^R \frac{h}{A^2 a^2} \bar{\chi}_1 + E_2 h^2 \bar{M}_y^R \frac{h}{A^2 a^2} \bar{\chi}_2 + \\ & + (G_{12} h^2 \bar{M}_{xy}^R + G_{12} h^2 \bar{M}_{yx}^R) \frac{h}{a^2 A^2} \bar{\lambda} \bar{\chi}_{12} + \\ & \left. + G_{13} h \bar{Q}_x^R \left(\frac{\bar{\Psi}_x h}{aA} - \frac{h}{aA} \bar{\theta}_1 \right) + G_{23} h \bar{Q}_y^R \left(\frac{\bar{\Psi}_y h}{aA} \bar{\lambda} - \frac{h}{aA} \bar{\lambda} \bar{\theta}_2 \right) \right] \frac{\bar{A} \bar{B} h^2}{a^2 b^2} d\xi d\eta = \quad (2.100) \\ = & \frac{E_1 h^5}{2 a^2 A^2} \int_0^1 \int_0^1 \left[\bar{N}_x^R \bar{\varepsilon}_x + \bar{G}_2 \bar{N}_y^R \bar{\varepsilon}_y + \frac{1}{2} (\bar{N}_{xy}^R + \bar{N}_{yx}^R) \bar{G}_{12} \bar{\lambda} \bar{\gamma}_{xy} + \bar{M}_x^R \bar{\chi}_1 + \bar{G}_2 \bar{M}_y^R \bar{\chi}_2 + \right. \\ & \left. + (\bar{M}_{xy}^R + \bar{M}_{yx}^R) \bar{G}_{12} \bar{\lambda} \bar{\chi}_{12} + \bar{G}_{13} \frac{aA}{h} \bar{Q}_x^R (\bar{\Psi}_x - \bar{\theta}_1) + \bar{G}_{23} \frac{aA}{h} \bar{\lambda} \bar{Q}_y^R (\bar{\Psi}_y - \bar{\theta}_2) \right] \frac{\bar{A} \bar{B}}{a^2 b^2} d\xi d\eta = \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \frac{E_1 h^5}{2a^4 A^4} \int_0^1 \int_0^1 \left[\bar{N}_x^R \bar{\varepsilon}_x + \bar{G}_2 \bar{N}_y^R \bar{\varepsilon}_y + \frac{1}{2} (\bar{N}_{xy}^R + \bar{N}_{yx}^R) \bar{G}_{12} \bar{\lambda} \bar{\gamma}_{xy} + \bar{M}_x^R \bar{\chi}_1 + \bar{G}_2 \bar{M}_y^R \bar{\chi}_2 + \right. \\
&\quad \left. + (\bar{M}_{xy}^R + \bar{M}_{yx}^R) \bar{G}_{12} \bar{\lambda} \bar{\chi}_{12} + \bar{G}_{13} \bar{A} \bar{Q}_x^R (\bar{\Psi}_x - \bar{\theta}_1) + \bar{G}_{23} \bar{A} \bar{\lambda} \bar{Q}_y^R (\bar{\Psi}_y - \bar{\theta}_2) \right] \bar{A} \bar{B} d\xi d\eta,
\end{aligned}$$

а часть функционала, имеющая отношение к обшивке, по аналогии будет

$$\begin{aligned}
E_s^0 &= \frac{E_1 h^5}{2a^4 A^4} \int_0^1 \int_0^1 \left[\bar{N}_x^0 \bar{\varepsilon}_x + \bar{G}_2 \bar{N}_y^0 \bar{\varepsilon}_y + \frac{1}{2} (\bar{N}_{xy}^0 + \bar{N}_{yx}^0) \bar{G}_{12} \bar{\lambda} \bar{\gamma}_{xy} + \bar{M}_x^0 \bar{\chi}_1 + \bar{G}_2 \bar{M}_y^0 \bar{\chi}_2 + \right. \\
&\quad \left. + (\bar{M}_{xy}^0 + \bar{M}_{yx}^0) \bar{G}_{12} \bar{\lambda} \bar{\chi}_{12} + \bar{G}_{13} \bar{A} \bar{Q}_x^0 (\bar{\Psi}_x - \bar{\theta}_1) + \right. \\
&\quad \left. + \bar{G}_{23} \bar{A} \bar{\lambda} \bar{Q}_y^0 (\bar{\Psi}_y - \bar{\theta}_2) - 2 \left(\frac{\bar{P}}{\bar{A}^2} \bar{W} \right) \right] \bar{A} \bar{B} d\xi d\eta.
\end{aligned} \tag{2.101}$$

Кроме того, при записи функционала через усилия и моменты

$$E_s^0 = \frac{E_1 h^5}{2a^4 A^4} \bar{E}_s^0, \quad E_s^R = \frac{E_1 h^5}{2a^4 A^4} \bar{E}_s^R. \tag{2.102}$$

2.6 ВЫВОДЫ

В данной главе проведен детальный обзор существующих подходов к учету в математической модели деформирования оболочечных конструкций наличия подкрепления ребрами жесткости.

Показаны несколько существующих вариантов математических моделей ребристых оболочечных конструкций (когда ребра и обшивка взаимодействуют друг с другом «по линии», «по полосе»; метод «размазывания» жесткости ребер).

Предложен новый, наиболее точный вариант учета жесткостных характеристик ребер, связанный с добавлением разных коэффициентов приведения вдоль разных координатных осей. Для ребер, направленных перпендикулярно рассматриваемому направлению, вводится коэффициент приведения, равный отношению ширины ребер этого направления к линейному размеру оболочки в рассматриваемом направлении [135].

Также автором предложен модифицированный метод конструктивной анизотропии (позволяет свести конструкцию дискретно-переменной толщины к равновеликой по жесткости оболочке постоянной толщины), который теперь может быть применен к конструкциям из ортотропного материала.

Предложен вариант модели, позволяющий исследовать конструкции, когда в ортогонально расположенных жесткостных элементах направление укладки армирующих волокон всегда происходит вдоль ребра

Некоторые из представленных вариантов моделей могут быть использованы для расчета конструкций, ослабленных сквозными вырезами (перфорированных оболочек). Автором получены соотношения для модели на основе гипотез Тимошенко – Рейсснера как для дискретного варианта, так и для метода конструктивной анизотропии.

ГЛАВА 3. АЛГОРИТМЫ ИССЛЕДОВАНИЯ ПРОЧНОСТИ И УСТОЙЧИВОСТИ ПОДКРЕПЛЕННЫХ ОРТОТРОПНЫХ ОБОЛОЧЕК ПРИ СТАТИЧЕСКОМ НАГРУЖЕНИИ

Большое число инженерных задач, связанных с необходимостью расчета деформационно-прочностных свойств и устойчивости оболочечных конструкций, диктует необходимость разработки эффективных методов исследования. Для задач статики оболочечных конструкций, их расчет на прочность и устойчивость можно свести к решению системы нелинейных алгебраических уравнений – для этого используется метод Ритца [131].⁴

3.1 МЕТОД РИТЦА СВЕДЕНИЯ ВАРИАЦИОННОЙ ЗАДАЧИ К СИСТЕМЕ НЕЛИНЕЙНЫХ АЛГЕБРАИЧЕСКИХ УРАВНЕНИЙ

При исследовании напряженно-деформированного состояния оболочки решается вариационная задача нахождения минимума функционала [38]. Для этого к функционалу (1.26) (или (2.2) – (2.4), если конструкция имеет ребра или сквозные вырезы) применяется метод Ритца. Для этого (при решении задачи в размерных параметрах) представим искомые функции в виде

$$U(x, y) = \sum_{k=1}^{\sqrt{N}} \sum_{l=1}^{\sqrt{N}} U_{kl} X_1^k Y_1^l, \quad V(x, y) = \sum_{k=1}^{\sqrt{N}} \sum_{l=1}^{\sqrt{N}} V_{kl} X_2^k Y_2^l, \quad W(x, y) = \sum_{k=1}^{\sqrt{N}} \sum_{l=1}^{\sqrt{N}} W_{kl} X_3^k Y_3^l, \quad (3.1)$$

$$\Psi_x(x, y) = \sum_{k=1}^{\sqrt{N}} \sum_{l=1}^{\sqrt{N}} \Psi_{xkl} X_4^k Y_4^l, \quad \Psi_y(x, y) = \sum_{k=1}^{\sqrt{N}} \sum_{l=1}^{\sqrt{N}} \Psi_{ykl} X_5^k Y_5^l,$$

⁴ По результатам проведенного исследования автором опубликованы, в том числе, работы:

- Семенов, А. А. Метод непрерывного продолжения решения по наилучшему параметру при расчете оболочечных конструкций / А. А. Семенов, С. С. Леонов // Ученые записки Казанского университета. Серия: Физико-математические науки. – 2019. – Т. 161. – № 2. – С. 230–249.
- Семенов, А. А. Алгоритмы исследования прочности и устойчивости подкрепленных ортотропных оболочек / А. А. Семенов // Строительная механика инженерных конструкций и сооружений. – 2014. – № 1. – С. 49–63.
- Semenov, A. Strength of Steel Shell Cylindrical Panels Reinforced with an Orthogonal Grid of Stiffeners / A. Semenov // Journal of Applied and Computational Mechanics. – 2022. – Vol. 8. – No. 2. – P. 723–732.
- Семенов, А. А. Геометрически нелинейная математическая модель расчета прочности и устойчивости ортотропных оболочечных конструкций: дис. ... канд. техн. наук: 05.23.17 / А. А. Семенов. – СПб.: СПбГАСУ, 2014. – 183 с.

где $U_{kl}, V_{kl}, W_{kl}, \Psi_{xkl}, \Psi_{ykl}$ – неизвестные числовые параметры, а $X_1^k - X_5^k, Y_1^l - Y_5^l$ – известные аппроксимирующие функции аргументов x и y , удовлетворяющие заданным краевым условиям на контуре оболочки, N – количество членов разложения ($N = n^2, n = 1, 2, 3, \dots$).

Далее функции (3.1) подставляются в выбранный функционал полной потенциальной энергии деформации ((1.26) или (2.2) – (2.4)).

В том случае, если задача решается в безразмерном виде, искомые функции представим следующим образом [74]

$$\begin{aligned} \bar{U}(\xi, \eta) &= \sum_{k=1}^{\sqrt{N}} \sum_{l=1}^{\sqrt{N}} \bar{U}_{kl} \bar{X}_1^k \bar{Y}_1^l, \quad \bar{V}(\xi, \eta) = \sum_{k=1}^{\sqrt{N}} \sum_{l=1}^{\sqrt{N}} \bar{V}_{kl} \bar{X}_2^k \bar{Y}_2^l, \quad \bar{W}(\xi, \eta) = \sum_{k=1}^{\sqrt{N}} \sum_{l=1}^{\sqrt{N}} \bar{W}_{kl} \bar{X}_3^k \bar{Y}_3^l, \\ \bar{\Psi}_x(\xi, \eta) &= \sum_{k=1}^{\sqrt{N}} \sum_{l=1}^{\sqrt{N}} \bar{\Psi}_{xkl} \bar{X}_4^k \bar{Y}_4^l, \quad \bar{\Psi}_y(\xi, \eta) = \sum_{k=1}^{\sqrt{N}} \sum_{l=1}^{\sqrt{N}} \bar{\Psi}_{ykl} \bar{X}_5^k \bar{Y}_5^l, \end{aligned} \quad (3.2)$$

здесь $\bar{U}_{kl}, \bar{V}_{kl}, \bar{W}_{kl}, \bar{\Psi}_{xkl}, \bar{\Psi}_{ykl}$ – неизвестные безразмерные числовые параметры, $\bar{X}_1^k - \bar{X}_5^k, \bar{Y}_1^l - \bar{Y}_5^l$ – известные аппроксимирующие функции аргументов ξ и η , удовлетворяющие заданным краевым условиям на контуре оболочки.

В безразмерном случае, эти функции подставляются в функционал (1.42) или (2.98).

Следует отметить, что возможны и другие способы записи индексов в (3.1) и (3.2). Например, вместо U_{kl} можно использовать U_i , где $i = (k-1)N + l$.

3.2 ВЫБОР АППРОКСИМИРУЮЩИХ ФУНКЦИЙ ДЛЯ РАЗЛИЧНЫХ ВИДОВ ЗАКРЕПЛЕНИЯ КОНТУРА ОБОЛОЧКИ

3.2.1 Модель Кирхгофа – Лява

В Таблице 3.1 показаны варианты аппроксимирующих функций в размерных и в безразмерных параметрах при использовании модели Кирхгофа – Лява для шарнирно-неподвижного или жесткого закрепления контура.

Таблица 3.1 – Варианты аппроксимирующих функций для различных способов закрепления контура оболочки (модель Кирхгофа – Лява)

Размерные параметры	Закрепление контура	Неизвестная функция	Базисные функции	
			X^k	Y^l
	Шарнирно-неподвижное	$U(x, y), V(x, y), W(x, y)$	$\sin\left(k\pi\frac{x}{a}\right)$	$\sin\left(l\pi\frac{y}{b}\right)$
Безразмерные параметры	Жесткая заделка	$U(x, y), V(x, y)$	$\sin\left(k\pi\frac{x}{a}\right)$	$\sin\left(l\pi\frac{y}{b}\right)$
		$W(x, y)$	$\sin^2\left(k\pi\frac{x}{a}\right)$	$\sin^2\left(l\pi\frac{y}{b}\right)$
	Закрепление контура	Неизвестная функция	Базисные функции	
Безразмерные параметры	Закрепление контура	Неизвестная функция	$\bar{X}^k$	$\bar{Y}^l$
			$\sin(k\pi\xi)$	$\sin(l\pi\eta)$
	Шарнирно-неподвижное	$\bar{U}(\xi, \eta), \bar{V}(\xi, \eta), \bar{W}(\xi, \eta)$	$\sin(k\pi\xi)$	$\sin(l\pi\eta)$
	Жесткая заделка	$\bar{U}(\xi, \eta), \bar{V}(\xi, \eta)$	$\sin(k\pi\xi)$	$\sin(l\pi\eta)$
		$\bar{W}(\xi, \eta)$	$\sin^2(k\pi\xi)$	$\sin^2(l\pi\eta)$

3.2.2 Модель Тимошенко – Рейсснера

В Таблице 3.2 показаны варианты аппроксимирующих функций в размерных и в безразмерных параметрах при использовании модели Тимошенко – Рейсснера для шарнирно-неподвижного или жесткого закрепления контура [130].

Таблица 3.2 – Варианты аппроксимирующих функций для различных способов закрепления контура оболочки (модель Тимошенко – Рейсснера) [130]

Размерные параметры	Закрепление контура	Неизвестная функция	Базисные функции	
			X^k	Y^l
Размерные параметры	Шарнирно-неподвижное	$U(x, y), V(x, y), W(x, y)$	$\sin\left(k\pi\frac{x}{a}\right)$	$\sin\left(l\pi\frac{y}{b}\right)$
		$\Psi_x(x, y)$	$\cos\left(k\pi\frac{x}{a}\right)$	$\sin\left(l\pi\frac{y}{b}\right)$
		$\Psi_y(x, y)$	$\sin\left(k\pi\frac{x}{a}\right)$	$\cos\left(l\pi\frac{y}{b}\right)$
	Жесткая заделка	$U(x, y), V(x, y), W(x, y), \Psi_x(x, y), \Psi_y(x, y)$	$\sin\left(k\pi\frac{x}{a}\right)$	$\sin\left(l\pi\frac{y}{b}\right)$
Безразмерные параметры	Закрепление контура	Неизвестная функция	Базисные функции	
			$\bar{X}^k$	$\bar{X}^k$
	Шарнирно-неподвижное	$\bar{U}(\xi, \eta), \bar{V}(\xi, \eta), \bar{W}(\xi, \eta)$	$\sin(k\pi\xi)$	$\sin(l\pi\eta)$
		$\bar{\Psi}_x(\xi, \eta)$	$\cos(k\pi\xi)$	$\sin(l\pi\eta)$
		$\bar{\Psi}_y(\xi, \eta)$	$\sin(k\pi\xi)$	$\cos(l\pi\eta)$
	Жесткая заделка	$\bar{U}(\xi, \eta), \bar{V}(\xi, \eta), \bar{W}(\xi, \eta), \bar{\Psi}_x(\xi, \eta), \bar{\Psi}_y(\xi, \eta)$	$\sin(k\pi\xi)$	$\sin(l\pi\eta)$

В соответствии с данной таблицей, для шарнирно-неподвижно закрепленной конструкции будем использовать следующий вариант аппроксимирующих функций [71]:

$$\begin{aligned}
 X_1^k &= \sin\left(k\pi\frac{x}{a}\right), & X_2^k &= \sin\left(k\pi\frac{x}{a}\right), & X_3^k &= \sin\left(k\pi\frac{x}{a}\right), & X_4^k &= \cos\left(k\pi\frac{x}{a}\right), \\
 X_5^k &= \sin\left(k\pi\frac{x}{a}\right), & Y_1^l &= \sin\left(l\pi\frac{y}{b}\right), & Y_2^l &= \sin\left(l\pi\frac{y}{b}\right), & Y_3^l &= \sin\left(l\pi\frac{y}{b}\right), \\
 Y_4^l &= \sin\left(l\pi\frac{y}{b}\right), & Y_5^l &= \cos\left(l\pi\frac{y}{b}\right).
 \end{aligned} \tag{3.3}$$

Стоит отметить, что в зависимости от геометрии оболочки, можно брать не все базисные функции. Например, для тороидальных панелей можно использовать следующие комбинации аппроксимирующих функций [16]:

$$U(x, y) = \sum_{k=1}^{\sqrt{N}} \sum_{l=1}^{\sqrt{N}} U_{kl} X_1^k Y_1^{2l-1}, \quad V(x, y) = \sum_{k=1}^{\sqrt{N}} \sum_{l=1}^{\sqrt{N}} V_{kl} X_2^k Y_2^{2l}, \quad W(x, y) = \sum_{k=1}^{\sqrt{N}} \sum_{l=1}^{\sqrt{N}} W_{kl} X_3^k Y_3^{2l-1},$$

$$\Psi_x(x, y) = \sum_{k=1}^{\sqrt{N}} \sum_{l=1}^{\sqrt{N}} \Psi_{xkl} X_4^k Y_4^{2l-1}, \quad \Psi_y(x, y) = \sum_{k=1}^{\sqrt{N}} \sum_{l=1}^{\sqrt{N}} \Psi_{ykl} X_5^k Y_5^{2l-1}. \quad (3.4)$$

Это вызвано тем, что тороидальная панель обладает симметрией в направлении оси y , и значения коэффициентов перед базисными функциями, не обладающими симметрией, оказываются близки к нулю. Таким образом, эти функции вносят крайне малый вклад в точность расчета, и поэтому их можно «исключить» [16].

В том случае, если конструкция обладает симметрией относительно середины в обоих направлениях (геометрическая форма, значения нагрузок, закрепление, материал, расстановка ребер и т.д.), то можно предположить, что коэффициенты при несимметричных базисных функциях будут равны нулю, и взять аппроксимацию в виде [71]

$$U(x, y) = \sum_{k=1}^{\sqrt{N}} \sum_{l=1}^{\sqrt{N}} U_{kl} X_1^{2k} Y_1^{2l-1}, \quad V(x, y) = \sum_{k=1}^{\sqrt{N}} \sum_{l=1}^{\sqrt{N}} V_{kl} X_2^{2k-1} Y_2^{2l},$$

$$W(x, y) = \sum_{k=1}^{\sqrt{N}} \sum_{l=1}^{\sqrt{N}} W_{kl} X_3^{2k-1} Y_3^{2l-1}, \quad (3.5)$$

$$\Psi_x(x, y) = \sum_{k=1}^{\sqrt{N}} \sum_{l=1}^{\sqrt{N}} \Psi_{xkl} X_4^{2k-1} Y_4^{2l-1}, \quad \Psi_y(x, y) = \sum_{k=1}^{\sqrt{N}} \sum_{l=1}^{\sqrt{N}} \Psi_{ykl} X_5^{2k-1} Y_5^{2l-1}.$$

На Рисунке 3.1 графически показаны варианты функций (3.5) при изменении параметра k . Для Y^l варианты функций будут такими же. Комбинация представленных кривых может повторить форму симметричного деформирования конструкции.

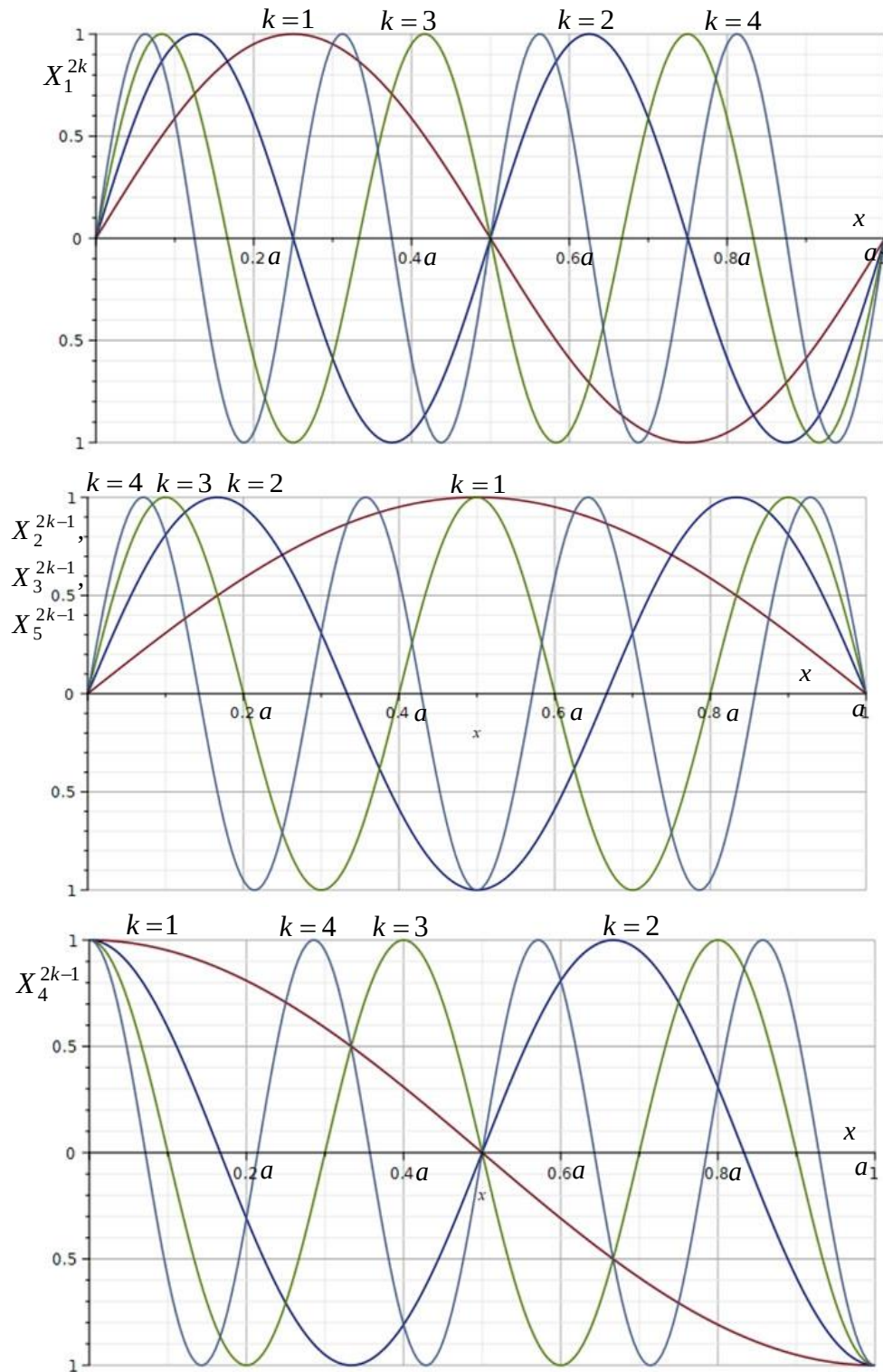


Рисунок 3.1. Графическое представление функций, используемых для аппроксимации

На Рисунке 3.2 представлены суммы произведений функций $\sum_{k=1}^{\sqrt{N}} \sum_{l=1}^{\sqrt{N}} X_1^{2k} Y_1^{2l-1}$,

$$\sum_{k=1}^{\sqrt{N}} \sum_{l=1}^{\sqrt{N}} X_2^{2k-1} Y_2^{2l}, \quad \sum_{k=1}^{\sqrt{N}} \sum_{l=1}^{\sqrt{N}} X_3^{2k-1} Y_3^{2l-1}, \quad \sum_{k=1}^{\sqrt{N}} \sum_{l=1}^{\sqrt{N}} X_4^{2k-1} Y_4^{2l-1}, \quad \sum_{k=1}^{\sqrt{N}} \sum_{l=1}^{\sqrt{N}} X_5^{2k-1} Y_5^{2l-1}, \quad \text{на основании}$$

которых можно сделать вывод о выполнении описанных ранее граничных условий.

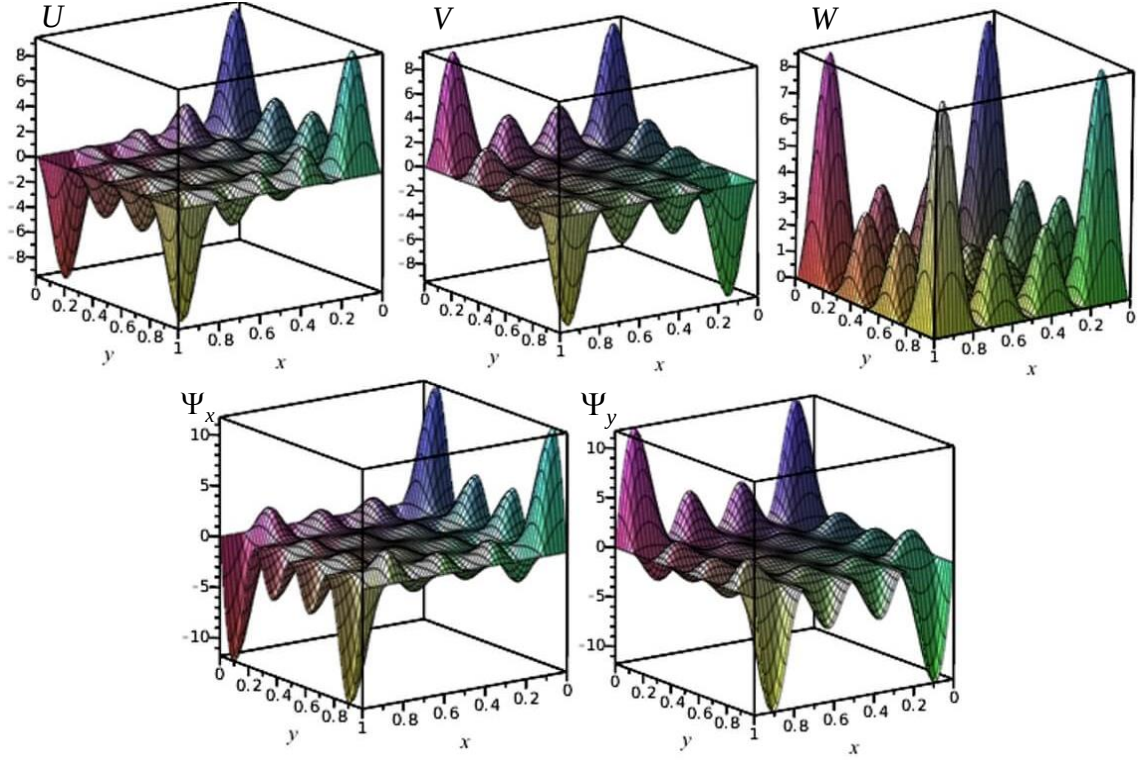


Рисунок 3.2. Форма $\sum_{k=1}^{\sqrt{N}} \sum_{l=1}^{\sqrt{N}} X_1^{2k} Y_1^{2l-1}$, $\sum_{k=1}^{\sqrt{N}} \sum_{l=1}^{\sqrt{N}} X_2^{2k-1} Y_2^{2l}$, $\sum_{k=1}^{\sqrt{N}} \sum_{l=1}^{\sqrt{N}} X_3^{2k-1} Y_3^{2l-1}$,
 $\sum_{k=1}^{\sqrt{N}} \sum_{l=1}^{\sqrt{N}} X_4^{2k-1} Y_4^{2l-1}$, $\sum_{k=1}^{\sqrt{N}} \sum_{l=1}^{\sqrt{N}} X_5^{2k-1} Y_5^{2l-1}$

Тригонометрические функции достаточно хорошо описывают процесс деформирования конструкции с образованием вмятин, кроме того, удовлетворяют заданным граничным условиям. Кроме того, в случае расчета замкнутых конструкций, их можно выбрать таким образом, чтобы они удовлетворяли условиям периодичности. В работе [192] можно найти использование в качестве аппроксимирующих функций полиномы Лежандра, а в работе [254] – использование полиномов Чебышева.

Для усеченных конических панелей есть особенность, связанная с тем, что начало координат находится на расстоянии a_1 от конструкции. В связи с этим, в тригонометрическом базисе (3.3) нужно учесть

$$X_1^k = \sin\left(k\pi \frac{x-a_1}{a-a_1}\right), \quad X_2^k = \sin\left(k\pi \frac{x-a_1}{a-a_1}\right), \quad X_3^k = \sin\left(k\pi \frac{x-a_1}{a-a_1}\right), \quad (3.6)$$

$$X_4^k = \cos\left(k\pi \frac{x-a_1}{a-a_1}\right), \quad X_5^k = \sin\left(k\pi \frac{x-a_1}{a-a_1}\right).$$

Соотношения (3.6) подходят и для расчета других конструкций (при $a_1 = 0$ они приобретают вид (3.3)).

Расчет сферических куполов также требует выбора несколько иных аппроксимирующих функций вдоль оси x (безразмерная ось ξ), поскольку необходимо избежать особенности в вершине купола. В связи с этим, область конструкции будем определять в пределах от $-a$ до a , притом функции (по аналогии с (3.6)) возьмем в виде

$$X_1^k = X_2^k = X_3^k = X_5^k = \sin\left(k\pi \frac{x+a}{2a}\right), \quad X_4^k = \cos\left(k\pi \frac{x+a}{2a}\right). \quad (3.7)$$

Вдоль координаты y аппроксимирующие функции для конструкций данного вида должны быть 2π периодичными, поэтому возьмем их в виде

$$Y_1^l = Y_2^l = Y_3^l = Y_4^l = Y_5^l = 1, \cos\left(2\pi \frac{y}{b}\right), \sin\left(2\pi \frac{y}{b}\right), \cos\left(4\pi \frac{y}{b}\right), \sin\left(4\pi \frac{y}{b}\right). \quad (3.8)$$

Здесь функции вдоль окружной координаты задаются не зависимостью от l , а берутся в виде ряда. По аналогии, в безразмерном виде получим

$$\bar{X}_1^k = \bar{X}_2^k = \bar{X}_3^k = \bar{X}_5^k = \sin\left(k\pi \frac{\xi+1}{2}\right), \quad \bar{X}_4^k = \cos\left(k\pi \frac{\xi+1}{2}\right), \quad (3.9)$$

$$\bar{Y}_1^l = \bar{Y}_2^l = \bar{Y}_3^l = \bar{Y}_4^l = \bar{Y}_5^l = 1, \cos(2\pi\eta), \sin(2\pi\eta), \cos(4\pi\eta), \sin(4\pi\eta).$$

В случае жесткого закрепления, для сферических куполов необходимо взять

$$\begin{aligned} X_1^k &= X_2^k = X_3^k = X_4^k = X_5^k = \sin\left(k\pi \frac{x+a}{2a}\right), \\ Y_1^l &= Y_2^l = Y_3^l = Y_4^l = Y_5^l = 1, \cos\left(2\pi \frac{y}{b}\right), \sin\left(2\pi \frac{y}{b}\right), \cos\left(4\pi \frac{y}{b}\right), \sin\left(4\pi \frac{y}{b}\right), \\ \bar{X}_1^k &= \bar{X}_2^k = \bar{X}_3^k = \bar{X}_4^k = \bar{X}_5^k = \sin\left(k\pi \frac{\xi+1}{2}\right), \end{aligned} \quad (3.10)$$

$$\bar{Y}_1^l = \bar{Y}_2^l = \bar{Y}_3^l = \bar{Y}_4^l = \bar{Y}_5^l = 1, \cos(2\pi\eta), \sin(2\pi\eta), \cos(4\pi\eta), \sin(4\pi\eta).$$

3.3 ЛИНЕАРИЗАЦИЯ СНАУ МЕТОДАМИ ПРОДОЛЖЕНИЯ РЕШЕНИЯ

Изначально решение задач устойчивости оболочек при статическом нагружении основывалось на применении метода Эйлера, то есть нахождении собственных значений. Таким образом, задача сводилась к решению линейных уравнений. Определялись собственные числа (спектр критических нагрузок) и соответствующие им собственные функции (форма прогибов при потере устойчивости). Такой прием применялся, например, в работах Э. И. Григолюка и В. В. Кабанова [46], П. Е. Товстика [147]. Когда были разработаны геометрически нелинейные уравнения теории оболочек, появилась возможность выявлять локальные и общие формы потери устойчивости и их взаимосвязь. Однако, потребовались методы решения нелинейных систем уравнений. Наиболее эффективные из них основаны на продолжении решения по параметру [131].

Идея метода продолжения решения по параметру использовалась в математике и механике еще в работах А. Пуанкаре и У. Леверье. В вычислительных целях впервые метод продолжения решения по параметру был использован в работах М. Лаэя [229]. Позднее, в работах советского математика Д. Ф. Давиденко был предложен метод сведения системы нелинейных уравнений к системе обыкновенных дифференциальных уравнений [51]. Однако при построении замкнутых кривых приходится менять параметр продолжения решения в окрестности предельных особых точек. Для решения этой проблемы было предложено использовать параметры продолжения общего вида [131].

В 1959 году в работах В. В. Петрова [115, 116], ученика В. З. Власова, был предложен метод последовательных нагружений [131]. По сути дела, это был вариант продолжения решения по параметру нагрузки. Кратко систему можно записать в виде [131]

$$F(X, P) = 0, \quad (3.11)$$

где $X = (U_{kl}, V_{kl}, W_{kl}, \Psi_{xkl}, \Psi_{ykl})^T$, $k, l = 1, \dots, \sqrt{N}$, P – параметр поперечной нагрузки.

В начальном, не нагруженном состоянии имеет место условие $F(X_0, P_0) = 0$.

Продифференцируем по параметру P

$$\frac{\partial F}{\partial X} \cdot \frac{\partial X}{\partial P} + \frac{\partial F}{\partial P} = 0. \quad (3.12)$$

Для решения полученной начальной задачи применим метод Эйлера:

$$\begin{aligned} X_{i+1} &= X_i + \Delta X_i, \\ P_{i+1} &= P_i + \Delta P_i, \end{aligned} \quad (3.13)$$

где ΔP_i задается, а ΔX_i находится из решения уравнения

$$\frac{dF}{dX} \cdot \Delta X_i + \frac{dF}{dP} \cdot \Delta P_i = 0. \quad (3.14)$$

Таким образом, для каждого значения параметра нагрузки получим значения искомых функций. В результате строится кривая «нагрузка – прогиб» для какой-либо выбранной точки области конструкции. При этом сама кривая представляет собой ломаную, состоящую из касательных к искомой кривой [131].

Метод Эйлера имеет первый порядок точности, поэтому необходимо брать достаточно малый шаг ΔP_i при расчетах. В. В. Карповым были разработаны модификации метода последовательных нагружений, позволяющие увеличить точность получаемых решений.

Метод последовательных нагружений позволяет получить первую критическую нагрузку, а далее процесс расходится. Чтобы процесс продолжить и в закритической области, необходима смена параметра продолжения. Такой прием применялся в работе Н. В. Валишвили [28] и В. В. Карпова [60]. Причем В. В. Карповым был разработан алгоритм автоматического обхода критических точек при программной реализации на ЭВМ.

В работе И. И. Воровича и В. Ф. Зипаловой [37] был предложен параметр продолжения, отсчитываемый по касательной к кривой множества решений рассматриваемой задачи. В этой же работе впервые показано, что данный параметр продолжения будет в некотором смысле наилучшим для задач, кривые множества решений которых имеют предельные особые точки [131].

Доказательство этого факта было намечено в статье голландского инженера Э. Рикса [126] применительно к исследованию устойчивости прощелкивающихся и выпучивающихся конструкций. Начиная с конца 70-х годов прошлого века началось систематическое исследование применения наилучшего параметра к задачам математики и механики с предельными особыми точками и точками бифуркации. Отметим две крупные монографии Э. И. Григолюка, В. И. Шалашилина [49] и E. L. Allgower, K. Georg [164], подводящие итог полученных результатов к началу 90-х годов прошлого века. В монографии В. И. Шалашилина и Е. Б. Кузнецова [158] было доказано, что параметр, отсчитываемый по касательной к кривой множества решений системы нелинейных уравнений, доставляет задаче наилучшую обусловленность, т. е. является наилучшим. Более того, этот результат был обобщен на системы обыкновенных дифференциальных, дифференциально-алгебраических и функционально-дифференциальных уравнений [131]. В дальнейших работах Е. Б. Кузнецова было рассмотрено обобщение полученных результатов на многомерный случай [93], а также дан алгоритм прохождения точек бифуркации различной коразмерности с использованием редукции Ляпунова – Шмидта [94]. Один из последних результатов связан с развитием нового подхода – метода продолжения решения по модифицированному наилучшему аргументу, отсчитываемому в направлении, близком к касательному, для систем обыкновенных дифференциальных уравнений [92].

Наиболее эффективным является подход, основанный на выборе в качестве наилучшего параметра продолжения решения длины дуги [93, 158]. Помимо определения верхней критической нагрузки потери устойчивости он позволяет получить значение нижней критической нагрузки, выявить точки бифуркации и исследовать закритическое поведение конструкции. Группа методов, основанная на использовании в качестве параметра продолжения решения длины дуги, в зарубежной литературе получила название «arc-length methods» [131].

Также методы продолжения решения, в том числе и с использованием в качестве параметра продолжения длины дуги, использовались для исследования оболочечных конструкций в работах [13, 108, 151, 198, 237, 298].

3.3.1 Метод продолжения решения по наилучшему параметру

Подставим (3.1) или (3.2) в выражение для одного из функционалов (например, (1.42)), и перейдем таким образом от функционала $\bar{E}_s$ к функции $\bar{E}_{sf}$. Будем рассматривать применение метода на примере безразмерного функционала. Для поиска минимума, найдем производные от функции $\bar{E}_{sf}$ по всем неизвестным числовым параметрам, и далее приравняем их к нулю [131]

$$\frac{\partial \bar{E}_{sf}}{\partial \bar{U}_{kl}} = 0, \quad \frac{\partial \bar{E}_{sf}}{\partial \bar{V}_{kl}} = 0, \quad \frac{\partial \bar{E}_{sf}}{\partial \bar{W}_{kl}} = 0, \quad \frac{\partial \bar{E}_{sf}}{\partial \bar{\Psi}_{xkl}} = 0, \quad \frac{\partial \bar{E}_{sf}}{\partial \bar{\Psi}_{ykl}} = 0, \quad k, l = 1, \dots, \sqrt{N}. \quad (3.15)$$

В результате получена система нелинейных алгебраических уравнений. Для ее решения используем метод продолжения решения по наилучшему параметру, который позволяет свести решение нелинейной системы к решению начальной задачи для системы обыкновенных дифференциальных уравнений. В качестве наилучшего параметра продолжения решения предлагается брать длину дуги кривой множества решений λ . Параметр нагрузки $\bar{P}$ является равноправным с остальными неизвестными, поэтому приходится находить решение задачи в безразмерных координатах. Метод продолжения решения по наилучшему параметру при использовании адаптивного выбора сетки позволяет находить верхние и нижние критические нагрузки, а также точки бифуркации [103], так как при обходе особых точек значение параметра нагрузки может уменьшаться [131].

Обозначим

$$\bar{X} = (\bar{U}_{kl}, \bar{V}_{kl}, \bar{W}_{kl}, \bar{\Psi}_{xkl}, \bar{\Psi}_{ykl})^T, \quad \tilde{X} = (\bar{U}_{kl}, \bar{V}_{kl}, \bar{W}_{kl}, \bar{\Psi}_{xkl}, \bar{\Psi}_{ykl}, \bar{P})^T, \quad k, l = 1, \dots, \sqrt{N}, \quad (3.16)$$

а систему нелинейных уравнений (3.15) обозначим как $F(\tilde{X}) = 0$.

Известно, что в ненагруженном состоянии оболочки значения перемещений и углов поворота нормали равны нулю, поэтому начальное значение $\tilde{X}$ задается нулевым вектором размерности $5N + 1$ [131]

$$\tilde{X}^0 = (0, \dots, 0)^T. \quad (3.17)$$

Следует заметить, что параметр длины дуги λ не входит явно в систему уравнений и связан с переменными задачи следующим образом

$$(d\lambda)^2 = \sum_{k=1}^{\sqrt{N}} \sum_{l=1}^{\sqrt{N}} \left[(d\bar{U}_{kl})^2 + (d\bar{V}_{kl})^2 + (d\bar{W}_{kl})^2 + (d\bar{\Psi}_{xkl})^2 + (d\bar{\Psi}_{ykl})^2 \right] + (d\bar{P})^2. \quad (3.18)$$

Продифференцировав систему уравнений (3.15) по параметру λ , полагая, что все компоненты вектора $\tilde{X}$ от него зависят, получим систему $5N$ обыкновенных дифференциальных уравнений [131]

$$\bar{J} \cdot \frac{d\tilde{X}}{d\lambda} = \begin{bmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix} \quad (3.19)$$

с начальными условиями (3.17) при $\lambda_0 = 0$.

Здесь $\bar{J} = \partial F(\tilde{X}) / \partial \tilde{X}$ – расширенная матрица Якоби (имеет размерность $5N$ строк и $5N + 1$ столбцов), а $J = \partial F(\bar{X}, \bar{P}) / \partial \bar{X}$ – матрица Якоби вектор-функции F , необходимая для выявления особых точек, исходя из критерия $\det J = 0$.

Дополняя уравнения системы (3.19) соотношением (3.18), получим замкнутую систему $5N + 1$ -го обыкновенного дифференциального уравнения [131]

$$\begin{bmatrix} \bar{J} \\ \left(\frac{d\tilde{X}}{d\lambda} \right)^T \end{bmatrix} \cdot \frac{d\tilde{X}}{d\lambda} = \begin{bmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad (3.20)$$

к которой сводится процесс продолжения решения по наилучшему параметру для системы нелинейных уравнений (3.15) на каждом шаге.

Система (3.20) относительно $d\tilde{X} / d\lambda$ является нелинейной. Чтобы ее решить, воспользуемся вариантом шагового процесса продолжения, предложенным в монографии [49]. В ней предложено заменить в матрице системы (3.20) последнюю

строку $(d\tilde{X} / d\lambda)^T$ на вектор $(d\tilde{X}^* / d\lambda)^T$, который на каждом шаге принимается равным вектору, вычисленному на предыдущем шаге, т. е. получаем итерационный процесс

$$\left(\frac{d\tilde{X}^*}{d\lambda} \right)^T (\lambda_k) = \left(\frac{d\tilde{X}}{d\lambda} \right)^T (\lambda_{k-1}). \quad (3.21)$$

При $k = 0$

$$\left(\frac{d\tilde{X}^*}{d\lambda} \right)^T (\lambda_0) = (0, \dots, 0, 1)^T. \quad (3.22)$$

Учитывая все вышесказанное, запишем схему явного метода Эйлера решения начальной задачи (3.20), (3.17) в виде системы линейных алгебраических уравнений относительно $(d\tilde{X} / d\lambda)^T$ [131, 158]

$$\begin{aligned} \tilde{X}_0 &= \tilde{X}(\lambda_0), \quad \left(\frac{d\tilde{X}^*}{d\lambda} \right)^T (\lambda_0) = (0, \dots, 0, 1)^T, \\ \left[\begin{array}{c} \bar{J}(\lambda_k) \\ \left(\frac{d\tilde{X}^*}{d\lambda} \right)^T (\lambda_k) \end{array} \right] \cdot \frac{d\tilde{X}}{d\lambda}(\lambda_k) &= \begin{bmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad \frac{d\tilde{X}^*}{d\lambda}(\lambda_{k+1}) = \frac{\frac{d\tilde{X}}{d\lambda}(\lambda_k)}{\left\| \frac{d\tilde{X}}{d\lambda}(\lambda_k) \right\|_2}, \\ \tilde{X}_{k+1} &= \tilde{X}_k + \frac{d\tilde{X}^*}{d\lambda}(\lambda_k) \cdot \Delta\lambda_k, \quad \lambda_{k+1} = \lambda_k + \Delta\lambda_k, \quad k = 0, 1, 2, \dots \end{aligned} \quad (3.23)$$

Таким образом, решение нелинейной системы алгебраических уравнений сводится к последовательному решению систем линейных алгебраических уравнений (3.23) относительно значений производных $d\tilde{X} / d\lambda$. Чем больше разница между векторами $d\tilde{X} / d\lambda$ на текущем и предыдущем шагах, тем хуже обусловленность матрицы системы и, следовательно, тем менее устойчив вычислительный процесс. В связи с этим целесообразно применять адаптивный выбор сетки для повышения точности расчетов [131].

3.3.2 Ограничения в методе продолжения решения по наилучшему параметру

Сходимость этого метода дает теорема о неявных функциях [49]. Тем не менее, необходимо обосновать значения некоторых параметров ограничений, используемых при проведении расчетов.

Чем больше разница между векторами приращений числовых коэффициентов, тем менее устойчив вычислительный процесс и больше погрешность решения.

В связи с этим, на каждом шаге нагружения анализируется изменение угла между векторами решения с прошлого и текущего шага, и если оно превышает заранее заданный параметр точности Δ_1 , то вычислительный процесс откатывается на два шага назад. Вычисление нового вектора происходит уже с уменьшающим его длину коэффициентом. Уменьшение предлагается производить в два раза, то есть $\Delta a_k = 0,5 \cdot \Delta a_{k-1}$ (в самом начале итерационного процесса $\Delta a_0 = 1$). В том случае, если после введения этого коэффициента угол по-прежнему превышает ограничение, то происходит опять возвращение процесса назад и домножение уже существующего там коэффициента на еще на $\frac{1}{2}$, т.е. в результате получаем коэффициент $\frac{1}{4}$. При достаточно высоких параметрах точности при подходе решения к особым точкам значение коэффициента Δa_k достигало $1 / 32768$, то есть $1 / 2^{15}$.

Также здесь вводится и второе ограничение Δ_2 , значение которого берется в два раза меньше, чем первое ($\Delta_2 = \Delta_1 / 2$). В том случае, если значение угла находится между значениями Δ_1 и Δ_2 , то выбранный коэффициент сохраняется и на следующем шаге. Если же значение угла меньше второго ограничения, то на следующем шаге значение коэффициента увеличивается в два раза.

Также вводится коэффициент, ограничивающий максимальное изменение значения прогиба. На каждом шаге вычисляется значение прогиба W по формулам (3.1) или (3.2), и ищется разница со значениями на предыдущем шаге. Если хотя бы в одной точке конструкции эта разница составила более $0,1h$ (или $0,1$ в

безразмерных параметрах), то происходит возврат на предыдущий шаг продолжения решения, а приращение вектора нормируется так, чтобы не было превышено ограничение.

Таким образом, в методе продолжения решения по наилучшему параметру предложен способ реализации и конкретные параметры адаптивного выбора сетки, что обеспечивает достаточно высокую точность и экономит вычислительные и временные ресурсы.

3.4 МЕТОДИКА ИССЛЕДОВАНИЯ УСТОЙЧИВОСТИ ОБОЛОЧЕК ПРИ СТАТИЧЕСКОМ НАГРУЖЕНИИ

В качестве критерия потери устойчивости оболочек будем использовать критерий А. А. Ляпунова: нагрузка, при которой малому изменению входного параметра (нагрузки) соответствует существенное изменение выходного параметра (прогиба), считается нагрузкой потери устойчивости (критической нагрузкой). Практически, строится кривая «нагрузка q – прогиб W » в выбранной точке конструкции, например, в центре оболочки $\left(x = \frac{a_1 + a}{2}, y = \frac{b}{2} \right)$ [78].

Для примера рассмотрим ортотропную оболочку двоякой кривизны с размерами $a = b = 5,4$ м, $R_1 = R_2 = 20,25$ м, $h = 0,09$ м, шарнирно-неподвижно закрепленную по контуру и выполненную из стеклопластика с параметрами $E_1 = 0,294 \cdot 10^5$ МПа, $E_2 = 1,78 \cdot 10^4$ МПа, $\mu_{12} = 0,123$, $G_{12} = G_{13} = G_{23} = 0,301 \cdot 10^4$ МПа [152]. Нагрузка – внешняя, равномерно-распределенная, направленная по нормали к поверхности. Проведем расчет устойчивости данной конструкции в безразмерных параметрах при $N = 16$.

На Рисунке 3.3 показан полученный график зависимости «нагрузка $\bar{P}$ – прогиб $\bar{W}$ ». На графике присутствуют две кривые, соответствующие прогибу в центре конструкции $\bar{W}_c$ ($\xi = 0,5, \eta = 0,5$) и прогибу в четверти $\bar{W}_4$

($\xi = 0,25, \eta = 0,25$). Как видно из графика, поведение конструкции в разных ее точках может существенно различаться.

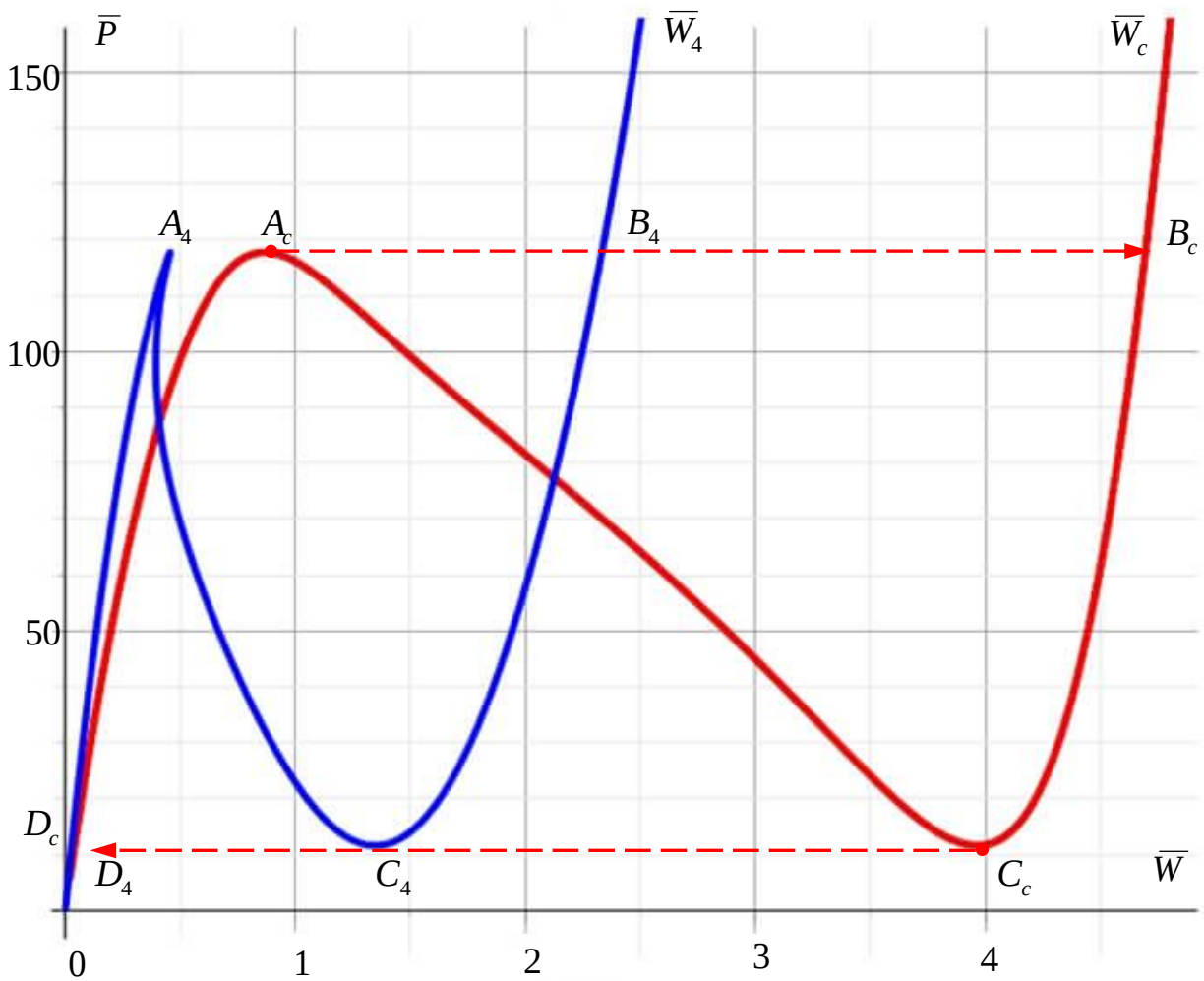


Рисунок 3.3. Зависимость «нагрузка $\bar{P}$ – прогиб $\bar{W}$ » для рассматриваемой оболочки

Экстремумы графика соответствуют нагрузкам, при которых происходит потеря устойчивости оболочки: максимумы соответствуют верхним критическим нагрузкам (на графике это точки A_c и A_4 , в зависимости от кривой), а минимумы – нижним (точки C_c и C_4). Следует отметить, что участок кривой между точками A_c и C_c на практике не реализуется, но обеспечивает непрерывность решения и возможность получения значения нижней критической нагрузки [78].

При постепенном увеличении значения нагрузки процесс происходит следующим образом: сначала достигается верхняя критическая нагрузка (точка A_c), происходит переход на новое равновесное состояние в точку B_c посредством

«хлопка» (потеря устойчивости по критерию А. А. Ляпунова), на графике этот переход показан пунктиром. Аналогичный переход происходит и на кривой $\bar{W}_4$, но он не показан, чтобы не загромождать график. Изменение поля прогибов, происходящее при потере устойчивости, показано на Рисунке 3.4.

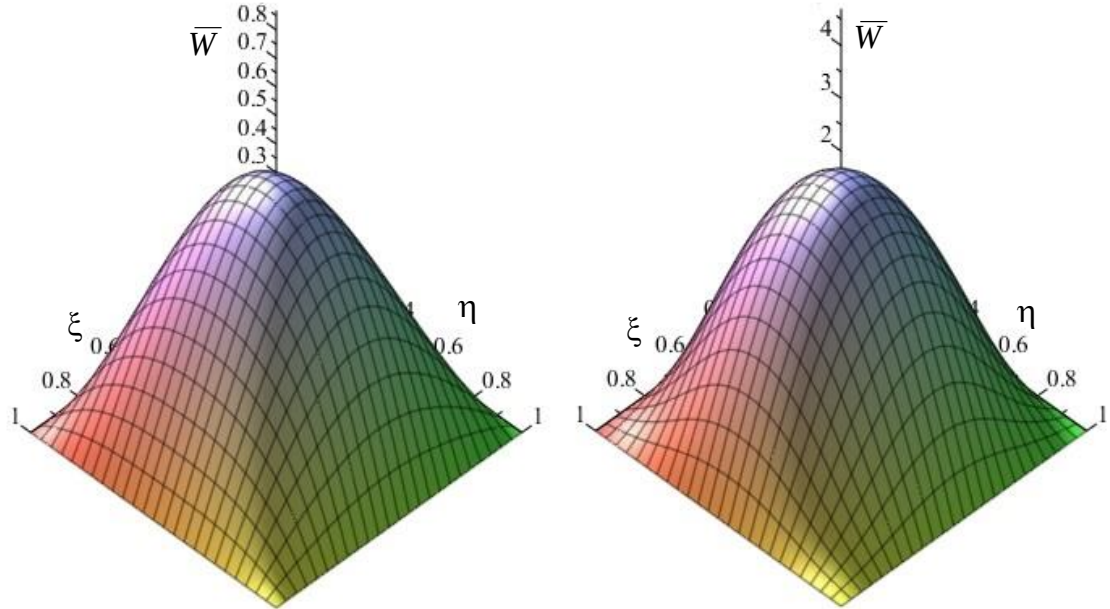


Рисунок 3.4. Перемещения $\bar{W}$ до и после потери устойчивости

Далее при последующем постепенном увеличении нагрузки прогиб также постепенно увеличивается, и потерь устойчивости больше не наблюдается.

Таким образом момент потери устойчивости конструкции определяется исходя из графика, но программно это реализуется немного иначе.

При использовании алгоритма, основанного на методе Ритца и методе продолжения решения по наилучшему параметру, экстремумы кривой в пространстве состояний (соответствующие критическим нагрузкам) определяются из условия $\det(J) = 0$. В то же время, этот критерий показывает и наличие точек бифуркации [49, 158], но в отличие от критических нагрузок, при обнаружении точки бифуркации перехода на новое равновесное состояние не происходит – малым изменениям нагрузки соответствуют малые изменения искомых функций (не только прогиба $\bar{W}$, но и $\bar{U}, \bar{V}, \bar{\Psi}_x, \bar{\Psi}_y$).

На Рисунке 3.5 показан график зависимости «определитель $\det(J)$ – нагрузка $\bar{P}$ ». Как видно из этого графика, при нагрузках, соответствующих критическим, происходит смена знака $\det(J)$ и его переход через значение нуля.

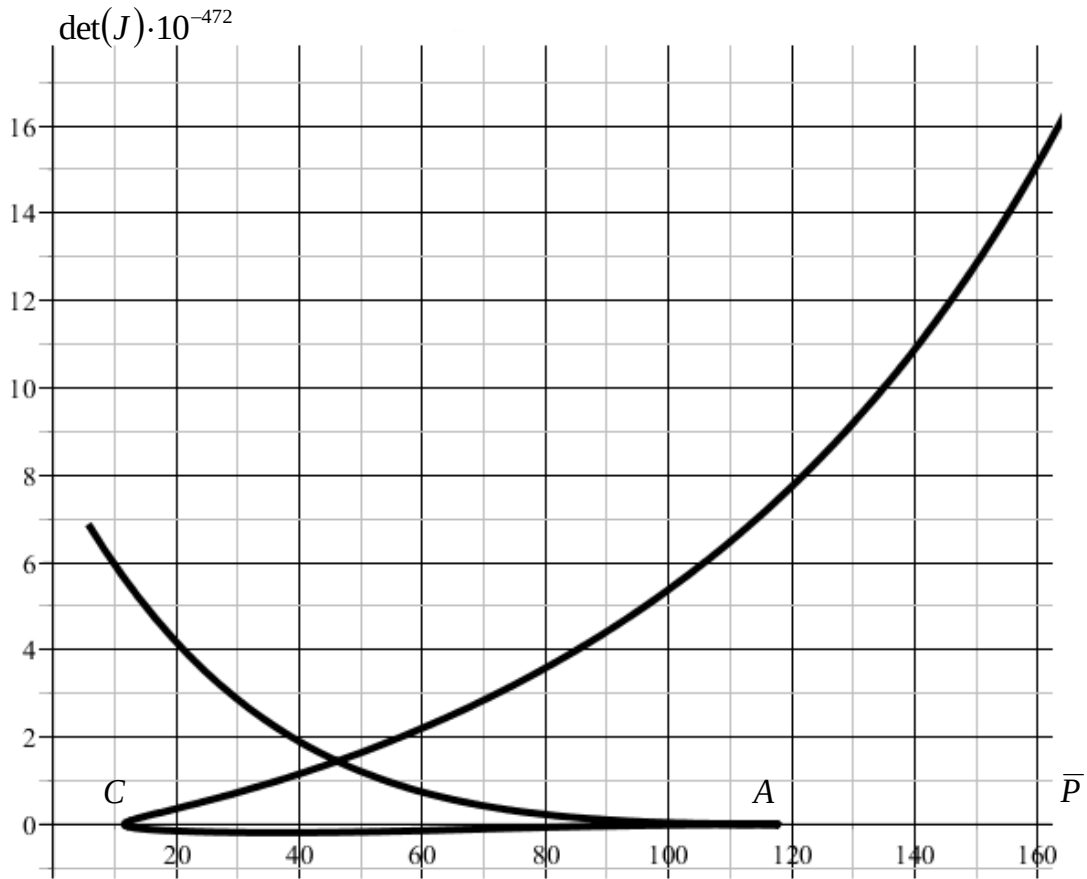


Рисунок 3.5. График зависимости «определитель $\det(J)$ – нагрузка $\bar{P}$ »

В особых точках возможность продолжения решения обычно по-прежнему сохраняется, но само продолжение может стать неоднозначным, т.е. возникает возможность ветвления кривой множества решений системы.

Следует отметить, что при использовании метода продолжения решения по наилучшему параметру обход особых точек не требует смены параметра и происходит автоматически.

Данный подход позволяет исследовать не только устойчивость конструкции, но и ее закритическое деформирование.

3.5 МЕТОДИКА ИССЛЕДОВАНИЯ ПРОЧНОСТИ ОБОЛОЧЕК ИЗ ОРТОТРОПНЫХ МАТЕРИАЛОВ ПРИ СТАТИЧЕСКОМ НАГРУЖЕНИИ

При использовании метода продолжения решения по наилучшему параметру кривая «нагрузка – прогиб» строится пошагово. Таким образом, на каждом шаге есть возможность анализировать напряженно-деформированное состояние конструкции. Если для изотропной оболочки достаточно оценивать интенсивность напряжений [71], то для ортотропной и анизотропной необходимо использовать специальные критерии прочности. В этих критериях используются константы предельных значений напряжений в материале. Притом, значения пределов прочности в разных направлениях, а также на растяжение, сжатие и сдвиг, различны [130].

В работе [67] для пологих оболочек двоякой кривизны были проанализированы напряжения в разных слоях оболочки вдоль координаты z , и показано, что наибольшие напряжения возникают на внешней стороне конструкции при $z = -h / 2$. Поэтому, при подкреплении оболочки ребрами жесткости со стороны выпуклости, она становится более жесткой по сравнению с оболочкой, подкрепленной ребрами со стороны вогнутости. Однако, по технологическим соображениям оболочки зачастую подкрепляют ребрами жесткости именно с внутренней стороны.

Для проверки состояния конструкции по критериям прочности, напряжения $\sigma_x, \sigma_y, \tau_{xy}, \tau_{xz}, \tau_{yz}$ будем вычислять при $z = -h / 2$

Для примера рассмотрим ту же оболочку двоякой кривизны, что и в предыдущем параграфе, с размерами $a = b = 5,4$ м, $R_1 = R_2 = 20,25$ м, $h = 0,09$ м, шарнирно-неподвижно закрепленную по контуру и выполненную из материала Т-10/УПЭ22-27 [152]. Помимо уже указанных ранее параметров этого материала, укажем необходимые для анализа прочности предельные значения $F_1^+ = 508$ МПа, $F_2^+ = 246$ МПа, $F_{12} = 43$ МПа, $F_{12,45}^+ = 130$ МПа, $F_1^- = -209$ МПа, $F_2^- = -117$ МПа,

$F_{12,45}^- = -160$ МПа. Здесь F_x^+, F_y^+ – пределы прочности при растяжении в направлениях x, y ; F_x^-, F_y^- – пределы прочности при сжатии; F_{yz}, F_{xz}, F_{xy} – пределы прочности при сдвиге в плоскостях yOz, xOz, xOy ; $F_{xy,45}^+, F_{xy,45}^-$ – пределы прочности при сдвиге в площадках, повернутых на угол 45° .

На Рисунке 3.6 приводится зависимость «нагрузка $\bar{P}$ – прогиб $\bar{W}$ » рассматриваемой оболочки.

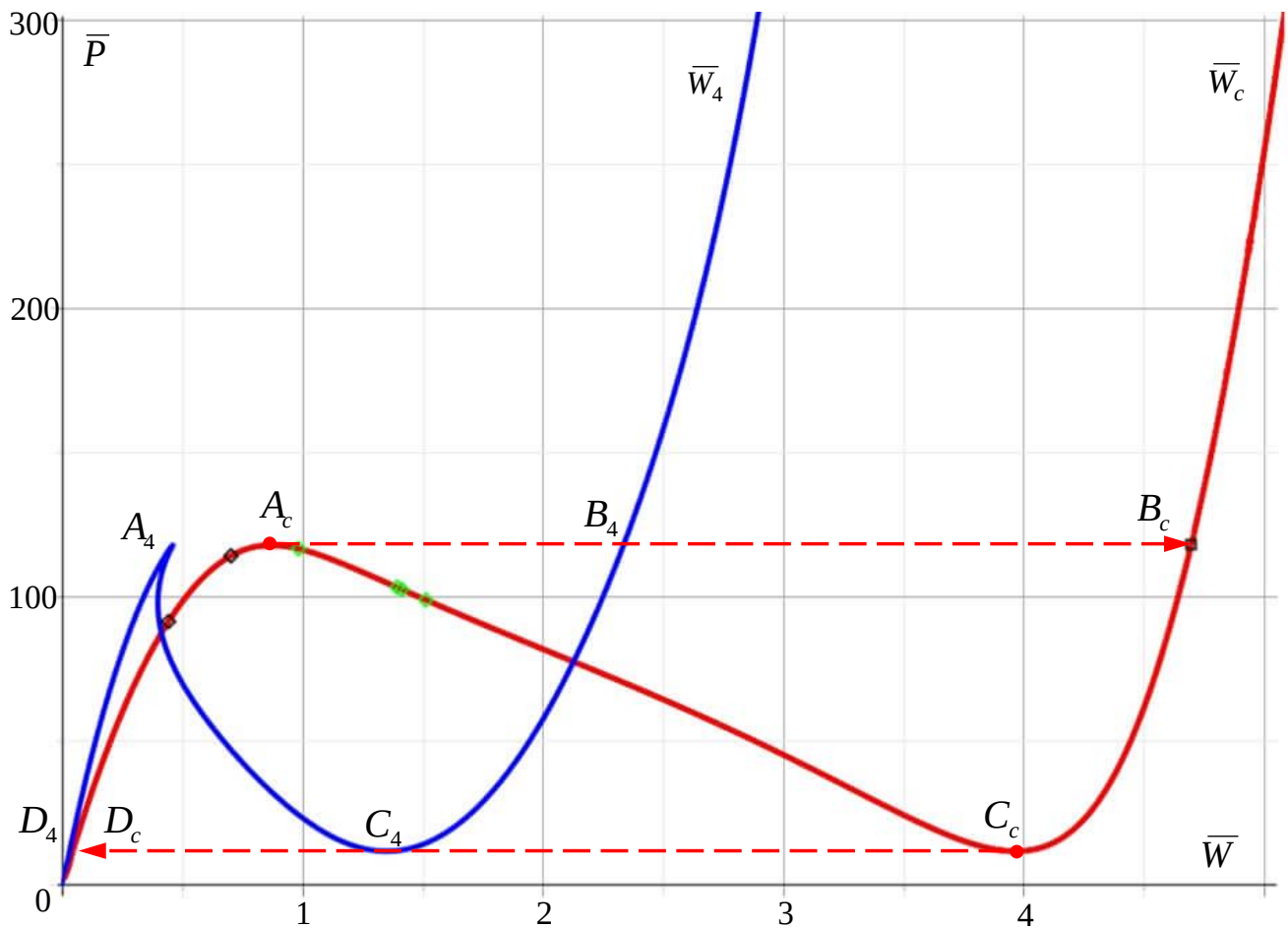


Рисунок 3.6. Зависимость «нагрузка $\bar{P}$ – прогиб $\bar{W}$ » с отмеченными значениями предельных нагрузок

Выполнение условий прочности в соответствии с критериями прочности (подробно рассматриваются в следующей главе) анализируется на каждом шаге нагружения и аналогично продвижению по кривой графика «нагрузка – прогиб».

Значения компонент напряжений и получаемые на их основе значения критериев анализируются по всей области оболочки. В том случае, если хотя бы в одной точке конструкции критерий прочности не выполняется, то текущее

значение нагрузки фиксируется и помечается как начало невыполнения условий прочности. В зависимости от того, из какого материала выполнена конструкция, это может быть началом хрупкого разрушения или началом появления деформаций текучести. На Рисунке 3.6 состояния конструкции, в которых началось невыполнение условий прочности, полученные по разным критериям, отмечены на кривой $\bar{W}_c$ черными точками (точки поставлены только на одной кривой с целью не загромождать график).

Отдельного внимания здесь заслуживает пояснение ситуации, когда начало невыполнения условий прочности случилось на нисходящей ветви графика зависимости «нагрузка – прогиб» (зеленые точки на графике). Данная часть графика на практике не реализуется, и носит исключительно математический характер. В таком случае, в качестве нужного значения нагрузки берется нагрузка, соответствующая потере устойчивости конструкции (например, переход из точки A_c графика в точку B_c в новое равновесное состояние). С физической точки зрения, это соответствует тому, что в момент потери устойчивости значения напряжений резко возросли, и начались необратимые изменения в материале конструкции.

В настоящий момент нет однозначного мнения, какой критерий является наиболее точным и универсальным. Как правило, есть отдельные данные о том, что какой-то конкретный критерий хорошо работает для какого-то конкретного материала, что подтверждается обычно данными эксперимента. В связи с этим, актуальным является использовать сразу несколько критериев. Как видно из Рисунка 3.6, разные критерии дают разные значения.

Для удобства анализа невыполнения условий прочности, автором предложено свести все критерии к виду $K_r < 1$. Анализ значения критерия должен проводиться по всей области конструкции.

Если взять максимальные значения критериев на каждом шаге нагружения, и построить соответствующий график, получим Рисунок 3.7 (здесь взят укрупненный фрагмент). При переходе кривой критерия через значение «1» считаем, что условия прочности перестали выполняться.

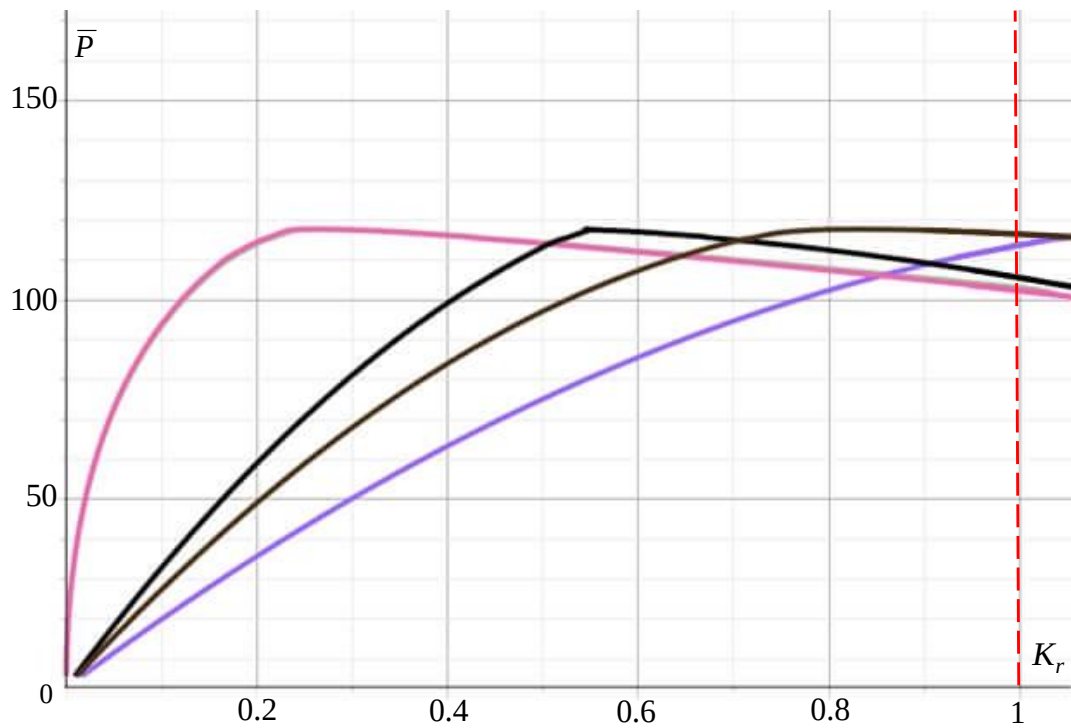


Рисунок 3.7. Значения критериев прочности (укрупненный фрагмент)

Такой вид графика позволяет наиболее наглядно оценить различия в критериях прочности и сделать выводы о получаемых значениях.

Также интерес может представлять процесс развития областей невыполнения условий прочности. Анализ этих областей может дать необходимую информацию о необходимости усиления конструкции в конкретных местах. На Рисунке 3.8 в качестве примера показано поле критерия Гольденблата – Копнова и развившиеся при увеличении нагрузки области невыполнения условий прочности.

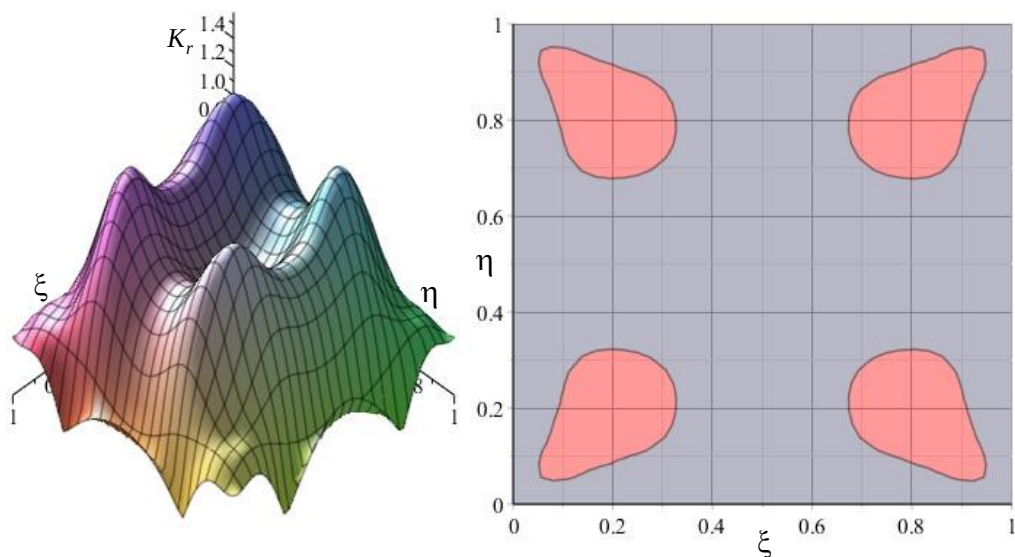


Рисунок 3.8. Поле критерия Гольденблата – Копнова и развившиеся области невыполнения условий прочности

3.6 ПРОГРАММНАЯ РЕАЛИЗАЦИЯ АЛГОРИТМА

В данной работе для реализации предложенного алгоритма используется среда аналитических вычислений *Maple* [130].

При использовании пакета аналитических вычислений *Maple* нет необходимости проводить громоздкую и трудоемкую предварительную работу по выводу коэффициентов СНАУ и их дальнейшему программированию. Кроме того, при проведении таких действий вручную существенно повышается вероятность ошибки из-за человеческого фактора. Современные передовые технологии программирования позволяют хранить в памяти ЭВМ огромные символьные выражения (в данном случае – формулы) и проводить над ними аналитические преобразования (например, дифференцирование, интегрирование, подстановка и т.д.)

Система аналитических вычислений *Maple* позволяет осуществлять распараллеливание вычислительных процессов и распределять нагрузку на несколько потоков. Также для оптимизации процесса вычислений применяется адаптивный выбор сетки, что позволяет достичь достаточной точности вблизи особых точек кривой решений, и в то же время быстро проходить ровные участки кривой. Так, если угол между векторами решений на предыдущем и текущем шаге оказался слишком большим (используется функция **angle(вектор1, вектор2)**), то производится уменьшение шага по дуге в 2 раза и откат итерационного процесса на два шага назад (для рассматриваемых в данной работе задач такое ограничение угла было выбрано $\Delta_1 = 0,01$). Если значение угла находится в пределах от $\Delta_2 = 0,005$ до $\Delta_1 = 0,01$, то длина дуги сохраняется такой же, как на предыдущем шаге. Если значение угла не превысило $\Delta_2 = 0,005$, то длина шага по дуге увеличивается в 2 раза по сравнению с предыдущим шагом.

Такой алгоритм прохождения кривой «нагрузка – прогиб» позволяет обходить особые точки графика, петли и перегибы с достаточной точностью и при существенной экономии машинного времени. Чтобы при прохождении особой

точки не возникло программных сложностей с фиксацией этого момента при многократном уменьшении длины дуги и откатами итераций, при обнаружении момента смены знака определителя матрицы Якоби (критерий нахождения особой точки), длина дуги фиксируется и сохраняется такой же, как на предыдущем шаге. Такая фиксация длится еще три шага после прохождения особой точки.

Итерационный процесс завершается или по желанию пользователя, или при достижении какого-либо заранее указанного параметра нагрузки.

Следует отметить, что поле прогибов, отложенное от плоскости в системе Maple, недостаточно наглядно отражает поведение реальной конструкции. Одним из вариантов решения данной проблемы является построение графической модели исследуемой конструкции с вычитанием из координат полученного поля прогиба. Притом, для увеличения наглядности может быть использован коэффициент масштабирования поля прогибов k_m .

Для комплексного исследования поведения тонкостенных оболочечных конструкций из ортотропных материалов при статическом нагружении автором была разработана программа для ЭВМ (Семенов А.А. «DimShell: dimensionless calculations of orthotropic shells» Свидетельство № 2015661781, РФ от 09.11.2015 г., Приложение А), с помощью которой были получены результаты, представленные в данной работе.

3.7 ВЫВОДЫ

В данной работе для задач статики подробно представлен алгоритм, согласно которому к функционалу применяется метод Ритца для сведения вариационной задачи к системе нелинейных алгебраических уравнений. Полученная система нелинейных алгебраических уравнений решается методом продолжения решения по наилучшему параметру [158], так как он сводит решение нелинейной задачи к последовательности решения линейных задач и позволяет находить верхние и нижние критические нагрузки, точки бифуркации; обходить особые точки кривой «нагрузка – прогиб» и исследовать закритическое поведение конструкции. Кроме

того, по сравнению с другими методами продолжения решения по параметру, этот метод не требует смены параметра продолжения решения при обходе особых точек.

Среда для выполнения аналитических вычислений *Maple* имеет полный набор всех необходимых математических и графических инструментов для решения задач устойчивости и прочности тонкостенных оболочек и позволяет использовать распараллеливание процессов вычислений.

Автором разработана программа для ЭВМ, позволяющая проводить комплексные исследования прочности и устойчивости оболочечных конструкций при статическом нагружении с учетом геометрической нелинейности, поперечных сдвигов, ортотропии материала и наличия ребер жесткости.

Использование безразмерных параметров позволяет выравнивать порядок искомых функций, а, следовательно, и порядок неизвестных коэффициентов в системе уравнений, и инструментальная ошибка накапливается меньше. Однако, порядок параметра нагрузки $\bar{P}$ может существенно отличаться от порядка остальных параметров и для каждой конкретной задачи быть разным. Правильный подбор параметров точности расчета в методе продолжения решения по наилучшему параметру позволяет достаточно точно находить значения критических нагрузок, несмотря на разницу в порядках. Таким образом, расчеты в безразмерных параметрах следует признать более справедливыми [74].

ГЛАВА 4. ПРОЧНОСТЬ И УСТОЙЧИВОСТЬ ПОДКРЕПЛЕННЫХ ОРТОТРОПНЫХ ОБОЛОЧЕК ПРИ ДЕЙСТВИИ СТАТИЧЕСКОЙ НАГРУЗКИ

Тонкостенные оболочечные конструкции могут терять работоспособность не только из-за необратимых изменений в материале (потеря прочности), но и из-за потери устойчивости, когда малое изменение нагрузки приводит к существенному быстрому возрастанию перемещений (прогибов). В большинстве известных исследований авторами анализируется только что-то одно – или прочность, или устойчивость. Однако, бывает сложно заранее предугадать, что будет нарушено раньше. В связи с этим необходимо исследовать конструкции и на потерю устойчивости, и на начало невыполнения условий прочности, в том числе – по разным теориям прочности.⁵

4.1 ТЕОРИИ ПРОЧНОСТИ

Прочность конструкций, подверженных воздействию внешних нагрузок, анализируется по предельному состоянию материалов, из которых эти

⁵ По результатам проведенного исследования автором опубликованы, в том числе, работы:

- Семенов, А. А. Анализ прочности оболочечных конструкций из современных материалов в соответствии с различными критериями прочности / А. А. Семенов // *Diagnostics, Resource and Mechanics of Materials and Structures*. – 2018. – № 1. – С. 16–33.
- Semenov, A. Strength of Steel Shell Cylindrical Panels Reinforced with an Orthogonal Grid of Stiffeners / A. Semenov // *Journal of Applied and Computational Mechanics*. – 2022. – Vol. 8. – No. 2. – P. 723–732.
- Karpov, V. V. Structural anisotropy method for shells with orthogonal stiffeners / V. V. Karpov, A. A. Semenov // *Structures*. – 2021. – Vol. 34. – P. 3206–3221.
- Karpov, V. V. Refined model of stiffened shells / V. V. Karpov, A. A. Semenov // *International Journal of Solids and Structures*. – 2020. – Vol. 199. – P. 43–56.
- Semenov, A. Buckling of Shallow Shells of Double Curvature Stiffened by Ribs from the Outside / A. Semenov // *Journal of the Serbian Society for Computational Mechanics*. – 2022. – Vol. 16. – No. 1. – P. 54–64.
- Semenov, A. Buckling of Shell Panels Made of Fiberglass and Reinforced with an Orthogonal Grid of Stiffeners / A. Semenov // *Journal of Applied and Computational Mechanics*. – 2021. – Vol. 7. – No. 3. – P. 1856–1861.
- Семенов, А. А. Уточненный дискретный метод расчета подкреплённых ортотропных оболочек / А. А. Семенов // *Вестник ПНИПУ. Механика*. – 2022. – № 4. – С. 90–102.
- Карпов, В. В. Критерии прочности для тонкостенных ортотропных оболочек. Ч. 1: Анализ основных критериев прочности изотропных и ортотропных материалов / В. В. Карпов, А. А. Семенов // *Вестник гражданских инженеров*. – 2014. – № 6(47). – С. 43–51.
- Семенов, А. А. Геометрически нелинейная математическая модель расчета прочности и устойчивости ортотропных оболочечных конструкций: дис. ... канд. техн. наук: 05.23.17 / А. А. Семенов. – СПб.: СПбГАСУ, 2014. – 183 с.

конструкции изготовлены. Под потерей прочности здесь понимается состояние, когда в материале начинают происходить необратимые изменения. Фактически, это состояние наступает, если хотя бы в одной точке конструкции перестает выполняться критерий прочности.

При дальнейшем увеличении нагрузки области невыполнения условий прочности начинают увеличиваться, и анализ их распределения и развития является актуальной задачей [128].

4.1.1 Критерии предельного состояния для изотропного материала

Рассмотрим критерии прочности изотропных материалов [75].

Критерий Кулона

$$\sigma_1 - \sigma_3 = \bar{\sigma}_p, \quad (\text{при } \sigma_1 > \sigma_2 > \sigma_3), \quad (4.1)$$

и критерий Мизеса

$$(\sigma_1 - \sigma_2)^2 + (\sigma_2 - \sigma_3)^2 + (\sigma_3 - \sigma_1)^2 = 2\bar{\sigma}_p^2$$

подтверждены экспериментально для многих материалов. Здесь $\bar{\sigma}_p$ – предельные значения напряжения при растяжении.

Критерий Мизеса применительно к исследованию прочности оболочечных конструкций записывается в виде

$$\sigma_i \leq \sigma_T, \quad (4.2)$$

где σ_T – предел текучести материала; σ_i – интенсивность напряжений:

$$\sigma_i = \sqrt{\sigma_x^2 - \sigma_x\sigma_y + \sigma_y^2 + 3(\tau_{xy}^2 + \tau_{xz}^2 + \tau_{yz}^2)}. \quad (4.3)$$

Для единообразия с остальными критериями прочности, рассматриваемыми в данной работе, и применения методики исследования прочности, описанной в предыдущей главе, запишем этот критерий в виде

$$K_r = \frac{\sigma_i}{\sigma_T} \leq 1. \quad (4.4)$$

Для исследования оболочечных конструкций из хрупких материалов (например, бетона) используется критерий Кулона – Мора

$$\sigma_1 - \frac{R_{bt}}{R_b} \sigma_3 = R_{bt}, \quad (4.5)$$

где R_{bt}, R_b – расчетные сопротивления бетона осевому растяжению и осевому сжатию соответственно. Здесь главные напряжения расположены в порядке убывания $\sigma_1 > \sigma_2 > \sigma_3$ [75].

Критерий Кулона – Мора также можно записать в виде, аналогичном (4.4):

$$K_r = \frac{\sigma_1}{R_{bt}} - \frac{\sigma_3}{R_b} \leq 1. \quad (4.6)$$

Главные нормальные напряжения $\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3$ для оболочечных конструкций вычисляются из решения кубического уравнения

$$\sigma^3 - (\sigma_x + \sigma_y) \sigma^2 + (\sigma_x \sigma_y - \tau_{xy}^2 - \tau_{xz}^2 - \tau_{yz}^2) \sigma - (2\tau_{xz} \tau_{yz} \tau_{xy} - \sigma_x \tau_{yz}^2 - \sigma_y \tau_{xz}^2) = 0.$$

Главные напряжения не изменяются при повороте координатных осей, следовательно, и коэффициенты этого уравнения не зависят от выбора координатной системы [75].

Если напряжения вычисляются на внешней стороне оболочки при $z = -h/2$, то $\tau_{xz} = \tau_{yz} = 0$, и уравнение упрощается. В этом случае одно из главных напряжений обращается в ноль, а остальные находятся по формуле

$$\sigma_{m,n} = \frac{\sigma_x + \sigma_y}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{\sigma_x - \sigma_y}{2}\right)^2 + \tau_{xy}^2}.$$

Затем все три главных напряжения располагаются в порядке убывания $\sigma_1 > \sigma_2 > \sigma_3$ [75].

4.1.2 Критерии предельного состояния для ортотропного материала

Критерии прочности анизотропных материалов можно найти в работах И. И. Гольденבלата и В. А. Копнова [14, 43, 85], К. В. Захарова [59], Б. И. Ковальчука

[95], А. А. Лебедева [95, 119], А. К. Малмейстера [98], Г. С. Писаренко [119], Л. Фишера [194], Р. Хилла и др.

Следует отметить, что для ортотропных материалов не существует единого универсального критерия прочности, поэтому приходится использовать несколько критериев с последующим анализом полученных результатов. Подобные исследования, рассматривающие процесс деформирования конструкций в соответствии сразу с несколькими критериями, можно найти в работах [2, 50, 76, 111, 244, 265].

В известных работах, где анализируется прочность конструкций, наиболее часто встречаются следующие критерии: максимальных напряжений [2, 156, 265, 292], Гольденблата – Копнова [5, 50, 85, 111, 121, 152], Цая – Ву [19, 124, 155, 242, 247, 265], Хоффмана [2, 99, 124, 265], Хашина [50, 99, 111, 205, 269].

Из недавних исследований по развитию и применению теорий прочности следует выделить значимые работы Mao-Hong Yu [293], С. В. Цветкова [19, 155], Н. А. Абросимова и А. В. Елесина [2], М. М. Алиева и др. [4].

В работе [86] приводятся подробные описания определяющих соотношений критериев прочности, применяемых для бетонов, в частности, критериев Г. А. Гениева, Г. А. Гениева – Н. М. Аликовой, Е. С. Лейтеса, А. В. Яшина, С. Ф. Клованича – Д. И. Безушко, К. J. Willam – Е. Р. Warnke и Н. И. Карпенко.

Сравнительно немного исследований связано с применением различных теорий прочности к расчету оболочек и их панелей [2, 14, 80, 200, 245, 265].

Обширный и значимый сравнительный анализ критериев прочности можно найти в работе [111] (Е. И. Орешко, В. С. Ерасов, Д. В. Гриневич, П. В. Шершак).

Как отмечается в [155], феноменологический критерий прочности связывает возможность разрушения со значением тензора напряжений σ_{ij} в материале и выражается в общем виде соотношением

$$f(\sigma_{ij}) \leq 1. \quad (4.7)$$

В выражение критерия входит набор констант, характеризующих прочностные свойства материала. Критерию прочности соответствует поверхность

прочности в шестимерном (для общего случая) пространстве напряжений $\sigma_{11}, \sigma_{22}, \sigma_{33}, \sigma_{13}, \sigma_{23}, \sigma_{12}$.

Далее рассмотрим критерий Liu – Huang – Stout [235] (в обозначениях, принятых в работе [235]), который является обобщением критерия Мизеса – Хилла (учитывающего ортотропию, но не учитывающего разнсопротивляемость) и критерия Друкера – Прагера (учитывающего разнсопротивляемость, но не учитывающего ортотропию):

$$\left\{ F(\sigma_{22} - \sigma_{33})^2 + G(\sigma_{33} - \sigma_{11})^2 + H(\sigma_{11} - \sigma_{22})^2 + 2L\sigma_{23}^2 + 2M\sigma_{31}^2 + 2N\sigma_{12}^2 \right\}^{\frac{1}{2}} + I\sigma_{11} + J\sigma_{22} + K\sigma_{33} \leq 1, \quad (4.8)$$

где

$$\begin{aligned} F &= \frac{1}{2} \left\{ \left(\frac{\sigma_2^T + \sigma_2^C}{2\sigma_2^T \sigma_2^C} \right)^2 + \left(\frac{\sigma_3^T + \sigma_3^C}{2\sigma_3^T \sigma_3^C} \right)^2 - \left(\frac{\sigma_1^T + \sigma_1^C}{2\sigma_1^T \sigma_1^C} \right)^2 \right\}, \\ G &= \frac{1}{2} \left\{ \left(\frac{\sigma_3^T + \sigma_3^C}{2\sigma_3^T \sigma_3^C} \right)^2 + \left(\frac{\sigma_1^T + \sigma_1^C}{2\sigma_1^T \sigma_1^C} \right)^2 - \left(\frac{\sigma_2^T + \sigma_2^C}{2\sigma_2^T \sigma_2^C} \right)^2 \right\}, \\ H &= \frac{1}{2} \left\{ \left(\frac{\sigma_1^T + \sigma_1^C}{2\sigma_1^T \sigma_1^C} \right)^2 + \left(\frac{\sigma_2^T + \sigma_2^C}{2\sigma_2^T \sigma_2^C} \right)^2 - \left(\frac{\sigma_3^T + \sigma_3^C}{2\sigma_3^T \sigma_3^C} \right)^2 \right\}, \quad I = -\frac{\sigma_1^T - \sigma_1^C}{2\sigma_1^T \sigma_1^C}, \\ J &= -\frac{\sigma_2^T - \sigma_2^C}{2\sigma_2^T \sigma_2^C}, \quad K = -\frac{\sigma_3^T - \sigma_3^C}{2\sigma_3^T \sigma_3^C}, \quad L = \frac{1}{2(\tau_{23}^S)^2}, \quad M = \frac{1}{2(\tau_{31}^S)^2}, \quad N = \frac{1}{2(\tau_{12}^S)^2}. \end{aligned}$$

Здесь $\sigma_1^T, \sigma_2^T, \sigma_3^T$ и $\sigma_1^C, \sigma_2^C, \sigma_3^C$ – пределы прочности при растяжении и сжатии в направлениях x, y, z соответственно; $\tau_{12}^S, \tau_{31}^S, \tau_{23}^S$ – пределы прочности при сдвиге в плоскостях xOy, xOz, yOz .

Для плоского напряженного состояния и с учетом того, что $\tau_{xz} = \tau_{yz} = 0$, критерий Liu – Huang – Stout запишется в следующем виде:

$$\left\{ F\sigma_{22}^2 + G\sigma_{11}^2 + H(\sigma_{11} - \sigma_{22})^2 + 2N\sigma_{12}^2 \right\}^{\frac{1}{2}} + I\sigma_{11} + J\sigma_{22} \leq 1, \quad (4.9)$$

где

$$F = \frac{1}{2} \left\{ \left(\frac{\sigma_2^T + \sigma_2^C}{2\sigma_2^T \sigma_2^C} \right)^2 - \left(\frac{\sigma_1^T + \sigma_1^C}{2\sigma_1^T \sigma_1^C} \right)^2 \right\}, \quad G = \frac{1}{2} \left\{ \left(\frac{\sigma_1^T + \sigma_1^C}{2\sigma_1^T \sigma_1^C} \right)^2 - \left(\frac{\sigma_2^T + \sigma_2^C}{2\sigma_2^T \sigma_2^C} \right)^2 \right\},$$

$$H = \frac{1}{2} \left\{ \left(\frac{\sigma_1^T + \sigma_1^C}{2\sigma_1^T \sigma_1^C} \right)^2 + \left(\frac{\sigma_2^T + \sigma_2^C}{2\sigma_2^T \sigma_2^C} \right)^2 \right\}, \quad I = -\frac{\sigma_1^T - \sigma_1^C}{2\sigma_1^T \sigma_1^C}, \quad J = -\frac{\sigma_2^T - \sigma_2^C}{2\sigma_2^T \sigma_2^C}, \quad N = \frac{1}{2(\tau_{12}^S)^2}.$$

Как отмечается в работе [121], критерии прочности, учитывающие направленный характер разрушения волокнистых композитов, позволяют правильное интерпретировать экспериментальные данные и анализировать прочность конструкций из композиционных материалов.

Далее для оценки прочности ортотропных оболочек и их панелей используем семь критериев. После приведения их к единым обозначениям, используемым в данной работе, получим:

- Критерий 1 – критерий максимальных напряжений

$$\frac{\sigma_{11}}{F_1^-} \leq 1, \quad \frac{\sigma_{11}}{F_1^+} \leq 1, \quad \frac{\sigma_{22}}{F_2^-} \leq 1, \quad \frac{\sigma_{22}}{F_2^+} \leq 1, \quad \frac{\tau_{12}}{F_{12}^-} \leq 1, \quad \frac{\tau_{12}}{F_{12}^+} \leq 1. \quad (4.10)$$

Фактически, данный критерий включает в себя 6 критериев, что дает наибольшее количество информации об НДС конструкции. Однако, не дает информации о том, какой совокупный эффект дают эти компоненты и как они влияют друг на друга.

- Критерий 2 – критерий Мизеса – Хилла

$$\frac{\sigma_{11}^2}{F_1^2} - \frac{\sigma_{11}\sigma_{22}}{F_1 F_2} + \frac{\sigma_{22}^2}{F_2^2} + \frac{\tau_{12}^2}{F_{12}^2} \leq 1. \quad (4.11)$$

- Критерий 3 – критерий Фишера [194]

$$\frac{\sigma_{11}^2}{F_1^2} - K_f \frac{\sigma_{11}\sigma_{22}}{F_1 F_2} + \frac{\sigma_{22}^2}{F_2^2} + \frac{\tau_{12}^2}{F_{12}^2} \leq 1, \quad \text{где } K_f = \frac{E_1(1+\mu_{21}) + E_2(1+\mu_{12})}{2\sqrt{E_1 E_2 (1+\mu_{21})(1+\mu_{12})}}. \quad (4.12)$$

- Критерий 4 – критерий Гольденблата – Копнова [43]

$$\frac{1}{2} \left(\frac{1}{F_1^+} + \frac{1}{F_1^-} \right) \sigma_{11} + \frac{1}{2} \left(\frac{1}{F_2^+} + \frac{1}{F_2^-} \right) \sigma_{22} +$$

$$\begin{aligned}
& + \frac{1}{2} \left\{ \left(\frac{F_1^+ - F_1^-}{F_1^+ F_1^-} \right)^2 \sigma_{11}^2 + \left(\frac{F_2^+ - F_2^-}{F_2^+ F_2^-} \right)^2 \sigma_{22}^2 + \right. \\
& \left. + \left[\left(\frac{F_1^+ - F_1^-}{F_1^+ F_1^-} \right)^2 + \left(\frac{F_2^+ - F_2^-}{F_2^+ F_2^-} \right)^2 - \left(\frac{F_{12,45}^+ - F_{12,45}^-}{F_{12,45}^+ F_{12,45}^-} \right)^2 \right] \sigma_{11} \sigma_{22} + \frac{4\tau_{12}^2}{F_{12}^2} \right\}^{\frac{1}{2}} \leq 1. \quad (4.13)
\end{aligned}$$

- Критерий 5 – критерий Liu – Huang – Stout [235]

$$\left\{ F\sigma_{22}^2 + G\sigma_{11}^2 + H(\sigma_{11} - \sigma_{22})^2 + 2N\tau_{12}^2 \right\}^{\frac{1}{2}} + I\sigma_{11} + J\sigma_{22} \leq 1, \quad (4.14)$$

где

$$F = \frac{1}{2} \left\{ \left(\frac{F_y^+ + F_y^-}{2F_y^+ F_y^-} \right)^2 - \left(\frac{F_x^+ + F_x^-}{2F_x^+ F_x^-} \right)^2 \right\}, \quad G = \frac{1}{2} \left\{ \left(\frac{F_x^+ + F_x^-}{2F_x^+ F_x^-} \right)^2 - \left(\frac{F_y^+ + F_y^-}{2F_y^+ F_y^-} \right)^2 \right\},$$

$$H = \frac{1}{2} \left\{ \left(\frac{F_x^+ + F_x^-}{2F_x^+ F_x^-} \right)^2 + \left(\frac{F_y^+ + F_y^-}{2F_y^+ F_y^-} \right)^2 \right\}, \quad I = -\frac{F_x^+ - F_x^-}{2F_x^+ F_x^-},$$

$$J = -\frac{F_y^+ - F_y^-}{2F_y^+ F_y^-}, \quad N = \frac{1}{2(F_{xy})^2}.$$

- Критерий 6 – критерий Цая – Ву [279]

$$\begin{aligned}
& \left(\frac{1}{F_x^+} + \frac{1}{F_x^-} \right) \sigma_{11} + \left(\frac{1}{F_y^+} + \frac{1}{F_y^-} \right) \sigma_{22} - \frac{1}{F_x^+ F_x^-} \sigma_{11}^2 - \frac{1}{F_y^+ F_y^-} \sigma_{22}^2 - \\
& - \frac{1}{2} \sqrt{\frac{1}{F_x^+ F_x^-} \frac{1}{F_y^+ F_y^-}} \sigma_{11} \sigma_{22} - \frac{1}{F_{xy}^+ F_{xy}^-} \tau_{12}^2 \leq 1. \quad (4.15)
\end{aligned}$$

- Критерий 7 – критерий Хоффмана [2]

$$\begin{aligned}
& \frac{1}{2} \left(\frac{1}{F_y^+ F_y^-} - \frac{1}{F_x^+ F_x^-} \right) \sigma_{11}^2 + \frac{1}{2} \left(\frac{1}{F_x^+ F_x^-} - \frac{1}{F_y^+ F_y^-} \right) \sigma_{22}^2 + \left(\frac{1}{F_x^+} + \frac{1}{F_x^-} \right) \sigma_{11} + \\
& + \left(\frac{1}{F_y^+} + \frac{1}{F_y^-} \right) \sigma_{22} - \frac{1}{2} \left(\frac{1}{F_y^+ F_y^-} + \frac{1}{F_x^+ F_x^-} \right) (\sigma_{11} - \sigma_{22})^2 - \frac{1}{F_{xy}^+ F_{xy}^-} \tau_{xy}^2 \leq 1. \quad (4.16)
\end{aligned}$$

Для критериев 2 и 3 имеет место условие:

$$F_1 = \begin{cases} F_1^+ & \text{при } \sigma_{11} \geq 0, \\ F_1^- & \text{при } \sigma_{11} < 0, \end{cases} \quad F_2 = \begin{cases} F_2^+ & \text{при } \sigma_{22} \geq 0, \\ F_2^- & \text{при } \sigma_{22} < 0. \end{cases} \quad (4.17)$$

Следует отметить, что в некоторых источниках в предельных значениях сжимающих напряжений знак «–» не показан. Для единообразия и согласованности записи критериев с вычисляемыми значениями компонент напряжений предполагается, что значения сжимающих напряжений, а также их предельные значения имеют знак «–». Здесь (1, 2, 3) – ортогональная система координат, соответствующая осям ортотропии материала; F_1^+, F_2^+ – пределы прочности при растяжении в направлениях ортотропии 1, 2 [МПа]; F_1^-, F_2^- – при сжатии; F_{12} – предел прочности при сдвиге в плоскости ортотропии; $F_{12,45}^+, F_{12,45}^-$ – пределы прочности на сдвиг по площадкам, наклоненным к основным под углом 45° [МПа]; $\sigma_{11}, \sigma_{22}, \sigma_{33}$ – нормальные напряжения в направлениях осей ортотропии 1, 2, 3 [МПа]; $\tau_{12}, \tau_{13}, \tau_{23}$ – касательные напряжения в плоскостях 1О2, 1О3, 2О3 [МПа].

В дальнейшем, если не указано обратное, будем считать, что оси ортотропии 1, 2 совпадают с осями локальной системы координат x, y соответственно [128].

4.2 НЕКОТОРЫЕ ИЗОТРОПНЫЕ И ОРТОТРОПНЫЕ МАТЕРИАЛЫ И ИХ МЕХАНИЧЕСКИЕ И ПРОЧНОСТНЫЕ ХАРАКТЕРИСТИКИ

Механические характеристики материалов рассматриваемых конструкций показаны в Таблице 4.1. Помимо оболочек из ортотропных материалов (углепластика [137, 156], стеклопластика [152, 280] и др.), для сравнения рассматривались изотропные оболочки, выполненные из стали и оргстекла. Параметры стали С345 были взяты в соответствии с ГОСТ 27772-2015 «Прокат для строительных стальных конструкций. Общие технические условия (с Поправками, с Изменением N 1)». В зависимости от толщины проката стали предел текучести σ_T будет разным (начиная от 265 МПа при $h = 0,08\text{--}0,16$ м до 345 МПа при $h = 0,002\text{--}0,01$ м). Будем это учитывать при расчете.

Таблица 4.1. Параметры ортотропных и изотропных материалов рассматриваемых конструкций

Параметр	Ортотропные								Изотропные		
	Углепластик				AS/3501 Graphite/Epoxy	Стеклопластик		Материал 2	Сталь С345	Материал 1	Оргстекло
	T300/976	T300/Epoxy	M60J/Epoxy	ЛУ- П/ЭНФБ		T- 10/УПЭ22 -27	E-Glass / Epoxy				
E_1 , МПа	$1,4 \cdot 10^5$	$1,25 \cdot 10^5$	$3,3 \cdot 10^5$	$1,4 \cdot 10^5$	$1,38 \cdot 10^5$	$2,94 \cdot 10^4$	$6,07 \cdot 10^4$	$0,2 \cdot 10^5$	$2,1 \cdot 10^5$	$0,3 \cdot 10^5$	$0,3 \cdot 10^4$
E_2 , МПа	$0,97 \cdot 10^4$	$0,78 \cdot 10^4$	$0,59 \cdot 10^4$	$0,97 \cdot 10^4$	$0,896 \cdot 10^4$	$1,78 \cdot 10^4$	$2,48 \cdot 10^4$	$0,4 \cdot 10^5$	$2,1 \cdot 10^5$	$0,3 \cdot 10^5$	$0,3 \cdot 10^4$
μ_{12}	0,29	0,34	0,32	0,3	0,3	0,123	0,23	0,1	0,3	0,3	0,35
G_{12} , МПа	$0,55 \cdot 10^4$	$0,44 \cdot 10^4$	$0,39 \cdot 10^4$	$0,46 \cdot 10^4$	$0,071 \cdot 10^5$	$0,301 \cdot 10^4$	$0,12 \cdot 10^5$	$1,0 \cdot 10^4$	$0,807 \cdot 10^5$	$0,154 \cdot 10^4$	$0,012 \cdot 10^5$
G_{13} , МПа	$0,55 \cdot 10^4$	$0,44 \cdot 10^4$	$0,39 \cdot 10^4$	$0,46 \cdot 10^4$	$0,071 \cdot 10^5$	$0,301 \cdot 10^4$	$0,12 \cdot 10^5$	$1,0 \cdot 10^4$	$0,807 \cdot 10^5$	$0,154 \cdot 10^4$	$0,012 \cdot 10^5$
G_{23} , МПа	$0,33 \cdot 10^4$	$0,44 \cdot 10^4$	$0,39 \cdot 10^4$	$0,46 \cdot 10^4$	$0,071 \cdot 10^5$	$0,301 \cdot 10^4$	$0,12 \cdot 10^5$	$1,0 \cdot 10^4$	$0,807 \cdot 10^5$	$0,154 \cdot 10^4$	$0,012 \cdot 10^5$
F_1^+ , МПа	1517	1760	1760	700	—	508	—	—	—	—	—
F_2^+ , МПа	46	80	30	27	—	246	—	—	—	—	—
F_1^- , МПа	-1599	-1570	-780	-600	—	-209	—	—	—	—	—
F_2^- , МПа	-253	-168	-168	-184	—	-117	—	—	—	—	—
F_{12} , МПа	41,4	98	39	55	—	43	—	—	—	—	—
$F_{12,45}^+$, МПа	—	—	—	—	—	130	—	—	—	—	—
$F_{12,45}^-$, МПа	—	—	—	—	—	-160	—	—	—	—	—
σ_T , МПа	—	—	—	—	—	—	—	—	345–265	—	75
ρ , кг/м ³	1500	1500	1500	1500	1540	1800	1800	—	7800	—	1190
Источник	[156]	[137]	[137]	[137]	[280]	[152]	[280]	[180]	—	[180]	[72]

4.3 ВАРИАНТЫ РАССМАТРИВАЕМЫХ КОНСТРУКЦИЙ

Для удобства соберем в этом параграфе данные обо всех конструкциях, исследованных в текущей работе.

Для того, чтобы однозначно интерпретировать входные данные, приведем еще раз схематичное изображение рассматриваемых видов оболочек с принятой локальной системой координат (Рисунок 4.1).

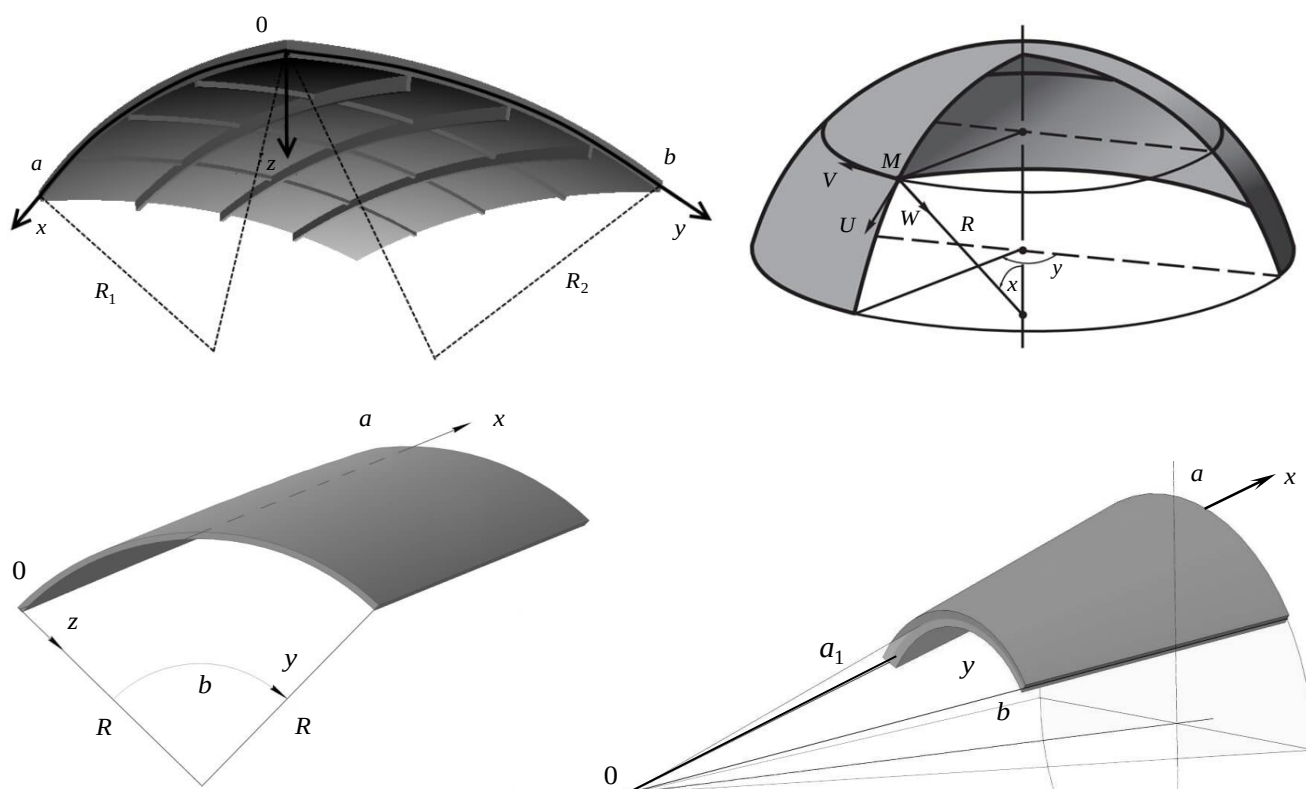


Рисунок 4.1. Рассматриваемые виды оболочек и их локальные системы координат

В Таблице 4.2 приводятся входные параметры для пологих оболочек двоякой кривизны, цилиндрических, конических панелей, а также сферических куполов. Все рассматриваемые далее конструкции, если не указано другое, имеют шарнирно-неподвижное закрепление контура и находятся под действием внешней статической равномерно распределенной поперечной нагрузки, направленной по нормали к срединной поверхности.

Таблица 4.2. Входные параметры исследуемых конструкций

Пологие оболочки двойкой кривизны								
№	h , м	a , м	b , м	R_1 , м	R_2 , м	Дополнительные параметры		рис.
						a/h	—	
1	0,08	16	16	25	25	200	—	4.2, a
2	0,09	54	54	135,9	135,9	600	—	4.2, b
3	0,09	18	18	45,27	45,27	200	—	4.2, $в$
4	0,09	10,8	10,8	40,05	40,05	120	—	4.2, $г$
5	0,09	5,4	5,4	20,25	20,25	60	—	4.2, $д$
6	0,00022	0,2	0,2	7,273	7,273	909	—	4.2, $е$
7	0,00022	0,2	0,2	5	3,33	909	—	4.2, $ж$
8	0,01	1,2	1,2	4,8	4,8	120	—	4.2, $з$
9	0,001	0,604	0,604	1,51	1,51	604	—	4.2, $и$
Цилиндрические панели								
№	h , м	a , м	b , рад	R_1 , м	R_2 , м	—	—	рис.
1	0,08	16	1	∞	16	—	—	4.3, a
2	0,01	20	$\pi/2$	∞	5,4	—	—	4.3, b
3	0,01	1,5	0,4	∞	2,5	—	—	4.3, $в$
4	0,01	20	π	∞	5,4	—	—	4.3, $г$
Конические панели								
№	h , м	a , м	b , рад	R_1 , м	R_2 , м	a_1 , м	θ , рад	рис.
1	0,08	32	2,574	—	—	16	0,2618	4.4, a
2	0,01	25	π	—	—	5	0,78	4.4, b
Сферические купола								
№	h , м	a , рад	b , рад	R_1 , м	R_2 , м	—	—	рис.
1	0,09	0,3316	2π	9	—	—	—	4.5



а) Вариант № 1



б) Вариант № 2



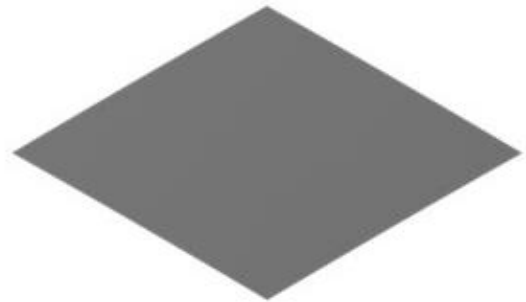
в) Вариант № 3



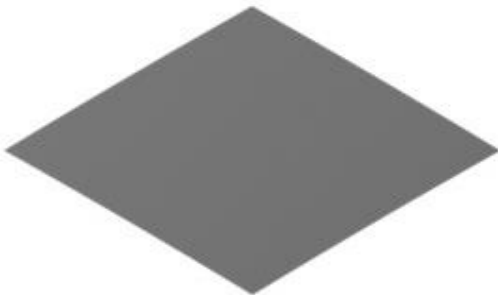
г) Вариант № 4



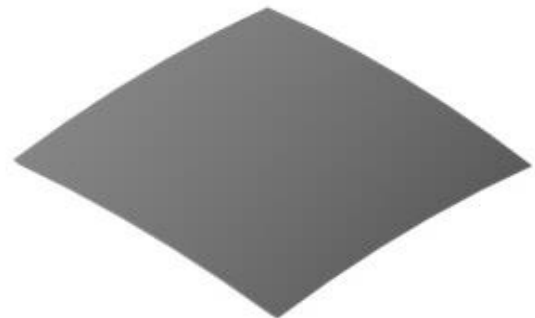
д) Вариант № 5



е) Вариант № 6



ж) Вариант № 7



з) Вариант № 8

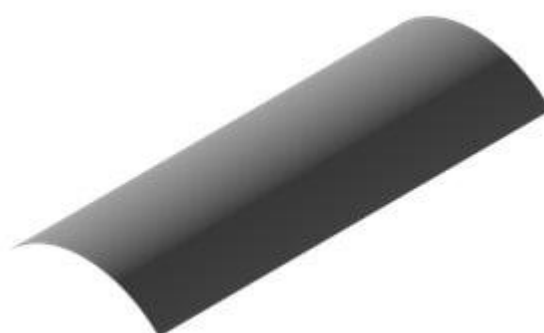


и) Вариант № 9

Рисунок 4.2. Пологие оболочки двоякой кривизны



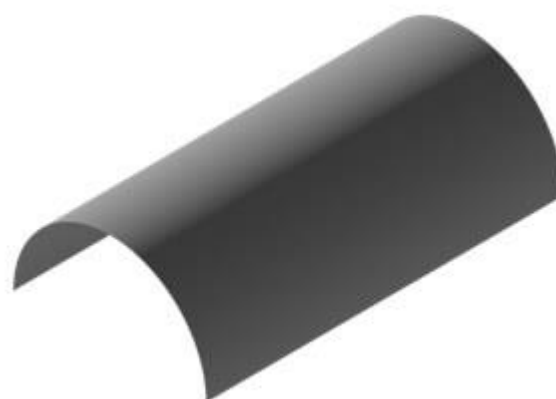
а) Вариант № 1



б) Вариант № 2

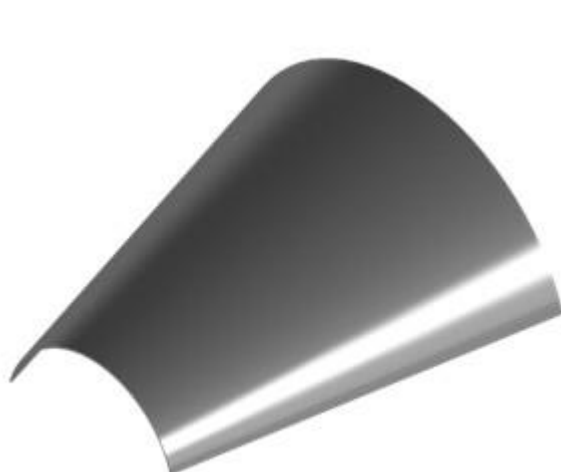


в) Вариант № 3

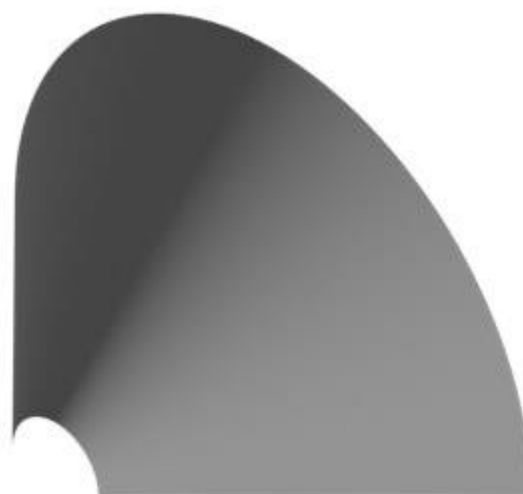


г) Вариант № 4

Рисунок 4.3. Цилиндрические панели



а) Вариант № 1



б) Вариант № 2

Рисунок 4.4. Конические панели



Рисунок 4.5. Сферический купол (вариант № 1)

4.4 ИССЛЕДОВАНИЕ ПОЛОГИХ ОБОЛОЧЕК ДВОЯКОЙ КРИВИЗНЫ

Пологие оболочки двоякой кривизны представляют собой достаточно большой класс конструкций, их исследованиям при статическом нагружении посвящены, в том числе, работы [82, 101, 117, 140, 165, 180, 207, 233, 287, 290, 297] и др.

Авторами [233] выполнен анализ устойчивости и закритического поведения тонкой многослойной оболочки, прямоугольной в плане, подвергнутой действию поперечной нагрузки. Материал каждого слоя оболочки предполагается линейно упругим. Уравнения равновесия получены с использованием классической теории оболочек (CSDT). Учитываются геометрические несовершенства конструкции. Получены численные данные о потере устойчивости в зависимости от выбора материала и геометрических параметров.

Zhang и van Campen [297] также исследуется устойчивость пологих оболочек двоякой кривизны. Конструкции выполнены из ортотропных материалов, имеют шарнирное закрепление контура и подвержены равномерной нагрузке. Авторами детально исследуются бифуркационные проблемы, возникающие из-за нелинейности системы уравнений, проводится детальный анализ ветвления кривой равновесных состояний.

В работе [165] предложена геометрически нелинейная теория оболочек третьего порядка точности, представлены все необходимые соотношения. Учитываются также геометрические несовершенства, возникающие как во время производства конструкции, так и последующей эксплуатации. Кроме того, было выполнено сравнение результатов с другими известными работами.

Таким образом, исследование конструкций данного вида является актуальной задачей.

Далее, в этом разделе будут представлены результаты расчета пологих оболочек двоякой кривизны, выполненных из изотропных и ортотропных материалов, и имеющих разные варианты подкрепления ребрами жесткости.

Большой диапазон геометрических параметров конструкций объясняется необходимостью демонстрации применимости предложенных модели, алгоритма, программного обеспечения и методики в целом для исследования широкого класса конструкций.

В то же время, некоторые варианты конструкций (6, 7, 9) были выбраны такими с целью сравнения отдельных тестовых задач с результатами других авторов (как численных, так и экспериментальных).

4.4.1 Пологие оболочки двоякой кривизны без ребер жесткости

Вначале рассмотрим пологие оболочки двоякой кривизны без усиления ребрами жесткости.

Площадь таких оболочек (обшивок) S^0 , их объем V^0 , отношение протяженности к толщине и стрела подъема d показаны в Таблице 4.3.

Данные приводятся для всех вариантов пологих оболочек, упоминаемых далее.

Таблица 4.3. Характеристики рассматриваемых оболочек

Вар.	S^0 , м ²	V^0 , м ³	a / h	d , м
1	256	20,48	200	1,27
2	2916	262,44	600	2,67
3	324	29,16	200	0,89
4	116,64	10,50	120	0,36
5	29,16	2,6244	60	0,1797
6	0,04	0,000009	909	0,0007
7	0,04	0,000009	909	0,001
8	1,44	0,0144	120	0,0375
9	0,3648	0,0004	604	0,0301

4.4.1.1 Изотропные конструкции

Вначале произведем моделирование процесса деформирования оболочек двоякой кривизны, выполненных из изотропных материалов: стали, оргстекла, Материала 1 (название и характеристики этого материала взяты из работы [180]).

Критические нагрузки определялись по описанной ранее методике (когда определяется значение нагрузки, при котором определитель матрицы Якоби системы уравнений меняет знак на противоположный, что также соответствует экстремуму графика зависимости «нагрузка – прогиб»).

Расчеты проводились в безразмерных параметрах с дальнейшим переводом в размерные.

Для анализа сходимости используемого метода Ритца в ряде случаев, помимо $N = 16$, делались расчеты при других значениях N . Полученные значения нагрузок потери устойчивости показаны в Таблице 4.4.

Таблица 4.4. Критические нагрузки для изотропных оболочек двоякой кривизны (без ребер жесткости)

Вар.	Материал	N	$\bar{P}$	q_{cr} , МПа
1	Сталь	9	16725	2,1952
	Сталь	16	13307	1,7465
2	Сталь	9	69913	0,1133
	Сталь	16	59078	0,0957
3	Сталь	9	5228,42	0,6862
	Сталь	16	4752,95	0,6238
4	Сталь	9	805,64	0,8159
	Сталь	16	792,22	0,8023
5	Оргстекло	16	204,15	0,0519
6	Материал 1	16	528,79	0,000023
7	Сталь	16	1456,42	0,0005
8	Оргстекло	16	741,8	0,0118
9	Оргстекло	1	678424,13	0,0168
		4	547181,31	0,0136
		9	75501,51	0,0019
		16	63621,75	0,0016

На Рисунке 4.6 показан график зависимости прогиба от нагрузки оболочки двоякой кривизны варианта 6, выполненной из Материала 1 (см. параметры в Таблице 4.1). Здесь и далее красные кривые W_c – прогиб в центре конструкции ($x = a/2, y = b/2$); синие кривые W_4 – прогиб в четвертой части конструкции ($x = a/4, y = b/4$).

Процесс потери устойчивости для тонкостенных оболочечных конструкций может носить существенно нелинейный характер. На Рисунке 4.6 видно петлеобразование графика вблизи критической нагрузки, что говорит о неоднозначности решения системы и ее неустойчивости. Нисходящая часть кривых на практике не реализуется, и носит исключительно математический

характер, что, однако, обеспечивает непрерывность решения и возможность оценки неоднозначных состояний системы.

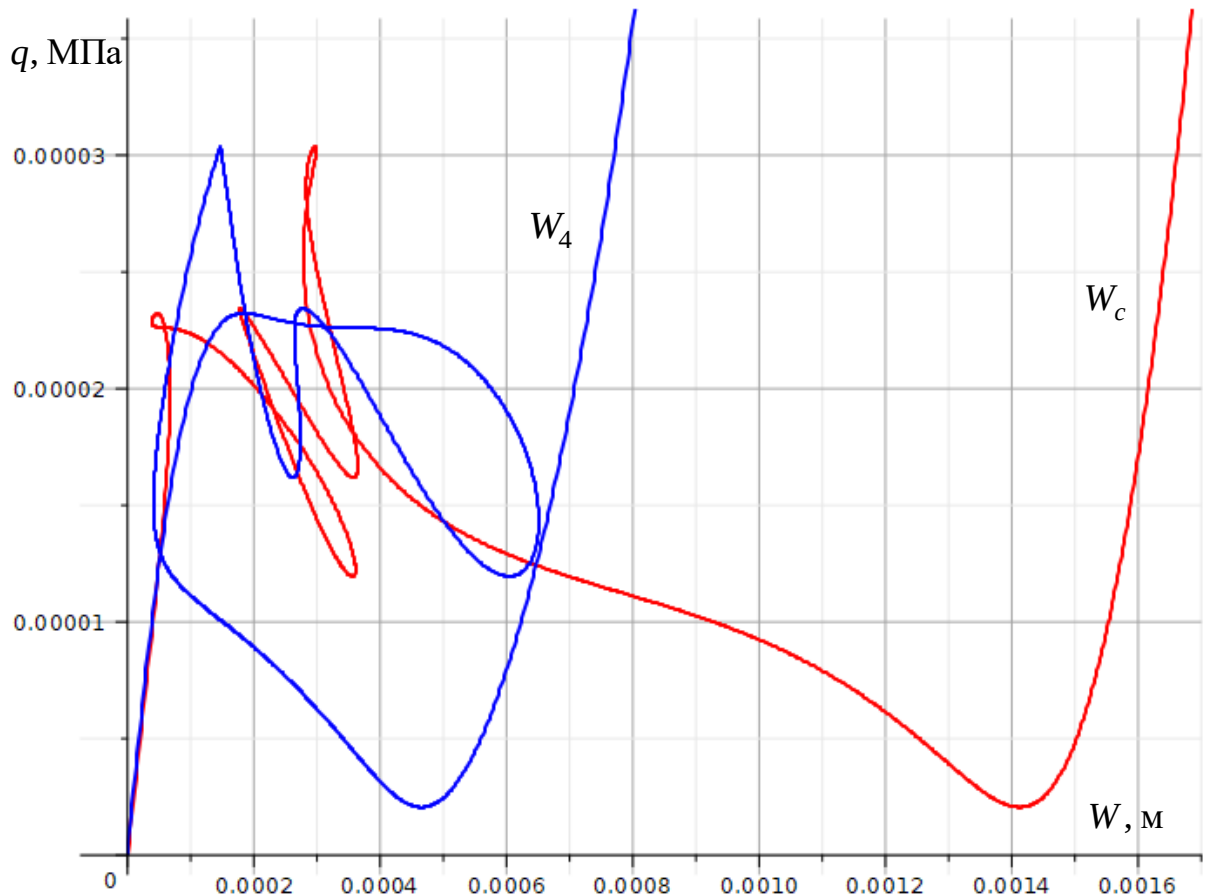


Рисунок 4.6. График зависимости прогиба от нагрузки для пологой оболочки двойкой кривизны варианта 6 из Материала 1

4.4.1.2 Ортотропные конструкции

В Таблице 4.5, по аналогии с изотропными конструкциями, представлены данные для ортотропных оболочек двойкой кривизны. В дополнение к тем данным, которые указывались ранее, здесь необходимо также указать угол $\varphi, ^\circ$, характеризующий изменение направления укладки волокон ортотропного материала относительно исходного. В данном случае, поскольку для пологих оболочек двойкой кривизны нет большой разницы, в каком направлении укладывать волокна (0° или 90°), угол принимается нулевым.

Для конструкции варианта 7 из Материала 2 показаны значения критических нагрузок при разных N , по которым можно сделать вывод о сходимости метода Ритца.

Таблица 4.5. Критические нагрузки для ортотропных пологих оболочек двоякой кривизны (без ребер жесткости)

Вар.	Материал	$\varphi, ^\circ$	N	Критическая нагрузка потери устойчивости	
				$\bar{P}$	$q_{cr}, \text{МПа}$
1	Стеклопластик Т10-УПЭ22-27	0	16	7402,1369	0,1360
4	Углепластик Т300/976	0	16	260,7169	0,1760
5	Стеклопластик Т10-УПЭ22-27	0	16	117,7265	0,2671
6	Углепластик Т300/976	0	16	171,1979	0,0000351
7	Материал 2	0	1	6562,1365	0,0001922
			4	5409,8407	0,0001584
			9	1876,3929	0,0000549
			16	1858,0594	0,0000544
			25	1852,2495	0,0000542
8	Woven Roving E-Glass_Vinyl Ester	0	16	571,0561	0,0468
	Стеклопластик Т10-УПЭ22-27	0	16	415,4894	0,0589
9	Стеклопластик Т10-УПЭ22-27	0	16	33357,51	0,00737

4.4.2 Пологие оболочки двоякой кривизны, подкрепленные ребрами жесткости

В этом параграфе рассмотрим пологие оболочки двоякой кривизны вариантов 1, 2, 3 и 4, закрепление контура – шарнирно-неподвижное. Ортогональную сетку ребер будем располагать с внутренней стороны оболочки, высоту и ширину ребер здесь и далее будем выбирать $h^i = h^j = 3h$, $r_i = r_j = 2h$

соответственно. Расстояние между ребрами обозначим x_r , а крайние ребра будут находиться от края конструкции на расстоянии $0.5x_r$.

Количество ребер будем брать одинаковым в обоих направлениях, для каждого нового варианта сетки увеличивая его на 4. Перед тем, как приводить данные расчетов, покажем некоторые характеристики рассматриваемых оболочек в зависимости от числа ребер жесткости (Таблица 4.6). Здесь S^0 – площадь поверхности обшивки; V^0 – объем, занимаемый обшивкой; d – стрела подъема; x_r – расстояние между ребрами; S^R – площадь, занимаемая ребрами жесткости; V^R – объем, занимаемый ребрами жесткости. Остальные переменные были описаны ранее при формировании математической модели.

Таблица 4.6. Характеристики рассматриваемых оболочек в зависимости от числа ребер жесткости

Вар.	Параметр					
1	$S^0, \text{м}^2$	$V^0, \text{м}^3$	a/h	$d, \text{м}$	$h^i = h^j, \text{м}$	$r_i = r_j, \text{м}$
	256	20,48	200	1,27	0,24	0,16
		4×4	8×8	12×12	16×16	20×20
	$x_r, \text{м}$	4	2	1,33	1	0,8
	$S^R, \text{м}^2$	20,07	39,32	57,75	75,37	92,16
	$V^R, \text{м}^3$	4,82	9,44	13,86	18,09	22,12
	S^R / S^0	0,078	0,154	0,226	0,294	0,360
	V^R / V^0	0,235	0,461	0,677	0,883	1,080
2	$S^0, \text{м}^2$	$V^0, \text{м}^3$	a/h	$d, \text{м}$	$h^i = h^j, \text{м}$	$r_i = r_j, \text{м}$
	2916	262,44	600	2,67	0,27	0,18
		4×4	8×8	12×12	16×16	20×20
	$x_r, \text{м}$	13,5	6,75	4,5	3,375	2,7
	$S^R, \text{м}^2$	77,24	153,45	228,61	302,75	375,84
	$V^R, \text{м}^3$	20,86	41,43	61,73	81,74	101,48

	S^R / S^0	0,026	0,053	0,078	0,104	0,129
	V^R / V^0	0,079	0,158	0,235	0,311	0,387
3	$S^0, \text{м}^2$	$V^0, \text{м}^3$	a / h	$d, \text{м}$	$h^i = h^j, \text{м}$	$r_i = r_j, \text{м}$
	324	29,16	200	0,89	0,27	0,18
		4×4	8×8	12×12	16×16	20×20
	$\chi_r, \text{м}$	4,5	2,25	1,5	1,125	0,9
	$S^R, \text{м}^2$	25,40	49,77	73,09	95,39	116,64
	$V^R, \text{м}^3$	6,86	13,44	19,74	25,75	31,49
	S^R / S^0	0,078	0,154	0,226	0,294	0,360
	V^R / V^0	0,235	0,461	0,677	0,883	1,080
4	$S^0, \text{м}^2$	$V^0, \text{м}^3$	a / h	$d, \text{м}$	$h^i = h^j, \text{м}$	$r_i = r_j, \text{м}$
	116,64	10,50	120	0,36	0,27	0,18
		4×4	8×8	12×12	16×16	20×20
	$\chi_r, \text{м}$	2,7	1,35	0,9	0,675	0,54
	$S^R, \text{м}^2$	15,03	29,03	41,99	53,91	64,80
	$V^R, \text{м}^3$	4,06	7,84	11,34	14,56	17,50
	S^R / S^0	0,129	0,249	0,360	0,462	0,556
	V^R / V^0	0,387	0,747	1,080	1,387	1,667

4.4.2.1 Изотропные конструкции

Вначале осуществим расчеты изотропных конструкций, выполненных из стали (параметры см. в Таблице 4.1). В Таблице 4.7 показаны безразмерные значения критических нагрузок потери устойчивости для разных вариантов подкрепления, полученные по разным методам учета ребер жесткости и при разных значениях N . Используя формулы перехода к размерным параметрам, можно получить данные для целой серии конструкций. В Таблице 4.8 показаны те же результаты, но переведенные в размерные значения.

Таблица 4.7. Критические нагрузки потери устойчивости для изотропных подкрепленных пологих оболочек двойкой кривизны (безразмерные значения)

№	N	Метод	Критическая нагрузка $\bar{P}$					
			0×0	4×4	8×8	12×12	16×16	20×20
1	9	Уточн.	16725	25264	41506	50919	76799	84546
	16	дискр.	13307	27228	41508	50754	59357	79597
	9	Дискр.	16725	38356	75265	89077	101390	112681
	16		13307	40241	57867	83932	95951	106815
	9	МКА	16725	30897	41477	50905	76833	84600
	16		13307	30367	41228	50700	59350	79591
2	9	Уточн.	69913	97135	122023	132184	141438	150115
	16	дискр.	59078	81204	101401	113400	125465	136161
	9	Дискр.	69913	123317	140650	157199	172028	185758
	16		59078	98557	125965	144599	161430	176461
	9	По линии	69913	93636	109279	111727	115039	118217
	16		59078	75668	82998	91588	98532	104255
	9	МКА	69913	102066	122470	132237	141461	150128
	16		59078	81952	99118	113235	125311	136014
3	9	Уточн.	5228,42	8471	19359	23316	26514	29237
	16	дискр.	4752,95	8694	19107	23244	26485	29234
	9	МКА	5228,42	12810	19364	23307	26507	29231
	16		4752,95	12766	19115	23231	26474	29224
4	9	Уточн.	805,64	1987	2455	+	+	+
	16	дискр.	792,22	1846	2450	+	+	+
	9	МКА	805,64	1990	2450	+	+	+
	16		792,22	1988	2448	+	+	+

Таблица 4.8. Критические нагрузки для изотропных подкрепленных пологих оболочек двойкой кривизны (размерные значения) [218]

№	N	Метод	Критическая нагрузка потери устойчивости q_{cr} , МПа					
			0×0	4×4	8×8	12×12	16×16	20×20
1	9	Уточн.	2,1952	3,3159	5,4477	6,6831	10,0799	11,0967
	16	дискр.	1,7465	3,5737	5,4479	6,6615	7,7906	10,4471
	9	Дискр.	2,1952	5,0342	9,8785	11,6914	13,3074	14,7894
	16		1,7465	5,2816	7,5950	11,0161	12,5936	14,0195
	9	МКА	2,1952	4,0552	5,4439	6,6813	10,0843	11,1038
	16		1,7465	3,9857	5,4112	6,6544	7,7897	10,4463
2	9	Уточн.	0,1133	0,1574	0,1977	0,2142	0,2292	0,2432
	16	дискр.	0,0957	0,1316	0,1643	0,1838	0,2033	0,2206
	9	Дискр.	0,1133	0,1998	0,2279	0,2547	0,2787	0,3010
	16		0,0957	0,1597	0,2041	0,2343	0,2616	0,2859
	9	По линии	0,1133	0,1517	0,1771	0,1810	0,1864	0,1916
	16		0,0957	0,1226	0,1345	0,1484	0,1597	0,1689
	9	МКА	0,1133	0,1654	0,1984	0,2143	0,2292	0,2433
	16		0,0957	0,1328	0,1606	0,1835	0,2031	0,2204
3	9	Уточн.	0,6862	1,1118	2,5409	3,0602	3,4800	3,8374
	16	дискр.	0,6238	1,1411	2,5078	3,0508	3,4762	3,8370
	9	МКА	0,6862	1,6813	2,5415	3,0590	3,4790	3,8366
	16		0,6238	1,6755	2,5088	3,0491	3,4747	3,8357
4	9	Уточн.	0,8159	2,0123	2,4863	+	+	+
	16	дискр.	0,8023	1,8695	2,4812	+	+	+
	9	МКА	0,8159	2,0153	2,4812	+	+	+
	16		0,8023	2,0133	2,4792	+	+	+

Здесь и далее, в таблицах со значениями критических нагрузок знак «+» обозначает то, что расчет был произведен, который показал, что конструкция устойчивость не потеряла. А знак «-» указывает на отсутствие данных.

На Рисунках 4.7 – 4.10 показана сходимость разных методов учета ребер жесткости для конструкций вариантов 1 и 2 при $N = 9$ и $N = 16$.

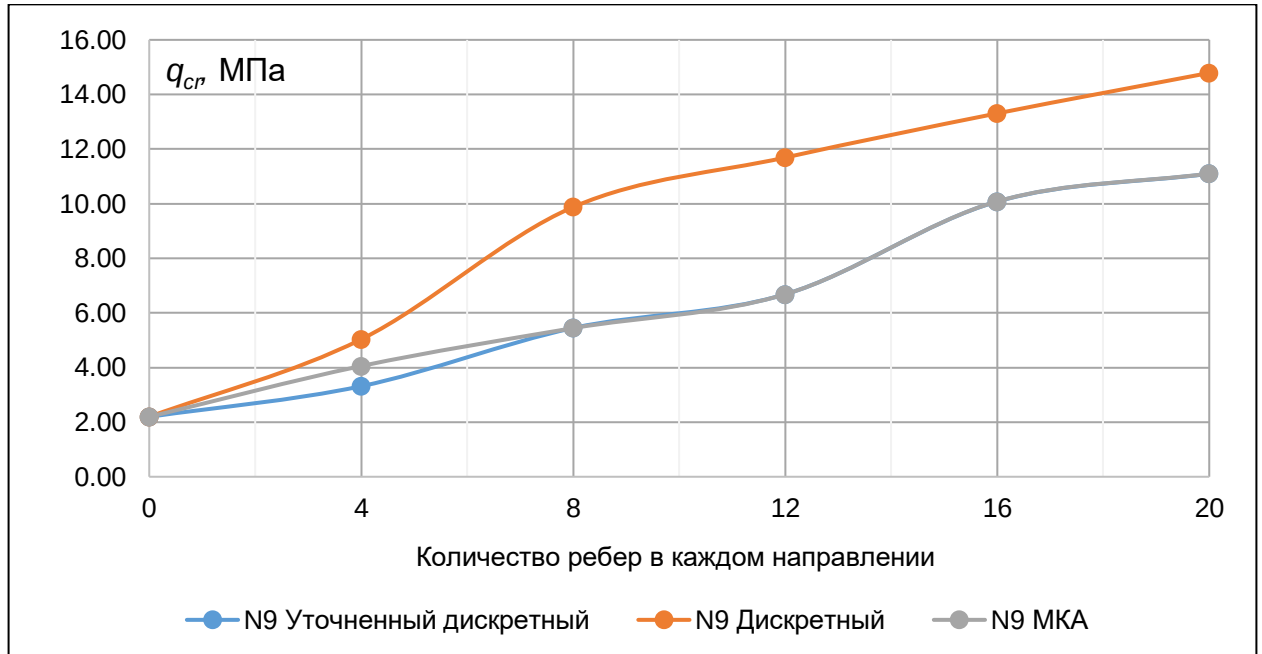


Рисунок 4.7. Значения критических нагрузок при разном числе ребер жесткости (пологая оболочка двойкой кривизны 1, $N = 9$)

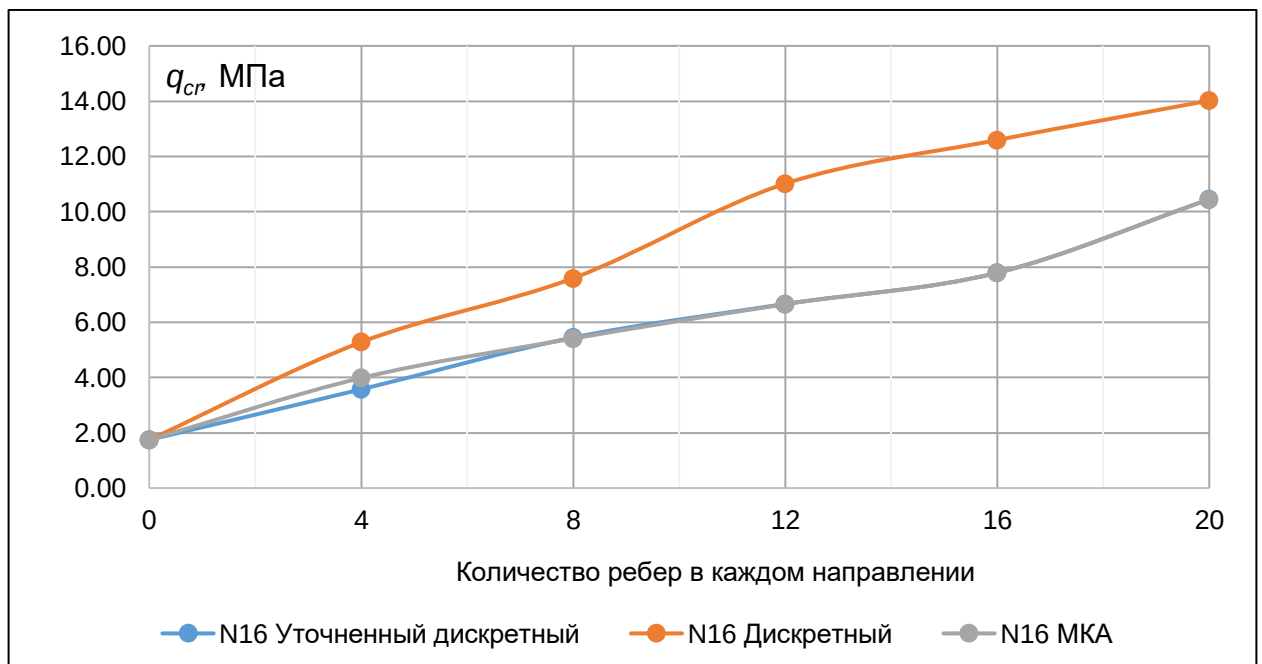


Рисунок 4.8. Значения критических нагрузок при разном числе ребер жесткости (пологая оболочка двойкой кривизны 1, $N = 16$)

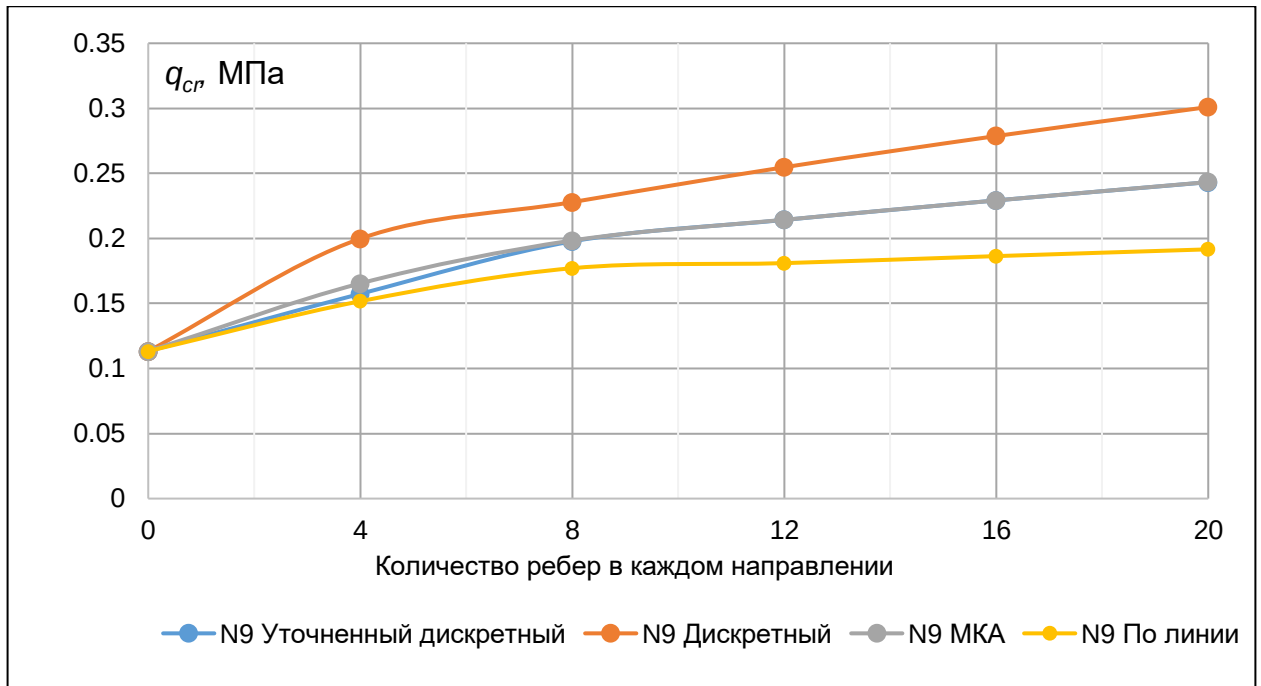


Рисунок 4.9. Значения критических нагрузок при разном числе ребер жесткости (пологая оболочка двойкой кривизны 2, $N = 9$)

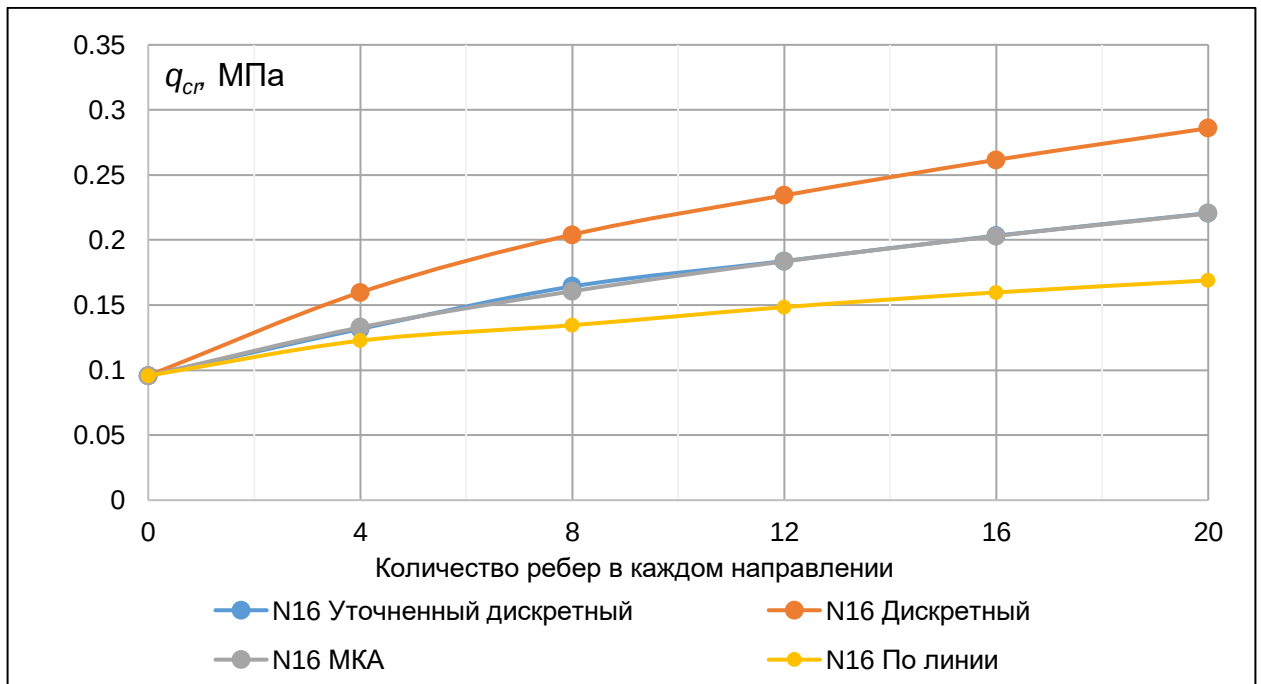


Рисунок 4.10. Значения критических нагрузок при разном числе ребер жесткости (пологая оболочка двойкой кривизны 2, $N = 16$)

Для уточненного дискретного метода и МКА разница в значениях, вычисленная в процентах, показана в Таблице 4.9. На Рисунке 4.11 эти результаты показаны графически.

Таблица 4.9. Разница в процентах между критическими нагрузками, полученными по уточненному дискретному методу и МКА (для изотропных подкрепленных пологих оболочек двойкой кривизны)

N	№	Разница значений (в %)				
		4×4	8×8	12×12	16×16	20×20
9	1	18,23	0,07	0,03	0,04	0,06
	2	4,84	0,35	0,05	0,00	0,04
	3	33,87	0,02	0,04	0,03	0,02
	4	0,15	0,21	—	—	—
16	1	10,34	0,68	0,11	0,01	0,01
	2	0,90	2,30	0,16	0,10	0,09
	3	31,89	0,04	0,06	0,04	0,03
	4	7,14	0,08	—	—	—

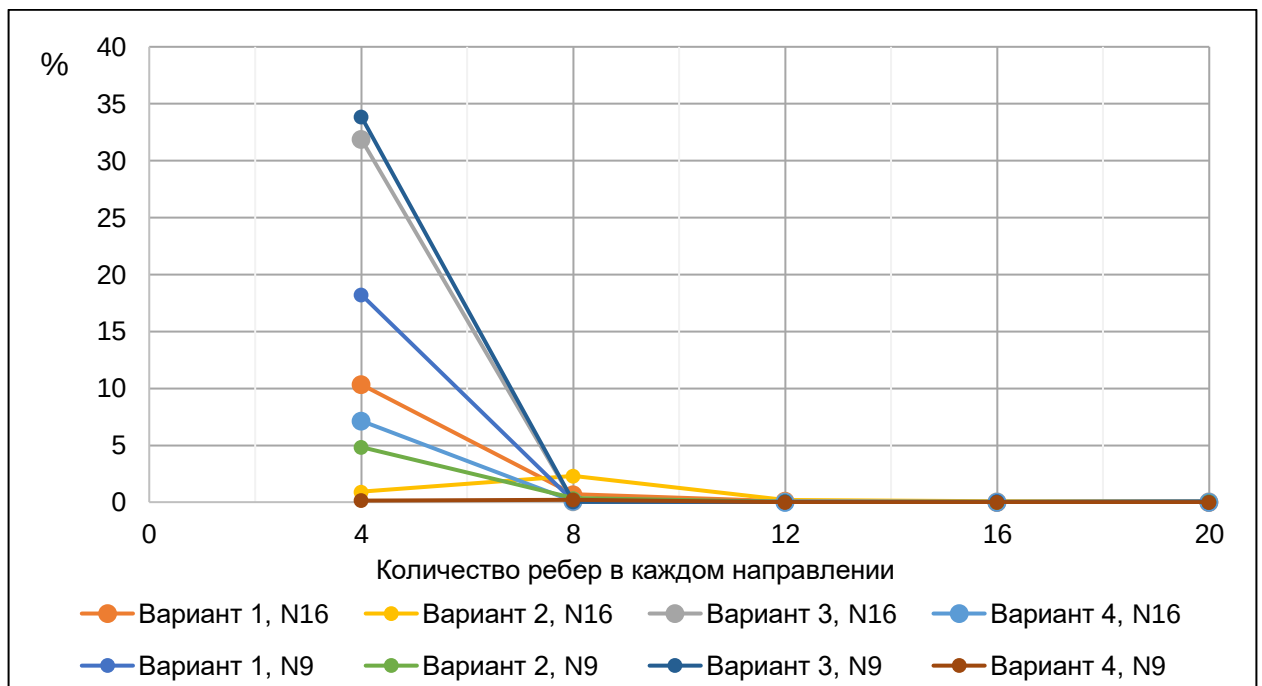


Рисунок 4.11. Процент расхождения значений критических нагрузок между уточненным дискретным методом и МКА

Также интерес может представлять исследование влияния ширины подкрепляющих элементов на сходимость методов учета ребер жесткости. В Таблице 4.10 [218] показаны критические нагрузки потери устойчивости для

конструкции варианта 1 с ортогональной сеткой ребер 8×8 и изменяемой шириной ребер при $N = 9$ и $N = 16$. На Рисунке 4.12 результаты показаны графически.

Таблица 4.10. Нагрузки потери устойчивости для конструкции варианта 1 с ортогональной сеткой ребер 8×8 и изменяемой шириной ребер

Метод	N	$q_{cr}, \text{МПа}$			
		$r = 2h$ (0,16 м)	$r = 4h$ (0,32 м)	$r = 6h$ (0,48 м)	$r = 8h$ (0,64 м)
Вариант 1					
Уточненный дискретный метод	9	5,4477	10,1772	12,2394	14,1770
	16	5,4479	7,8366	11,5260	13,3961
Метод конструктивной анизотропии	9	5,4439	10,1192	12,1697	14,0987
	16	5,4112	7,8264	11,4890	13,3535
$ \Delta , \%$	9	0,07	0,57	0,57	0,55
	16	0,68	0,13	0,32	0,32

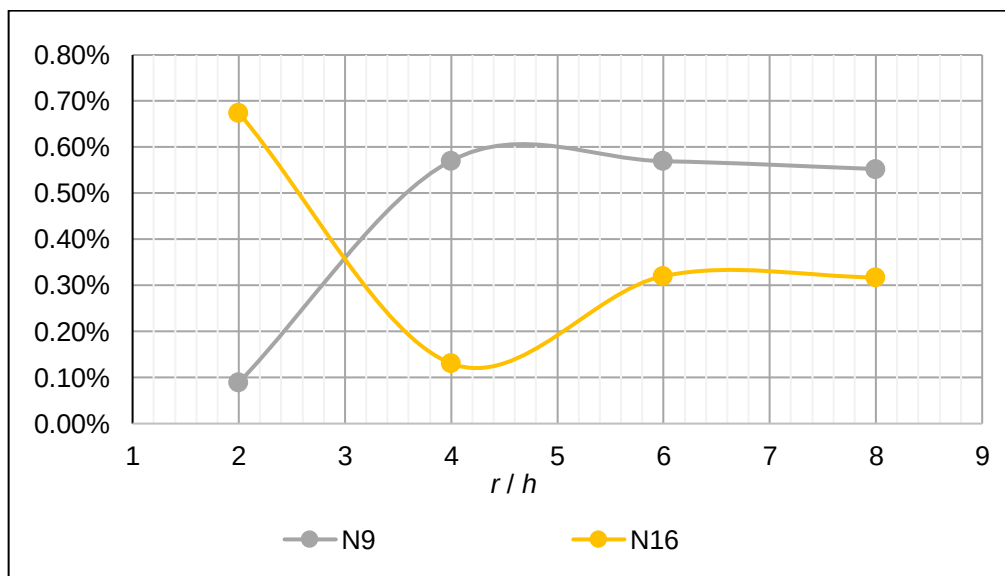


Рисунок 4.12. Разница в значениях, получаемых по уточненному дискретному методу и МКА в зависимости от ширины ребер жесткости

Здесь можно заметить, что увеличение ширины ребер жесткости существенно не влияет на сходимость метода конструктивной анизотропии, но стабилизирует разницу в полученных значениях.

На Рисунке 4.13 [217] показан график зависимости «нагрузка – прогиб» для разных способов учета подкрепления пологой оболочки двоякой кривизны варианта 2 при выборе сетки ребер 16×16 и $N = 16$ (красные кривые W_c – прогиб в центре конструкции ($x = a/2, y = b/2$); синие кривые W_4 – прогиб в четвертой части конструкции ($x = a/4, y = b/4$); верхний индекс указывает на способ учета ребер жесткости).

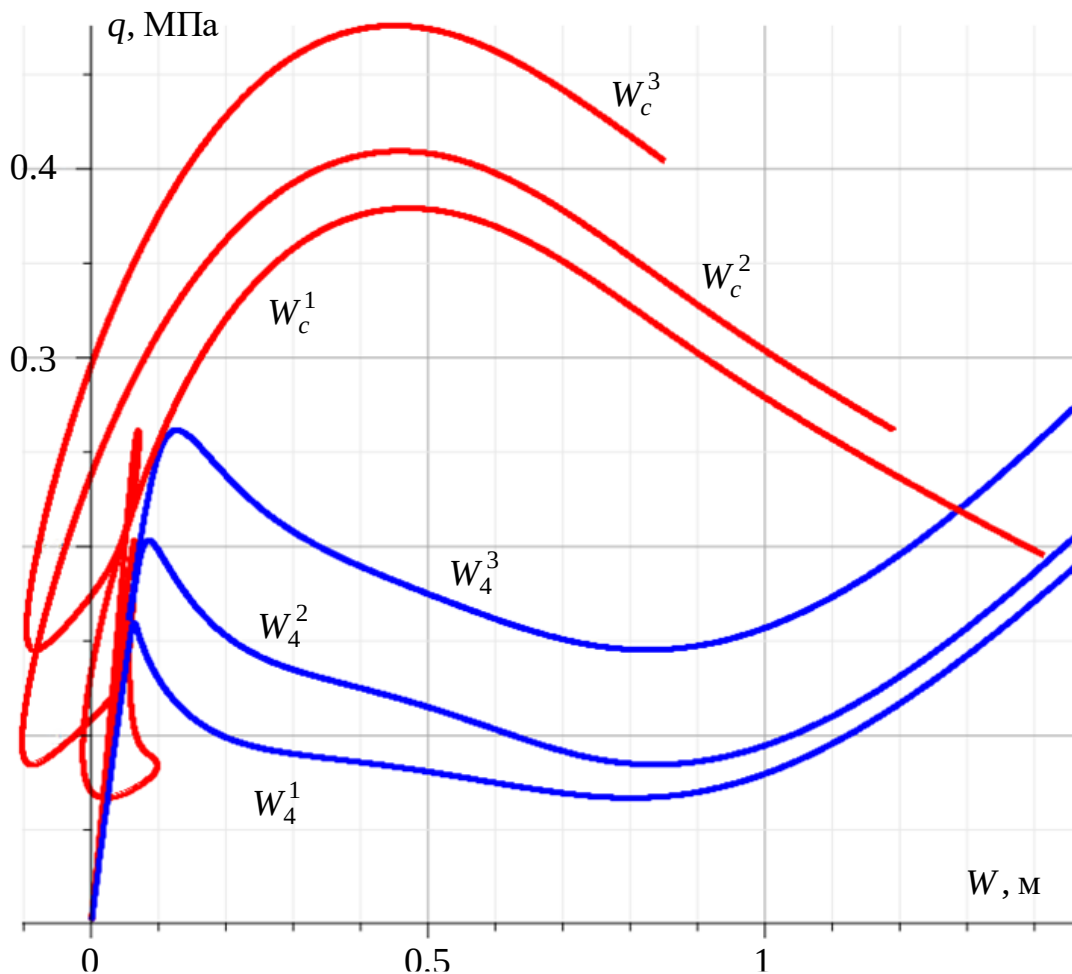


Рисунок 4.13. График зависимости «нагрузка – прогиб» для разных способов учета подкрепления пологой оболочки варианта 2 при выборе сетки ребер 16×16 (индекс 1 – ввод ребер по линии (А. И. Лурье), индекс 2 – уточненный ввод ребер по полосе (А. А. Семенов), индекс 3 – ввод ребер по полосе (В. В. Карпов))

На Рисунке 4.14 [217] – график «нагрузка – прогиб» при выборе различного числа ребер и их учете по уточненному дискретному методу, предложенному в данной работе (коричневые кривые W_8 – прогиб в восьмой части конструкции ($x = a/8, y = b/8$); верхний индекс указывает на количество ребер жесткости в каждом направлении). Показан фрагмент графика до первой потери устойчивости.

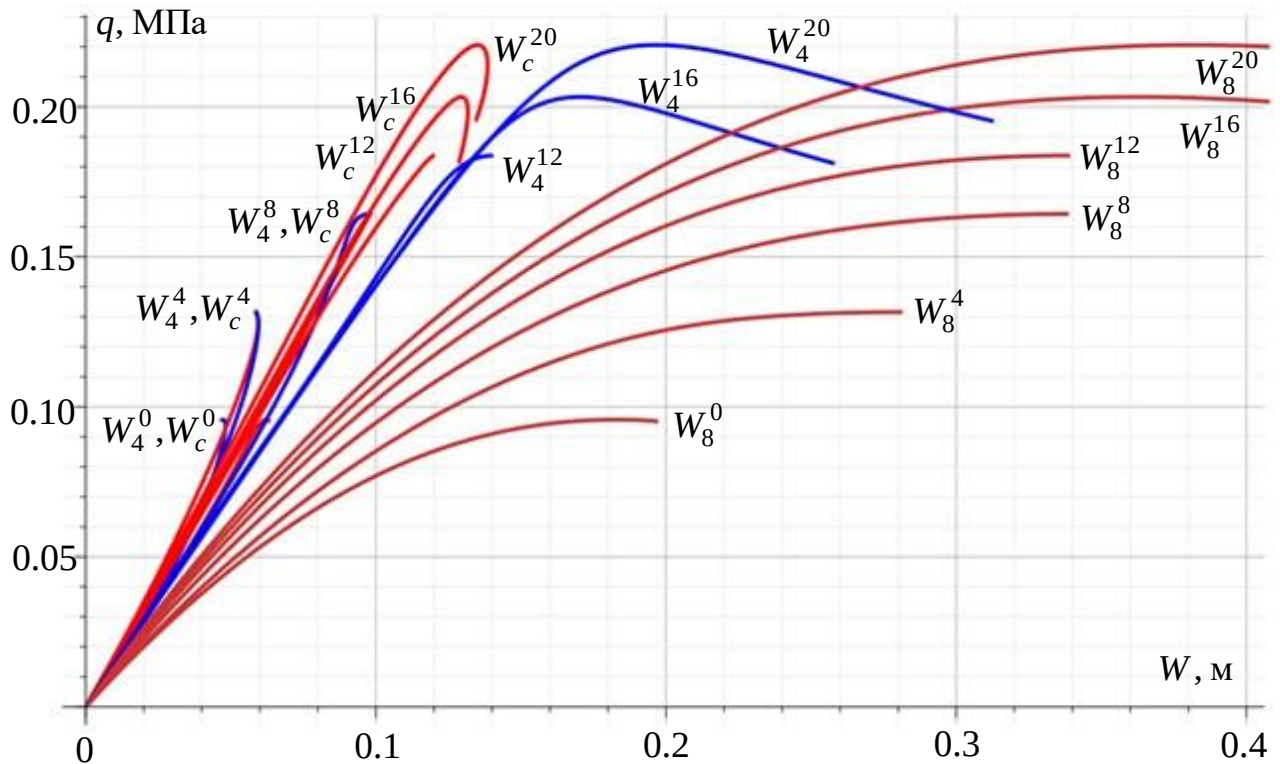


Рисунок 4.14. График «нагрузка – прогиб» при различном числе ребер жесткости и их учете по уточненному дискретному методу для оболочки варианта 2

Как видно из представленных данных, дискретный ввод ребер по полосе без учета уточняющих коэффициентов дает завышенные значения критической нагрузки, а подход А. И. Лурье, когда ребра вводятся по линии – существенно заниженные. Уточненный дискретный подход, а также метод конструктивной анизотропии, дают очень близкие результаты, притом сходимость значений в данном случае возрастает при увеличении числа ребер жесткости.

На Рисунке 4.15 показан график зависимости прогиба W от нагрузки q при разном количестве подкрепляющих ребер жесткости для пологой оболочки варианта 3 ($N=16$). Здесь и далее на графиках нижний индекс “s” соответствует методу конструктивной анизотропии, а индекс “d” соответствует уточненному

дискретному вводу ребер жесткости; верхний индекс указывает на количество подкрепляющих элементов в каждом направлении [218].

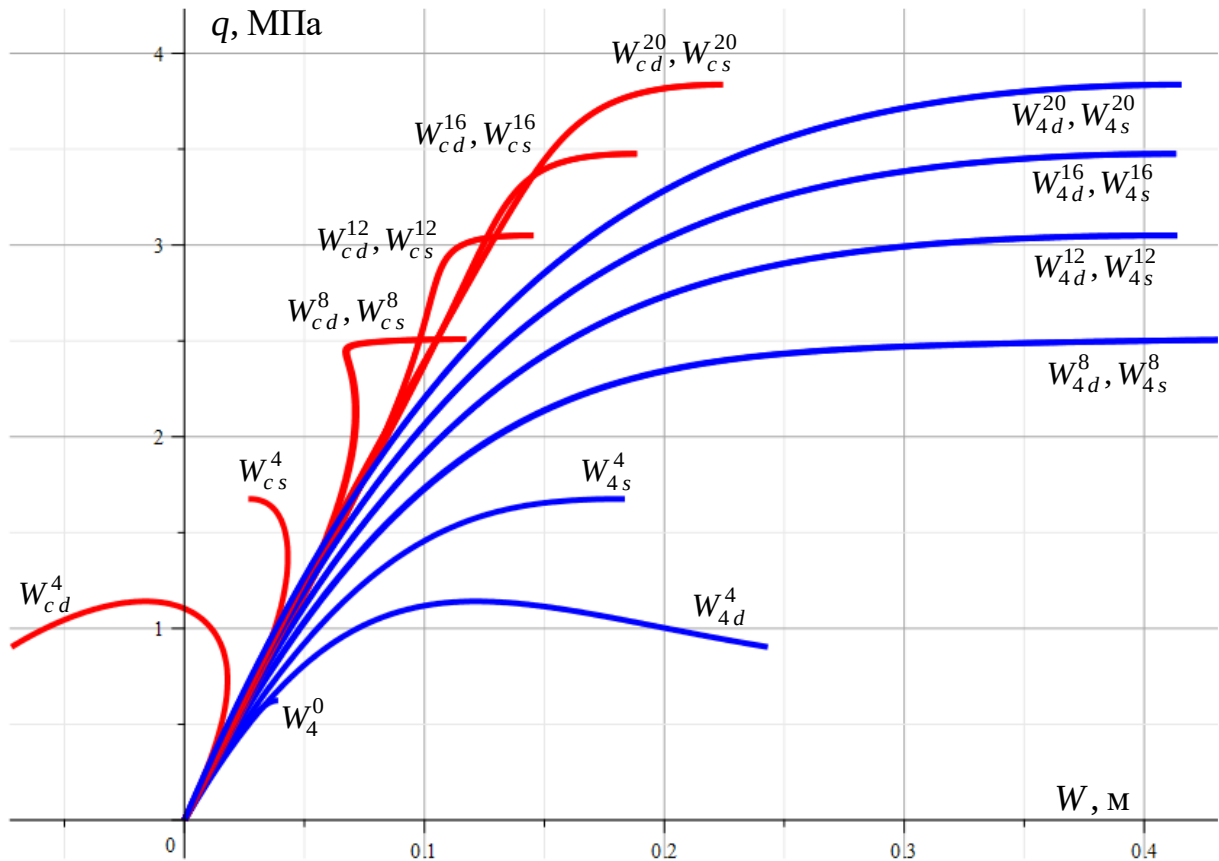


Рисунок 4.15. График «нагрузка – прогиб» при различном числе ребер жесткости для полой оболочки варианта 3

Из полученных значений видно, что у метода конструктивной анизотропии наблюдается сходимость к решению, полученному при уточненном дискретном методе, начиная с сетки ребер 12×12 (разница в значениях составляет менее 1 % при $N=16$). На графиках (Рисунок 4.15) кривые становятся неразличимы уже при количестве ребер 8×8 .

Для анализа прочности изотропных стальных оболочек можно применить критерий Мизеса (4.4). Соответствующие результаты для конструкций вариантов 1 и 2 показаны в Таблице 4.11. Учитывая, что данные об НДС конструкции изначально формируются в безразмерных параметрах, становится возможным получить данные о невыполнении условий прочности для подобной оболочки меньшей толщины. В данном случае это делается для стальных оболочек по причинам, описанным в п. 4.2.

Таблица 4.11. Значения предельных нагрузок q_{pr}

№		N	Метод	Предельная нагрузка q_{pr} , МПа					
				0×0	4×4	8×8	12×12	16×16	20×20
1	$\sigma_T = 265$ МПа $h = 0,08$ м	9	Уточн.	0,2544	0,2426	0,3203	0,2853	0,3035	0,3216
		16		0,2251	0,2181	0,2818	0,2960	0,3141	0,2665
		9	МКА	0,2544	0,2967	0,3184	0,2846	0,3031	0,3213
		16		0,2251	0,2592	0,2761	0,2947	0,3134	0,2661
		9	Дискр.	0,2544	0,2649	0,3007	0,3326	0,3629	0,3915
		16		0,2251	0,2493	0,3122	0,2757	0,3004	0,3239
	$\sigma_T = 265$ МПа $h = 0,01$ м	9	Уточн.	0,9236	1,1422	1,1816	1,2625	1,3445	1,4256
		16		0,8239	0,9756	1,1405	1,1995	1,2740	1,2876
		9	МКА	0,9236	1,1353	1,2232	1,2596	1,3428	1,4245
		16		0,8239	1,1316	1,1675	1,2480	1,2710	1,2857
		9	Дискр.	0,9236	1,2157	1,3319	1,4748	1,5429	1,5922
		16		0,8239	1,1239	1,2661	1,3321	1,3826	1,4909
	$\sigma_T = 345$ МПа $h = 0,01$ м	9	Уточн.	1,1750	1,4668	1,5624	1,6714	1,7809	1,8320
		16		1,0607	1,2574	1,4923	1,5733	1,6159	1,7116
		9	МКА	1,1750	1,4352	1,5539	1,6676	1,7788	1,8307
		16		1,0607	1,4374	1,5126	1,5663	1,6680	1,7091
		9	Дискр.	1,1750	1,5427	1,7639	1,8955	2,0046	2,0927
		16		1,0607	1,4542	1,6057	1,7091	1,8636	1,9366
2	$\sigma_T = 265$ МПа $h = 0,09$ м	16	Уточн.	0,0121	0,0127	0,0143	0,0166	0,0171	0,0175
		16	МКА	0,0121	0,0137	0,0161	0,0166	0,0170	0,0175
		16	Дискр.	0,0121	0,0148	0,0171	0,0179	0,0188	0,0196
	$\sigma_T = 265$ МПа $h = 0,01$ м	16	Уточн.	0,0767	0,0847	0,1007	0,1114	0,1182	0,1250
		16	МКА	0,0767	0,0937	0,1042	0,1125	0,1195	0,1250
		16	Дискр.	0,0767	0,0953	0,1173	0,1285	0,1388	0,1456
	$\sigma_T = 345$ МПа $h = 0,01$ м	16	Уточн.	0,0803	0,0897	0,1074	0,1192	0,1264	0,1335
		16	МКА	0,0803	0,0996	0,1104	0,1203	0,1276	0,1334
		16	Дискр.	0,0803	0,1025	0,1242	0,1387	0,1480	0,1570

4.4.2.2 Ортотропные конструкции

Далее осуществим расчеты конструкций, выполненных из разных ортотропных материалов (см. Таблицу 4.1). В Таблице 4.12 показаны безразмерные значения критических нагрузок потери устойчивости для разных вариантов подкрепления, полученные по разным методам учета ребер жесткости. Рассматриваются оболочки двойкой кривизны вариантов 1, 7, 8. В Таблице 4.13 приводятся результаты в размерных параметрах.

Таблица 4.12. Критические нагрузки потери устойчивости для ортотропных подкрепленных пологих оболочек двойкой кривизны (безразмерные значения)

№ варианта, материал	Метод	Безразмерная критическая нагрузка $\bar{P}$						
		0×0	2×2	4×4	6×6	8×8	10×10	12×12
№ 1 T10/УПЭ22-27	Уточн.	7402	9470	16207	19476	22273	24782	27122
	Дискр.	7402	9891	21396	25960	30711	40650	43879
	МКА	7402	12752	16404	19490	22244	24768	27118
	По линии	7402	8272	9417	17268	20075	22322	31629
№ 7 Material 2	Уточн.	1858	2292	3080	3666	—	—	—
	Дискр.	1858	2569	3717	5032			
	По линии	1858	2056	2399	2682			
	МКА	1858	2505	3105	3665			
	Wang [287]	1733	—	—	—			
№ 8 T10/УПЭ22-27	Уточн.	415,4	722,4	885,5	952,3	1020	1092	+
	МКА	415,4	823,7	886,7	951,7	1019	1092	+
№ 8 Woven Roving E-Glass_Vinyl Ester	Уточн.	571,0	1031	1242	1385	1526	+	+
	МКА	571,0	1124	1251	1384	1526	+	+

Таблица 4.13. Критические нагрузки потери устойчивости для ортотропных подкрепленных пологих оболочек двоякой кривизны (размерные значения)

№, материал	Метод	Размерная критическая нагрузка q_{cr} , МПа						
		0×0	2×2	4×4	6×6	8×8	10×10	12×12
№ 1 T10/УПЭ22-27	Уточн.	0,1360	0,1740	0,2978	0,3579	0,4093	0,4554	0,4984
	Дискр.	0,1360	0,1818	0,3932	0,4770	0,5643	0,7469	0,8063
	МКА	0,1360	0,2343	0,3014	0,3581	0,4088	0,4551	0,4983
	По линии	0,1360	0,1520	0,1730	0,3173	0,3689	0,4102	0,5812
№ 7 Material 2	Уточн.	5,44E-05	6,712E-05	9,02E-05	0,000107	—	—	—
	Дискр.	5,44E-05	7,525E-05	0,000109	0,000147			
	По линии	5,44E-05	6,023E-05	7,03E-05	7,85E-05			
	МКА	5,44E-05	7,338E-05	9,09E-05	0,000107			
	Wang [287]	5,08E-05	—	—	—			
№ 8 T10/УПЭ22-27	Уточн.	0,0589	0,1024	0,1256	0,1350	0,1446	0,1549	+
	МКА	0,0589	0,1168	0,1257	0,1349	0,1446	0,1549	+
№ 8 E-Glass_Vinyl Ester	Уточн.	0,0468	0,0845	0,1019	0,1136	0,1252	+	+
	МКА	0,0468	0,0922	0,1026	0,1135	0,1251	+	+

В данном параграфе направление оси ортотропии 1 совпадает с направлением локальной оси x . В силу симметрии геометрической формы пологих оболочек двоякой кривизны, направлять волокна материала в направлении оси y нет необходимости.

На Рисунках 4.16 – 4.17 показана сходимость разных методов учета ребер жесткости для конструкций вариантов 1 и 7 при $N=16$. Для уточненного дискретного метода и МКА разница в значениях, вычисленная в процентах, показана в Таблице 4.14. На Рисунке 4.18 эти результаты показаны графически.

Таблица 4.14. Разница в процентах между критическими нагрузками, полученными по уточненному дискретному методу и МКА (для ортотропных подкрепленных пологих оболочек двоякой кривизны)

N	№	Материал	Разница значений в %					
			2×2	4×4	6×6	8×8	10×10	12×12
16	1	Стеклопластик T10/УПЭ22-27	34,65	1,21	0,07	0,12	0,06	0,02
	7	Material 2	9,31	0,80	0,01	—	—	—
	8	Стеклопластик T10/УПЭ22-27	14,03	0,13	0,06	0,03	0,02	—
		Woven Roving E-Glass_Vinyl Ester	9,09	0,76	0,08	0,03	—	—

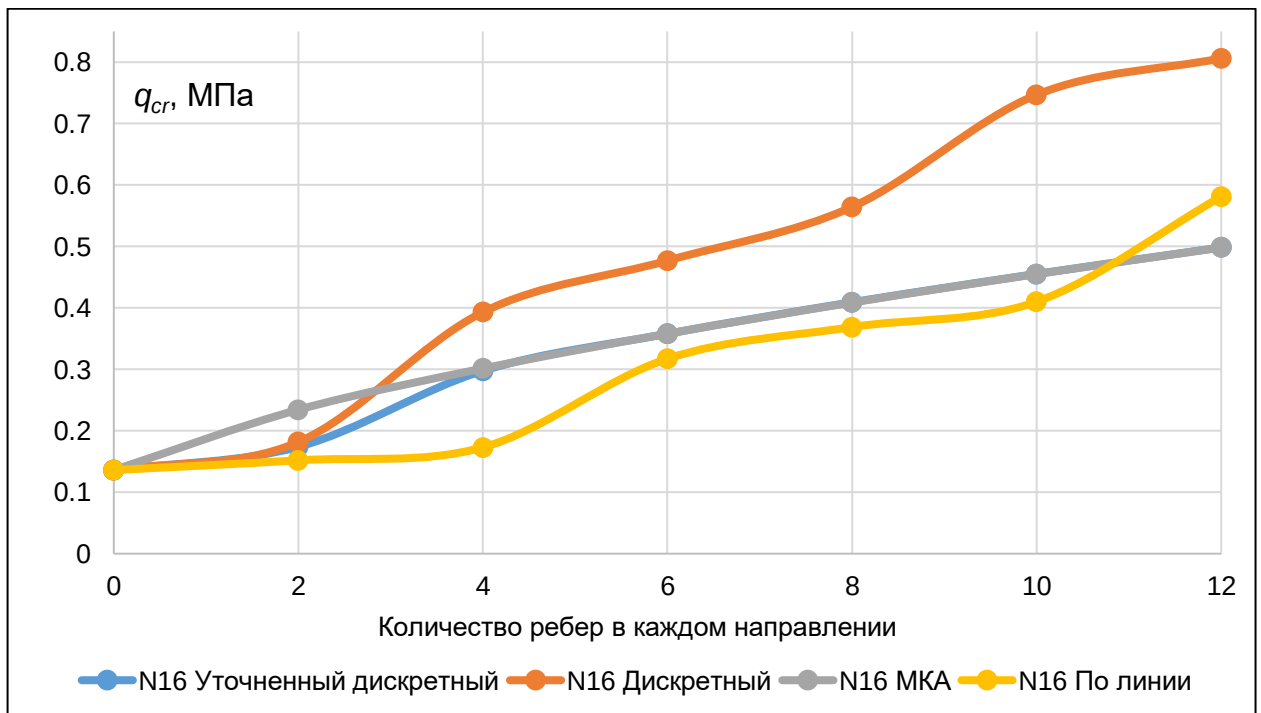


Рисунок 4.16. Значения критических нагрузок при разном числе ребер жесткости (пологая оболочка двоякой кривизны 1, $N=16$)

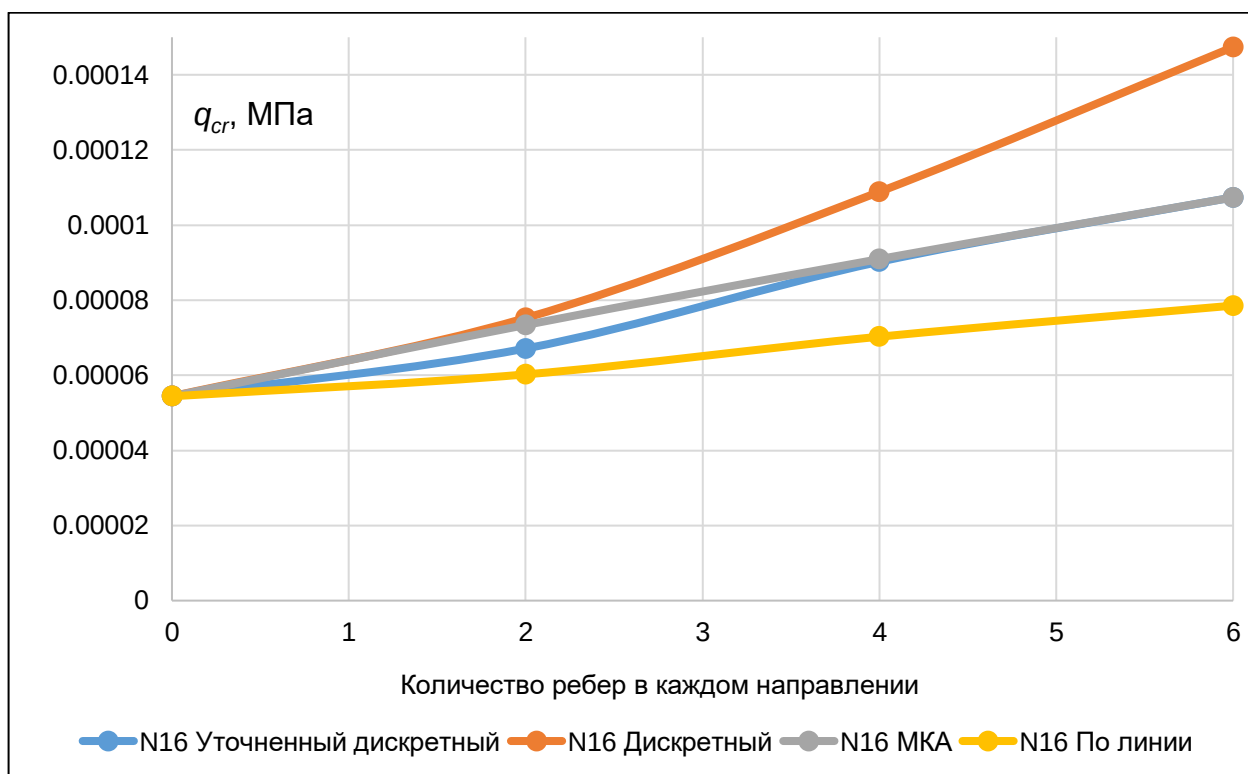


Рисунок 4.17. Значения критических нагрузок при разном числе ребер жесткости (пологая оболочка двойкой кривизны 7, $N = 16$)

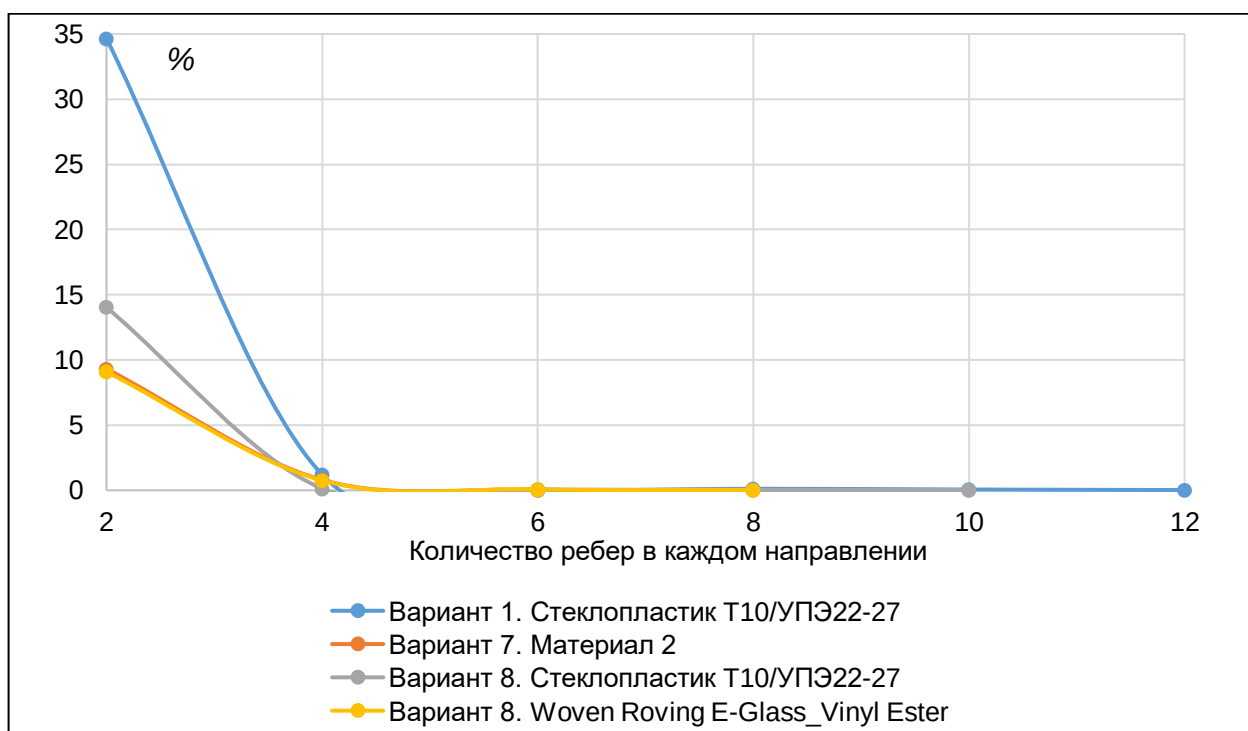


Рисунок 4.18. Процент расхождения значений критических нагрузок между уточненным дискретным методом и МКА

Для оболочки варианта 8 из стеклопластика Т10/УПЭ22-27 с ортогональной сеткой ребер жесткости 4×4 проведем оценку выполнения условий прочности посредством нескольких критериев.

На Рисунке 4.19 построены кривые зависимостей критериев прочности от значения нагрузки для рассматриваемой оболочки. При пересечении кривой значения, равного «1», условия прочности перестают выполняться хотя бы в одной точке оболочки. Критерий максимальных напряжений здесь на графике и далее представлен в виде шести кривых, соответствующих разным его компонентам.

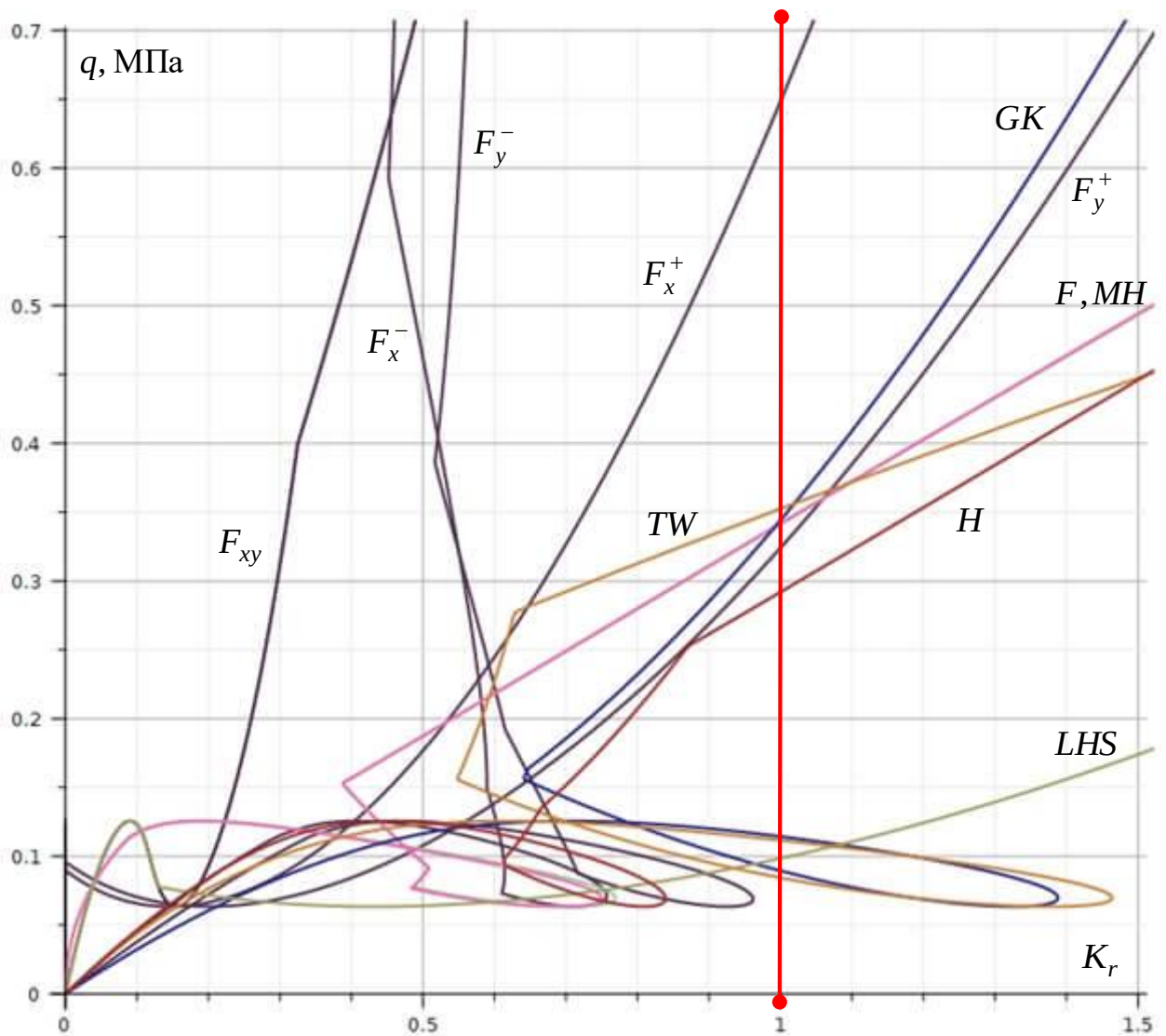


Рисунок 4.19. Значения критериев прочности для оболочки варианта 8 из стеклопластика Т-10/УПЭ22-27 при схеме усиления 4×4

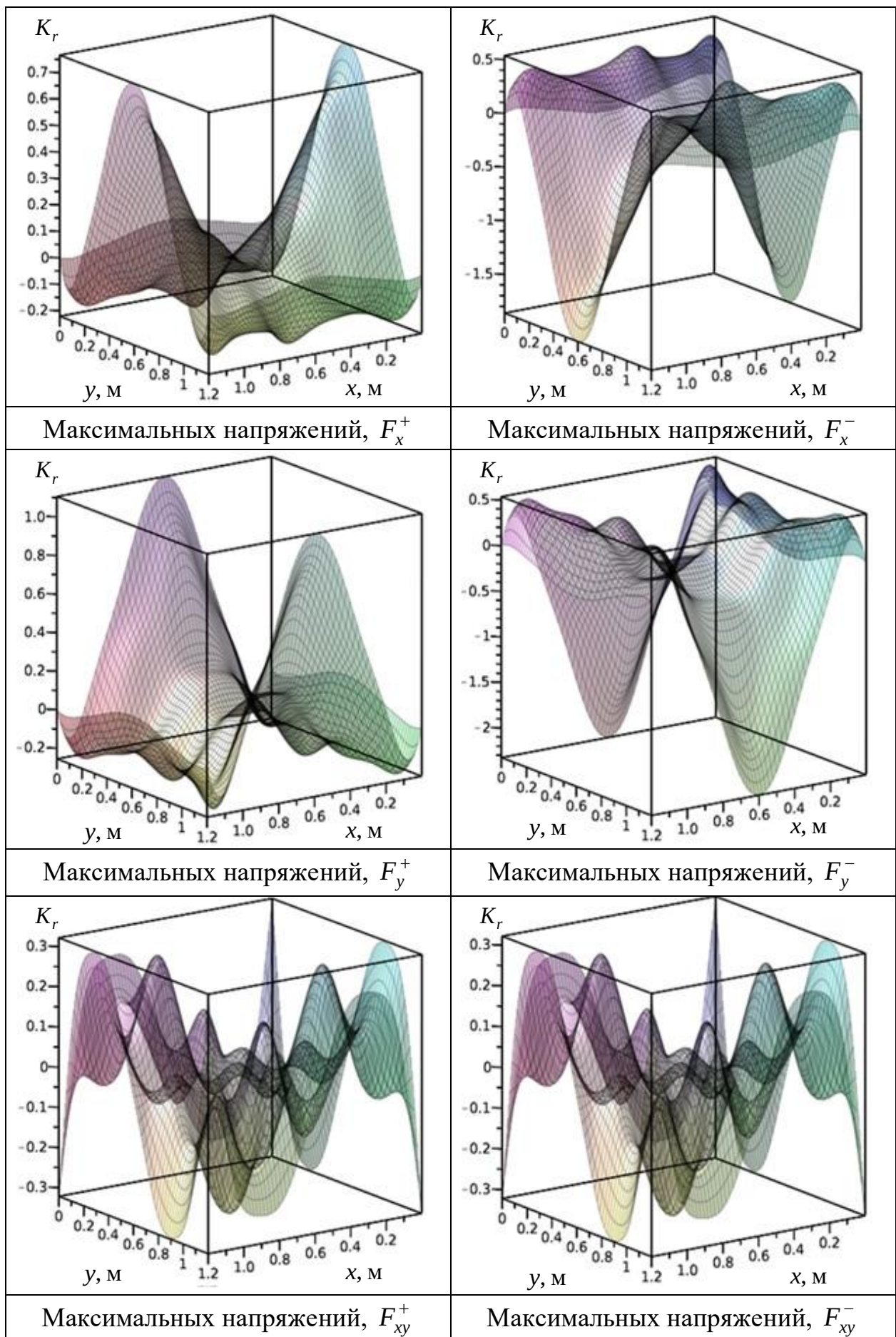
В Таблице 4.15 представлены значения предельно допустимых нагрузок, полученные по разным критериям прочности. Одной из причин такого разброса значений является то, что по части критериев достижение предельно возможных значений напряжений произошло до потери устойчивости, а по части – после. На Рисунке 4.19 это видно по образовавшимся петлям.

Таблица 4.15. Значения предельно допустимых нагрузок

Критерий прочности		Вариант 8 Стеклопластик Т-10/УПЭ22-27 сетка ребер 4×4
Максимальных напряжений	F_x^+	0,6499
	F_x^-	—
	F_y^+	0,3249
	F_y^-	—
	F_{xy}^+	2,0468
	F_{xy}^-	2,0468
Мизеса – Хилла		0,3425
Фишера		0,3425
Гольденבלата – Копнова		0,1141
Liu – Huang – Stout		0,0987
Цая – Ву		0,1113
Хоффмана		0,2942

Построим поля перечисленных критериев прочности при нагрузке 0,3883 МПа (Рисунок 4.20).

Далее, покажем развитие областей невыполнения условий прочности, полученных по некоторым из представленных критериев, при двух значениях нагрузки: 0,5869 МПа и 1,056 МПа (Рисунок 4.21).



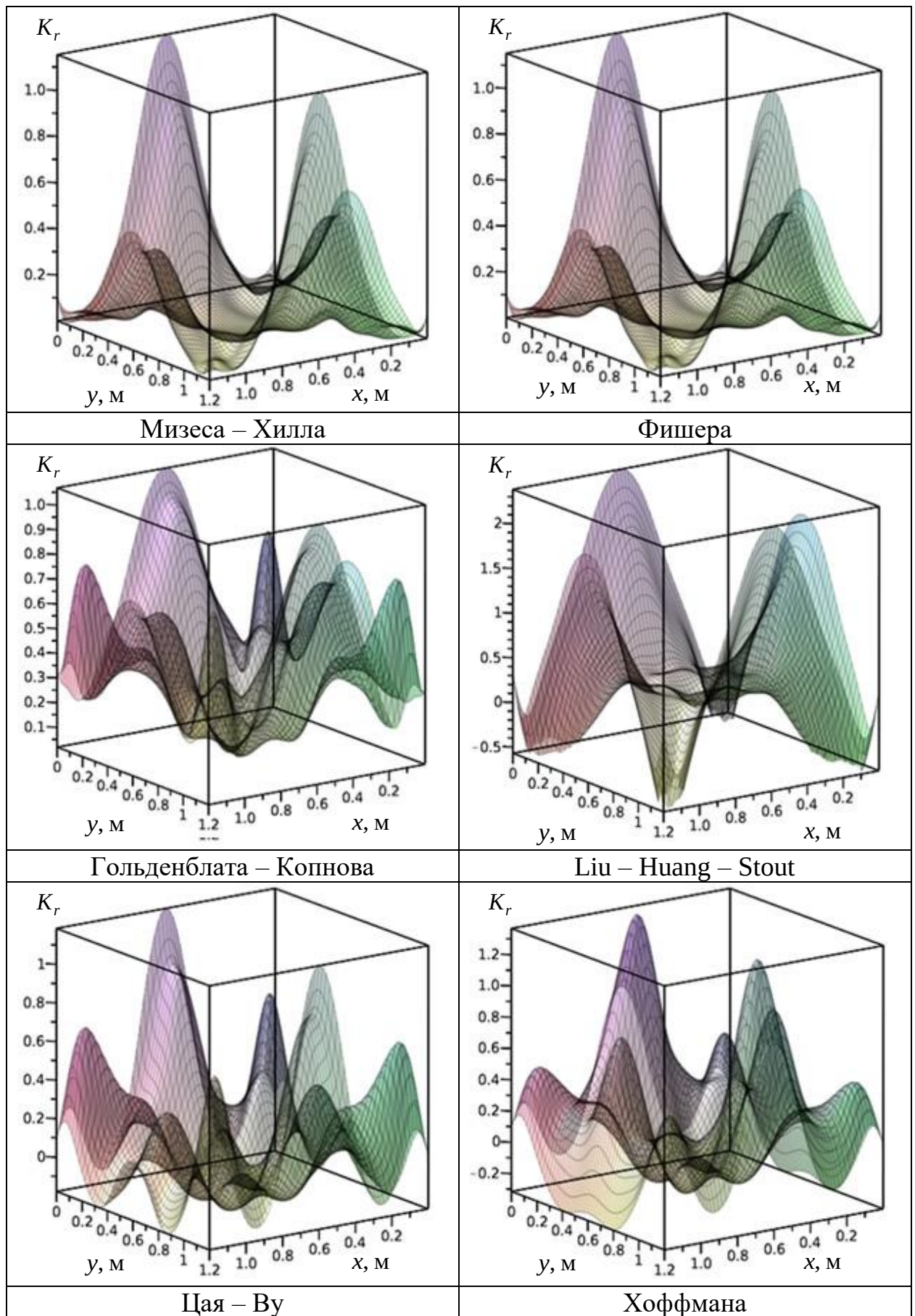
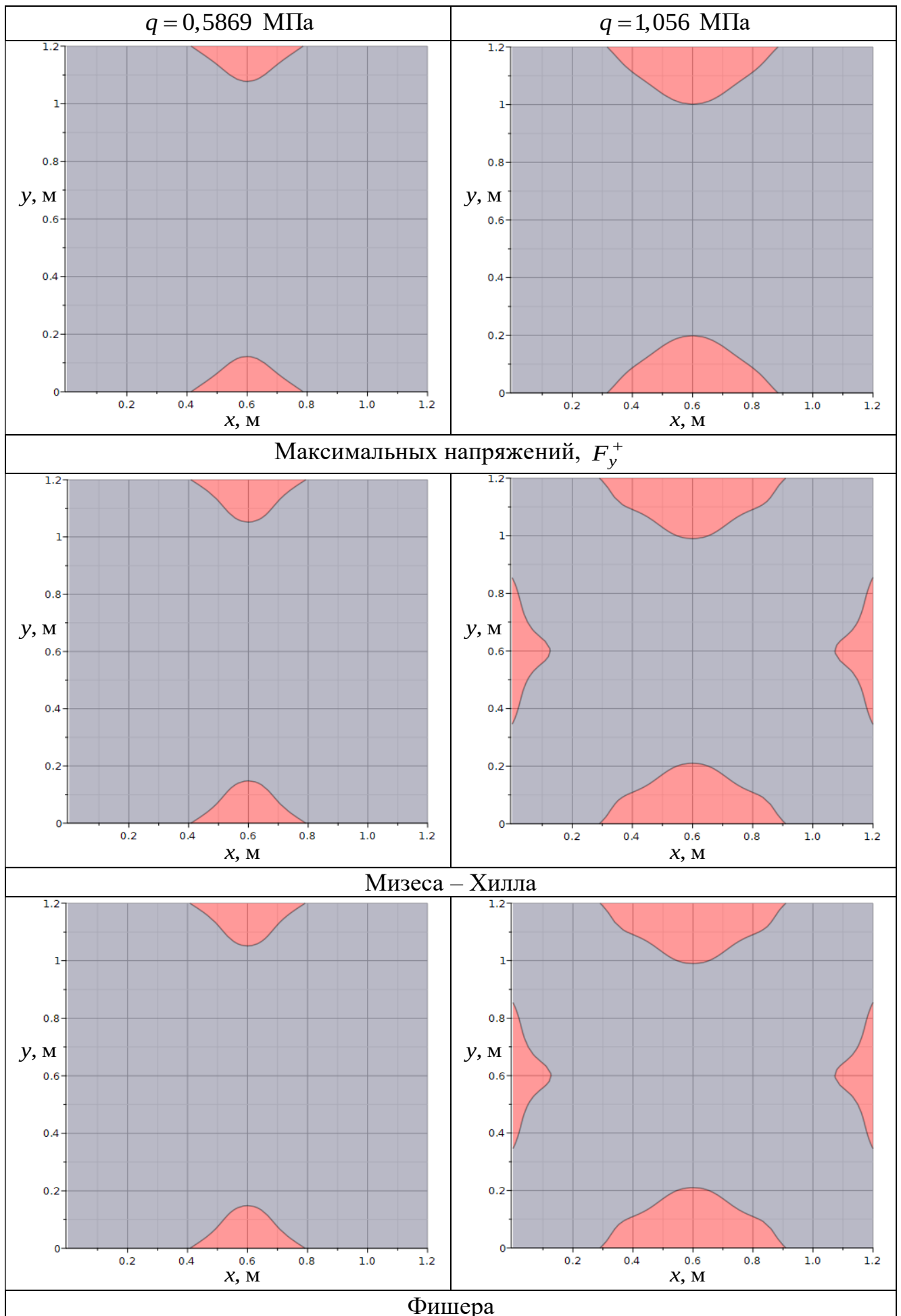
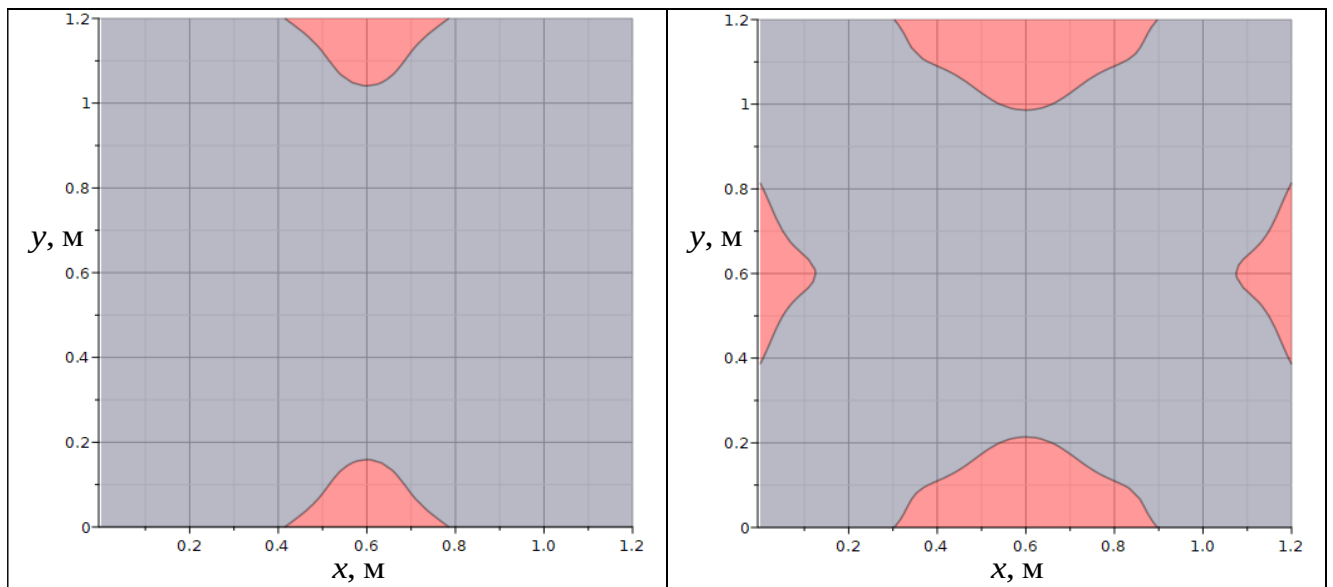
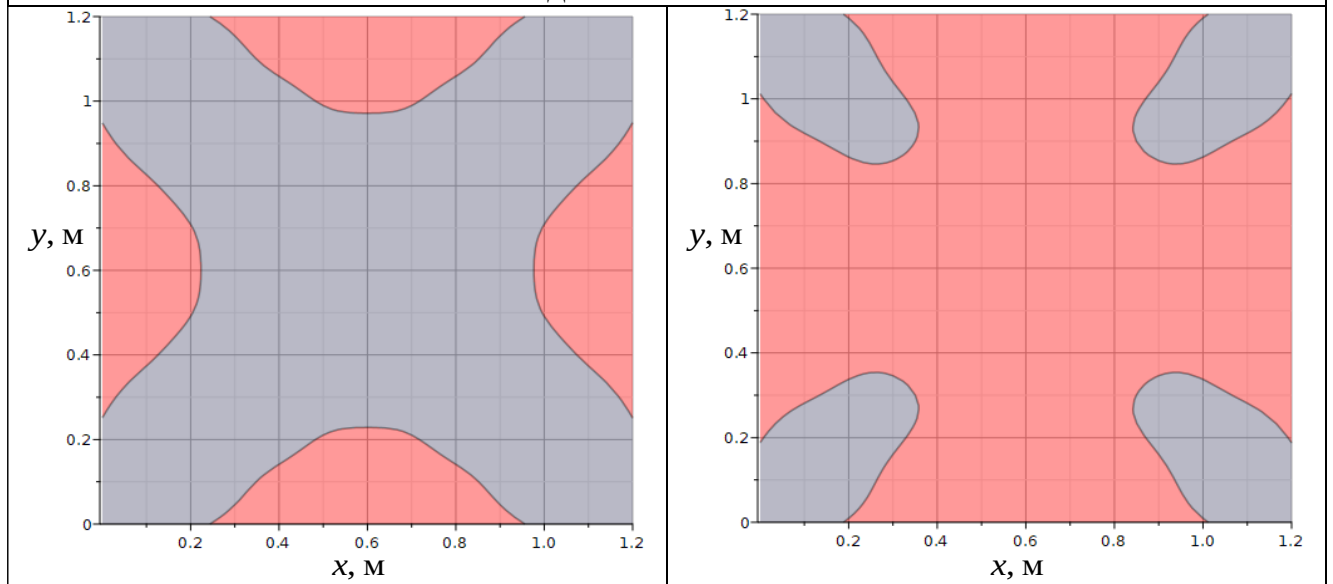


Рисунок 4.20. Поля критериев прочности при нагрузке 0,3883 МПа для полой оболочки двойкой кривизны (вариант 8, сетка ребер 4×4)

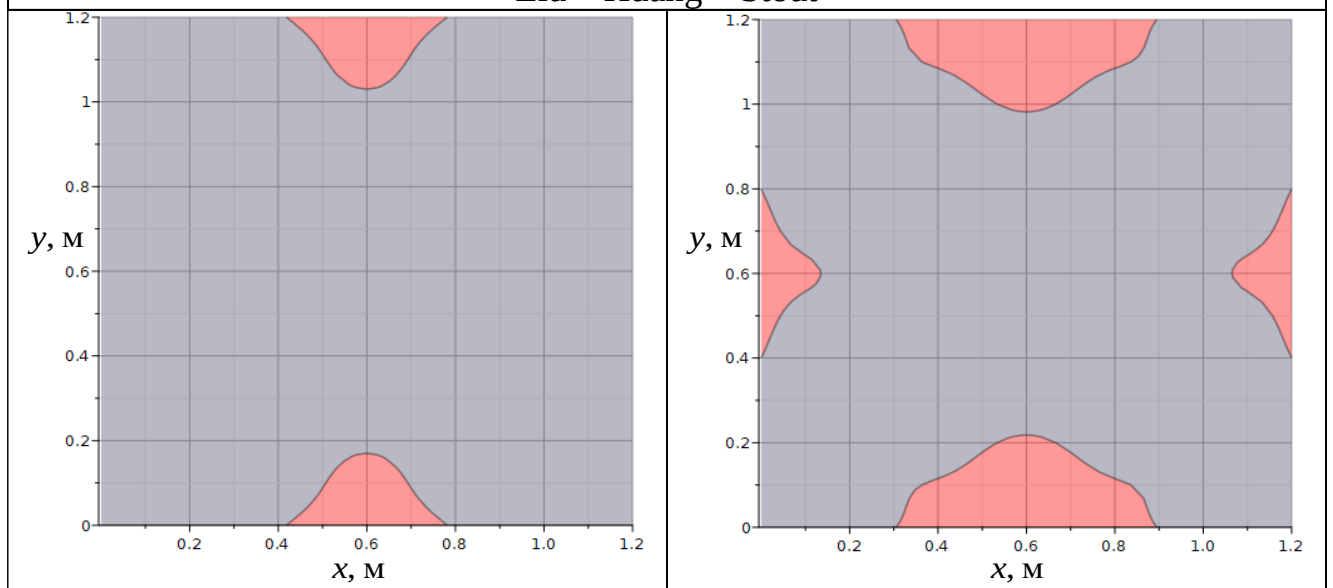




Гольденблата – Копнова



Liu – Huang – Stout



Цзя – Ву

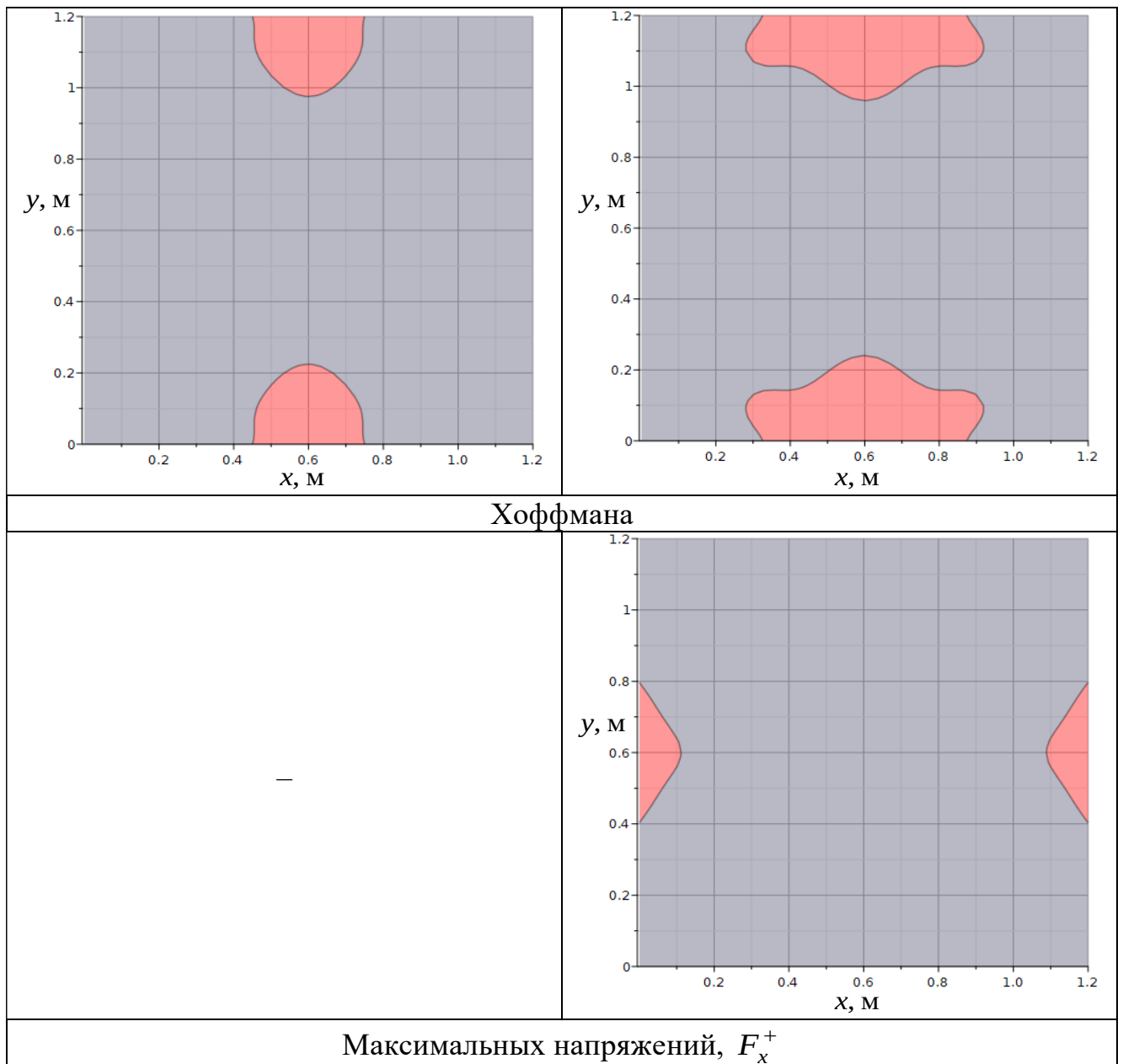


Рисунок 4.21. Развитие областей невыполнения условий прочности при нагрузках 0,5869 МПа и 1,056 МПа для пологой оболочки двойкой кривизны варианта 8

Развитие областей невыполнения условий прочности показывает, в первую очередь, появление повреждений материала по краю конструкции вдоль оси x . Это объясняется тем, что несмотря на то, что с точки зрения геометрии, закреплений и приложенной нагрузки рассматриваемая конструкция симметрична, материал используется ортотропный. Для стеклопластика Т-10/УПЭ22-27 пределы прочности вдоль направления оси ортотропии 1 (совпадает с осью x) в два раза больше, чем вдоль направления 2. В связи с этим, при появлении растягивающих напряжений вдоль направления 2 ближе к границам конструкции появляются

области невыполнения условий прочности. При увеличении нагрузки они начинают увеличиваться, и к ним добавляются аналогичные области рядом с двумя оставшимися краями конструкции. Эти области развиваются аналогичным образом, но с некоторым «запаздыванием».

Результаты, полученные по разным критериям прочности, носят схожий характер, однако следует отметить, что критерий Liu – Huang – Stout перестает выполняться раньше, и показывает более существенные изменения в материале при тех же нагрузках. По критерию Хоффмана наоборот, области развиваются медленнее, и имеют немного отличающуюся форму, а по направлению ортотропии 1 и вовсе не успевают развиваться при рассматриваемых нагрузках.

Критерий максимальных напряжений следует рассматривать в совокупности его компонент: в данном случае, значимыми оказались F_y^+ , F_x^+ , и суммарную область невыполнения условий прочности можно получить, объединив их вместе.

4.4.3 Пологие оболочки двойкой кривизны, подкрепленные ребрами жесткости с внешней стороны

В Таблице 4.16 приводятся данные о критических нагрузках потери устойчивости для варианта расположения ребер жесткости с внешней стороны и их сравнение с обычным вариантом подкрепления. Рассматривается вариант оболочки № 3. Как видно из представленных данных, усиление конструкции ребрами жесткости с внешней стороны является эффективным. На Рисунке 4.22 показаны графики соответствующих зависимостей «нагрузка – прогиб».

Таблица 4.16. Критические нагрузки потери устойчивости для изотропных подкрепленных пологих оболочек двойкой кривизны ($N = 16$)

№	Метод	Схема подкрепления	q_{cr} , МПа			
			0×0	4×4	8×8	12×12
3	Уточн.	Ребра с внутренней стороны	0,6238	1,1411	2,5078	3,0508
	дискр.	Ребра с внешней стороны		1,9087	3,0686	3,2115

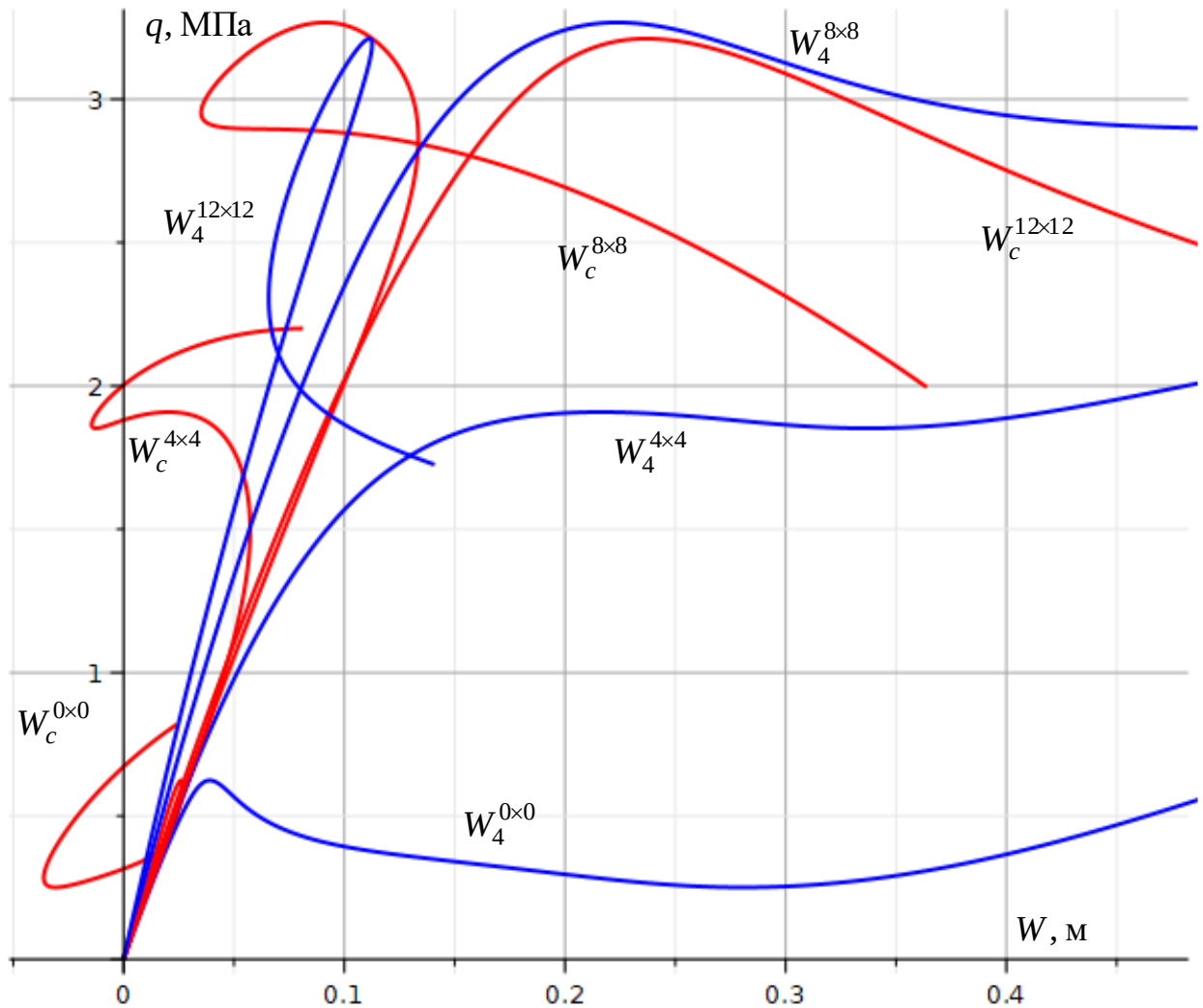


Рисунок 4.22. Результаты для оболочки варианта 3 при расположении ребер жесткости с внешней стороны

4.5 ИССЛЕДОВАНИЕ ЦИЛИНДРИЧЕСКИХ ПАНЕЛЕЙ

Большинство работ, посвященных исследованиям панелей цилиндрических оболочек, относятся к расчетам изотропных конструкций [160, 162, 168, 219, 230, 234, 239, 243, 248, 277], используют в своей основе модель Кирхгофа – Лява [160, 162, 234, 248]. Авторами анализируется только возможность потери устойчивости конструкции, и не рассматривается возможность потери прочности.

Наиболее часто исследуемым способом воздействия на оболочку или панель является осевое сжатие [57, 168, 192, 199, 243, 247, 256, 271, 281], а распределенное

поперечное воздействие рассматривается значительно реже [149, 193, 196, 199, 246, 250, 275].

В работе [168] R. B. Ashok и др. представлены экспериментальные исследования изотропных цилиндрических панелей из алюминия при одноосном сжатии. В ходе эксперимента, значения критической нагрузки определялись четырьмя различными методами. Было также выполнено сравнение с ПК NASTRAN.

Авторами [168] было проанализировано влияние длины, толщины и угла разворота цилиндрической панели на критическую нагрузку потери устойчивости. Показано, что значение критической нагрузки монотонно возрастает с увеличением угла разворота панели.

C. R. Calladine [179] также предлагается два экспериментальных исследования по потере устойчивости тонкостенных упругих цилиндрических оболочек.

В работе [162] исследуются жестко зажатые цилиндрические панели, которые подвергаются как равномерным, так и неравномерным нагрузкам. Используется теория оболочек Кирхгофа – Лява. Основные уравнения задачи включают в себя систему двух дифференциальных уравнений в частных производных второго порядка и одного уравнения четвертого порядка. Система сводится к системе ОДУ, которая решается итерационно.

Авторами [178] выполнены расчеты для определения минимального веса подкрепленных композитных панелей. Оптимизация выполнена, в том числе, для вариантов кольцевых и стрингерных подкреплений цилиндрических панелей и оболочек с разными видами начальных несовершенств. Рассматривается эффект влияния локальной потери устойчивости, возникающей между кольцами.

Y. Xiang и др. [289] рассматривается линейно-упругая задача устойчивости замкнутых цилиндрических оболочек с промежуточными кольцевыми ребрами жесткости под действием осевого сжатия. Математические модели строятся на основе теории тонких оболочек Тимошенко и теории Флюгге, анализируется чувствительность решения к выбору основных соотношений. Получены данные о

потере устойчивости для цилиндрических оболочек с одной и несколькими промежуточными кольцевыми подкреплениями и различными сочетаниями граничных условий. Выполнено сравнение с ПО ANSYS. Рассмотрено влияние выбора расположения кольцевых подкреплений на устойчивость оболочек.

Авторами [275] сформулирован и применен численно-аналитический метод решения краевых задач статики для трансверсально-изотропных бесконечно длинных цилиндрических оболочек переменной толщины, в том числе произвольного сечения. Основные уравнения получены с использованием соотношений теории глубоких оболочек с малой сдвиговой жесткостью. Проанализированы численные результаты для замкнутой оболочки эллиптического сечения при однородном внутреннем давлении, представленные в виде таблиц и графиков.

С. М. Wang и др. [285] предлагается для анализа конструкций в методе Ритца использовать множители Лагранжа. Авторами предложен набор аппроксимирующих функций для использования в методе Ритца при расчете цилиндрических панелей. Используются безразмерные параметры. Исследовано влияние эксцентриситета, количества, размеров и расположения ребер жесткости на процесс деформирования конструкции.

В работе [246] авторами исследуется нелинейная краевая задача для цилиндрической панели, находящейся под действием равномерного внешнего давления. Рассматриваются варианты различных граничных условий. Для построения решения краевой задачи используется расширенный метод Канторовича в сочетании с традиционным методом отслеживания пути.

4.5.1 Цилиндрические панели без ребер жесткости

Вначале рассмотрим панели цилиндрических оболочек без усиления ребрами жесткости. Площадь таких оболочек (обшивок) S^0 , их объем V^0 , отношение протяженности к толщине и стрела подъема d показаны в Таблице 4.17.

Таблица 4.17. Характеристики рассматриваемых панелей

Вариант	$S^0, \text{м}^2$	$V^0, \text{м}^3$	a / h	$d, \text{м}$
1	256	20,48	200	1,96
2	169,64	1,70	2000	1,58
3	1,5	0,015	150	0,05
4	339,29	3,393	2000	5,4

4.5.1.1 Изотропные конструкции

Произведем анализ устойчивости рассматриваемых цилиндрических панелей (без ребер жесткости), выполненных из стали. Полученные значения критических нагрузок показаны в Таблице 4.18.

Таблица 4.18. Критические нагрузки для изотропных цилиндрических панелей

Вариант	Материал	N	Критическая нагрузка потери устойчивости	
			$\bar{P}$	$q_{cr}, \text{МПа}$
1	Сталь	9	6560	0,8611
	Сталь	16	5254	0,6897
2	Сталь	4	23723764	0,3114
	Сталь	9	9303176	0,1221
	Сталь	16	2107087	0,0277
3	Сталь	9	1703,56	0,7067
	Сталь	16	1701,82	0,7059
4	Сталь	9	+	+
	Сталь	16	91515286	1,2011

На примере панели 4 видно, что при $N < 16$ есть риск пропустить нагрузку потери устойчивости (при $N = 9$ график зависимости «нагрузка – прогиб» не имеет

экстремумов). Это вызвано тем, что в некоторых случаях малое число базисных функций в аппроксимации не может повторить характер выпучивания конструкции, и потери устойчивости «сглаживаются».

4.5.1.2 Ортотропные конструкции

В Таблице 4.19, по аналогии с изотропными конструкциями, представлены данные для ортотропных цилиндрических панелей. В дополнение к тем данным, которые указывались ранее, здесь необходимо также указать угол $\varphi, ^\circ$, характеризующий изменение направления укладки волокон ортотропного материала относительно исходного. В данном случае, поскольку для цилиндрических панелей эффективнее укладывать волокна вдоль окружной координаты, угол $\varphi = 90^\circ$.

Таблица 4.19. Нагрузки потери устойчивости для ортотропных цилиндрических панелей (без ребер жесткости)

Вар.	Материал	$\varphi, ^\circ$	N	Критическая нагрузка	
				$\bar{P}$	$q_{cr}, \text{МПа}$
1	Стеклопластик Т-10/УПЭ22-27	90	16	5371,3756	0,0598
2	Графитопластик AS/3501 Graphite/Epoxy	90	16	+	+
3	Углепластик Т300/976	90	16	19291,0075	0,3696
4	Графитопластик AS/3501 Graphite/Epoxy	90	16	360694751	0,2020

На Рисунке 4.23 – график зависимости прогиба W от нагрузки q для цилиндрических панелей вариантов 2 и 4 из материала AS/3501 Graphite/Epoxy. Варианты конструкций 2 и 4 различаются углом разворота – это $\pi/2$ и π , соответственно. Как видно из графика, увеличение угла разворота делает конструкцию жестче (значения прогибов возрастают очень медленно), однако,

приводит в конечном счете к потере устойчивости. В то время, как конструкция с меньшим углом разворота просто постепенно прогибается. Также здесь следует отметить, что представленный на графике процесс деформирования характерен для цилиндрических панелей: центральная точка сначала выпучивается в противоположную от направления действия нагрузки сторону, а точка четверти изначально перемещается по направлению действия нагрузки. Далее, или через потерю устойчивости, или постепенно значения прогибов в центральной точке начинают меняться в положительную сторону, и далее возрастают вместе с прогибами в четверти.

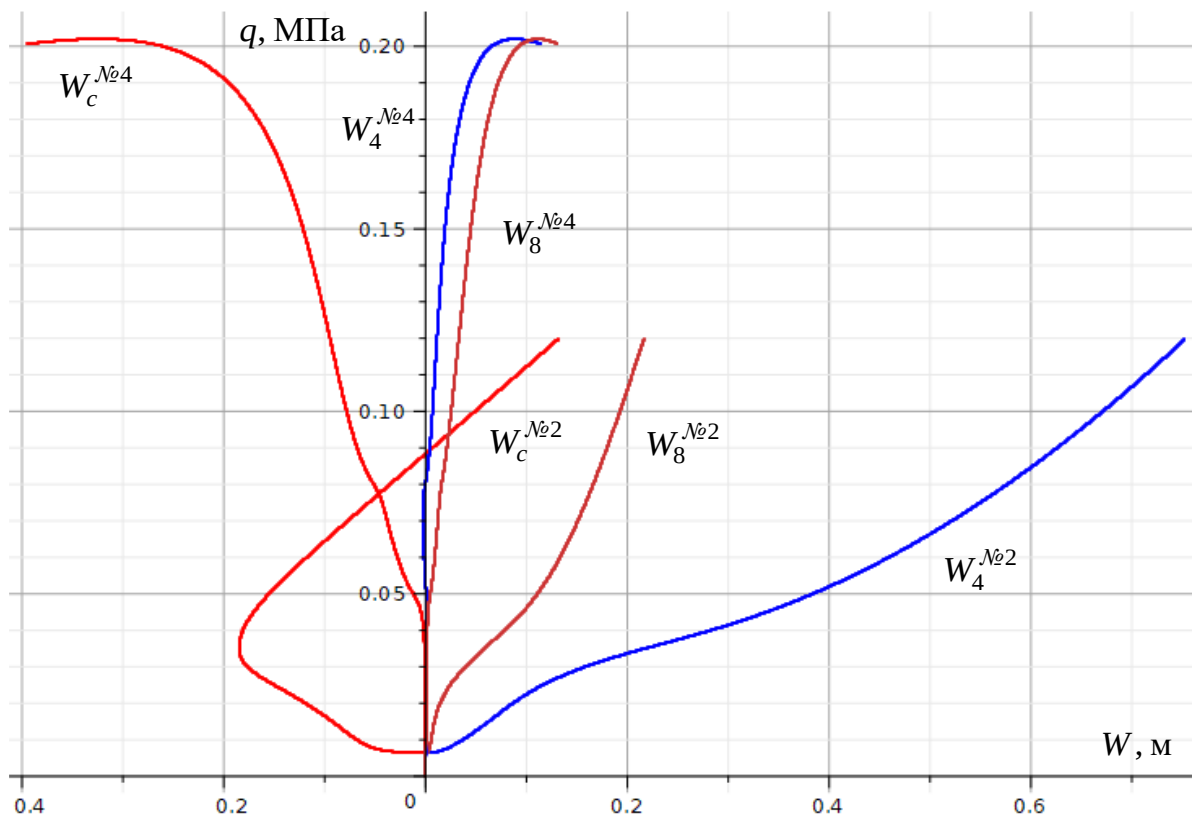


Рисунок 4.23. График зависимости « $q - W$ » для цилиндрических панелей 2 и 4 из материала AS/3501 Graphite/Epoxy

Для цилиндрической панели варианта 1 из стеклопластика проведем оценку выполнения условий прочности посредством нескольких критериев. На Рисунке 4.24 приводится график зависимости значений разных критериев от значения нагрузки. Точки, в которых кривые критериев пересекают значение «1», соответствуют началу невыполнения условий прочности. Критерий максимальных напряжений здесь на графике и далее представлен в виде шести кривых,

соответствующих разным его компонентам. Значения предельно допустимых нагрузок показаны в Таблице 4.20.

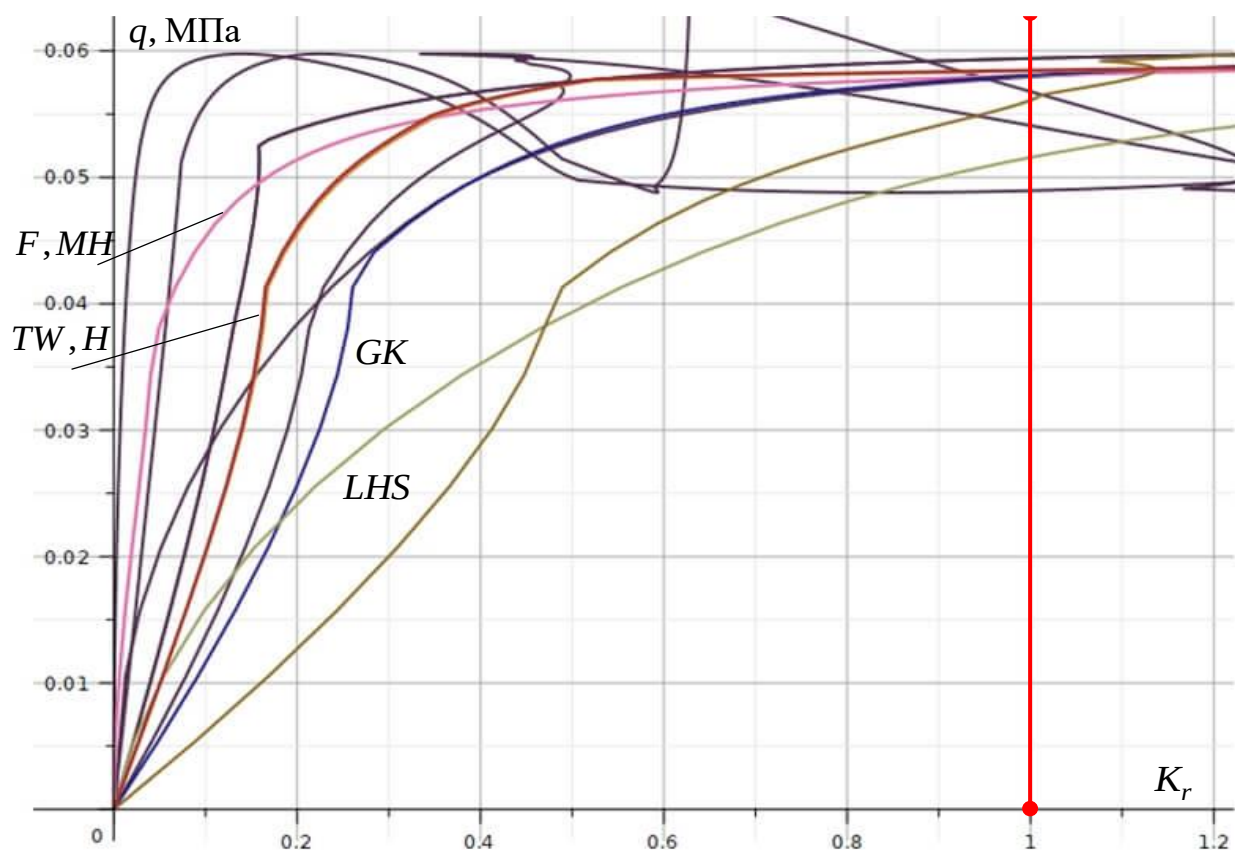
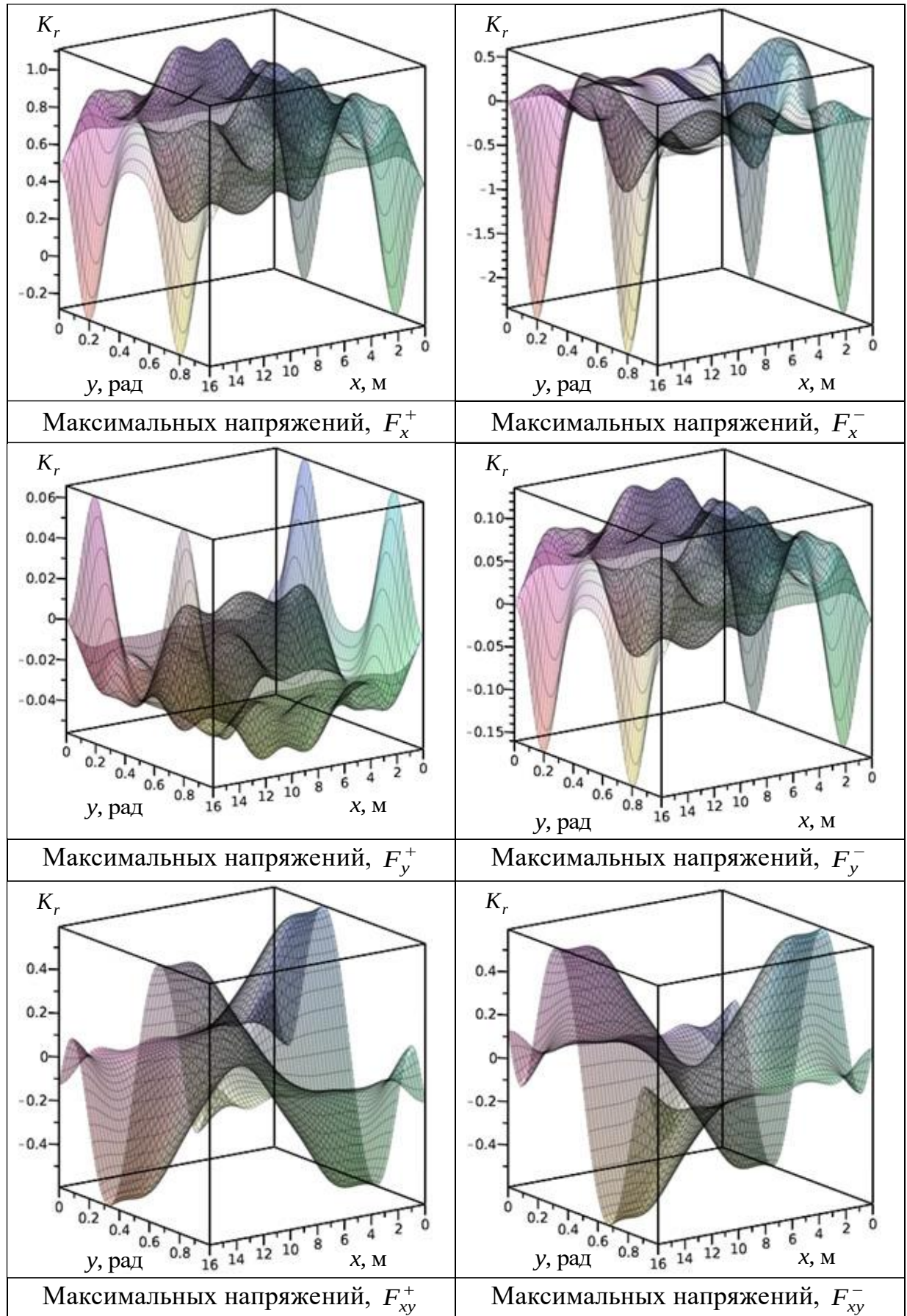


Рисунок 4.24. Кривые критериев прочности для панели варианта 1 из материала Т-10/УПЭ22-27

Таблица 4.20. Значения предельно допустимых нагрузок, полученные по разным критериям прочности для панели 1 из материала Т-10/УПЭ22-27

Критерий прочности		q_{pr} , МПа	Критерий прочности	q_{pr} , МПа
Максимальных напряжений	F_x^+	0,0579	Мизеса – Хилла	0,0581
	F_x^-	–	Фишера	0,0581
	F_y^+	–	Гольденבלата – Копнова	0,0581
	F_y^-	–	Liu – Huang – Stout	0,0518
	F_{xy}^+	0,0594	Цая – Ву	0,0584
	F_{xy}^-	0,0594	Хоффмана	0,0585

Построим поля перечисленных выше критериев прочности при нагрузке 0,0581 МПа (Рисунок 4.25).



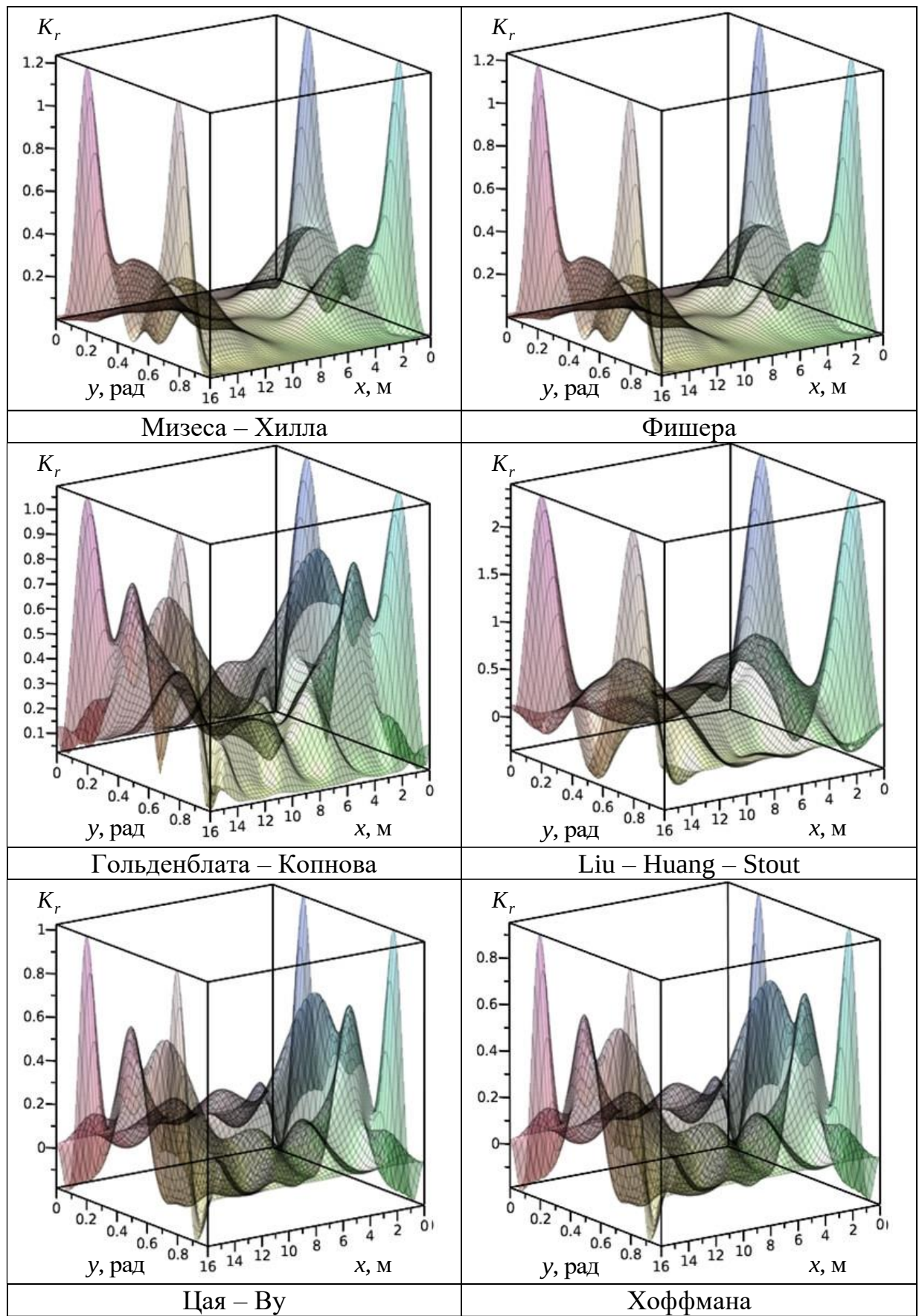
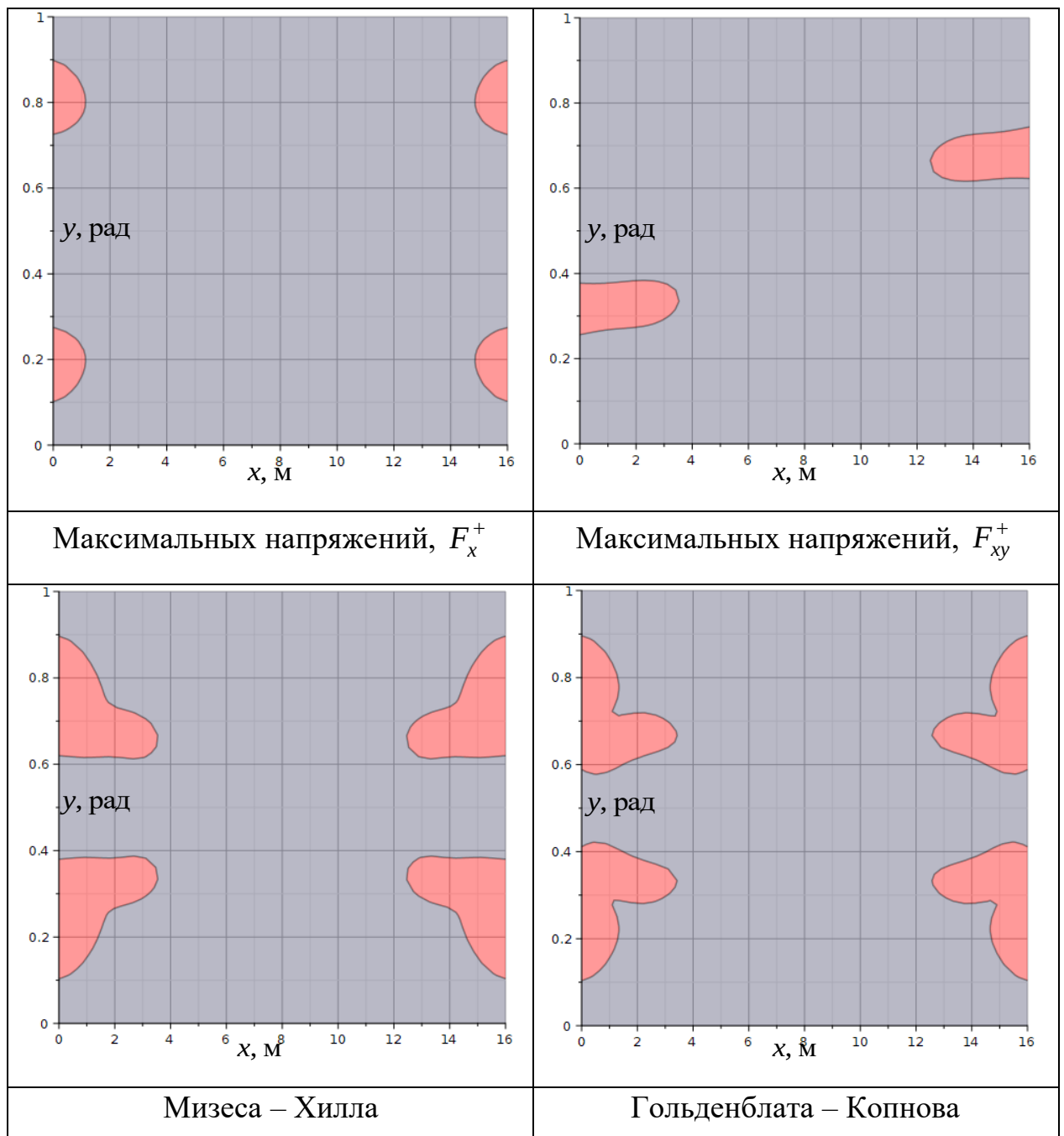


Рисунок 4.25. Поля критериев прочности при нагрузке 0,0581 МПа для панели варианта 1

Покажем развитие областей невыполнения условий прочности, полученных по некоторым из представленных критериев, при нагрузке 0,0596 МПа (нагрузка, близкая к нагрузке потери устойчивости), Рисунок 4.26. Для рассматриваемой цилиндрической панели при укладке волокон вдоль окружной координаты, образование областей невыполнения условий прочности начинается от криволинейного края с симметрией относительно центра (что соответствует образованию двух продольных вмятин). По форме выявленных областей, местам их образования и значению нагрузки разные критерии прочности дают близкий результат, однако критерий Liu – Huang – Stout перестает выполняться чуть раньше.



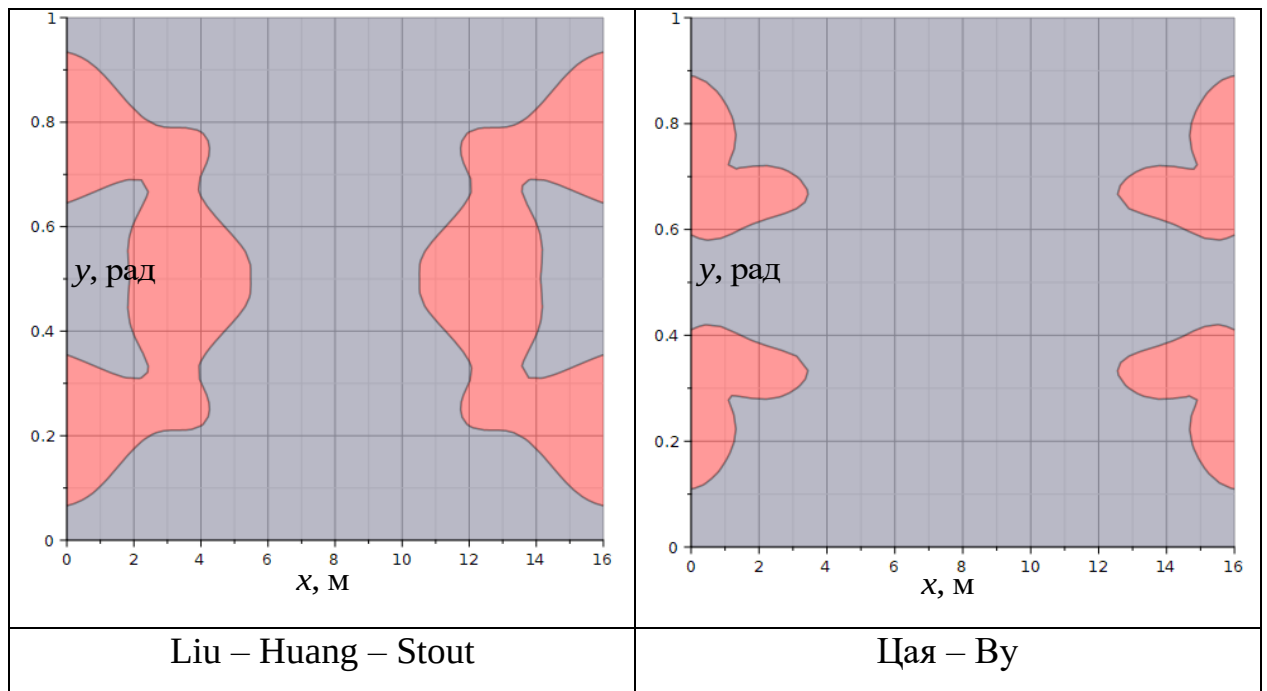


Рисунок 4.26. Развитие областей невыполнения условий прочности при нагрузке 0,0596 МПа для панели варианта 1

4.5.2 Цилиндрические панели, подкрепленные ортогональной сеткой ребер

В этом параграфе рассмотрим цилиндрические панели вариантов 1, 2 и 3, закрепление контура – шарнирно-неподвижное. Ортогональную сетку ребер будем располагать с внутренней стороны оболочки, высоту и ширину ребер здесь и далее будем выбирать $h^i = h^j = 3h$, $r_i = r_j = 2h$ соответственно.

Количество ребер будем брать одинаковым в обоих направлениях, для каждого нового варианта сетки увеличивая его на 2 или 4. В отличие от пологих оболочек двоякой кривизны, здесь добавлены варианты расчета 2×2 и 6×6 для возможности более точной демонстрации сходимости значений.

Перед тем, как приводить данные расчетов, покажем некоторые характеристики рассматриваемых панелей в зависимости от числа ребер жесткости (Таблица 4.21) [133].

Таблица 4.21. Характеристики рассматриваемых панелей в зависимости от числа ребер жесткости

Вар.	Параметр							
1	$S^0, \text{м}^2$	$V^0, \text{м}^3$	a/h	$d, \text{м}$	$h^i = h^j, \text{м}$		$r_i = r_j, \text{м}$	
	256	20,48	200	1,96	0,24		0,16	
		2×2	4×4	6×6	8×8	12×12	16×16	20×20
	$x_r, \text{м}$	8	4	2,67	2	1,33	1	0,8
	$y_r, \text{м}$	8	4	2,67	2	1,33	1	0,8
	$S^R, \text{м}^2$	10,14	20,07	29,80	39,32	57,75	75,37	92,16
	$V^R, \text{м}^3$	2,43	4,82	7,15	9,44	13,86	18,09	22,12
	S^R / S^0	0,040	0,078	0,116	0,154	0,226	0,294	0,360
	V^R / V^0	0,119	0,235	0,349	0,461	0,677	0,883	1,080
2	$S^0, \text{м}^2$	$V^0, \text{м}^3$	a/h	$d, \text{м}$	$h^i = h^j, \text{м}$		$r_i = r_j, \text{м}$	
	169,64	1,70	2000	1,58	0,03		0,02	
		2×2	4×4	6×6	8×8	12×12	16×16	20×20
	$x_r, \text{м}$	10	5	3,33	2,5	1,67	1,25	1
	$y_r, \text{м}$	4,24	2,12	1,41	1,06	0,71	0,53	0,42
	$S^R, \text{м}^2$	1,14	2,27	3,40	4,53	6,78	9,01	11,23
	$V^R, \text{м}^3$	0,03	0,07	0,10	0,14	0,20	0,27	0,34
	S^R / S^0	0,007	0,013	0,020	0,027	0,040	0,053	0,066
	V^R / V^0	0,020	0,040	0,060	0,080	0,120	0,159	0,199
3	$S^0, \text{м}^2$	$V^0, \text{м}^3$	a/h	$d, \text{м}$	$h^i = h^j, \text{м}$		$r_i = r_j, \text{м}$	
	1,5	0,015	150	0,05	0,03		0,02	
		2×2	4×4	6×6	8×8	12×12	16×16	20×20
	$x_r, \text{м}$	0,75	0,375	0,25	0,188	0,125	0,09	0,075
	$y_r, \text{м}$	0,50	0,25	0,17	0,13	0,08	0,06	0,05
	$S^R, \text{м}^2$	0,098	0,194	0,286	0,374	0,542	0,698	0,840
	$V^R, \text{м}^3$	0,003	0,006	0,009	0,011	0,016	0,021	0,025
	S^R / S^0	0,066	0,129	0,190	0,250	0,362	0,465	0,560
	V^R / V^0	0,197	0,387	0,571	0,749	1,085	1,395	1,680

4.5.2.1 Изотропные конструкции

Вначале осуществим расчеты изотропных конструкций, выполненных из стали. В Таблице 4.22 показаны безразмерные значения критических нагрузок потери устойчивости при разных вариантах подкрепления, полученные по разным методам учета ребер жесткости и при разных значениях N . Используя формулы перехода к размерным параметрам, получим данные, представленные в Таблице 4.23 [133]. Рассматриваются цилиндрические панели вариантов 1, 2, 3.

Таблица 4.22. Критические нагрузки $\bar{P}_{cr}$ для изотропных подкрепленных цилиндрических панелей (безразмерные значения)

№	N	Метод	Безразмерная критическая нагрузка $\bar{P}$							
			0×0	2×2	4×4	6×6	8×8	12×12	16×16	20×20
1	9	Уточн.	6560	11234	16739	20858	24720	—	—	—
	16	дискр.	5254	10937	16010	20341	24232	—	—	—
	9	МКА	6560	12003	16709	20899	24737	—	—	—
	16		5254	11676	16284	20421	24250	—	—	—
2	4	Уточн. дискр.	23723764	24233004	24640483	25110222	25599614	26619542	27710286	28904669
	9		9303176	9469275	9687737	9863158	10039517	10397936	10752546	11101927
	16		2107087	2280530	2624307	2877765	3131600	3639243	4138969	7998559
	4	Дискр.	23723764	28295793	24317362	26692988	28669470	—	—	—
	9		9303176	9754427	9978474	10475540	11283214	12022788	12861108	13684814
	16		2107087	3432242	6629273	7681164	8585970	8925825	9828544	10680902
	4	По линии	23723764	24079702	24446712	24822796	25200224	25975243	26780620	27628396
	9		9303176	9400764	9610315	9760871	9910114	10203317	10490009	10770544
	16		2107087	2274950	2581482	2853114	3098719	3586512	4065801	7633174
	4	МКА	23723764	24178766	24643499	25118829	25606902	26624888	27714636	28908504
	9		9303176	9489630	9674587	9858069	10040115	10400000	10754466	11103718
	16		2107087	2363462	2620590	2877335	3133017	3639756	4139423	7996984
3	4	Уточн. дискр.	—	5882	6747	7551	—	—	—	—
	9		1703	3760	6712	7515	—	—	—	—
	16		1701	5234	6657	7499	—	—	—	—
	4	МКА	—	5885	6747	7555	—	—	—	—
	9		1703	5863	6721	7519	—	—	—	—
	16		1701	5864	6710	7504	—	—	—	—

Таблица 4.23. Критические нагрузки q_{cr} для изотропных подкрепленных цилиндрических панелей (размерные значения)

№	N	Метод	Критическая нагрузка потери устойчивости q_{cr} , МПа							
			0×0	2×2	4×4	6×6	8×8	12×12	16×16	20×20
1	9	Уточн.	0,8611	1,4745	2,1970	2,7377	3,2446	—	—	—
	16	дискр.	0,6897	1,4356	2,1014	2,6698	3,1806	—	—	—
	9	МКА	0,8611	1,5755	2,1932	2,7431	3,2468	—	—	—
	16		0,6897	1,5325	2,1373	2,6803	3,1829	—	—	—
2	4	Уточн. дискр.	0,3114	0,3181	0,3234	0,3296	0,3360	0,3494	0,3637	0,3794
	9		0,1221	0,1243	0,1272	0,1295	0,1318	0,1365	0,1411	0,1457
	16		0,0277	0,0299	0,0344	0,0378	0,0411	0,0478	0,0543	0,1050
	4	Дискр.	0,3114	0,3714	0,3192	0,3503	0,3763	—	—	—
	9		0,1221	0,1280	0,1310	0,1375	0,1481	0,1578	0,1688	0,1796
	16		0,0277	0,0450	0,0870	0,1008	0,1127	0,1172	0,1290	0,1402
	4	По линии	0,3114	0,3160	0,3209	0,3258	0,3308	0,3409	0,3515	0,3626
	9		0,1221	0,1234	0,1261	0,1281	0,1301	0,1339	0,1377	0,1414
	16		0,0277	0,0299	0,0339	0,0374	0,0407	0,0471	0,0534	0,1002
	4	МКА	0,3114	0,3173	0,3234	0,3297	0,3361	0,3495	0,3638	0,3794
	9		0,1221	0,1246	0,1270	0,1294	0,1318	0,1365	0,1412	0,1457
	16		0,0277	0,0310	0,0344	0,0378	0,0411	0,0478	0,0543	0,1050
3	4	Уточн. дискр.	—	2,4401	2,7989	3,1326	—	—	—	—
	9		0,7067	1,5598	2,7843	3,1177	—	—	—	—
	16		0,7059	2,1714	2,7616	3,1110	—	—	—	—
	4	МКА	—	2,4416	2,7989	3,1342	—	—	—	—
	9		0,7067	2,4322	2,7882	3,1193	—	—	—	—
	16		0,7059	2,4327	2,7835	3,1129	—	—	—	—

Для конструкций вариантов 1 и 3, начиная с определенного количества подкрепляющих элементов, потеря устойчивости не наблюдается.

На Рисунке 4.27 показан график зависимости прогиба W от нагрузки q при разном количестве подкрепляющих элементов для цилиндрической панели варианта 1 (используется уточненный дискретный метод и метод конструктивной анизотропии) [133].

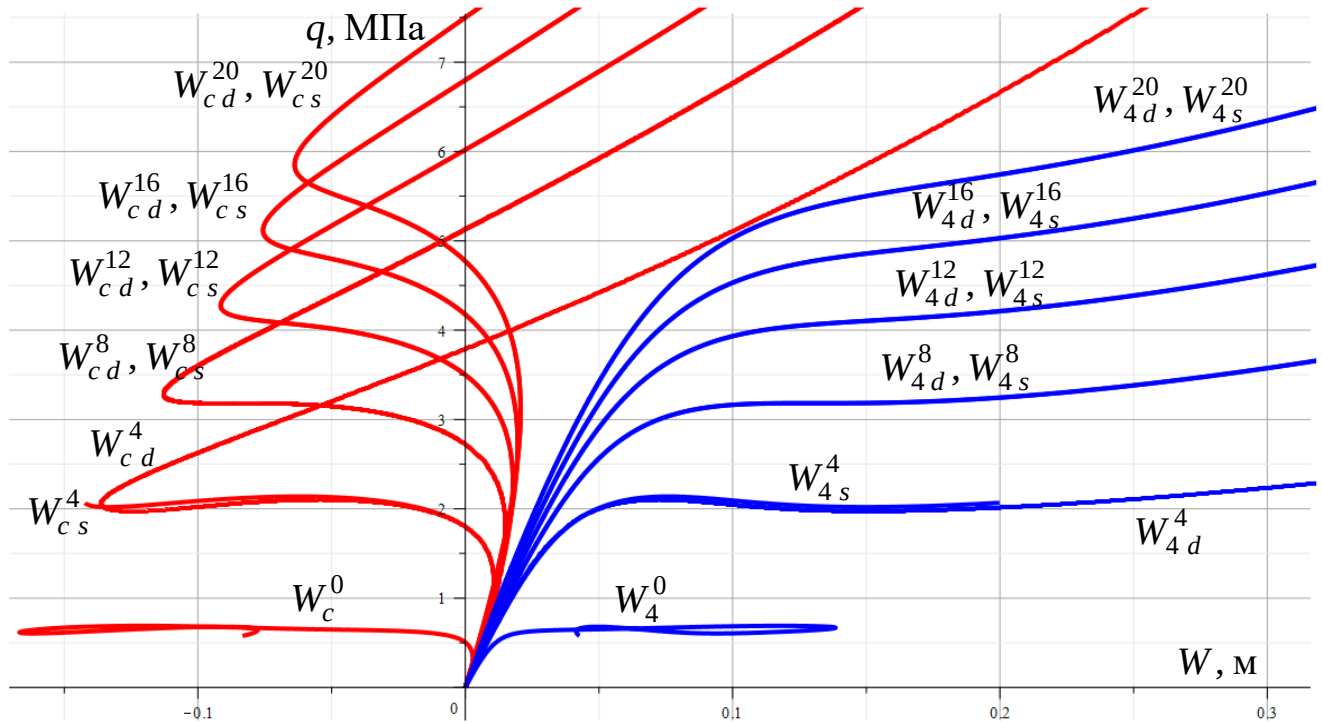


Рисунок 4.27. График «нагрузка – прогиб» при различном числе ребер жесткости для цилиндрической панели варианта 1

Из полученных результатов видно, что для данных конструкций решение по методу конструктивной анизотропии сходится к решению, полученному при уточненном дискретном методе, начиная с сетки ребер 8×8 (разница в значениях составляет менее 1 % при $N = 16$).

Рассмотрим отдельно процесс сходимости значения критической нагрузки потери устойчивости при увеличении числа N для стальной цилиндрической панели варианта 2 при ортогональной сетке ребер 8×8 . Способ учета ребер жесткости – уточненный дискретный. Результаты показаны в Таблице 4.24 и на Рисунке 4.28.

Таблица 4.24. Значения нагрузок потери устойчивости для стальной панели варианта 2 с сеткой ребер 8×8

	Критическая нагрузка потери устойчивости				
	$N = 1$	$N = 4$	$N = 9$	$N = 16$	$N = 25$
Безразмерное значение $\bar{P}_{cr}$	1397406983	25599614,8	10039518	3131600	3076932
Размерное значение q_{cr} , МПа	18,3410	0,3360	0,1318	0,0411	0,0404

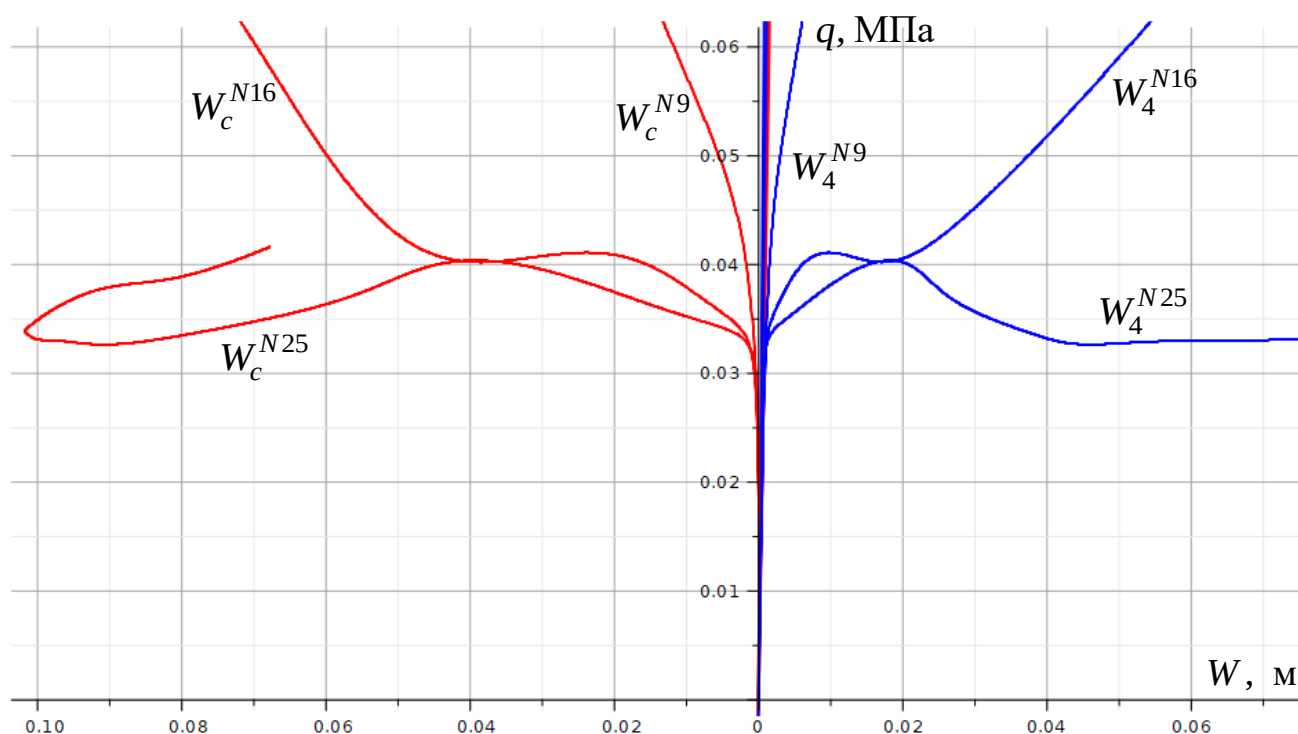


Рисунок 4.28. График «нагрузка – прогиб» для стальной цилиндрической панели варианта 2 при разных значениях N

Из полученных данных видно, что при $N = 16$ и $N = 25$ разница в значении критической нагрузки уже несущественная. Таким образом, для подобных конструкций при проведении расчетов можно ограничиться числом слагаемых в методе Ритца $N = 16$.

Значения критических нагрузок при разном числе ребер жесткости (цилиндрическая панель 2, $N = 9$) при выборе разных методов учета подкрепления показаны на Рисунке 4.29, а для $N = 16$ – на Рисунке 4.30 [133].

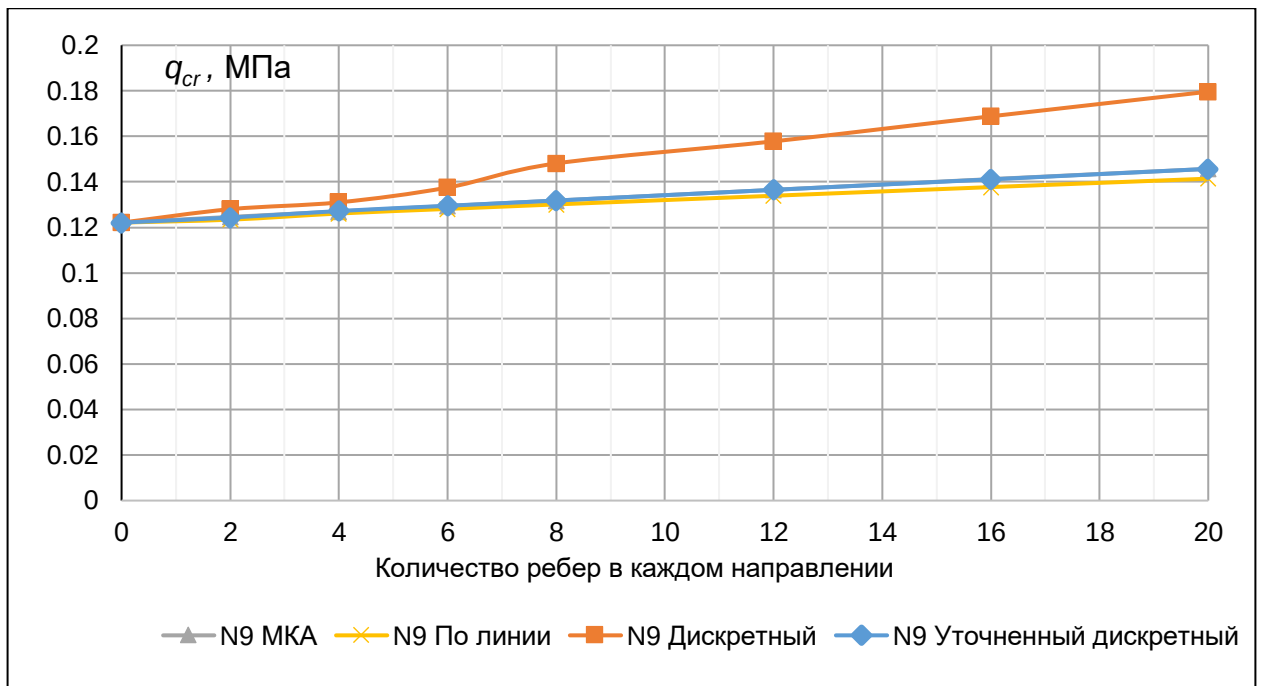


Рисунок 4.29. Значения критических нагрузок q_{cr} при разном числе ребер жесткости (цилиндрическая панель 2, $N = 9$)

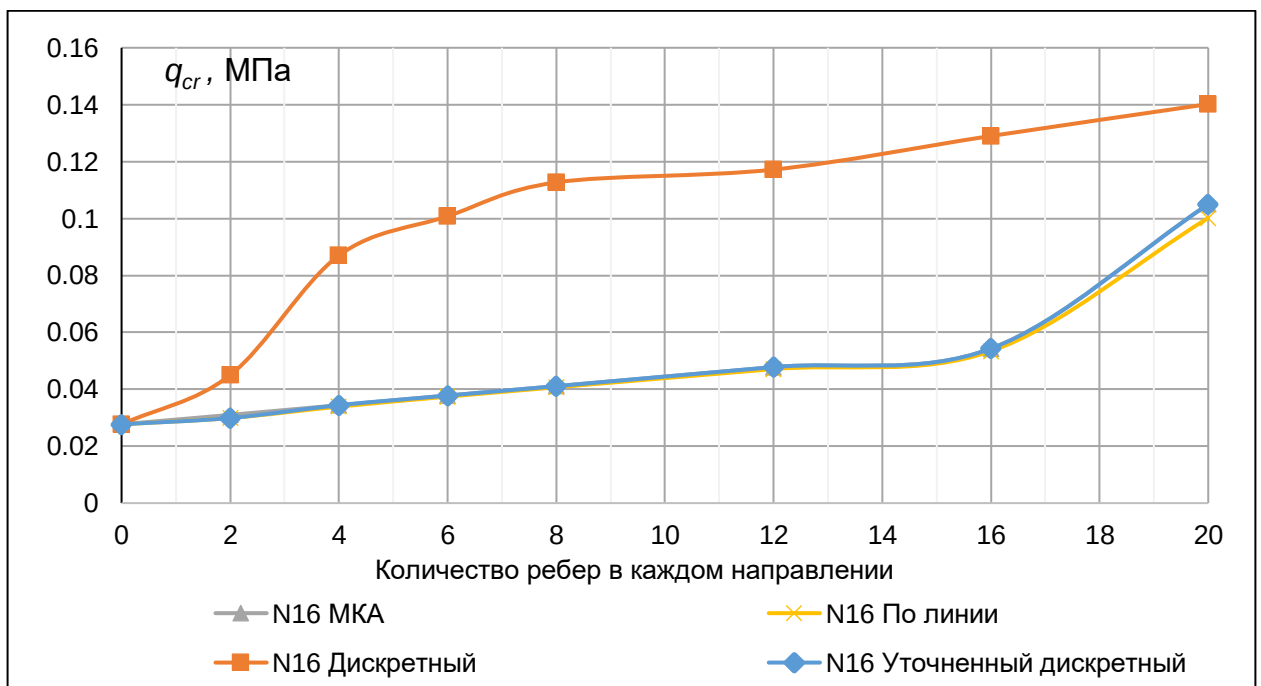


Рисунок 4.30. Значения критических нагрузок q_{cr} при разном числе ребер жесткости (цилиндрическая панель 2, $N = 16$)

На основании графиков можно предположить, что уточненный дискретный метод и метод конструктивной анизотропии для данного класса задач дают близкие значения. На Рисунке 4.31 для оболочки варианта 2 показан график уже при выборе только уточненного дискретного метода. Результат показан в безразмерных

параметрах при $N=16$, а на Рисунке 4.32 – аналогичный результат в размерных параметрах.

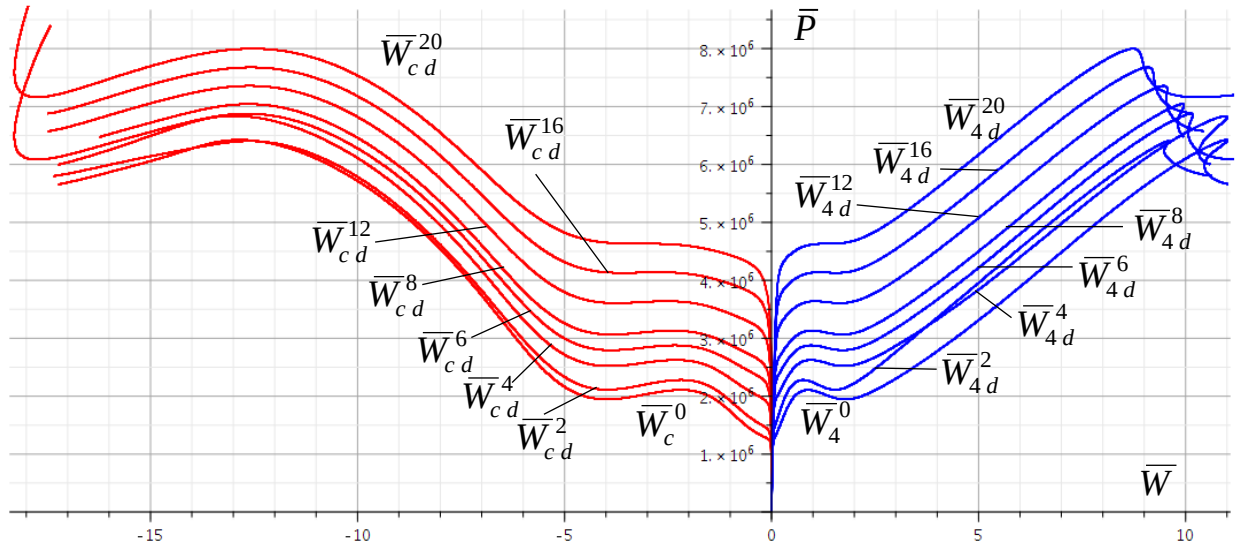


Рисунок 4.31. График зависимости прогиба от нагрузки при разном количестве подкрепляющих элементов для цилиндрической панели варианта 2 ($N=16$, уточненный дискретный метод, безразмерные параметры)

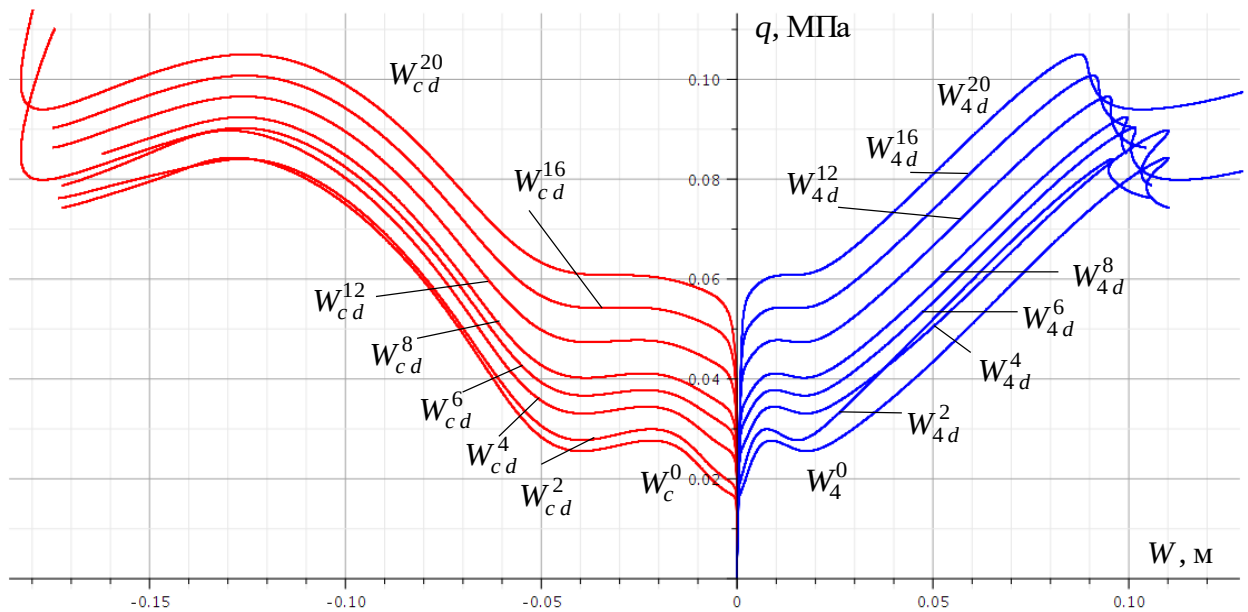


Рисунок 4.32. График зависимости прогиба от нагрузки при разном количестве подкрепляющих элементов для цилиндрической панели варианта 2 ($N=16$, уточненный дискретный метод, размерные параметры)

Для цилиндрической панели варианта 3 аналогичные данные представлены на Рисунках 4.33 – 4.34. Следует отметить, что для данной конструкции при отсутствии сетки ребер и при наличии сетки 2×2 наблюдается петлеобразование

графика «нагрузка – прогиб». Также можно заметить, что характер поведения кривых на Рисунках 4.33 и 4.34 (уточненный дискретный метод и метод конструктивной анизотропии) идентичен.

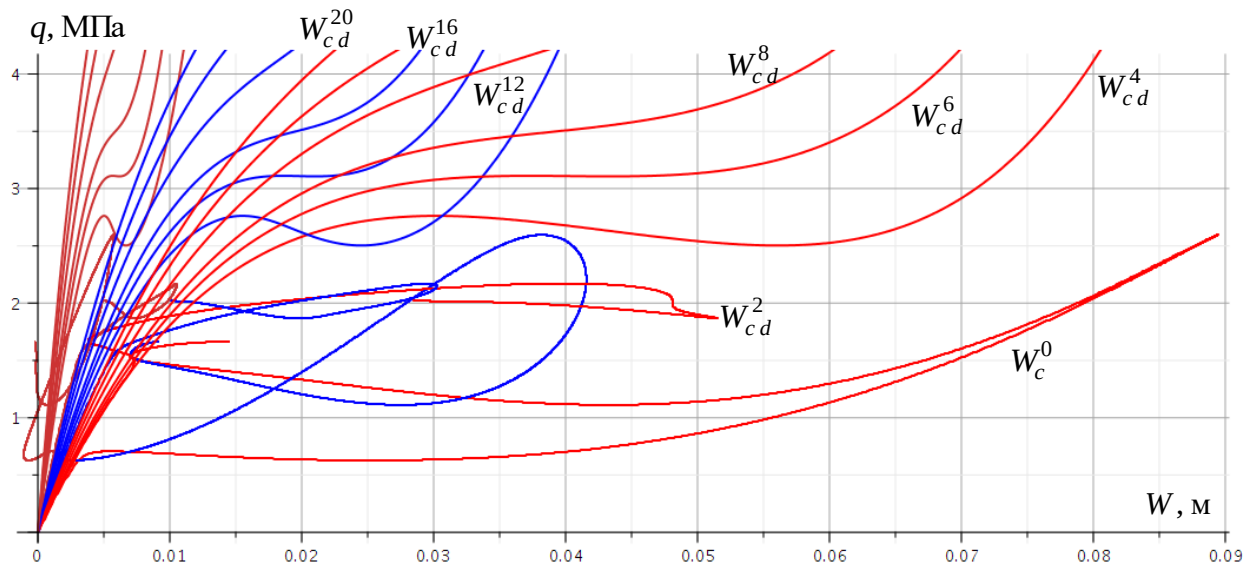


Рисунок 4.33. График зависимости прогиба W от нагрузки q при разном количестве подкрепляющих ребер жесткости для цилиндрической панели варианта 3 ($N=16$, уточненный дискретный метод)

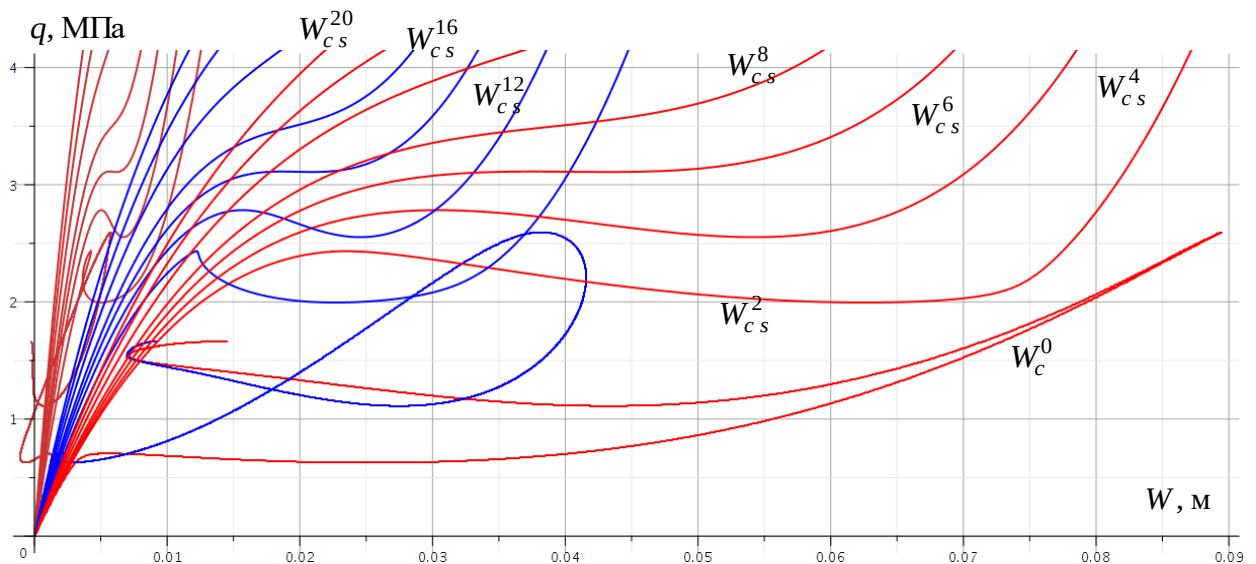


Рисунок 4.34. График зависимости прогиба W от нагрузки q при разном количестве подкрепляющих ребер жесткости для цилиндрической панели варианта 3 ($N=16$, метод конструктивной анизотропии)

Далее для анализа прочности цилиндрических изотропных стальных панелей применим критерий Мизеса (4.4). Соответствующие результаты показаны в

Таблице 4.25. Зеленым цветом выделены два варианта задачи, для которых далее будет произведен анализ развития областей невыполнения условий прочности.

Таблица 4.25. Нагрузки q_{pr} начала невыполнения условий прочности по критерию Мизеса, $N = 16$

№		Метод	Значение q_{pr} , МПа								Кривая
			0×0	2×2	4×4	6×6	8×8	12×12	16×16	20×20	
1	$\sigma_T = 265$ МПа $h = 0,08$ м	Уточн. дискр.	0,2693	0,2310	0,3450	0,4082	0,4230	0,4541	0,4828	0,5112	1
		МКА	0,2693	0,3640	0,3899	0,4065	0,4229	0,4541	0,4828	0,5111	2
	$\sigma_T = 265$ МПа $h = 0,01$ м	Уточн. дискр.	0,5943	0,9742	1,1575	1,2470	1,3146	1,4262	1,5218	1,6097	3
		МКА	0,5943	1,0364	1,1581	1,2460	1,3145	1,4261	1,5218	1,6096	4
	$\sigma_T = 345$ МПа $h = 0,01$ м	Уточн. дискр.	0,6196	1,1290	1,4044	1,5183	1,6172	1,7713	1,8979	2,0114	5
		МКА	0,6196	1,1871	1,4100	1,5180	1,6172	1,7712	1,8978	2,0114	6
3	$\sigma_T = 265$ МПа $h = 0,01$ м	Уточн. дискр.	0,6722	0,7891	0,8003	0,8509	0,8821	0,9246	0,9890	1,0529	7
		МКА	0,6722	0,7845	0,8225	0,8506	0,8820	0,9245	0,9890	1,0529	8
	$\sigma_T = 345$ МПа $h = 0,01$ м	Уточн. дискр.	0,7032	0,9944	1,0087	1,0675	1,1081	1,1711	1,2544	1,3368	9
		МКА	0,7032	1,0046	1,0302	1,0671	1,1079	1,1711	1,2544	1,3368	10

На Рисунках 4.35, 4.36 эти результаты показаны графически (номера кривых указаны в Таблице 4.25). Как видно из представленных данных, усиление конструкции ребрами жесткости увеличивает ее несущую способность, и при ортогональной сетке ребер 6×6 значения, полученные методом конструктивной анизотропии и уточненным дискретным методом, близки.

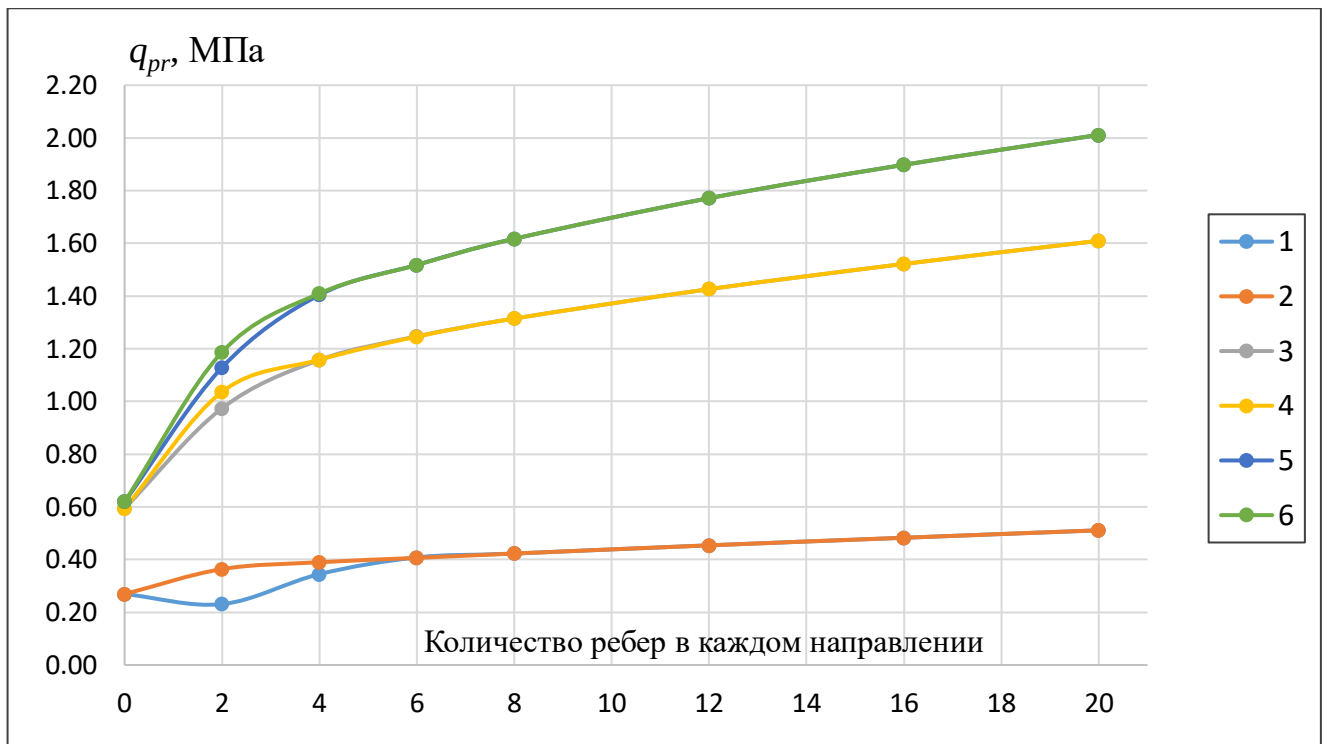


Рисунок 4.35. Значения предельно допустимой нагрузки q_{pr} при разном числе подкрепляющих элементов (цилиндрическая панель 1, $N=16$)

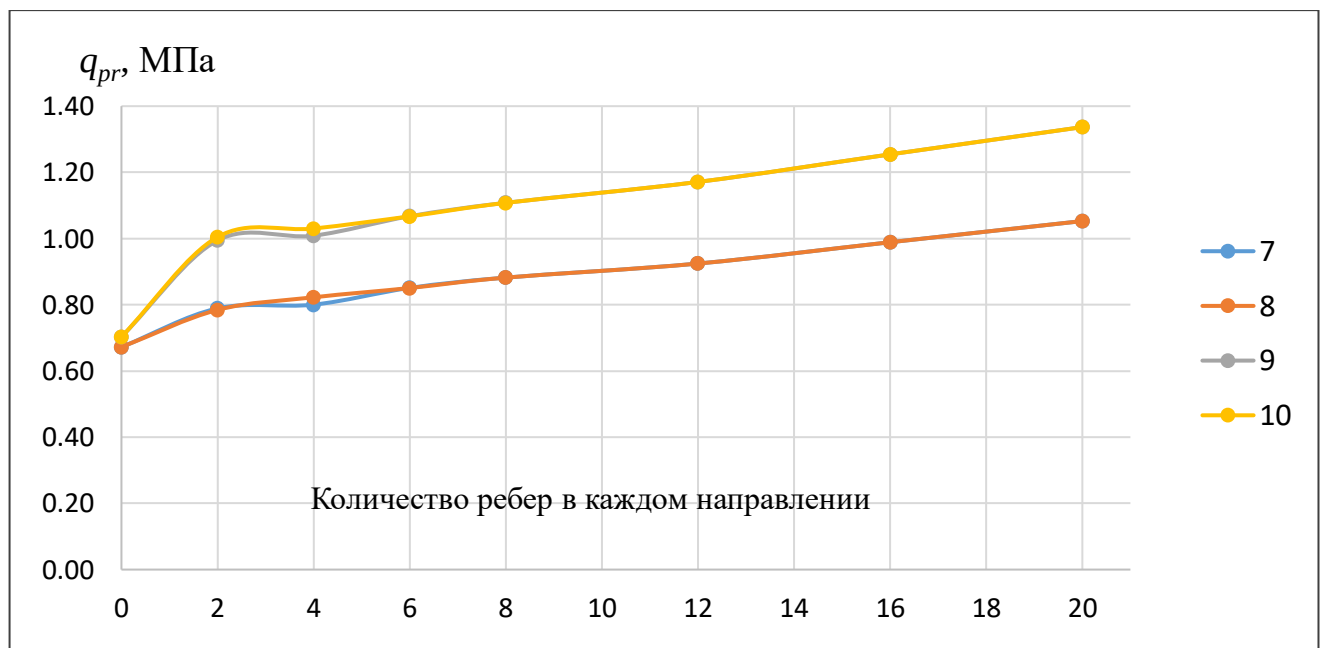


Рисунок 4.36. Значения предельно допустимой нагрузки q_{pr} при разном числе подкрепляющих элементов (цилиндрическая панель 2, $N=16$)

Для вариантов задачи, выделенных ранее в Таблице 4.25 цветом, на Рисунках 4.37 и 4.38 показаны поля критерия Мизеса (4.4) при нагрузках, при которых

перестает выполняться условие прочности. Области конструкции, для которых критерий перестает выполняться, соответствуют областям, где поле критерия превышает значение $K_r = 1$.

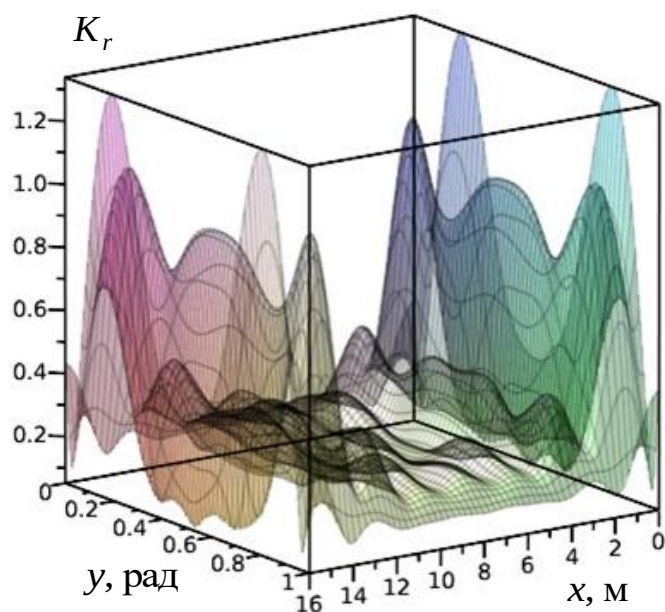


Рисунок 4.37. Поле критерия Мизеса для панели 1 (сетка ребер 0×0) при нагрузке 0,2692 МПа

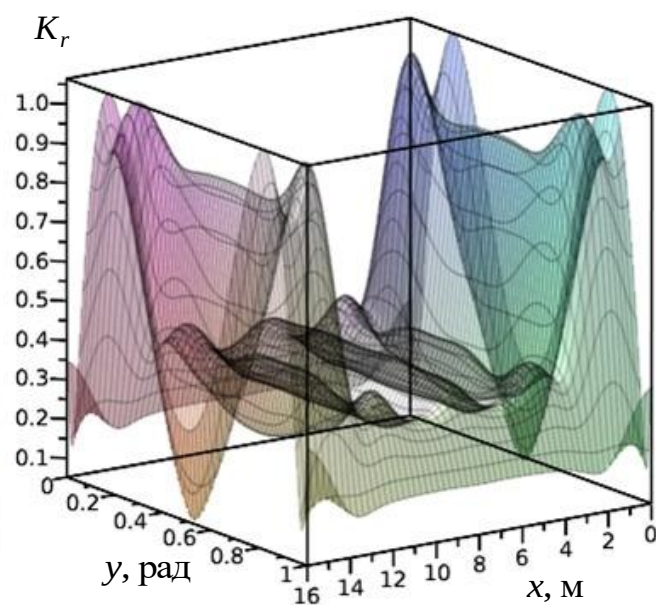


Рисунок 4.38. Поле критерия Мизеса для панели 1 (сетка ребер 8×8) при нагрузке 0,4229 МПа

На Рисунке 4.39 показано расширение зон невыполнения условий прочности (4.4) для цилиндрической панели 1 при увеличении значения нагрузки уже после начальных изменений в материале по критерию Мизеса. В первую очередь, области невыполнения условий прочности появляются вблизи края окружной координаты, затем развиваются вдоль нее. Далее они объединяются и постепенно распространяются к центру конструкции. Добавление ребер жесткости позволяет повысить значение нагрузки, при которой этот процесс начинается.

Оценивая состояние цилиндрической панели по критерию Мизеса, можно заметить, что усиление ее ребрами жесткости замедляет процесс образования областей невыполнения условий прочности, и дает выигрыш по критической нагрузке примерно в 0,2 МПа. Процесс развития областей происходит от криволинейных краев панели и далее распространяется к центру.

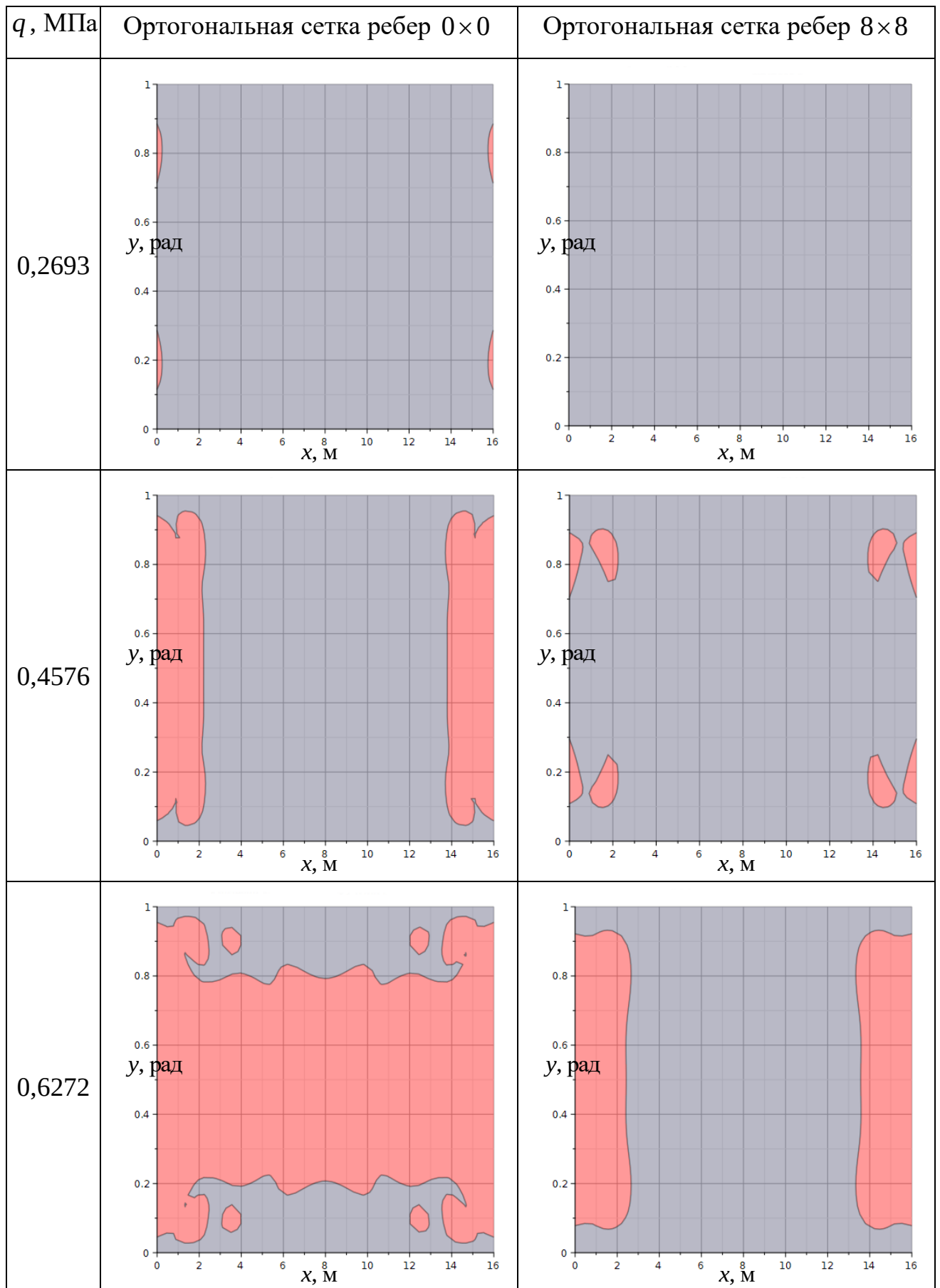


Рисунок 4.39. Сравнение зон невыполнения условий прочности для панели 1 с сеткой ребер жесткости 0×0 , 8×8 и при увеличении значений нагрузки

4.5.2.2 Ортотропные конструкции

Используя предложенные ранее модель и алгоритм, выполним расчеты двух вариантов цилиндрических панелей – варианта 1 (из материала Т-10/УПЭ22-27) и варианта 3 (из материала Т300/976) (параметры см. в Таблицах 4.1, 4.2). Конструкции закреплены шарнирно-неподвижно, нагрузка – внешняя равномерно распределенная, направленная по нормали к поверхности. Направление 1 укладки волокон ортотропного материала совпадает с направлением оси координат y (т.е. угол укладки $\varphi = 90^\circ$ относительно исходного). Расчеты проводились при $N = 16$.

Ортогональную сетку ребер будем располагать с внутренней стороны оболочки, высоту и ширину ребер будем выбирать $h^i = h^j = 3h$, $r_i = r_j = 2h$ соответственно. Количество ребер будем брать одинаковым в обоих направлениях, для каждого нового варианта сетки увеличивая его на 2.

В Таблице 4.26 показаны значения критических нагрузок потери устойчивости для разных вариантов подкрепления, полученные по разным методам учета ребер жесткости. Как видно из представленных данных, для конструкции варианта 1, начиная с определенного количества подкрепляющих элементов, потеря устойчивости не наблюдается. На Рисунке 4.40 результаты для варианта 1 представлены графически.

Таблица 4.26. Значения нагрузок потери устойчивости q_{cr} (МПа) для цилиндрических панелей вариантов 1 и 3

Вар.	Метод	0×0	2×2	4×4	6×6	8×8	10×10	12×12
1	Уточненный дискретный	0,0598	0,1260	0,2118	+	+	+	+
	МКА		0,1480	0,2219	+	+	+	+
3	Уточненный дискретный	0,3696	0,4730	1,3903	1,6307	1,6957	1,7636	1,8355
	МКА		1,3675	1,56785	1,6306	1,6954	1,7632	1,8352

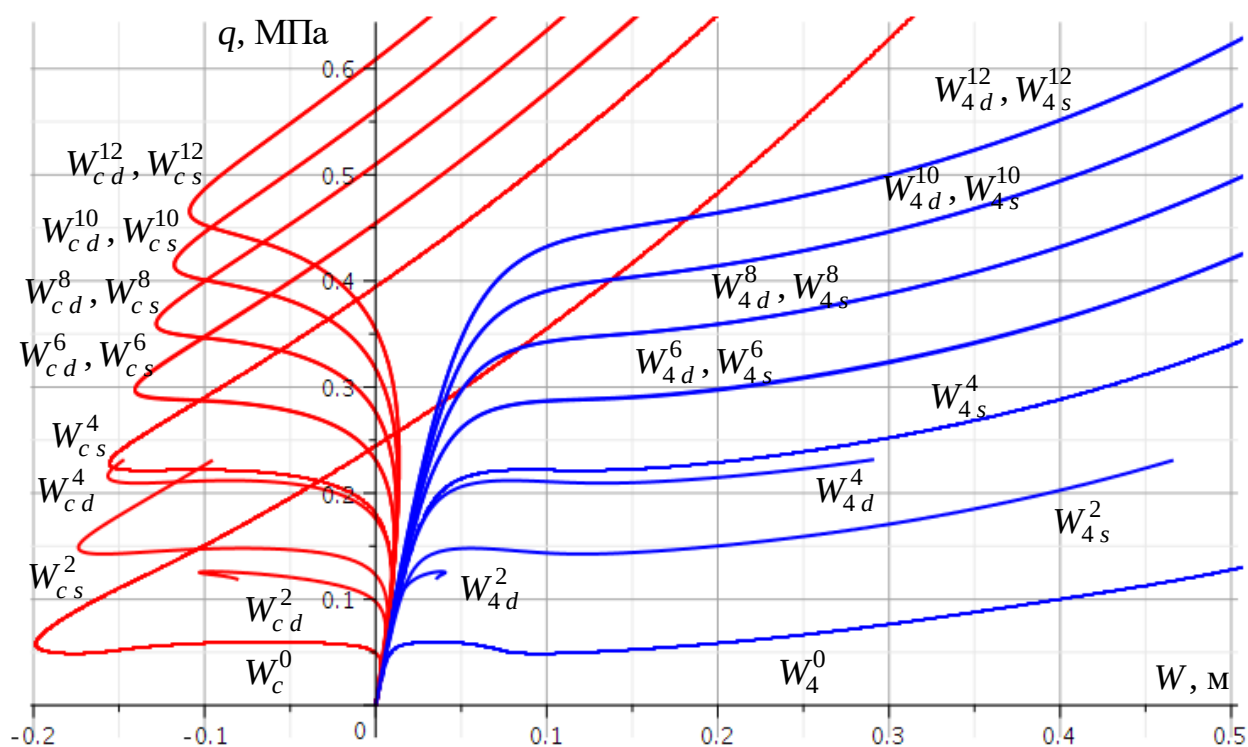


Рисунок 4.40. График зависимости «нагрузка – прогиб» для ортотропной цилиндрической панели варианта 1 при разном числе подкрепляющих элементов и разных методах их учета

Из полученных значений видно, что для данных конструкций метод конструктивной анизотропии сходится к решению, полученному при уточненном дискретном методе, начиная с сетки ребер 6×6 (разница в значениях составляет менее 1 %).

4.5.3 Цилиндрические панели, подкрепленные ребрами жесткости в одном направлении

В некоторых случаях наиболее эффективным может являться расположение подкрепляющих элементов конструкции только в одном направлении. Для цилиндрических панелей это могут быть продольные элементы (стрингеры) или расположенные в окружном направлении (шпангоуты) [289]. Все предложенные ранее варианты методов учета ребер жесткости позволяют указать количество ребер в одном из направлений равным нулю без необходимости внесения каких-либо дополнительных изменений.

Рассмотрим подробно цилиндрическую панель варианта 1. В Таблицах 4.27 и 4.28 показаны критические нагрузки потери устойчивости при разных вариантах подкрепления. Схема $n \times 0$ обозначает, что конструкция усилена стрингерами, а схема $0 \times m$ – что она усилена шпангоутами. Схема $n \times m$ обозначает ортогональную сетку ребер и дублирует результат, полученный в предыдущих параграфах (здесь приводится для сравнения).

Таблица 4.27. Критические нагрузки потери устойчивости изотропных цилиндрических панелей при наличии ребер в одном направлении (безразмерные значения), $N = 16$

№	Метод	Схема	0	2	4	6	8	12	16	20
1	Уточн. дискр.	$n \times m$	5254	10937	16010	20341	24232	+	+	+
		$n \times 0$		7144	7361	8504	9271	11086	12826	14496
		$0 \times m$		7579	14749	18581	21854	27706	+	+
	МКА	$n \times m$	5254	11676	16284	20421	24250	+	+	+
		$n \times 0$		6328	7337	8312	9259	11085	12830	14505
		$0 \times m$		10968	14992	18589	21864	27712	+	+

Таблица 4.28. Критические нагрузки потери устойчивости изотропных цилиндрических панелей при наличии ребер в одном направлении (размерные значения), $N = 16$

№	Метод	Схема	0	2	4	6	8	12	16	20
1	Уточн. дискр.	$n \times m$	0,6897	1,4356	2,1014	2,6698	3,1806	+	+	+
		$n \times 0$		0,9377	0,9662	1,1162	1,2169	1,4551	1,6835	1,9027
		$0 \times m$		0,9948	1,9359	2,4388	2,8684	3,6365	+	+
	МКА	$n \times m$	0,6897	1,5325	2,1373	2,6803	3,1829	+	+	+
		$n \times 0$		0,8306	0,9630	1,0910	1,2153	1,4549	1,6840	1,9039
		$0 \times m$		1,4397	1,9678	2,4399	2,8697	3,6372	+	+

На Рисунке 4.41 график зависимостей «нагрузка – прогиб» для цилиндрической панели варианта 1 ($N = 16$, уточненный дискретный метод) при

подкреплении только шпангоутами ($n=0, 0 \times m$), а на Рисунке 4.42 – при подкреплении только стрингерами ($m=0, n \times 0$).

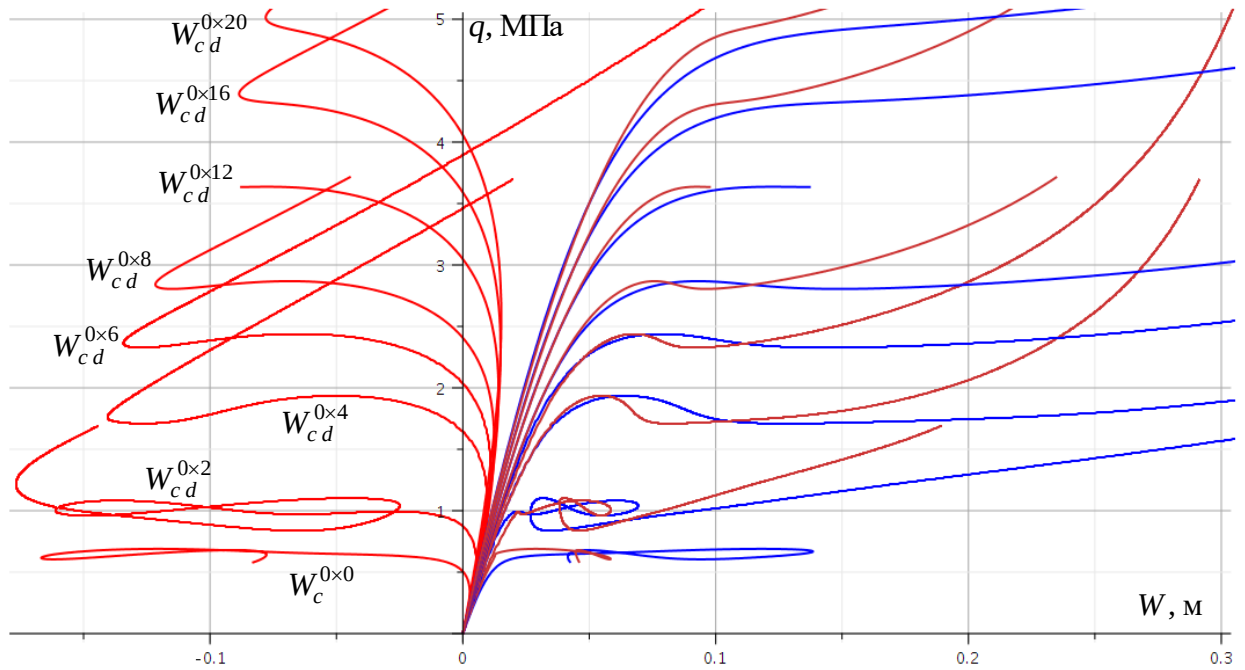


Рисунок 4.41. График зависимости прогиба W от нагрузки q при разном количестве шпангоутов для цилиндрической панели варианта 1 ($N=16$, уточненный дискретный метод)

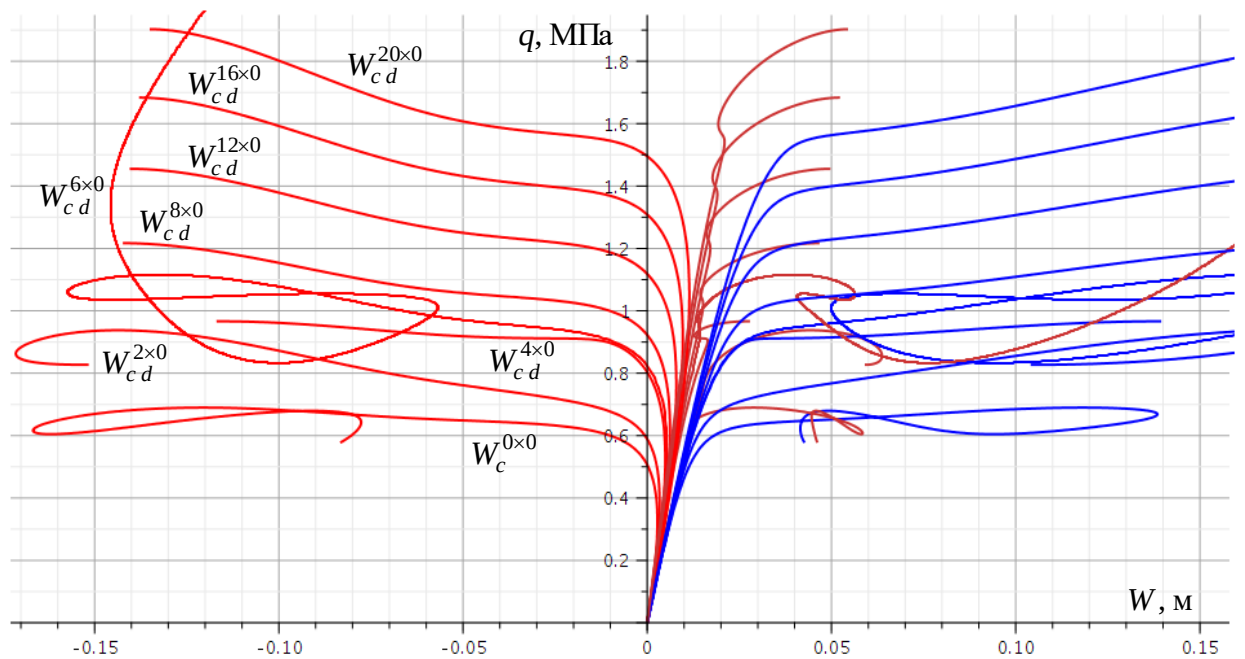


Рисунок 4.42. График зависимости прогиба W от нагрузки q при разном количестве стрингеров для цилиндрической панели варианта 1 ($N=16$, уточненный дискретный метод)

По результатам расчетов видно, что усиление рассматриваемой цилиндрической панели шпангоутами дает значения, близкие к варианту усиления ортогональной сеткой ребер. Усиление конструкции стрингерами дает эффект в несколько раз ниже и является неэффективным. Такая закономерность ожидаема, и может быть объяснена особенностями формы цилиндрической панели и видом прикладываемой нагрузки.

4.5.4 Цилиндрические панели, подкрепленные ребрами жесткости с внешней стороны

В Таблицах 4.29 и 4.30 показаны соответствующие результаты в безразмерных и размерных значениях для цилиндрической панели варианта 1, а на Рисунке 4.43 они показаны графически.

Если расположить варианты подкрепления цилиндрической панели варианта 1 в порядке повышения значения нагрузки потери устойчивости (т.е. эффективности этого подкрепления), то получим:

1. стрингеры с внешней стороны ($S < 0, n \times 0$), $q_{cr} = 1,02$ МПа,
2. стрингеры с внутренней стороны ($S > 0, n \times 0$), $q_{cr} = 1,2169$ МПа,
3. шпангоуты с внутренней стороны ($S > 0, 0 \times m$), $q_{cr} = 2,8684$ МПа,
4. ортогональная сетка ребер с внутренней стороны
($S > 0, n \times m$), $q_{cr} = 3,1806$ МПа,
5. шпангоуты с внешней стороны ($S < 0, 0 \times m$), $q_{cr} = 3,4366$ МПа,
6. ортогональная сетка ребер с внешней стороны
($S < 0, n \times m$), $q_{cr} = 3,6404$ МПа.

Значения критической нагрузки приводятся при добавлении восьми ребер жесткости (или ортогональной сетки ребер 8×8).

Таблица 4.29. Критические нагрузки для изотропных цилиндрических панелей при наличии ребер с внутренней или внешней стороны (безразмерные значения),

$N = 16$

№	Метод	Схема	0	2	4	6	8	12	16	20
1	Ребра с внутренней стороны ($S > 0$)									
	Уточн. дискр.	$n \times m$	5254	10937	16010	20341	24232	+	+	+
		$n \times 0$		7144	7361	8504	9271	11086	12826	14496
		$0 \times m$		7579	14749	18581	21854	27706	+	+
	МКА	$n \times m$	5254	11676	16284	20421	24250	+	+	+
		$n \times 0$		6328	7337	8312	9259	11085	12830	14505
		$0 \times m$		10968	14992	18589	21864	27712	+	+
	Ребра с внешней стороны ($S < 0$)									
	Уточн. дискр.	$n \times m$	5254	10567	18544	23897	27736	34625	40650	46041
		$n \times 0$		6179	6713	7012	7771	8752	9694	10587
		$0 \times m$		7203	16137	22601	26183	32545	38122	43113
	МКА	$n \times m$	5254	13171	20054	23883	27735	34627	40653	46044
		$n \times 0$		5996	6622	7196	7737	8748	9692	10587
		$0 \times m$		12652	19438	22655	26190	32550	38126	43117
	Разница в значениях, %									
	Уточн. дискр.	$n \times m$	—	3,4	-15,8	-17,5	-14,5	—	—	—
		$n \times 0$		13,5	8,8	17,6	16,2	21,1	24,4	27,0
		$0 \times m$		5,0	-9,4	-21,6	-19,8	-17,5	—	—
	МКА	$n \times m$		-12,8	-23,1	-17,0	-14,4	—	—	—
		$n \times 0$		5,2	9,7	13,4	16,4	21,1	24,5	27,0
		$0 \times m$		-15,4	-29,7	-21,9	-19,8	-17,5	—	—

Таблица 4.30. Критические нагрузки для изотропных цилиндрических панелей при наличии ребер с внутренней или внешней стороны (размерные значения), $N = 16$

№	Метод	Схема	Кривая	0	2	4	6	8	12	16	20
1	Ребра с внутренней стороны ($S > 0$)										
	Уточн. дискр.	$n \times m$	1	0,6897	1,4356	2,1014	2,6698	3,1806			
		$n \times 0$	2		0,9377	0,9662	1,1162	1,2169	1,4551	1,6835	1,9027
		$0 \times m$	3		0,9948	1,9359	2,4388	2,8684	3,6365		
	МКА	$n \times m$	4	0,6897	1,5325	2,1373	2,6803	3,1829			
		$n \times 0$	5		0,8306	0,9630	1,0910	1,2153	1,4549	1,6840	1,9039
		$0 \times m$	6		1,4397	1,9678	2,4399	2,8697	3,6372		
	Ребра с внешней стороны ($S < 0$)										
	Уточн. дискр.	$n \times m$	7	0,6897	1,3870	2,4340	3,1365	3,6404	4,5446	5,3353	6,0429
		$n \times 0$	8		0,8111	0,8812	0,9203	1,0200	1,1487	1,2723	1,3896
		$0 \times m$	9		0,9455	2,1181	2,9664	3,4366	4,2716	5,0036	5,6587
	МКА	$n \times m$	10	0,6897	1,7287	2,6321	3,1347	3,6402	4,5449	5,3357	6,0434
		$n \times 0$	11		0,7870	0,8692	0,9446	1,0156	1,1483	1,2721	1,3896
		$0 \times m$	12		1,6607	2,5513	2,9736	3,4375	4,2722	5,0041	5,6591
	Разница в значениях, %										
	Уточн. дискр.	$n \times m$	—	—	3,4	-15,8	-17,5	-14,5	—	—	—
		$n \times 0$			13,5	8,8	17,6	16,2	21,1	24,4	27,0
		$0 \times m$			5,0	-9,4	-21,6	-19,8	-17,5	—	—
	МКА	$n \times m$			-12,8	-23,1	-17,0	-14,4	—	—	—
		$n \times 0$			5,2	9,7	13,4	16,4	21,1	24,5	27,0
		$0 \times m$			-15,4	-29,7	-21,9	-19,8	-17,5	—	—

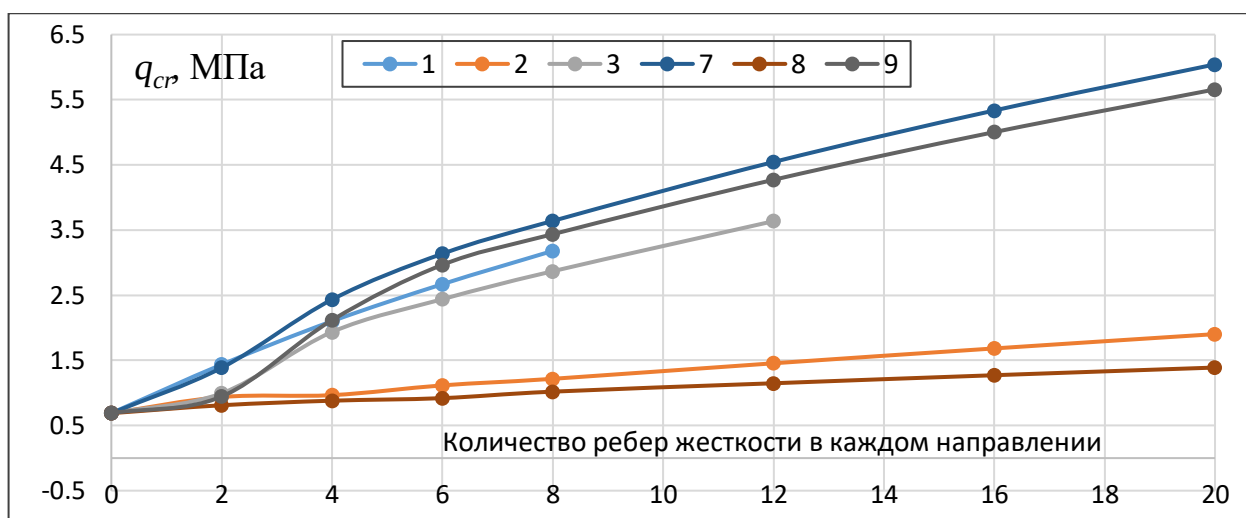


Рисунок 4.43. Влияние варианта подкрепления на значения критических нагрузок для цилиндрической панели варианта 1 ($N=16$, уточненный дискретный метод)

4.6 ИССЛЕДОВАНИЕ КОНИЧЕСКИХ ПАНЕЛЕЙ

Как уже отмечалось ранее, исследований, посвященных коническим оболочкам [122, 136, 185, 188, 200, 230, 239, 270, 288] и их панелям [200, 230, 239, 247, 288] значительно меньше, чем исследований цилиндрических конструкций.

Q. Dai и Q. Cao [185] исследуются усеченные конические оболочки под действием статических и динамических периодических осевых нагрузок. Математическая модель строится на гипотезах Кирхгофа – Лява. Функции перемещений аппроксимируются вейвлет-рядом в осевом направлении и тригонометрическими функциями в окружном направлении. Уравнения в частных производных сводятся к системе ОДУ. Представлены численные результаты, позволяющие выявить влияние различных параметров, таких как граничные условия и геометрические параметры оболочки, на устойчивость конических оболочек.

В работе [288] анализируется процесс нелинейного деформирования и потери устойчивости изотропных и композитных конических панелей. Теория оболочек Сандерса используется для вывода нелинейных уравнений равновесия, которые решаются с помощью модифицированного метода Рикса и метода Ньютона – Рафсона. Исследуется вопрос сходимости численных методов, а также

влияние геометрических параметров на характеристики устойчивости конических панелей при различных условиях нагружения.

Р. Paczos и J. Zielnica [247] с помощью вариационных преобразований были получены уравнения для анализа устойчивости конической оболочки, учитывалось упругопластическое деформирование. Численные результаты были получены с использованием специального итерационного алгоритма для расчета упругопластических задач, реализованного на ЭВМ.

4.6.1 Конические панели без ребер жесткости

Вначале рассмотрим панели конических усеченных оболочек без усиления ребрами жесткости. Площадь таких оболочек (обшивок) S^0 и их объем V^0 показаны в Таблице 4.31. Также там продублированы параметры из Таблицы 4.2.

Таблица 4.31. Характеристики рассматриваемых панелей

Вариант	Входные данные					Параметр	
	h , м	a , м	b , рад	a_1 , м	θ , рад	S^0 , м ²	V^0 , м ³
1	0,08	32	2,574	16	0,2618	256	20,46
2	0,01	25	π	5	0,78	663	6,63

В Таблице 4.32 показаны размерные и безразмерные значения нагрузок потери устойчивости для вариантов 1 и 2. Рассмотрены панели из стали С345 и стеклопластика с расположением волокон вдоль криволинейной координаты.

Таблица 4.32. Критические нагрузки для конических панелей (без ребер)

Вариант	Материал	φ , °	N	$\bar{P}$	q_{cr} , МПа
1	Сталь С345	—	9	+	+
	Сталь С345	—	16	727371,7	5,9667
	Т-10/УПЭ22-27	90	16	377860	0,2627
2	Сталь С345	—	4	+	+
	Сталь С345	—	9	+	+
	Сталь С345	—	16	196447991	1,0561
	Сталь С345	—	25	50609198	0,2721

Для анализа сходимости метода Рунге были выполнены вычисления (панель варианта 2 в Таблице 4.32) при разных N , которые показали, что при малых их значениях критическую нагрузку не удастся отследить, и необходимо удерживать не менее 16 неизвестных переменных для каждой неизвестной функции.

На Рисунке 4.44 показан график зависимости «нагрузка – прогиб» для варианта стальной конической панели 2. Как видно из графика, выбор числа неизвестных коэффициентов в аппроксимации функций перемещений значительно влияет на процесс определения значения критической нагрузки, притом иногда позволяет обнаружить до общей потери устойчивости локальные потери устойчивости [18, 131].

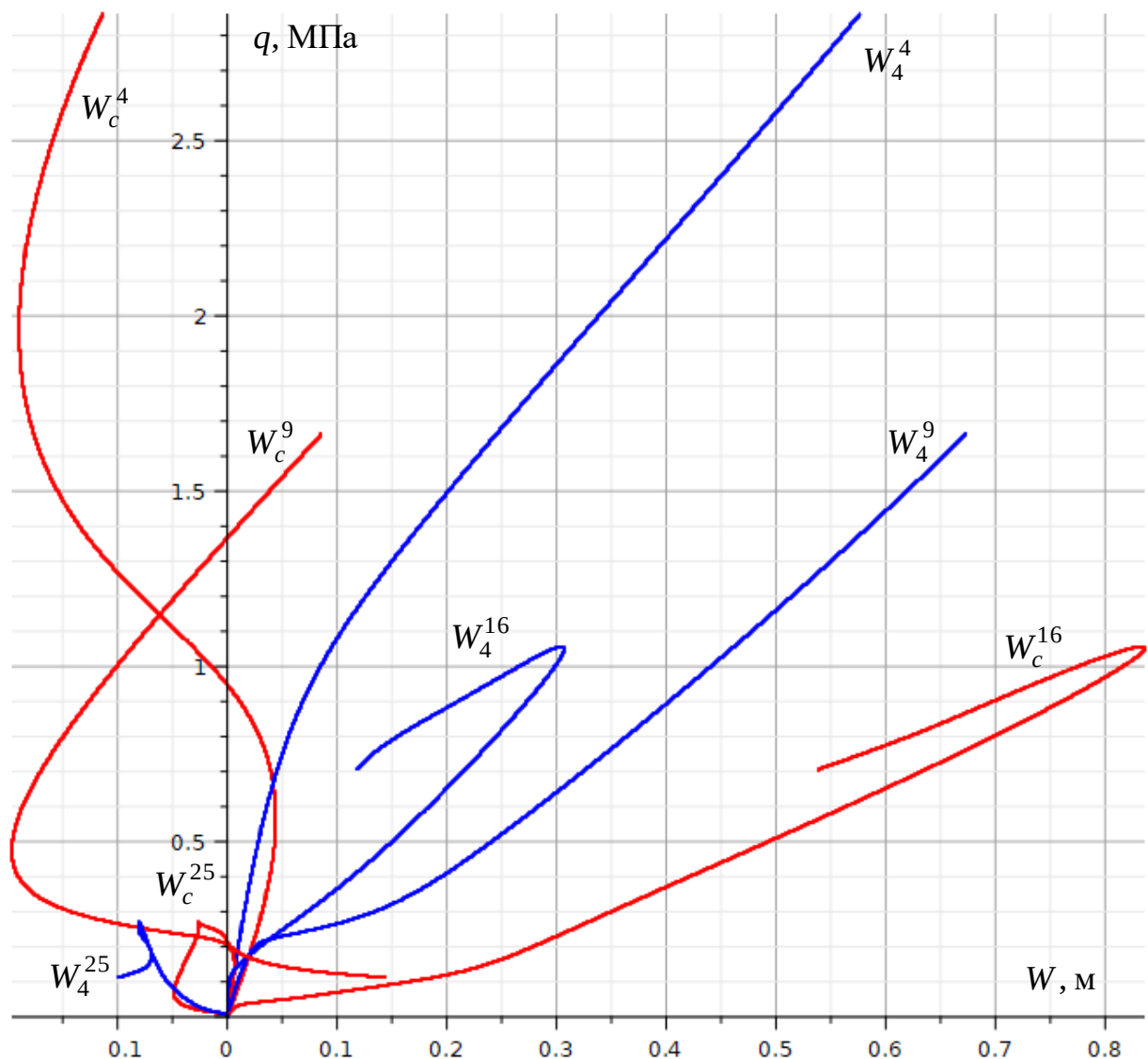


Рисунок 4.44. График зависимости « $q - W$ » для стальной конической панели варианта 2

4.6.2 Конические панели, подкрепленные ортогональной сеткой ребер

4.6.2.1 Изотропные конструкции

В Таблицах 4.33 и 4.34 показаны критические нагрузки для рассматриваемых вариантов конических панелей (см. Таблицу 4.2) (безразмерные и размерные параметры), выполненных из стали (см. Таблицу 4.1). Разница в значениях для МКА и уточненного дискретного метода показана в процентах. На Рисунке 4.45 эти значения показаны графически.

Таблица 4.33. Значения нагрузок потери устойчивости $\bar{P}_{cr}$ для конических панелей (безразмерные значения)

Метод	N	$\bar{P}_{cr}$							
		0×0	2×2	4×4	6×6	8×8	12×12	16×16	20×20
Вариант 1									
Уточн. дискр. метод	9	+	+	1882189	2074559	2266901	2621135	2938416	3227890
	16	727371	1071721	1566436	1849025	2058401	2413085	2710724	2975653
МКА	9	+	+	1880451	2075086	2268252	2622431	2939445	3228748
	16	727371	1193267	1606628	1849022	2061298	2414158	2711645	2976443
Δ , %	9	+	+	0,09	0,02	0,06	0,05	0,03	0,03
	16	+	11,3	2,50	0	0,14	0,04	0,03	0,03
Дискр. метод	9	+	+	2133063	2585099	2901511	3391912	3824505	4206341
	16	727371	1705737	2018992	2109354	2687928	3121207	4203810	+
По линии	9	+	+	+	+	+	+	+	+
	16	727371	1043397	1433674	1567793	1697581	1902461	2064462	2203028

Таблица 4.34 Критические нагрузки потери устойчивости q_{cr} для конических панелей (размерные значения) [218]

Метод	N	q_{cr} , МПа							
		0×0	2×2	4×4	6×6	8×8	12×12	16×16	20×20
Вариант 1									
Уточн. дискр. метод	9	+	+	15,43	17,01	18,59	21,50	24,10	26,47
	16	5,96	8,7915	12,84	15,16	16,88	19,79	22,23	24,40
МКА	9	+	+	15,42	17,02	18,60	21,51	24,11	26,48
	16	5,96	9,78	13,17	15,16	16,90	19,80	22,24	24,41
Δ , %	9	+	+	0,09	0,02	0,06	0,05	0,03	0,03
	16	+	11,3	2,50	0	0,14	0,04	0,03	0,03
Дискр. метод	9	+	+	17,49	21,20	23,80	27,82	31,37	34,50
	16	5,96	13,99	16,56	17,30	22,04	25,60	34,48	+
По линии	9	+	+	+	+	+	+	+	+
	16	5,96	8,55	11,76	12,86	13,92	15,60	16,93	18,07

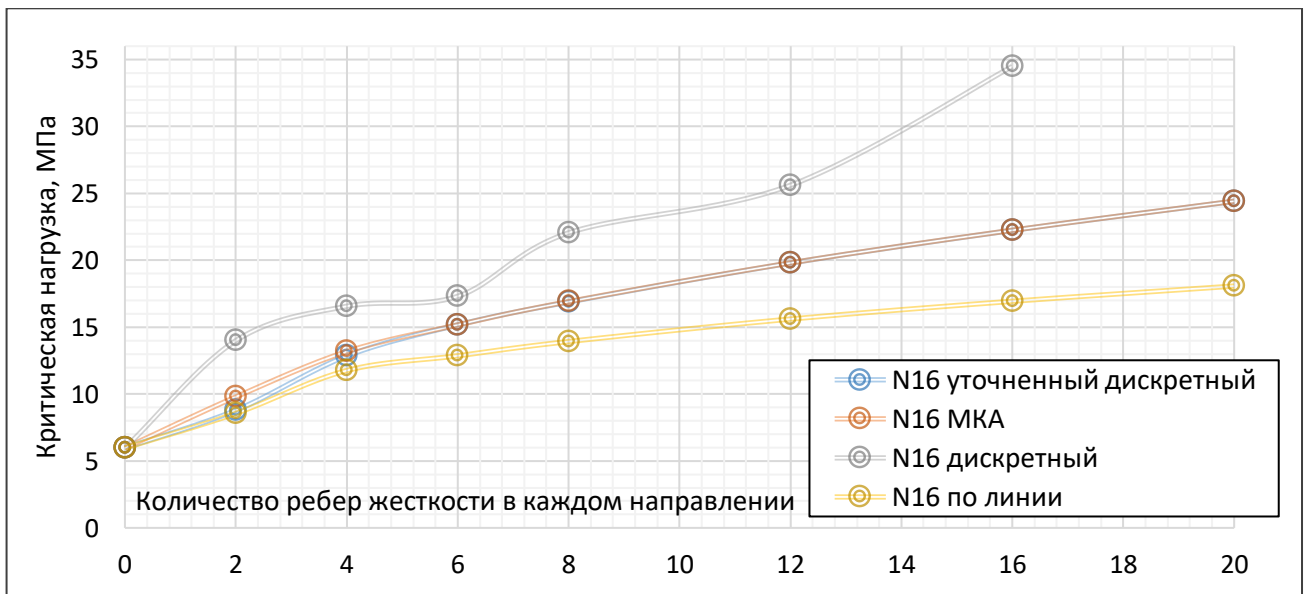


Рисунок 4.45. Сравнение методов учета ребер жесткости для конической панели варианта 1 ($N = 16$, размерные параметры)

На Рисунке 4.46 показан график зависимости прогиба W от нагрузки q при разном количестве ребер жесткости для конической панели варианта 1. Кривые приводятся для метода конструктивной анизотропии и уточненного дискретного метода.

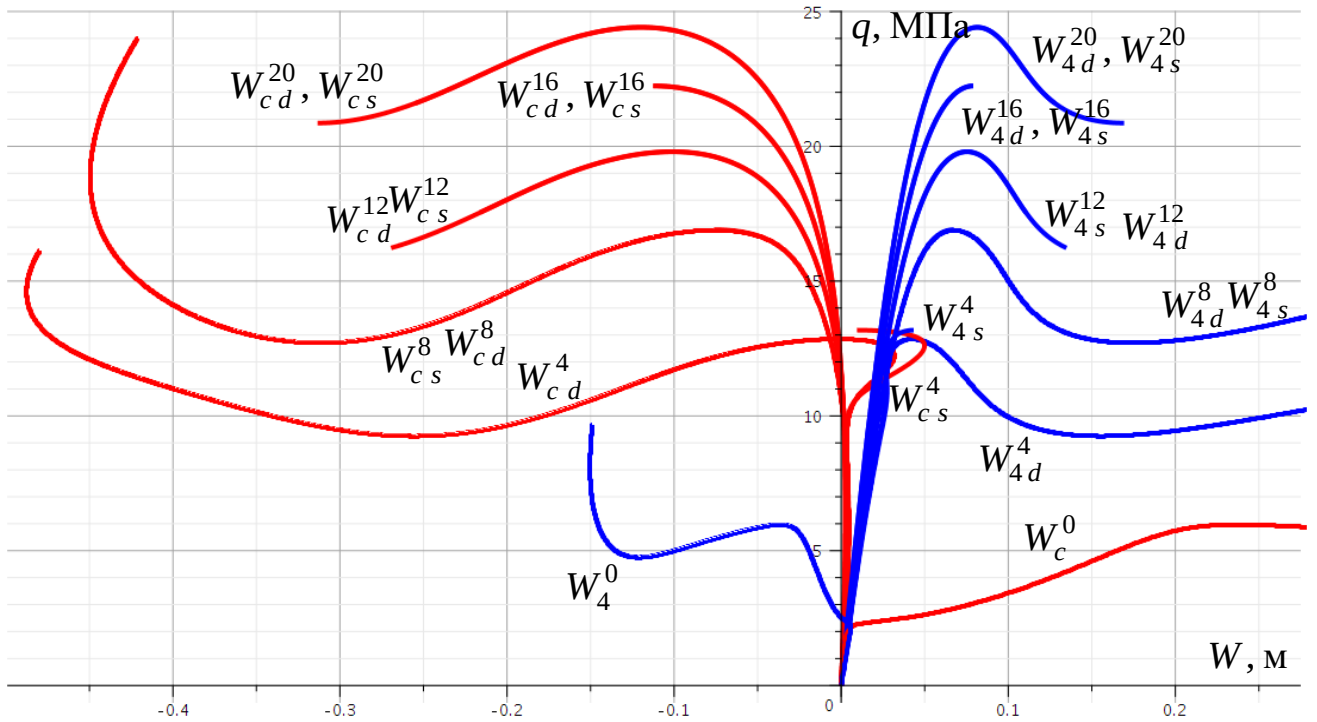


Рисунок 4.46. График зависимости прогиба W от нагрузки q при разном количестве ребер жесткости для конической панели варианта 1 ($N = 16$) [218]

Из полученных данных видно, что для рассматриваемых конструкций метод конструктивной анизотропии сходится к решению, полученному при уточненном дискретном методе, позднее. Возможные причины этого заключаются в том, что коническая панель имеет более сложную геометрическую форму и является несимметричной, что приводит к необходимости учитывать в аппроксимации (3.1) еще и несимметричные слагаемые. Увеличение числа слагаемых в (3.1) до $N = 25$ требует существенно большей вычислительной мощности и времени расчета (при уточненном дискретном вводе ребер жесткости), однако, по методу конструктивной анизотропии такие расчеты проводить вполне оправданно [134].

4.6.2.2 Ортотропные конструкции

Проведем расчеты для конической панели варианта 1 (Рисунок 4.47), выполненной из материала Т-10/УПЭ22-27 (Таблица 4.1) с параметрами $E_1 = 0,294 \cdot 10^5$ МПа, $E_2 = 1,78 \cdot 10^4$ МПа, $G_{12} = G_{13} = G_{23} = 0,301 \cdot 10^4$ МПа, $\mu_{12} = 0,123$. Направление 1 укладки волокон в ортотропном материале совпадает с направлением координатной оси y (то есть, угол укладки $\varphi = 90^\circ$ относительно исходного положения). Расчеты выполнены при $N = 16$ и представлены в Таблице 4.35 и на Рисунках 4.48, 4.49.

Таблица 4.35. Нагрузки потери устойчивости q_{cr} для стеклопластиковых конических панелей

Вар.	Метод	Количество ребер жесткости						
		0×0	2×2	4×4	6×6	8×8	10×10	12×12
Вариант 1								
1	Уточненный дискретный метод	0,2627	0,7732	1,0648	1,2440	1,4099	1,5545	1,6870
	МКА		0,7999	1,0608	1,2478	1,4095	1,5546	1,6872

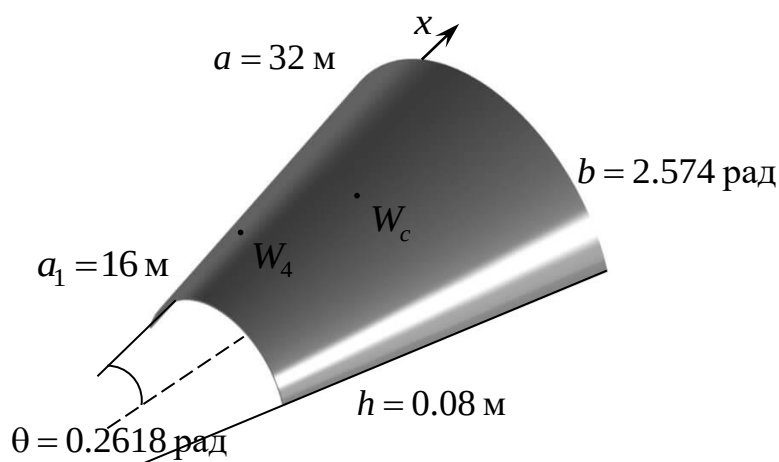


Рисунок 4.47. Вид рассматриваемой конической панели

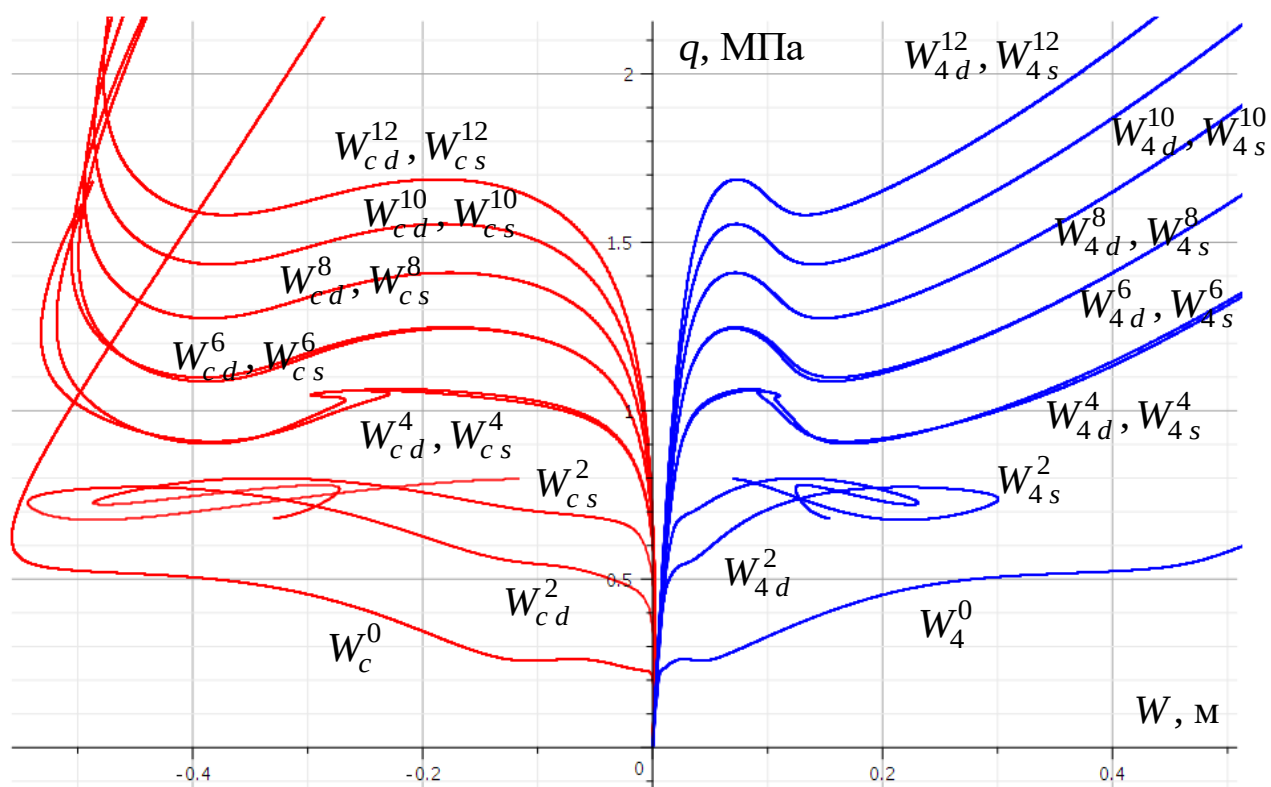


Рисунок 4.48. График зависимости прогиба W от нагрузки q для конической панели варианта 1 из стеклопластика Т-10/УПЭ22-27 ($N = 16$)

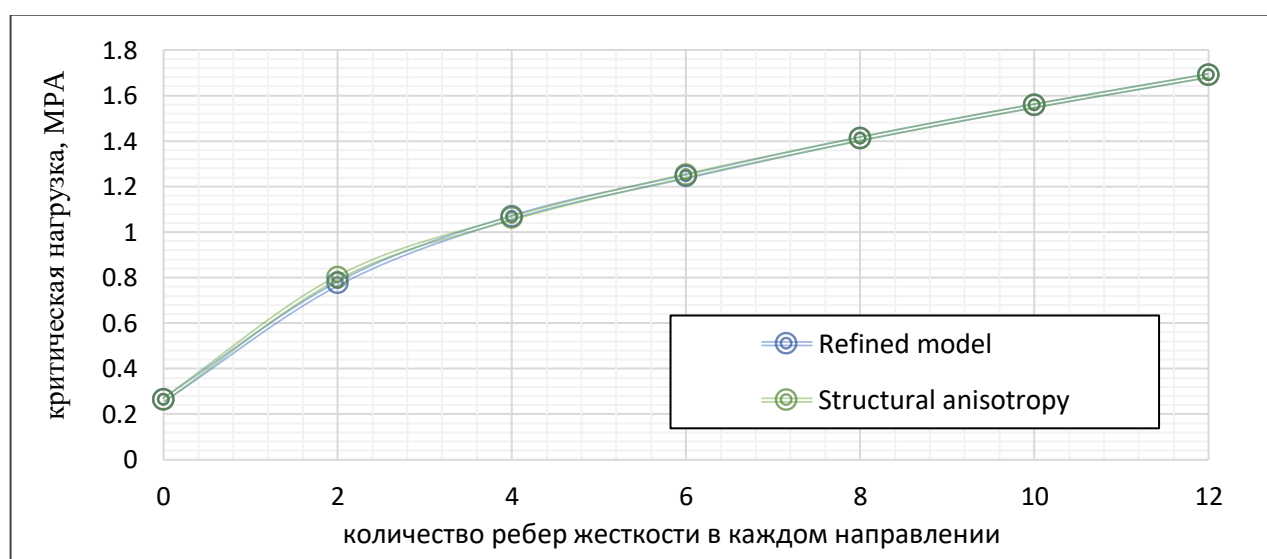


Рисунок 4.49. Влияние количества элементов усиления на значения критических нагрузок конической панели варианта 1 из материала Т-10/УПЭ22-27 ($N = 16$)

Полученные значения показывают, что для рассматриваемой конструкции метод конструктивной анизотропии сходится к решению, полученному в результате применения уточненного дискретного метода, начиная с сетки ребер 8×8 (разница в значениях составляет менее 1 %).

4.6.3 Конические панели, подкрепленные ребрами жесткости в одном направлении

Ранее эффективность подкрепления конструкции ребрами жесткости только в одном направлении была продемонстрирована для цилиндрических панелей. Проведем аналогичные вычисления для панелей усеченных конических оболочек. По аналогии с цилиндрическими, они могут подкрепляться продольными элементами (стрингерами) или элементами, расположенными в окружном направлении (шпангоутами).

Рассмотрим подробно коническую панель варианта 1. В Таблицах 4.36 и 4.37 показаны критические нагрузки потери устойчивости при разных вариантах подкрепления. Схема $n \times 0$ обозначает, что конструкция усилена стрингерами, а схема $0 \times m$ – что она усилена шпангоутами. Схема $n \times m$ обозначает ортогональную сетку ребер и дублирует результат, полученный в предыдущих параграфах (здесь приводится для сравнения).

Таблица 4.36. Критические нагрузки для изотропных конических панелей при наличии ребер в одном направлении (безразмерные значения), $N = 16$

№	Метод	Схема	0	2	4	6	8	12	16	20
1	Уточн. дискр.	$n \times m$	727371	1071720	1566435	1849025	2058400	2413085	2710724	2975653
		$n \times 0$		713109	915589	864163	1087682	1160424	1240358	1317090
		$0 \times m$		1108259	1502505	1696185	1863815	2139374	2368407	2570449
	МКА	$n \times m$	727371	1193267	1606627	1849022	2061298	2414157	2711645	2976443
		$n \times 0$		808402	906270	1039619	1082443	1165010	1243792	1319208
		$0 \times m$		1130607	1505059	1697321	1865093	2140431	2369259	2571168

Таблица 4.37. Критические нагрузки для изотропных конических панелей при наличии ребер в одном направлении (размерные значения), $N = 16$

№	Метод	Схема	0	2	4	6	8	12	16	20
1	Уточн. дискр.	$n \times m$	5,9667	8,7915	12,8497	15,1678	16,8853	19,7948	22,2364	24,4097
		$n \times 0$		5,8497	7,5107	7,0888	8,9224	9,5191	10,1748	10,8043
		$0 \times m$		9,0912	12,3252	13,9140	15,2891	17,5496	19,4283	21,0857
	МКА	$n \times m$	5,9667	9,7885	13,1794	15,1678	16,9091	19,8036	22,2440	24,4161
		$n \times 0$		6,6314	7,4343	8,5281	8,8794	9,5567	10,2030	10,8216
		$0 \times m$		9,2745	12,3462	13,9233	15,2996	17,5582	19,4353	21,0916

На Рисунке 4.50 график зависимостей «нагрузка – прогиб» для конической панели 1 ($N=16$, уточненный дискретный метод) при подкреплении только шпангоутами ($n=0$, $0 \times m$), а на Рисунке 4.51 – при подкреплении только стрингерами ($m=0$, $n \times 0$).

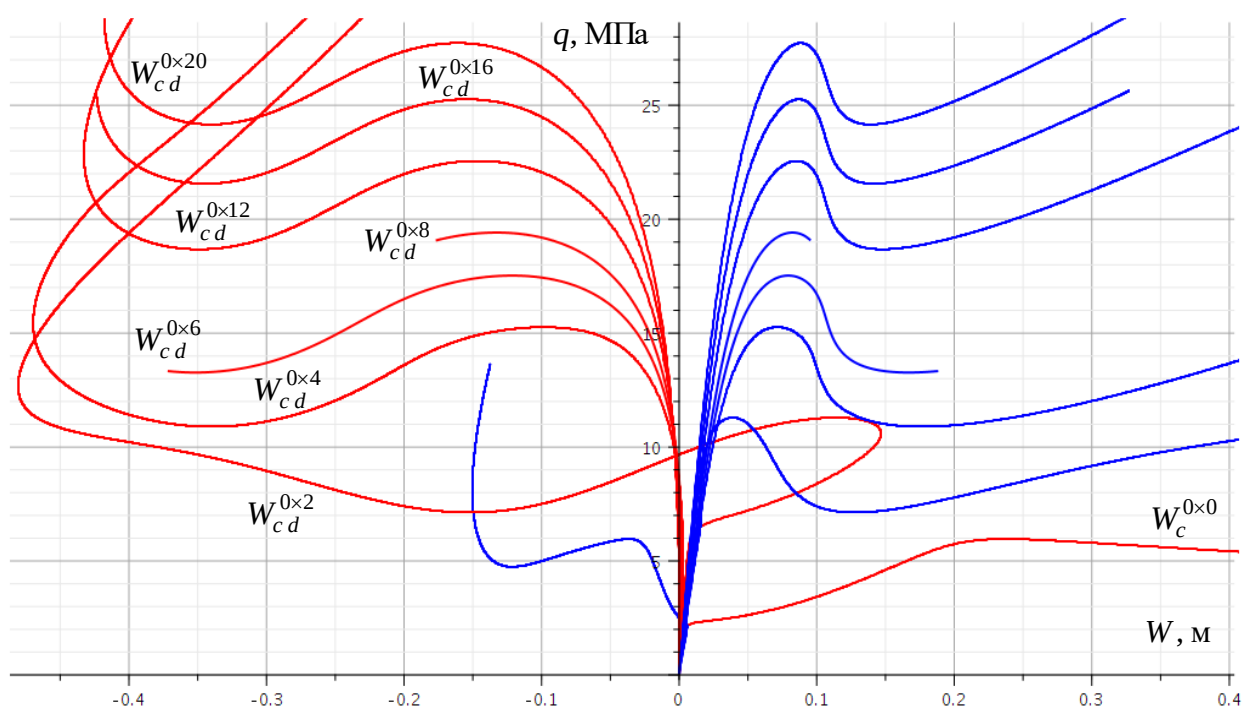


Рисунок 4.50. График зависимости прогиба W от нагрузки q при разном количестве шпангоутов для конической панели варианта 1 ($N = 16$, уточненный дискретный метод)

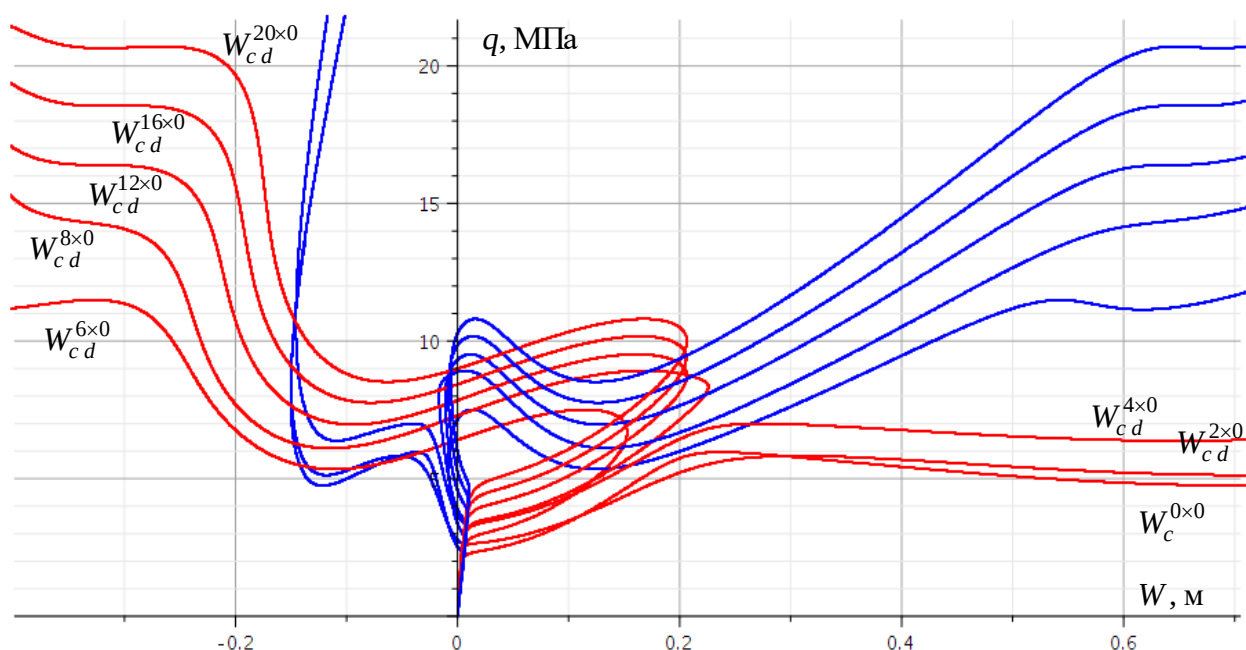


Рисунок 4.51. График зависимости прогиба W от нагрузки q при разном количестве стрингеров для конической панели варианта 1 ($N = 16$, уточненный дискретный метод)

По результатам расчетов видно, что усиление рассматриваемой конической панели шпангоутами дает близкие значения к варианту усиления ортогональной сеткой ребер. Усиление конструкции стрингерами дает эффект в несколько раз ниже и является неэффективным. Такой характер поведения аналогичен выявленному для цилиндрической панели.

4.7 ИССЛЕДОВАНИЕ СФЕРИЧЕСКИХ КУПОЛОВ

Для расчета сферических куполов будем использовать аппроксимирующие функции (3.7)–(3.10), предложенные в п. 3.2.

Для верификации предложенного подхода, проведем сравнение результатов исследования устойчивости сферической оболочки (купола) с решением, полученным Э. И. Григолюком и Е. А. Лопаницыным [47]. В этой работе рассматривался пологий сферический купол, жестко закрепленный по контуру и находящийся под действием равномерно распределенного поперечного давления с

параметрами $R/h = 100$, угол разворота $\alpha = 19^\circ = 0,3316$ рад, материал оболочки – сталь с модулем упругости $E = 2,1 \cdot 10^5$ МПа и коэффициентом Пуассона $\mu = 0,3$.

Э. И. Григолюком и Е. А. Лопаницыным для описания процесса деформирования купола используются уравнения Маргерра в осесимметричной постановке (учитывается геометрическая нелинейность и поперечные сдвиги в радиальном направлении). Решение этих уравнений выполняется методом Релея – Ритца с последующим применением метода продолжения решения по наилучшему параметру (длине дуги равновесных состояний). Для оценки результатов вводится безразмерный параметр нагрузки

$$q^* = \left[3(1 - \mu^2) \right]^{\frac{1}{2}} \left[qR^2 / 2Eh^2 \right] \text{ и безразмерный параметр прогиба } w_0^* = W / h.$$

В работе [47] для данного примера получено значение критической нагрузки $q_{cr}^* = 0,972$, потеря устойчивости происходит «хлопком». Глубина вмятины вблизи вершины купола w_0^* наибольшая и плавно понижается к контуру купола. До потери устойчивости величина прогиба составляла $w_0^* = 0,49$, а после потери устойчивости $w_0^* = 10,55$ (Рисунок 4.52).

В нашем случае, при аппроксимации всех неизвестных функций вдоль окружной координаты рядом $1, \cos(2\pi\eta), \sin(2\pi\eta), \cos(4\pi\eta)$, где $\eta = \frac{y}{2\pi}$, были получены значения критической нагрузки, показанные в Таблице 4.38.

Будем рассматривать сферический купол и при жестком закреплении, и при шарнирно-неподвижном. Для сравнения результатов, полученных автором, с работой [47], значения критических нагрузок также дублируются с переводом в параметр q_{cr}^* . Для тестовой задачи разница в значениях составила около 7 %. Однако, более низкое значение критической нагрузки лучше согласуется с результатами экспериментов, также описанными в работе [47]: согласно экспериментам, диапазон q_{cr}^* составляет от 0,28 до 0,9. Кроме того, данное

расхождение может быть объяснено использованием разных математических моделей и выбранными параметрами точности численных методов.

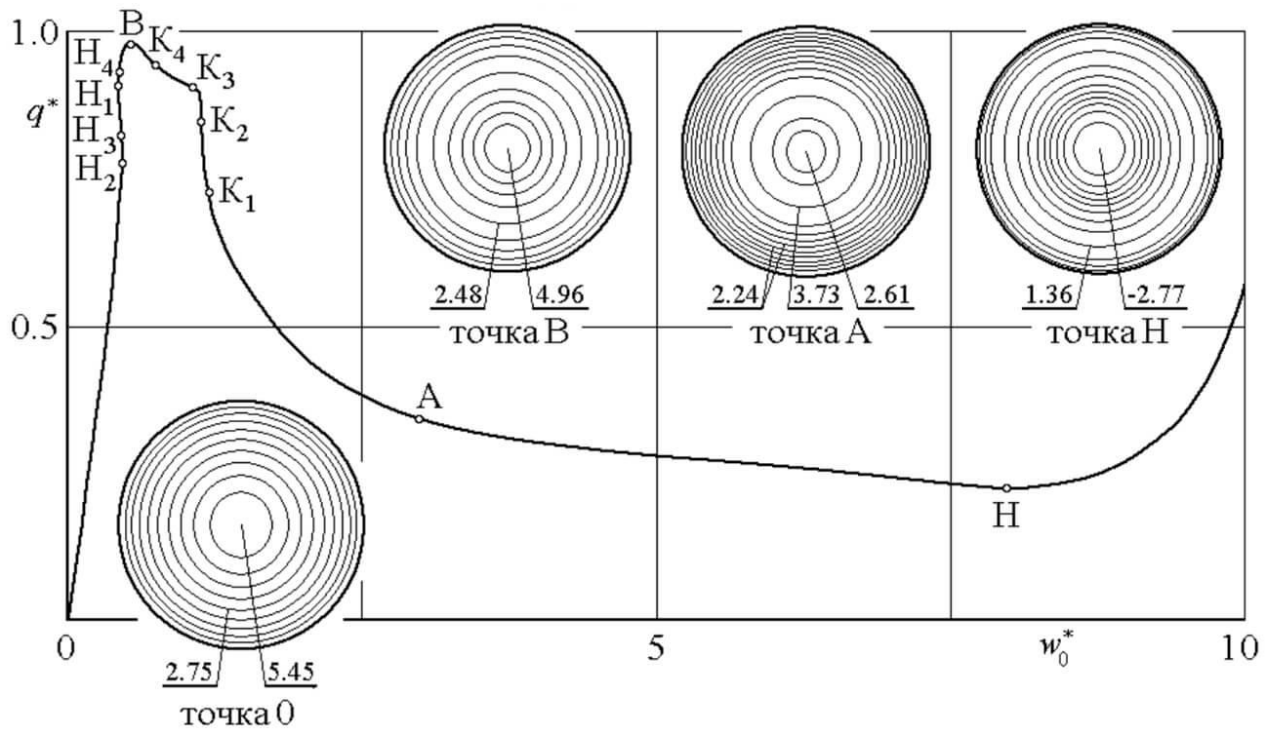


Рисунок 4.52. Траектория нагружения в случае осесимметричного деформирования рассматриваемого купола [47]

Таблица 4.38. Сравнение полученных значений с работой [47]

Вариант задачи	N	Шарнирно-неподвижное закрепление				Жесткое закрепление				
		Пр-ть	Устойчивость			Пр-ть	Устойчивость			
		q_{pr} , МПа	$\bar{P}$	q_{cr} , МПа	q_{cr}^*	q_{pr} , МПа	$\bar{P}$	q_{cr} , МПа	q_{cr}^*	q_{cr}^* [47]
1	4	4,29	168,99	29,35	1,155	2,27	117,44	20,39	0,802	0,972
	9	4,48	125,62	21,82	0,858	3,39	107,67	18,70	0,735	
	16	4,50	114,08	19,81	0,779	3,38	131,13	22,78	0,896	

На Рисунке 4.53 показан график «нагрузка – прогиб» для рассматриваемого варианта купола при разных значениях N , совмещенный с графиком из работы

[47]. Из рисунка видно, что при $N=16$ кривые уже достаточно хорошо согласуются.

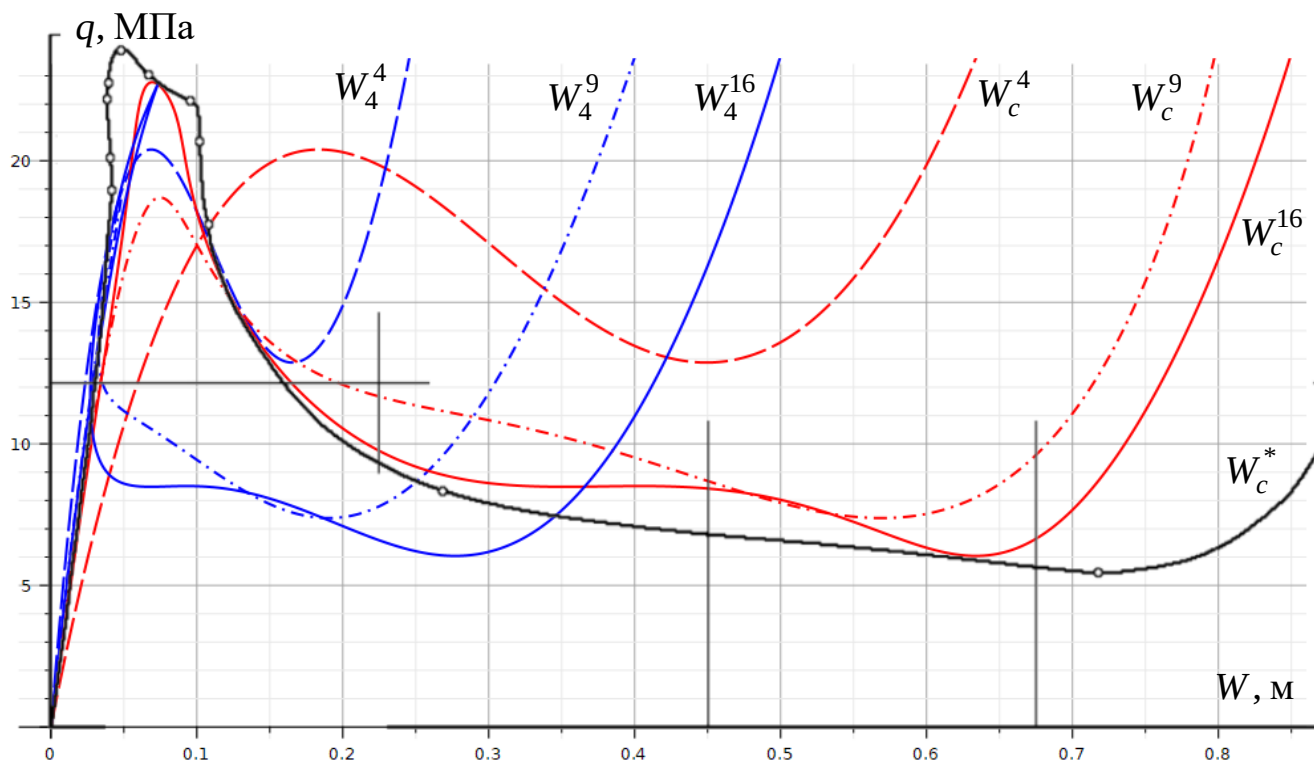
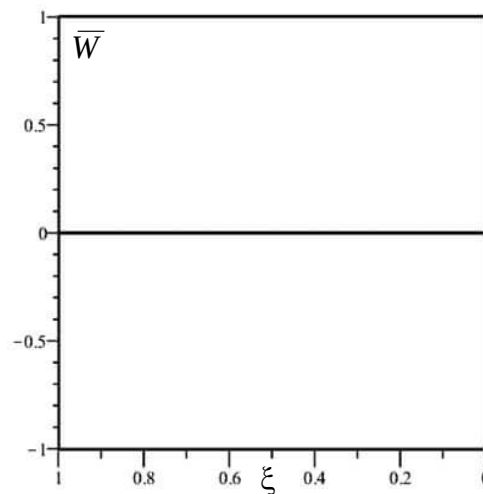
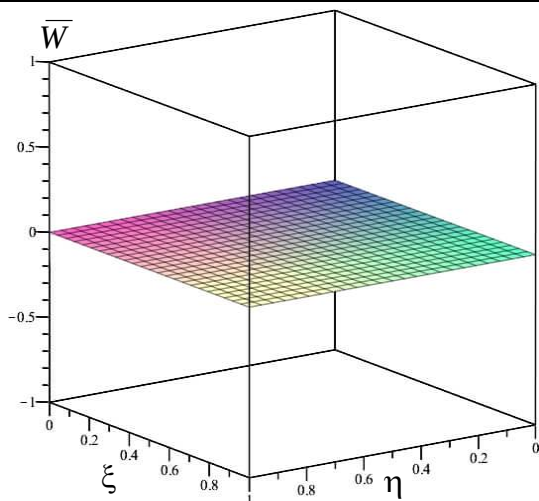
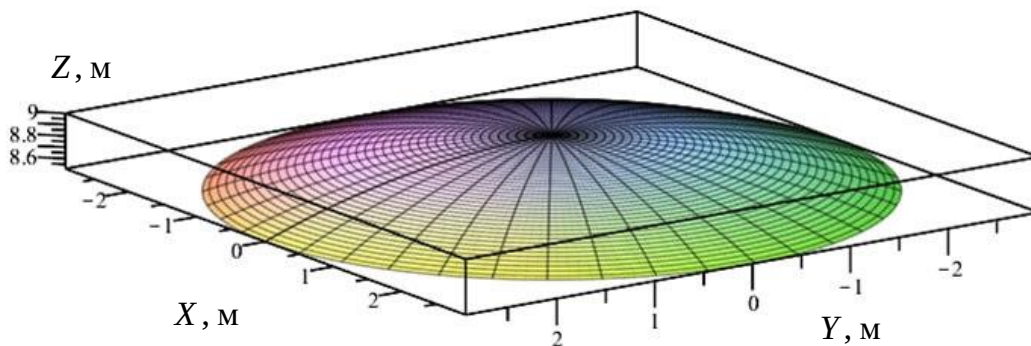


Рисунок 4.53. График «нагрузка q – перемещение W » для рассматриваемого варианта купола

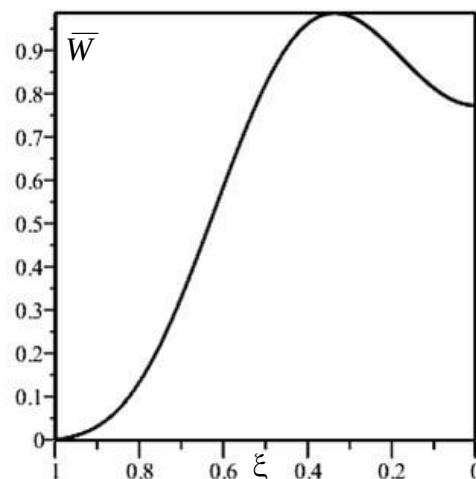
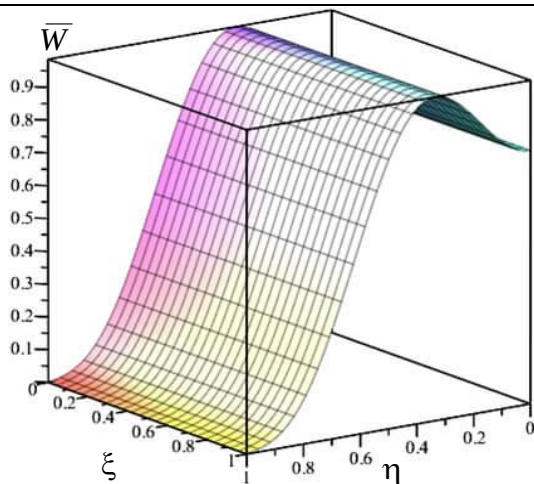
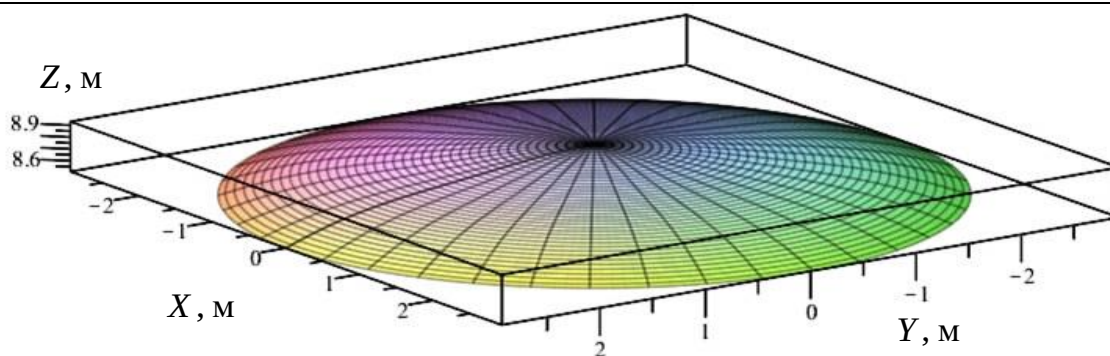
На Рисунке 4.54 показан исследуемый сферический купол в недеформированном, докритическом и закритическом состоянии. Помимо фрагмента поля прогибов и его вида сбоку (в безразмерных параметрах) показано изображение купола в глобальной декартовой системе координат (в размерных параметрах).

Также для рассматриваемого купола была проведена оценка невыполнения условий прочности. Оценка производилась по критерию Мизеса – на Рисунке 4.55 показаны поля критерия и соответствующие им нагрузки при разных значениях N . Учитывая то, что для данной конструкции начало невыполнения условий прочности происходит до потери устойчивости, может быть рекомендовано для ее проектирования выбрать марку стали с более высоким значением предела текучести.

Недеформированная сферическая оболочка



Сферическая оболочка при нагрузке 0,896 МПа (докритическая стадия)



Сферическая оболочка при нагрузке 0,896 МПа (закритическая стадия)

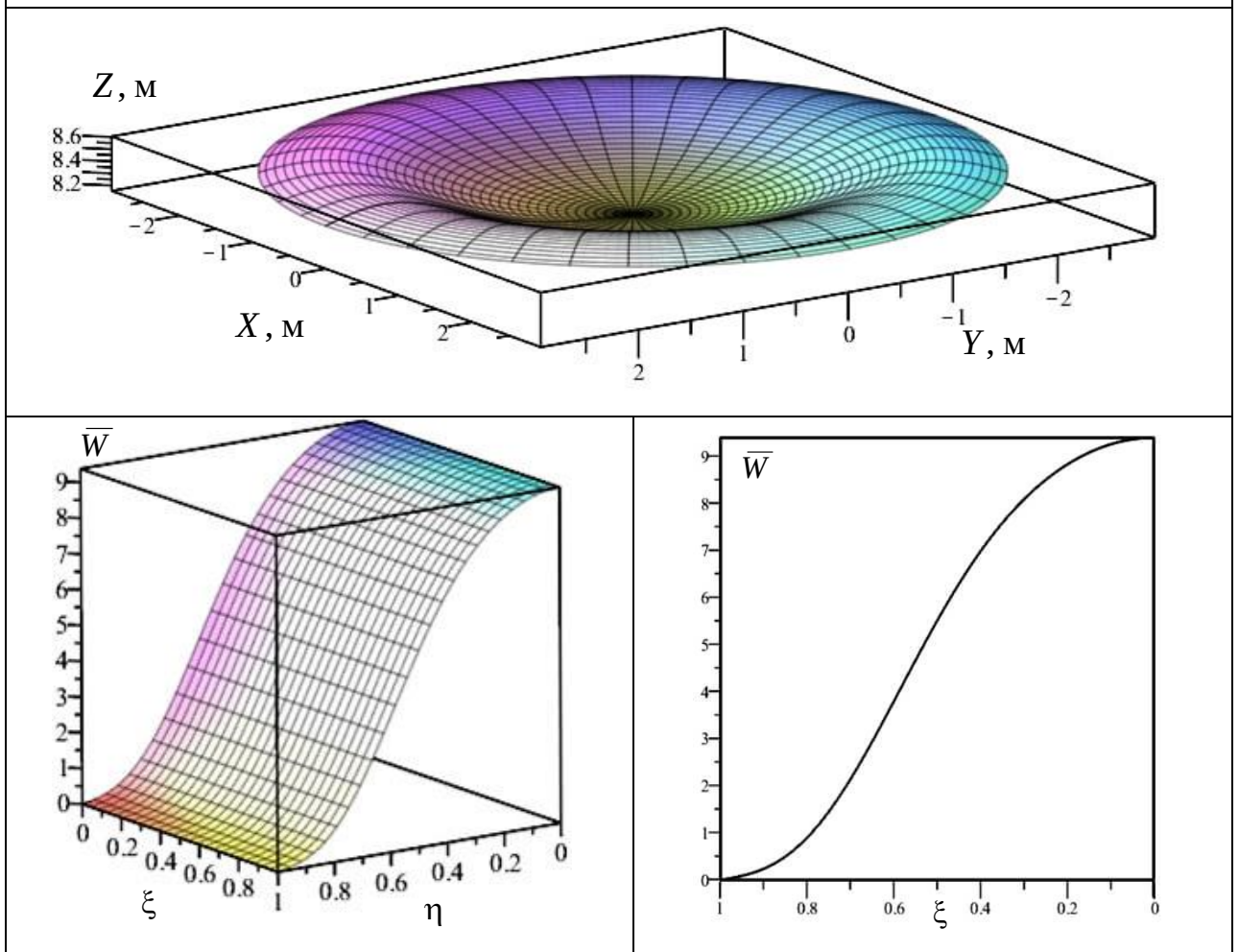


Рисунок 4.54. Сферическая оболочка в недеформированном, докритическом и в закритическом состояниях

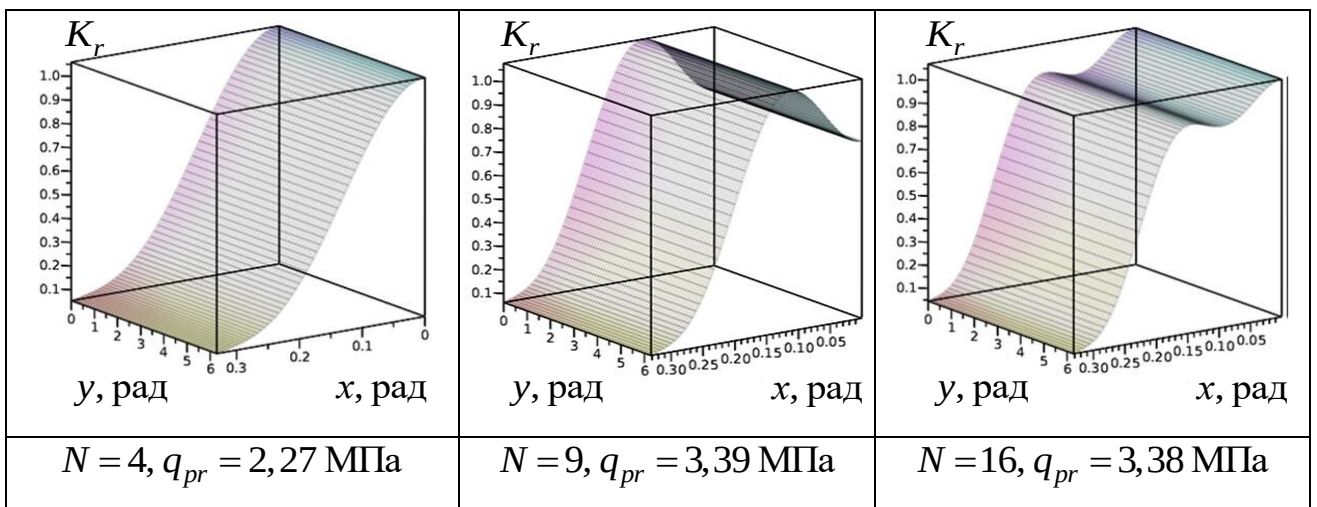


Рисунок 4.55. Поле критерия Мизеса при достижении предельно допустимой нагрузки (при разных значениях N)

4.8 ДОСТОВЕРНОСТЬ ПОЛУЧЕННЫХ РЕЗУЛЬТАТОВ

4.8.1 Сравнение с результатами, полученными другими авторами

Для того, чтобы верифицировать получаемые результаты, выполним расчеты оболочек, которые исследовались в работах [180, 287]. Характеристики материалов из работ [180, 287] также приводятся в Таблице 4.1 (обозначены как Материал 1 и Материал 2) [18]. Для всех конструкций оси ортотропии совпадают с локальной системой координат оболочки, а направление оси ортотропии 1 совпадает с направлением оси x (безразмерная ось ξ) [18].

В работе [287] рассматривались изотропные и ортотропные пологие оболочки двоякой кривизны, квадратные в плане и шарнирно-неподвижно закрепленные по контуру, в основе алгоритма предлагается использовать DQM (Differential quadrature method). После приведения входных данных к системе координат и обозначениям, принятым в данной работе, получим следующие характеристики конструкций (см. Таблицу 4.2) [131]:

Вариант 6. Линейные размеры $a = b = 0,2$ м, радиусы главных кривизн $R_1 = R_2 = 7,2727$ м, толщина $h = 0,00022$ м, Материал 1, изотропный.

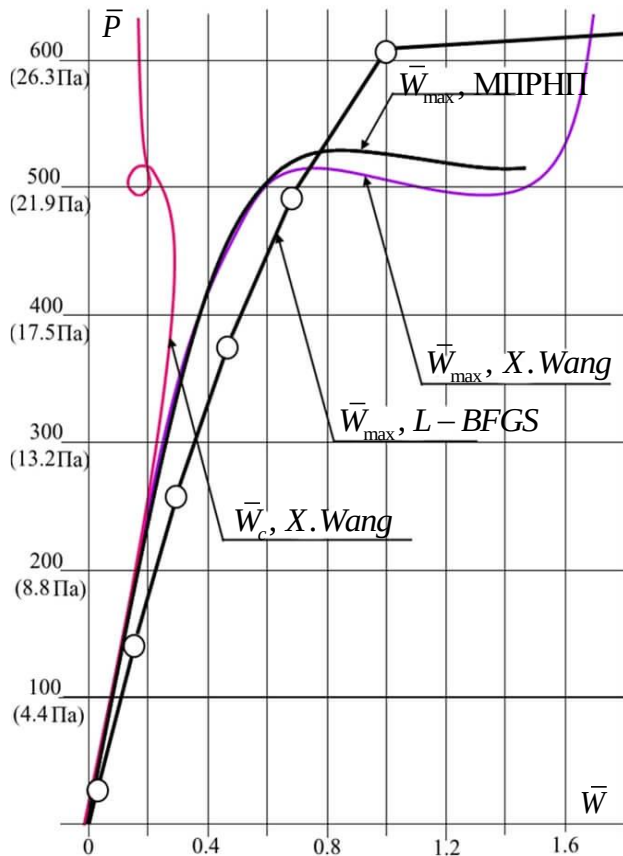
Вариант 7. Линейные размеры $a = b = 0,2$ м, радиусы главных кривизн $R_1 = 5$ м, $R_2 = 3,33$ м, толщина $h = 0,00022$ м, Материал 2, ортотропный.

Следует отметить, что в модели, представленной в работе [287], в отличие от предлагаемой, не учитывается влияние поперечных сдвигов [131].

На Рисунках 4.56, а и 4.56, б показано наложение графиков «нагрузка q – прогиб W » (после перехода к размерным параметрам и сопоставления координатных осей) для тестовых задач вариантов 6 и 7. Также в статье [287] автор сравнивает полученные им значения критических нагрузок с результатами расчета в ПК NASTRAN (FEM) и работой [180] (в основе алгоритма используются Partitioned solution method (PSM) и Adjacent equilibrium method (AEM)). Автором

[287] отмечается, что для случая несимметричной ортотропной оболочки расхождение результатов в несколько раз больше, чем для симметричной изотропной. Сравнение значений критических нагрузок, полученных здесь и авторами [180, 287], показано в Таблице 4.39 [18].

а)



б)

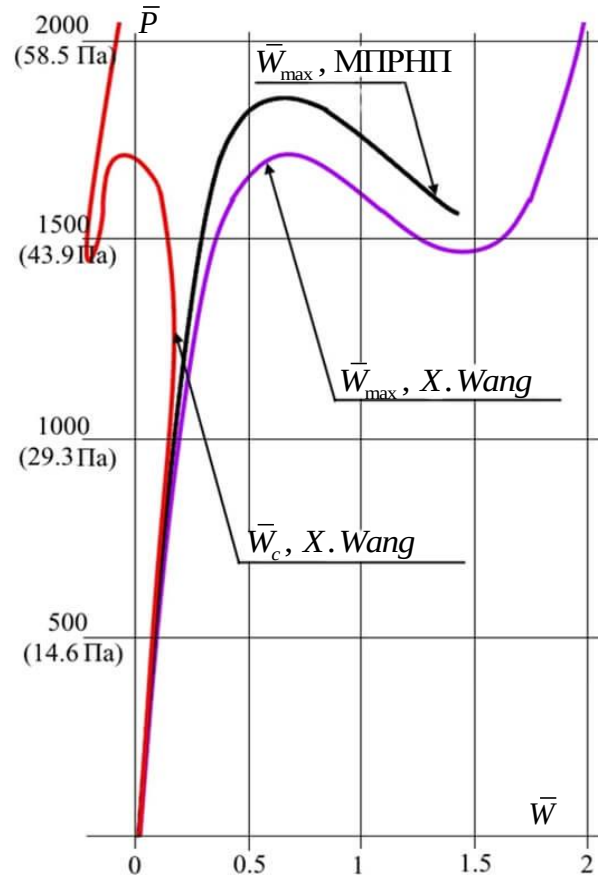


Рисунок 4.56. Наложение графиков «нагрузка $\bar{P}$ – прогиб $\bar{W}$ », полученных в [287], [18] и в данной работе, для тестовых задач 6 и 7 соответственно

Таблица 4.39. Сравнение с работами [180, 287]

Вар.	q_{cr} , МПа					
	X. Wang [287]		D. H. van Campen, V. P. Bouwman и др. [180]		Д. А. Баранова и др. [18]	Автор
	DQM	FEM	PSM	AEM	L-BFGS	МПРНП
6	22,74	22,63	25,14	31,92	27,09	23,22
7	50,76	52,89	57,86	76,71	—	54,35

На Рисунках 4.57, а и 4.57, б показаны поля перемещений W , полученные в [287] и в данной работе. Приняты коэффициенты масштабирования прогиба $k_m = 5$ и $k_m = 10$ соответственно. Распределение прогибов по полю оболочки имеет схожий характер, что говорит о хорошей согласованности результатов [18].

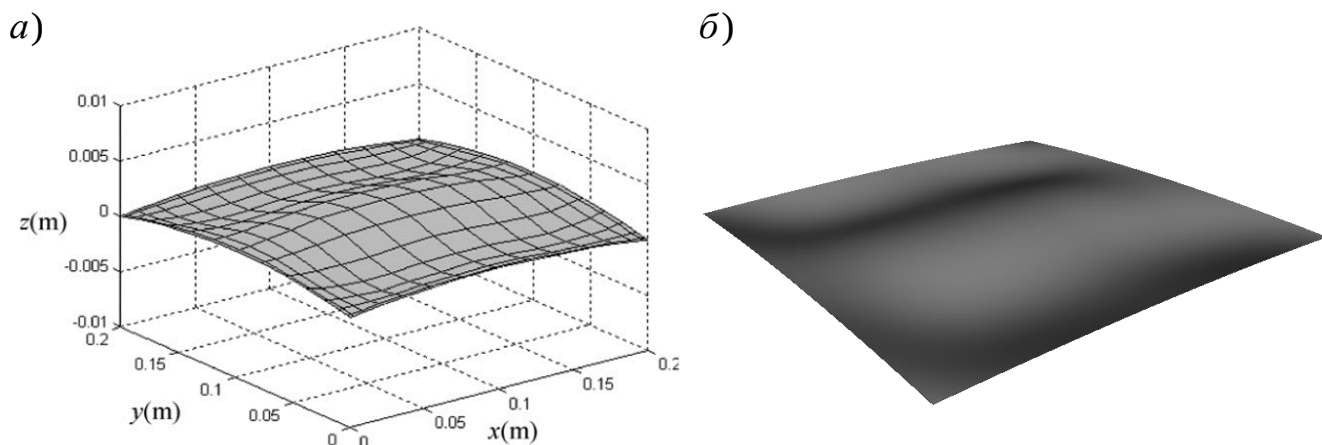


Рисунок 4.57. Поля прогибов конструкции в момент потери устойчивости, полученные в [287] и в данной работе для тестовой задачи 7 [18]

Для ортотропных оболочек сравнение результатов с натурным экспериментом провести не удалось в связи с отсутствием информации о таких экспериментах. Однако, имеются результаты экспериментов по исследованию устойчивости изотропных оболочек из оргстекла, проведенные в Уральском научном центре АН СССР и описанные в работе В. И. Климанова и С. А. Тимашева [81]. Важной особенностью этих экспериментов является то, что испытывались оболочки, подкрепленные ребрами жесткости.

Авторами [81] были проведены испытания над 18 образцами пологой оболочки двоякой кривизны, квадратной в плане, с параметрами $h = 0,001$ м, $a = b = 0,604$ м, $R_1 = R_2 = 1,51$ м (вариант 9 в Таблице 4.2). Материал – оргстекло с параметрами $E = 0,0331 \cdot 10^5$ МПа, $\mu = 0,354$; параметры ребер жесткости – $n = m = 9$, $h^i = h^j = 0,0033$ м, $r = 0,0092$ м. В ходе экспериментов, полученные значения критических нагрузок потери устойчивости q_{cr} дали разброс от $0,411 \cdot 10^{-2}$ МПа до $0,703 \cdot 10^{-2}$ МПа. После математической обработки результатов эксперимента было вычислено итоговое значение критической нагрузки

$q_{cr} = 0,503 \cdot 10^{-2}$ МПа. Расчет этого варианта конструкции по рассмотренным в данной работе методам показал результаты, приведенные в Таблице 4.40.

Таблица 4.40. Сравнение результатов расчета с данными эксперимента [81] (количество ребер жесткости 9×9)

Метод		q_{cr} , МПа
Результаты эксперимента (В. И. Климанов и С. А. Тимашев, 1985) [81]		$0,503 \cdot 10^{-2}$
N=16	Дискретный ввод ребер по линии (А. И. Лурье, 1948)	$0,350 \cdot 10^{-2}$
	Дискретный ввод ребер по полосе (В. В. Карпов, 1986)	$0,733 \cdot 10^{-2}$
	Метод конструктивной анизотропии (В. В. Карпов, 2010)	$0,537 \cdot 10^{-2}$
	Уточненный дискретный ввод ребер по полосе (А. А. Семенов)	$0,551 \cdot 10^{-2}$

Из полученных данных видно, что среди дискретных методов учета ребер жесткости предложенный в данной работе метод дает значения, наиболее близкие к экспериментальным данным. Метод конструктивной анизотропии также дает близкое значение нагрузки потери устойчивости. В случае использования дискретного введения ребер жесткости по линии, значение критической нагрузки значительно занижено, а в случае использования дискретного ввода ребер жесткости по полосе оно значительно завышается.

Также к подтверждению достоверности представленных в данной работе результатов следует отнести сравнение, выполненное в п. 4.8 с работой Э. И. Григолюка и Е. А. Лопаницына [47].

4.8.2 Сравнение с результатами, полученными в ПК ANSYS

Предложенные в данной работе модель и вычислительный алгоритм были также верифицированы и путем сравнения результатов расчета нескольких

тестовых задач в ПК ANSYS. Результаты, приведенные в данном пункте, получены совместно с Д. С. Петровым [118, 249].

Для проведения данного исследования будем использовать программный комплекс ANSYS Mechanical APDL 19.2. В нем реализована функция расчета перемещений точек конструкции с помощью метода длины дуги (arc-length method), что позволяет исследовать перемещения узлов конечных элементов в закритической области нагружения, после потери конструкцией устойчивости.

Форму конструкции будем задавать геометрически, по точкам, с помощью встроенных инструментов программного комплекса. Сформированная геометрическая модель оболочечной конструкции разбивается на сетку конечных элементов, в данном случае был выбран тип элемента Shell 181 (элемент оболочки с конечными деформациями; имеет четыре узла, в каждом из которых определены шесть степеней свободы; позволяет учитывать полный набор нелинейных эффектов, включая большие деформации). Сетка конечных элементов выбирается регулярной, элементы имеют прямоугольную форму [118].

4.8.2.1 Исследование цилиндрических панелей

Рассмотрим цилиндрическую панель варианта 1 из Таблицы 4.2. Готовая геометрическая модель разбивается на сетку конечных элементов 32x32, по всем краям оболочки назначается шарнирное закрепление (Рисунок 4.58) [118]. В качестве материалов выберем сталь и стеклопластик Т-10/УПЭ22-27 (см. параметры в Таблице 4.1).

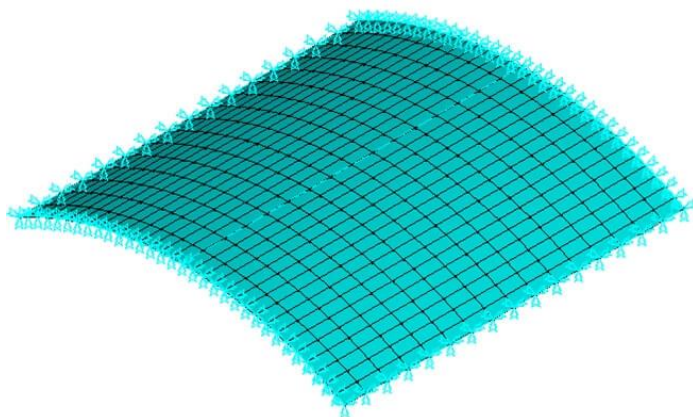


Рисунок 4.58. Расчетная модель цилиндрической панели

В результате проведения вычислительного эксперимента получены данные о потери устойчивости и, в одном случае, прочности панелей цилиндрических оболочек. Анализ проведен на основе значений перемещений характерных узловых точек оболочечной конструкции: узла в центре (узел № 57, $x = a / 2$, $y = b / 2$) и узла в четверти конструкции (узел № 173, $x = a / 4$, $y = b / 4$) [118].

Рассмотрим цилиндрическую панель варианта 1, выполненную из изотропного материала (сталь).

Пошаговое увеличение значения приложенной равномерно распределенной поперечной нагрузки до 0,8 МПа показано на Рисунке 4.59 (график зависимости «нагрузка – прогиб») [118].

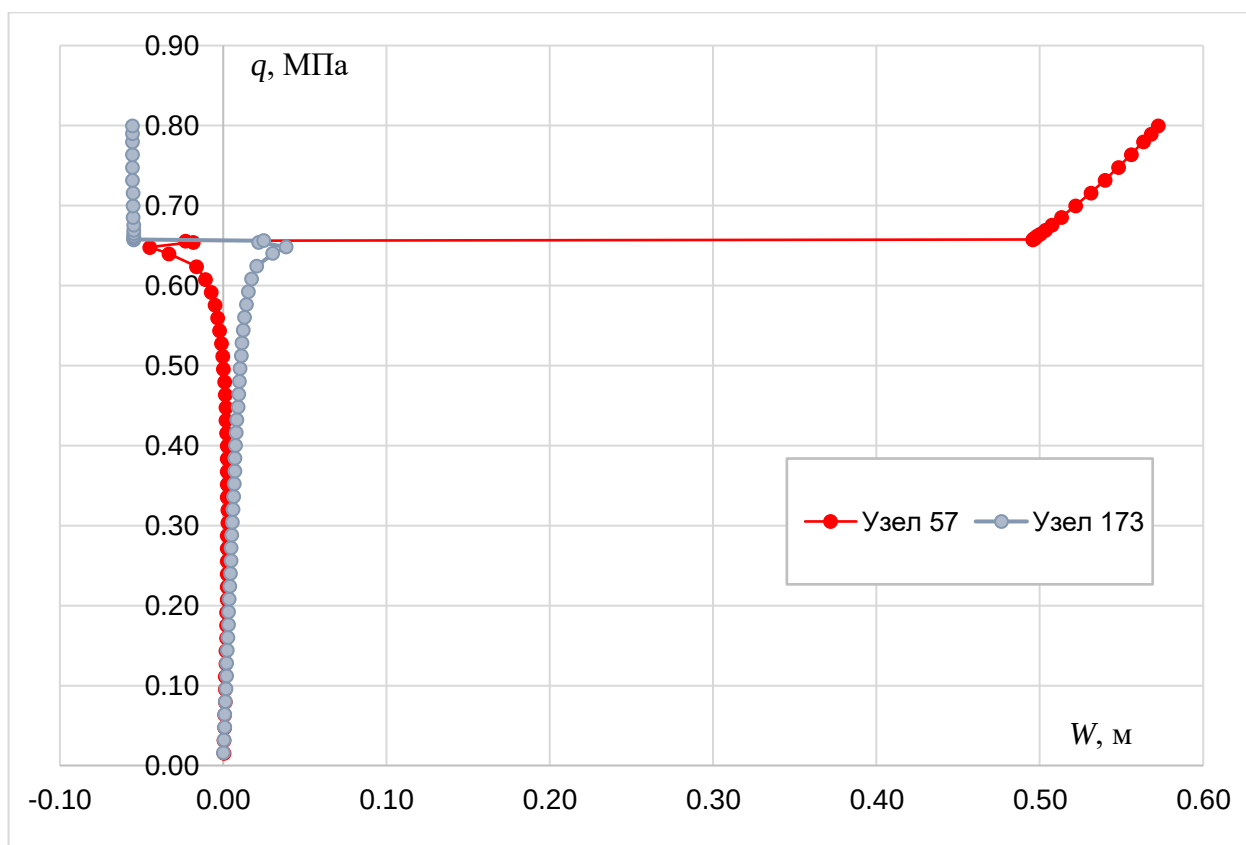


Рисунок 4.59. График « $q - W$ » для панели варианта 1 из стали (значения получены в ПК ANSYS)

Согласно графику, до достижения значения нагрузки 0,4 МПа перемещение исследуемых узлов носит практически линейный характер. При дальнейшем увеличении нагрузки, коэффициент наклона касательной к графику начинает интенсивно меняться. При достижении значения 0,6562 МПа выбранные узлы

получают скачкообразное перемещение, исходя из чего можно сделать вывод о том, что конструкция потеряла устойчивость [118].

На Рисунке 4.60 представлен результат приложения нагрузки в 0,6562 МПа. Заметен существенный прогиб центральной части оболочки, образовавшийся в результате потери устойчивости. Поле интенсивности распределения внутренних напряжений в оболочечной конструкции после потери устойчивости, в момент приложения нагрузки 0,6562 МПа, представлено на Рисунке 4.61 [118].

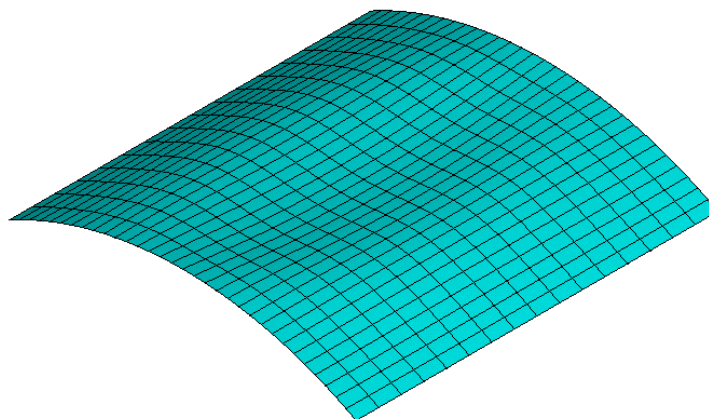


Рисунок 4.60. Панель из стали (вариант 1) при нагрузке 0,6562 МПа

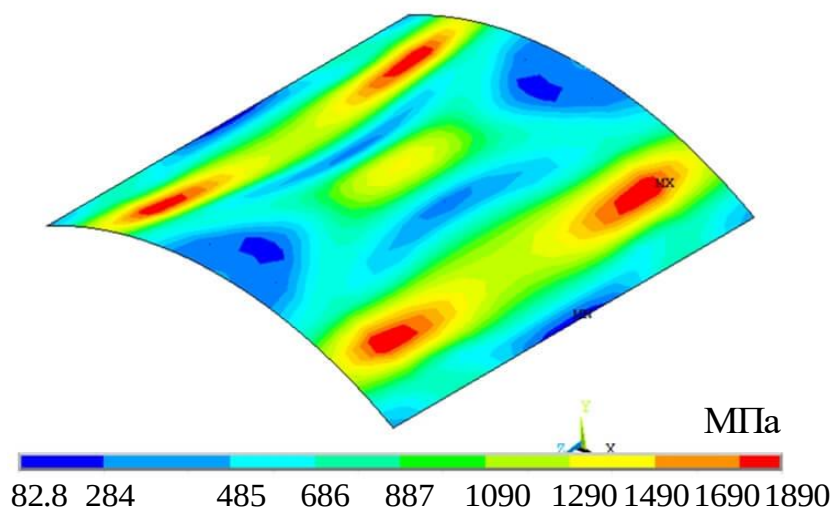


Рисунок 4.61. Поле интенсивности напряжений для панели из стали варианта 1 при нагрузке 0,6562 МПа

Далее рассмотрим ту же цилиндрическую панель (вариант 1), но выполненную из ортотропного материала (стеклопластик Т-10/УПЭ22-27).

Значение приложенной равномерно распределенной нагрузки берется до 0,060 МПа. Согласно графику зависимости «нагрузка – прогиб», на Рисунке 4.62

перемещение исследуемых узлов носит линейный характер до нагрузки 0,03 МПа [118].

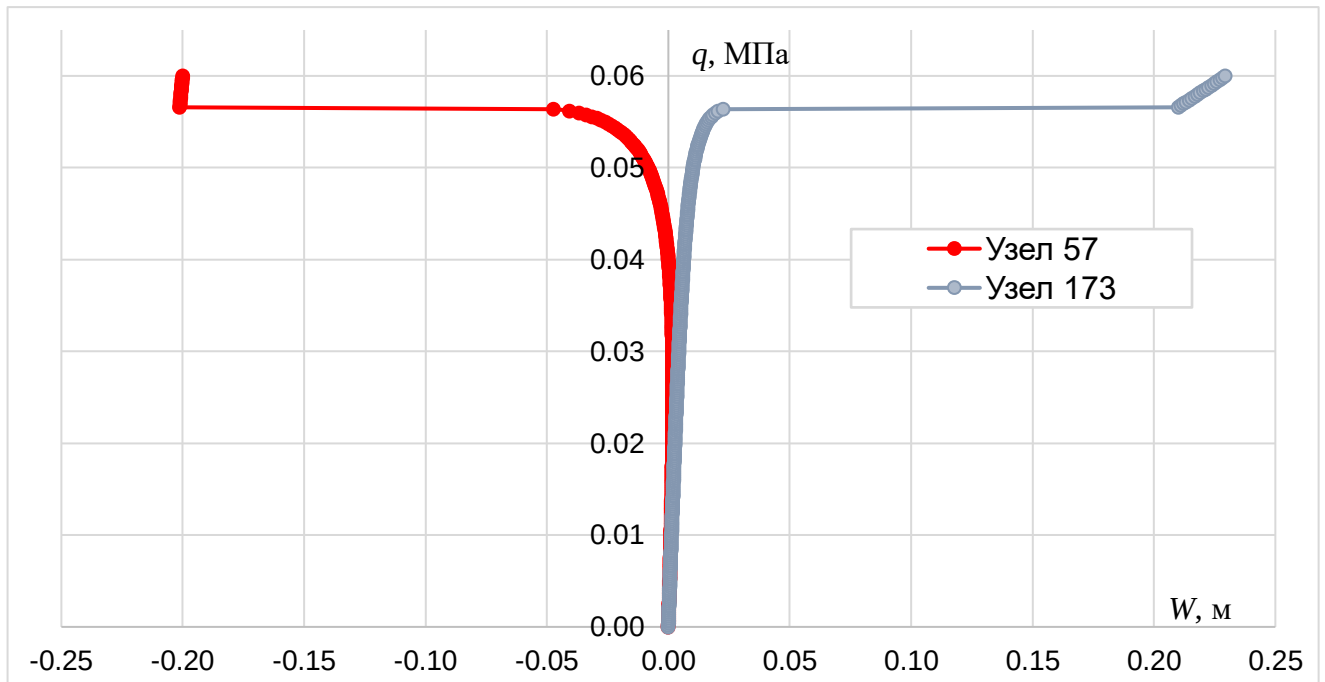


Рисунок 4.62. График «нагрузка – прогиб» для панели варианта 1 из стеклопластика Т-10/УПЭ22-27 (значения получены в ПК ANSYS)

При дальнейшем увеличении нагрузки кривизна графика увеличивается. При достижении значения 0,0571 МПа центральный узел и узел в четверти получают скачкообразное перемещение, исходя из чего можно сделать вывод о потере устойчивости [118].

На Рисунке 4.63 представлен результат приложения равномерно распределенной нагрузки в 0,0571 МПа.

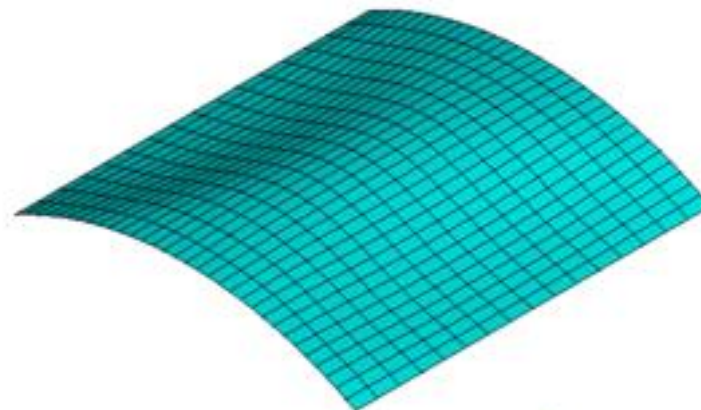


Рисунок 4.63. Схема деформирования для цилиндрической панели 1 (материал Т-10/УПЭ22-27, нагрузка 0,0571 МПа)

При деформации конструкция приобретает седлообразный вид: два прогиба сбоку от центральной части оболочки, и выгиб вверх центральной части оболочки, образовавшиеся в результате потери устойчивости. Поле интенсивности напряжений при нагрузке 0,0571 МПа показано на Рисунке 4.64 [118].

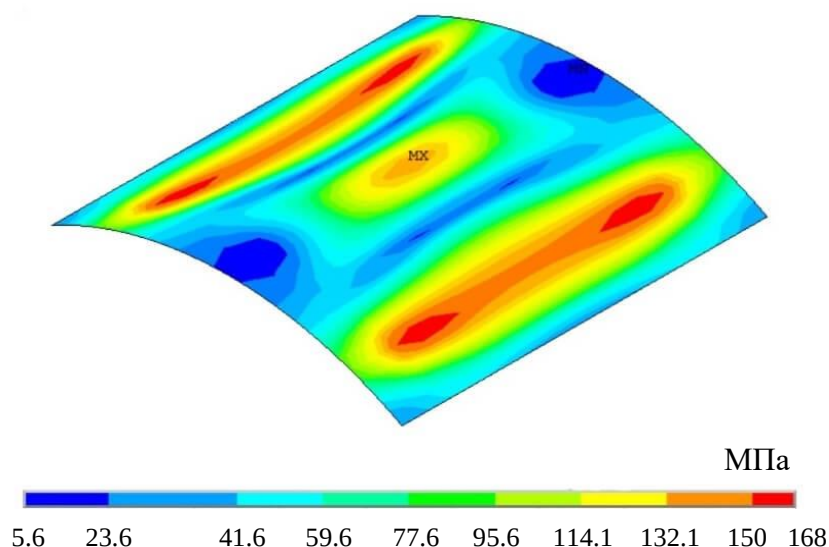


Рисунок 4.64. Поле интенсивности напряжений для панели варианта 1 из стеклопластика Т-10/УПЭ22-27

В Таблице 4.41 показаны значения нагрузок потери устойчивости q_{cr} и значения прогибов в центре и четверти конструкции [118]. В последнем столбце Таблицы 4.41 показаны значения, полученные по методу продолжения решения по наилучшему параметру с использованием моделей и алгоритмов, описанных в предыдущих главах. На Рисунках 4.65, 4.66 показаны соответствующие графики зависимостей «нагрузка – прогиб» [118].

Таблица 4.41. Сравнение результатов расчетов, полученных в ПК ANSYS и по методике автора [118]

№	Материал	ПК ANSYS			МПРНП
		q_{cr} , МПа	Прогиб, м		q_{cr} , МПа
			Узел 57	Узел 173	
1	Сталь	0,6562	0,5725	0,0555	0,6897
	Стеклопластик Т-10/УПЭ22-27	0,0571	0,2021	0,2715	0,0598

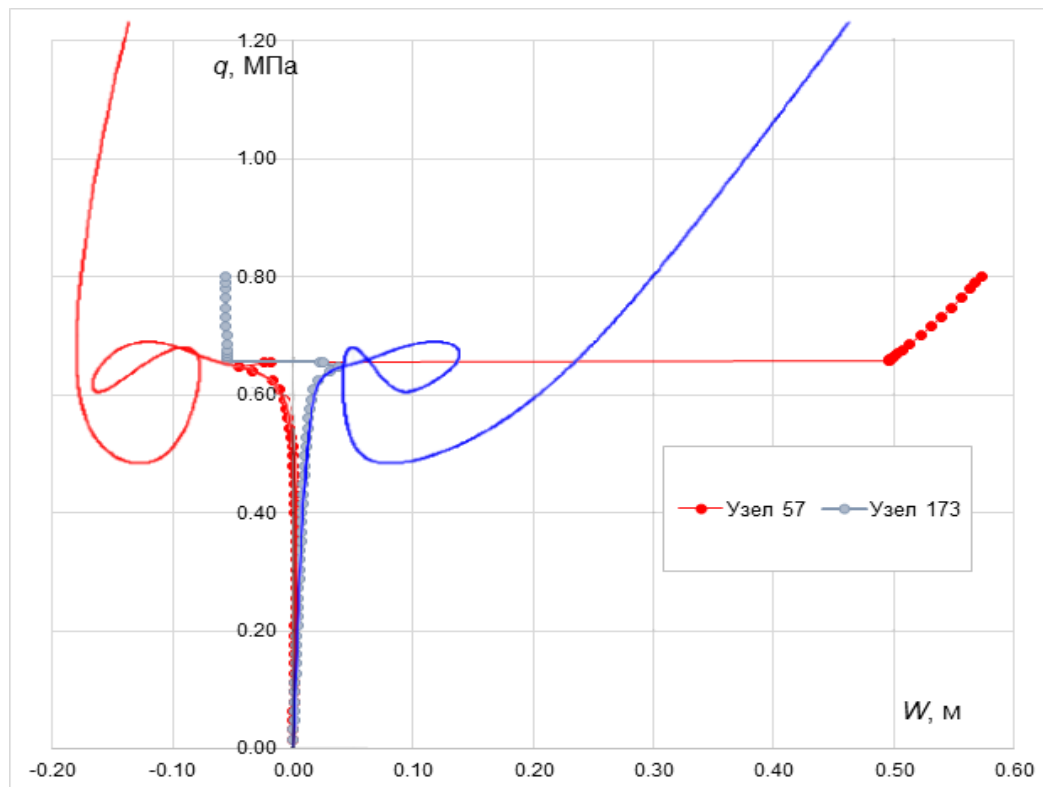


Рисунок 4.65. Совмещение кривых «нагрузка – прогиб» для цилиндрической панели варианта 1 из стали, полученных по методике автора и в ПК ANSYS

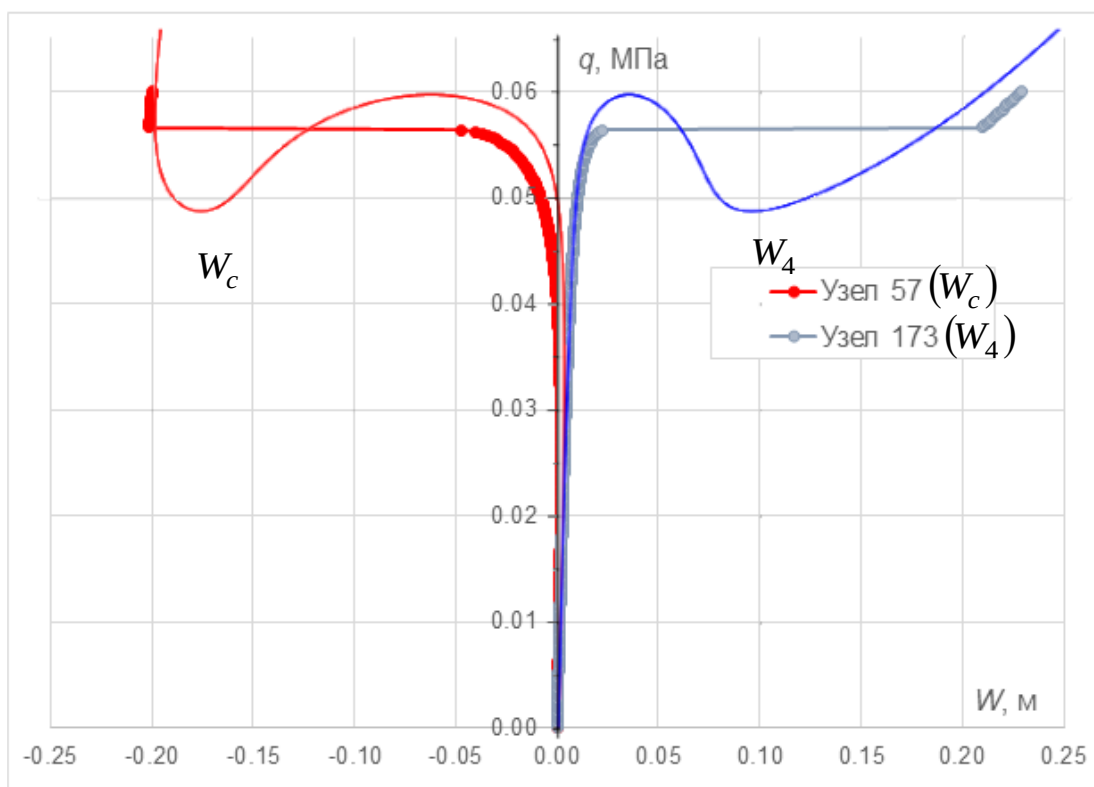


Рисунок 4.66. Совмещение кривых «нагрузка – прогиб» для цилиндрической панели варианта 1 из стеклопластика Т-10/УПЭ22-27, полученных по методике автора и в ПК ANSYS

Из представленных рисунков видно, что до критической нагрузки решение ведет себя схожим образом, притом для конструкции из материала Т-10/УПЭ22-27 этот характер сохраняется и в закритической стадии. Для конструкции из стали в закритической стадии наблюдаются расхождения между методикой автора и ПК ANSYS, что может быть вызвано невозможностью ПК ANSYS описать процесс петлеобразования из-за существенно нелинейного поведения системы [118].

Кривые, которые были получены с применением метода продолжения решения по наилучшему параметру, имеют более гладкий вид и могут быть построены и в закритической стадии до требуемых значений нагрузок. В то же время, кривые, полученные в ПК ANSYS, на рисунках построены до своих максимальных значений – далее программный комплекс не позволяет их построить.

4.9 ВЫВОДЫ

В данной главе были проведены вычислительные эксперименты по комплексному исследованию прочности и устойчивости как изотропных, так и ортотропных оболочечных конструкций при действии статической нагрузки, в том числе:

- пологих оболочек двоякой кривизны;
- пологих оболочек двоякой кривизны, подкрепленных ребрами жесткости с внутренней стороны;
- пологих оболочек двоякой кривизны, подкрепленных ребрами жесткости с внешней стороны;
- цилиндрических панелей;
- цилиндрических панелей, подкрепленных ребрами жесткости с внутренней стороны;
- цилиндрических панелей, подкрепленных ребрами жесткости с внешней стороны;

- цилиндрических панелей, подкрепленных ребрами жесткости в одном направлении;
- конических панелей;
- конических панелей, подкрепленных ребрами жесткости с внутренней стороны;
- конических панелей, подкрепленных ребрами жесткости в одном направлении;
- сферических куполов.

Проведено сравнение результатов расчета тестовых задач с результатами, полученными другими авторами, а также с результатами, полученными в ПК ANSYS. Для подкрепленных оболочек выполнено сравнение с результатами экспериментов, полученных В. И. Климановым и С. А. Тимашевым [81], которое показало хорошую согласованность значений критических нагрузок.

Проведено сравнение результатов, получаемых по разным методам учета ребер жесткости. Выявлено, что два разных подхода (уточненный дискретный метод и метод конструктивной анизотропии) дают очень близкие результаты (начиная с ортогональной сетки ребер 8×8). В то время, как обычный дискретный метод дает существенно завышенные значения критических нагрузок (особенно при увеличении числа ребер), а метод А. И. Лурье (ввод ребер «по линии») дает существенно заниженные значения.

Метод конструктивной анизотропии (как вариант для изотропных, так и вариант для ортотропных оболочек) позволяет значительно сократить время расчета и требуемую вычислительную мощность, однако его применение возможно только для конструкций, имеющих большое число подкрепляющих элементов.

Показаны трехмерные графики критериев прочности при определенном значении нагрузки. Проведен анализ развития зон невыполнения условий прочности по разным критериям. Также показано влияние наличия ребер жесткости на размер этих зон.

Предложенный формат представления данных об областях невыполнения условий прочности и графика критерия прочности является новым и позволяет более наглядно представить и оценить состояние конструкции.

Вычислительный эксперимент, проведенный с помощью возможностей программного комплекса ANSYS Mechanical APDL 19.2, позволяет проанализировать поведение цилиндрической панели в процессе повышения приложенной нагрузки, и сравнить результат с методикой, предложенной автором.

Программный комплекс ANSYS Mechanical APDL 19.2 позволяет получить необходимые данные для построения зависимостей «нагрузка – прогиб», однако, возникают сложности с нахождением значений в закритической области [118].

ГЛАВА 5. МАТЕМАТИЧЕСКИЕ МОДЕЛИ ДЕФОРМИРОВАНИЯ И АЛГОРИТМЫ ИССЛЕДОВАНИЯ ПОДКРЕПЛЕННЫХ ОРТОТРОПНЫХ ОБОЛОЧЕК ПРИ ДЕЙСТВИИ ДИНАМИЧЕСКОЙ НАГРУЗКИ

Тонкостенные оболочки, являясь элементами различных конструкций, могут быть подвержены воздействию нагрузок, зависящих от времени, что приводит к необходимости исследования их устойчивости в задаче динамики⁶ [89, 174, 175, 189, 197, 230, 237, 261, 272, 274] и колебаний [166, 175, 186, 189, 220, 227, 241, 252, 254, 270, 272, 280]. Работ, посвященных анализу прочности оболочечных конструкций при динамическом нагружении, найти практически не удалось [2, 161, 269].

Функционал полной энергии деформации оболочки при динамическом нагружении включает в себя кинетическую и потенциальную энергии оболочки, а также работу внешних сил. Нахождением первой вариации этого функционала и приравниванием ее к нулю, выводятся уравнения движения оболочки (система дифференциальных уравнений в частных производных при заданных краевых и начальных условиях). Эти уравнения представляют собой уравнения равновесия оболочки (задача статики), дополненные инерционными членами [71]. Таким образом, точность математической модели деформирования оболочки при

⁶ По результатам проведенного исследования автором опубликованы, в том числе, работы:

- Семенов, А. А. Уточненный дискретный метод расчета подкрепленных ортотропных оболочек / А. А. Семенов // Вестник ПНИПУ. Механика. – 2022. – № 4. – С. 90–102.
- Семенов, А. А. Методика исследования устойчивости пологих ортотропных оболочек двоякой кривизны при динамическом нагружении / А. А. Семенов // International Journal for Computational Civil and Structural Engineering. – 2017. – Т. 13. – № 2. – С. 145–153.
- Semenov, A. Nonlinear Mathematical Model for Dynamic Buckling of Stiffened Orthotropic Shell Panels / A. Semenov // International Journal of Structural Stability and Dynamics. – 2022. – P. 2250191.
- Semenov, A. Dynamic Buckling of Stiffened Shell Structures with Transverse Shears under Linearly Increasing Load / A. Semenov // Journal of Applied and Computational Mechanics. – 2022. – Vol. 8. – No. 4. – P. 1343–1357.
- Semenov, A. A. Models of Deformation of Stiffened Orthotropic Shells under Dynamic Loading / A. A. Semenov // Journal of Siberian Federal University. Mathematics & Physics. – 2016. – Vol. 9. – No. 4. – P. 485–497.
- Семенов, А. А. Анализ свободных нелинейных колебаний пологой ортотропной оболочки двоякой кривизны при действии внешней равномерно распределенной динамической нагрузки / А. А. Семенов // Архитектура – Строительство – Транспорт: Материалы 73-й научной конференции профессоров, преподавателей, научных работников, инженеров и аспирантов университета. – СПб.: СПбГАСУ, 2017. – Т. 1. – С. 9–15.
- Semenov, A. A. Stability of cylindrical shell panels of modern materials under dynamic loading / A. A. Semenov // AIP Conference Proceedings. – 2017. – Vol. 1915. – P. 030025.
- Semenov, A. Dynamic buckling of stiffened orthotropic shell structures / A. Semenov // Magazine of Civil Engineering. – 2018. – No. 6(82). – P. 3–11.

динамическом нагружении зависит от точности тех же соотношений, что используются в задачах статики. Основу этих соотношений составляют применяемые гипотезы теории оболочек. Если используется гипотеза прямой нормали (гипотеза Кирхгофа – Лява, не учитывающая поперечные сдвиги), то искомыми функциями являются функции перемещений $U(x, y, t)$, $V(x, y, t)$, $W(x, y, t)$.

При этом в выражении кинетической энергии деформации оболочки не учитывается инерция вращения. Такую модель оболочки называют моделью первого приближения. Эта модель себя оправдала при исследовании устойчивости тонких оболочек из изотропных материалов при статическом нагружении, однако для подкрепленных оболочек она уже недостаточно точна. Также, как отмечается в работе А. С. Вольмира [36], эта модель недостаточна в задачах динамики.

Если учитываются поперечные сдвиги, то тогда в выражении кинетической энергии деформации оболочки будет учитываться инерция вращения. Это так называемая модель второго приближения. Такая модель хорошо себя зарекомендовала в статике при расчете подкрепленных оболочек (как изотропных, так и ортотропных).

Обе рассматриваемые модели предполагают линейное изменение перемещений, деформаций и напряжений по толщине оболочки. Существуют гипотезы, когда изменение этих величин задается нелинейной зависимостью от переменной z . Это так называемые модели высших порядков. В основном, такие модели используются для расчета слоистых оболочек. Модель первого приближения, в основе которой заложены гипотезы Кирхгофа – Лява, является наиболее простой, поэтому она чаще всего используется в задачах динамики.

Исследования тонкостенных оболочек при динамическом нагружении на основе гипотез модели Кирхгофа – Лява, приводятся в работах [8, 26, 53, 127, 174, 176, 222, 232, 237, 248, 285] и др.

Влияние учета поперечных сдвигов на процесс деформирования пластин и оболочек рассматривалось в работах [188, 243, 294] и др.

Решение задач нелинейного деформирования с использованием теорий типа Тимошенко появляется, в первую очередь, в области исследования пластин [36, 54, 269] и др. Уже в ранней работе Yu Yi-Yuan и Lai Jai-Lies [294] отмечается, что влияние поперечного сдвига не является малым и должно учитываться при анализе нелинейных колебаний и исследовании динамической устойчивости свободно опертых многослойных пластин [83].

В отношении вида рассматриваемых оболочек, наибольшее количество публикаций посвящено исследованиям цилиндрических оболочек [161, 186, 189, 197, 239, 243, 248, 292] (в основном, замкнутых). Это связано, в первую очередь, с необходимостью решения целого ряда важных прикладных задач, например, анализе колебаний при воздействии периодической динамической нагрузки от внутреннего течения жидкости. Кроме того, такие задачи можно рассматривать как осесимметричные, что является существенным упрощением расчетной модели. Исследований, посвященным коническим [227, 239, 254, 270, 274] и сферическим [174, 227, 248, 277] панелям и оболочкам существенно меньше.

Awrejcewicz J., Krysko A. V. и Soldatov V. [169] применяют анализ Фурье и непрерывное вейвлет-преобразование для исследования нелинейных колебаний бесконечно длинных гибких панелей при воздействии продольной знакопеременной внешней нагрузки. Для решения системы, к уравнениям в частных производных применяется метод Бубнова – Галеркина, что позволяет получить систему ОДУ первого порядка.

Достаточно большой класс конструкций представляют собой пологие оболочки двоякой кривизны [171, 220, 248, 272, 280, 297], которые также сравнительно хорошо изучены.

Например, в работе [171] выполнен анализ свободных колебаний пологих оболочек двойной кривизны, в том числе, характеризующихся непрерывным изменением толщины. Авторами отмечается, что такая форма конструкции может дать улучшенные динамические характеристики. Уравнения движения решаются численно с помощью метода обобщенных дифференциальных квадратур (GDQ). Полученные результаты сравниваются с известными аналитическими и

полуаналитическими результатами, а также с решениями, полученными с помощью МКЭ.

Существенно меньше опубликовано работ по исследованию динамической устойчивости и нелинейных колебаний оболочечных конструкций, подкрепленных ребрами жесткости [67, 107, 189, 190, 240, 270, 278].

Большинство публикаций в рассматриваемой области относятся к работам, рассматривающим процесс деформирования изотропных конструкций [54, 160, 230, 239, 240, 243, 248], а расчеты оболочек из ортотропных [2, 197, 239, 272, 297] и функционально-градиентных [175, 188, 189, 197, 220, 274] материалов стали появляться сравнительно недавно в связи с появлением новых перспективных материалов.

Kiani Y. и др. [220] исследуют пологие оболочки двоякой кривизны при динамическом нагружении, выполненные из функционально-градиентного материала (FGM). Изменение свойств материала по толщине вычисляется с использованием степенной функции. На основе модифицированной теории оболочек Сандерса в сочетании с теорией первого порядка (FSDT) выводится выражение для полной энергии деформации системы.

Sirivolu D. и Hoo Fatt M. S. [272] исследуют процесс потери устойчивости защемленной оболочки двоякой кривизны. Вид нагружения – динамическая импульсная нагрузка. Используется теория нелинейных оболочек Новожилова и уравнения движения Лагранжа. Показано, что значение критической нагрузки можно повысить, уменьшив радиус кривизны оболочки.

По виду прикладываемой механической динамической нагрузки, можно выделить осевое сжатие [53, 175, 185, 186, 189, 243, 248, 274], равномерно распределенную [174, 189, 250], а также сосредоточенную [230, 237] нагрузку.

Математические модели деформирования конструкций на основе функционала энергии деформации использовались в работах [2, 161, 220, 228, 239, 272, 280], а на основе уравнений в смешанной форме – [53, 89, 144, 170, 175, 186, 224, 274].

Современное состояние рассматриваемой проблемы можно найти в обширных обзорных статьях [2, 83, 163, 166, 225, 228, 239, 241, 253, 262].

F. Alijani и M. Amabili [163] отмечается, что исследования оболочечных конструкций, сделанных из современных материалов, все еще очень далеки от своей полноты. Исследования же конических оболочек и панелей с учетом геометрической нелинейности, выполненных из изотропных материалов, все еще находятся в начальной стадии и будут развиваться в ближайшем будущем.

В данной главе, как и в задачах статики, будем рассматривать ортотропные оболочечные конструкции произвольного вида толщиной h , находящиеся под действием внешней механической нагрузки, только в данном случае нагрузка будет зависеть также и от времени, то есть $P_x = P_x(x, y, t)$, $P_y = P_y(x, y, t)$, $q = q(x, y, t)$.

Срединную поверхность оболочки примем за координатную поверхность. Оси x, y направим по линиям главных кривизн, ось z – по нормали к срединной поверхности в сторону вогнутости.

Функционал энергии деформации тонкостенной оболочки при динамическом нагружении имеет следующий вид:

$$I = \int_{t_0}^{t_1} (E_k - E_s) dt, \quad (5.1)$$

где E_k – кинетическая энергия деформации системы; $E_s = E_p - A$ – разность потенциальной энергии деформации системы и работы внешних сил, соответствующая функционалу (1.26) или (2.2) – (2.4); t – время.

Далее рассмотрим три варианта математической модели деформирования рассматриваемых конструкций: в виде системы уравнений в частных производных относительно усилий и моментов; в виде системы ОДУ относительно искомых функций перемещений; в виде уравнений в смешанной форме. Перед этим получим варианты выражений для кинетической энергии, а также введем дополнительные безразмерные параметры.

5.1 КИНЕТИЧЕСКАЯ И ПОТЕНЦИАЛЬНАЯ ЭНЕРГИИ ОБОЛОЧКИ

5.1.1 Модель Кирхгофа – Лява

Для математической модели деформирования оболочек Кирхгофа – Лява считается справедливой гипотеза прямой нормали. В таком случае, инерция вращения отсутствует [36], и кинетическую энергию деформации оболочки постоянной толщины можно записать в виде [36, 67]

$$E_k = \frac{\rho}{2} \int_{a_1}^a \int_0^b \int_{-h/2}^{h/2} \left[\left(\frac{\partial U}{\partial t} \right)^2 + \left(\frac{\partial V}{\partial t} \right)^2 + \left(\frac{\partial W}{\partial t} \right)^2 \right] AB dx dy dz, \quad (5.2)$$

где ρ – плотность материала.

После интегрирования в выражении (5.2) по переменной z , получим выражение для кинетической энергии

$$E_k = \frac{\rho}{2} \int_{a_1}^a \int_0^b \left\{ h \left[\left(\frac{\partial U}{\partial t} \right)^2 + \left(\frac{\partial V}{\partial t} \right)^2 + \left(\frac{\partial W}{\partial t} \right)^2 \right] \right\} AB dx dy. \quad (5.3)$$

В том случае, если оболочка подкреплена ребрами, или же ослаблена сквозными вырезами, кинетическая энергия деформации запишется следующим образом [36, 67] (изменился предел интегрирования путем добавления функции H в соответствии с (2.10))

$$E_k = \frac{\rho}{2} \int_{a_1}^a \int_0^b \int_{-h/2}^{h/2+H} \left[\left(\frac{\partial U}{\partial t} \right)^2 + \left(\frac{\partial V}{\partial t} \right)^2 + \left(\frac{\partial W}{\partial t} \right)^2 \right] AB dx dy dz. \quad (5.4)$$

После интегрирования в выражении (5.4) по переменной z , получим выражение для кинетической энергии

$$E_k = \frac{\rho}{2} \int_{a_1}^a \int_0^b \left\{ (h + \bar{F}) \left[\left(\frac{\partial U}{\partial t} \right)^2 + \left(\frac{\partial V}{\partial t} \right)^2 + \left(\frac{\partial W}{\partial t} \right)^2 \right] \right\} AB dx dy, \quad (5.5)$$

которое, по аналогии с задачами статики, можно разделить на две части – составляющие для обшивки и для ребер:

$$E_k = E_k^0 + E_k^R, \quad (5.6)$$

где

$$E_k^0 = \frac{\rho}{2} \int_{a_1}^a \int_0^b \left\{ h \left[\left(\frac{\partial U}{\partial t} \right)^2 + \left(\frac{\partial V}{\partial t} \right)^2 + \left(\frac{\partial W}{\partial t} \right)^2 \right] \right\} AB dx dy, \quad (5.7)$$

$$E_k^R = \frac{\rho}{2} \int_{a_1}^a \int_0^b \left\{ \bar{F} \left[\left(\frac{\partial U}{\partial t} \right)^2 + \left(\frac{\partial V}{\partial t} \right)^2 + \left(\frac{\partial W}{\partial t} \right)^2 \right] \right\} AB dx dy.$$

В зависимости от метода учета ребер жесткости, $\bar{F}$ может принимать различный вид, например, (2.11), (2.25), (2.42) или (2.44). Однако, следует отметить, что в данном случае, исходя из физического смысла задачи, уточняющие коэффициенты вводить не нужно.

Выражение для E_s соответствует функционалу статической задачи (2.2) – (2.4), и будет

$$E_s = E_s^0 + E_p^R, \quad (5.8)$$

где

$$\begin{aligned} E_s^0 = \frac{1}{2} \int_{a_1}^a \int_0^b \left\{ N_x^0 \epsilon_x + N_y^0 \epsilon_y + \frac{1}{2} (N_{xy}^0 + N_{yx}^0) \gamma_{xy} + M_x^0 \chi_1 + M_y^0 \chi_2 + \right. \\ \left. + (M_{xy}^0 + M_{yx}^0) \chi_{12} - 2(P_x U + P_y V + qW) \right\} AB dx dy, \\ E_p^R = \frac{1}{2} \int_{a_1}^a \int_0^b \left\{ N_x^R \epsilon_x + N_y^R \epsilon_y + \frac{1}{2} (N_{xy}^R + N_{yx}^R) \gamma_{xy} + M_x^R \chi_1 + M_y^R \chi_2 + \right. \\ \left. + (M_{xy}^R + M_{yx}^R) \chi_{12} \right\} AB dx dy. \end{aligned} \quad (5.9)$$

5.1.2 Модель Тимошенко – Рейсснера

Для математической модели деформирования оболочек Тимошенко – Рейсснера учитывается наличие поперечных сдвигов, что позволяет также учесть инерцию вращения [36]. В таком случае, для оболочки постоянной толщины кинетическая энергия будет записана в виде [36, 64, 67]

$$E_k = \frac{\rho}{2} \int_{a_1}^a \int_0^b \int_{-h/2}^{h/2} \left[\left(\frac{\partial U^z}{\partial t} \right)^2 + \left(\frac{\partial V^z}{\partial t} \right)^2 + \left(\frac{\partial W^z}{\partial t} \right)^2 \right] AB dx dy dz, \quad (5.10)$$

и после интегрирования по переменной z , с учетом (1.7), получим

$$E_k = \frac{\rho}{2} \int_{a_1}^a \int_0^b \left\{ h \left[\left(\frac{\partial U}{\partial t} \right)^2 + \left(\frac{\partial V}{\partial t} \right)^2 + \left(\frac{\partial W}{\partial t} \right)^2 \right] + \frac{h^3}{12} \left[\left(\frac{\partial \Psi_x}{\partial t} \right)^2 + \left(\frac{\partial \Psi_y}{\partial t} \right)^2 \right] \right\} AB dx dy. \quad (5.11)$$

Для оболочечных конструкций переменной толщины (при наличии ребер жесткости) имеем

$$E_k = \frac{\rho}{2} \int_{a_1}^a \int_0^b \int_{-h/2}^{h/2+H} \left[\left(\frac{\partial U^z}{\partial t} \right)^2 + \left(\frac{\partial V^z}{\partial t} \right)^2 + \left(\frac{\partial W^z}{\partial t} \right)^2 \right] AB dx dy dz, \quad (5.12)$$

и после интегрирования (5.12) по переменной z , с учетом (1.7), получим

$$E_k = \frac{\rho}{2} \int_{a_1}^a \int_0^b \left\{ (h + \bar{F}) \left[\left(\frac{\partial U}{\partial t} \right)^2 + \left(\frac{\partial V}{\partial t} \right)^2 + \left(\frac{\partial W}{\partial t} \right)^2 \right] + 2\bar{S} \left[\frac{\partial U}{\partial t} \frac{\partial \Psi_x}{\partial t} + \frac{\partial V}{\partial t} \frac{\partial \Psi_y}{\partial t} \right] + \right. \\ \left. + \left(\frac{h^3}{12} + \bar{J} \right) \left[\left(\frac{\partial \Psi_x}{\partial t} \right)^2 + \left(\frac{\partial \Psi_y}{\partial t} \right)^2 \right] \right\} AB dx dy. \quad (5.13)$$

Или,

$$E_k = E_k^0 + E_k^R, \quad (5.14)$$

где

$$E_k^0 = \frac{\rho}{2} \int_{a_1}^a \int_0^b \left\{ h \left[\left(\frac{\partial U}{\partial t} \right)^2 + \left(\frac{\partial V}{\partial t} \right)^2 + \left(\frac{\partial W}{\partial t} \right)^2 \right] + \frac{h^3}{12} \left[\left(\frac{\partial \Psi_x}{\partial t} \right)^2 + \left(\frac{\partial \Psi_y}{\partial t} \right)^2 \right] \right\} AB dx dy, \quad (5.15)$$

$$E_k^R = \frac{\rho}{2} \int_{a_1}^a \int_0^b \left\{ \bar{F} \left[\left(\frac{\partial U}{\partial t} \right)^2 + \left(\frac{\partial V}{\partial t} \right)^2 + \left(\frac{\partial W}{\partial t} \right)^2 \right] + 2\bar{S} \left[\frac{\partial U}{\partial t} \frac{\partial \Psi_x}{\partial t} + \frac{\partial V}{\partial t} \frac{\partial \Psi_y}{\partial t} \right] + \right. \\ \left. + \bar{J} \left[\left(\frac{\partial \Psi_x}{\partial t} \right)^2 + \left(\frac{\partial \Psi_y}{\partial t} \right)^2 \right] \right\} AB dx dy.$$

В случае использования модели Тимошенко – Рейсснера, функционал статической задачи $E_s = E_p - A$, равный разности потенциальной энергии

деформации системы и работы внешних сил, для оболочки постоянной толщины будет равен (1.26). А для оболочечных конструкций переменной толщины (при наличии ребер жесткости или сквозных вырезов), аналогично, имеем (2.2) – (2.4). Для удобства изложения, запишем его здесь еще раз:

$$E_s = E_s^0 + E_p^R = E_p^0 + E_p^R - A, \quad (5.16)$$

где E_p^R формируется в зависимости от способа задания ребер жесткости, и в общем виде будет

$$E_p^R = \frac{1}{2} \int_{a_1}^a \int_0^b \left[N_x^R \varepsilon_x + N_y^R \varepsilon_y + \frac{1}{2} (N_{xy}^R + N_{yx}^R) \gamma_{xy} + M_x^R \chi_1 + M_y^R \chi_2 + (M_{xy}^R + M_{yx}^R) \chi_{12} + \right. \\ \left. + Q_x^R (\Psi_x - \theta_1) + Q_y^R (\Psi_y - \theta_2) \right] AB dx dy, \quad (5.17)$$

а часть функционала, имеющая отношение к обшивке, будет

$$E_s^0 = \frac{1}{2} \int_{a_1}^a \int_0^b \left[N_x^0 \varepsilon_x + N_y^0 \varepsilon_y + \frac{1}{2} (N_{xy}^0 + N_{yx}^0) \gamma_{xy} + M_x^0 \chi_1 + M_y^0 \chi_2 + (M_{xy}^0 + M_{yx}^0) \chi_{12} + \right. \\ \left. + Q_x^0 (\Psi_x - \theta_1) + Q_y^0 (\Psi_y - \theta_2) - 2(P_x U + P_y V + qW) \right] AB dx dy. \quad (5.18)$$

Поскольку в выражениях для функционалов, а также в выражениях для усилий и моментов, легко перейти от подкрепленных оболочек к оболочкам постоянной толщины, приняв $\bar{F} = 0$, $\bar{S} = 0$, $\bar{J} = 0$, то далее будем рассматривать математическую модель только для подкрепленных оболочек.

5.2 БЕЗРАЗМЕРНЫЕ ПАРАМЕТРЫ В ЗАДАЧАХ ДИНАМИКИ

Вначале перейдем в функционале (5.1) к безразмерным параметрам

$$\xi = \frac{x - a_1}{a - a_1}, \quad \eta = \frac{y}{b}, \quad \bar{\lambda} = \frac{aA}{bB}, \quad k_\xi = hk_x, \quad k_\eta = hk_y, \\ \bar{U} = \frac{aUA}{h^2}, \quad \bar{V} = \frac{bVB}{h^2}, \quad \bar{W} = \frac{W}{h}, \quad \bar{F}_p = \frac{F_p}{h}, \quad (5.19) \\ \bar{t} = \frac{h}{a^2 A^2} \sqrt{\frac{E_1}{(1 - \mu_{12}\mu_{21})\rho}} \cdot t, \quad \bar{P} = \frac{a^4 A^4 q}{h^4 E_1}, \quad \bar{A} = \frac{aA}{h}, \quad \bar{B} = \frac{bB}{h}, \quad \bar{z} = \frac{z}{h}.$$

В результате получим

$$\bar{I} = \int_{\bar{t}_0}^{\bar{t}_1} (\bar{E}_k - \bar{E}_s) d\bar{t}, \quad (5.20)$$

где

$$\bar{E}_k = \frac{2(1 - \mu_{12}\mu_{21})a^4 A^4}{E_1 h^7} E_k, \quad \bar{E}_s = \frac{2(1 - \mu_{12}\mu_{21})a^4 A^4}{E_1 h^7} E_s, \quad (5.21)$$

притом для модели Кирхгофа – Лява

$$\bar{E}_k = \frac{1}{\bar{A}^2} \int_0^1 \int_0^1 \left\{ (1 + \bar{F}) \left[\left(\frac{\partial \bar{U}}{\partial \bar{t}} \right)^2 + \bar{\lambda}^2 \left(\frac{\partial \bar{V}}{\partial \bar{t}} \right)^2 + \bar{A}^2 \left(\frac{\partial \bar{W}}{\partial \bar{t}} \right)^2 \right] \right\} \bar{A} \bar{B} d\xi d\eta \quad (5.22)$$

или

$$\bar{E}_k = \bar{E}_k^0 + \bar{E}_k^R, \quad (5.23)$$

где

$$\bar{E}_k^0 = \frac{1}{\bar{A}^2} \int_0^1 \int_0^1 \left\{ \left(\frac{\partial \bar{U}}{\partial \bar{t}} \right)^2 + \bar{\lambda}^2 \left(\frac{\partial \bar{V}}{\partial \bar{t}} \right)^2 + \bar{A}^2 \left(\frac{\partial \bar{W}}{\partial \bar{t}} \right)^2 \right\} \bar{A} \bar{B} d\xi d\eta, \quad (5.24)$$

$$\bar{E}_k^R = \frac{1}{\bar{A}^2} \int_0^1 \int_0^1 \left\{ \bar{F} \left[\left(\frac{\partial \bar{U}}{\partial \bar{t}} \right)^2 + \bar{\lambda}^2 \left(\frac{\partial \bar{V}}{\partial \bar{t}} \right)^2 + \bar{A}^2 \left(\frac{\partial \bar{W}}{\partial \bar{t}} \right)^2 \right] \right\} \bar{A} \bar{B} d\xi d\eta.$$

А для модели Тимошенко – Рейсснера

$$\begin{aligned} \bar{E}_k = & \frac{1}{\bar{A}^2} \int_0^1 \int_0^1 \left\{ (1 + \bar{F}) \left[\left(\frac{\partial \bar{U}}{\partial \bar{t}} \right)^2 + \bar{\lambda}^2 \left(\frac{\partial \bar{V}}{\partial \bar{t}} \right)^2 + \bar{A}^2 \left(\frac{\partial \bar{W}}{\partial \bar{t}} \right)^2 \right] + \right. \\ & + 2\bar{S} \left[\frac{\partial \bar{U}}{\partial \bar{t}} \frac{\partial \bar{\Psi}_x}{\partial \bar{t}} + \bar{\lambda}^2 \frac{\partial \bar{V}}{\partial \bar{t}} \frac{\partial \bar{\Psi}_y}{\partial \bar{t}} \right] + \\ & \left. + \left(\frac{1}{12} + \bar{J} \right) \left[\left(\frac{\partial \bar{\Psi}_x}{\partial \bar{t}} \right)^2 + \bar{\lambda}^2 \left(\frac{\partial \bar{\Psi}_y}{\partial \bar{t}} \right)^2 \right] \right\} \bar{A} \bar{B} d\xi d\eta \end{aligned} \quad (5.25)$$

или

$$\bar{E}_k = \bar{E}_k^0 + \bar{E}_k^R, \quad (5.26)$$

где

$$\begin{aligned}
\bar{E}_k^0 &= \frac{1}{\bar{A}^2} \int_0^1 \int_0^1 \left\{ \left(\frac{\partial \bar{U}}{\partial \bar{t}} \right)^2 + \bar{\lambda}^2 \left(\frac{\partial \bar{V}}{\partial \bar{t}} \right)^2 + \bar{A}^2 \left(\frac{\partial \bar{W}}{\partial \bar{t}} \right)^2 + \frac{1}{12} \left[\left(\frac{\partial \bar{\Psi}_x}{\partial \bar{t}} \right)^2 + \bar{\lambda}^2 \left(\frac{\partial \bar{\Psi}_y}{\partial \bar{t}} \right)^2 \right] \right\} \bar{A} \bar{B} d\xi d\eta, \\
\bar{E}_k^R &= \frac{1}{\bar{A}^2} \int_0^1 \int_0^1 \left\{ \bar{F} \left[\left(\frac{\partial \bar{U}}{\partial \bar{t}} \right)^2 + \bar{\lambda}^2 \left(\frac{\partial \bar{V}}{\partial \bar{t}} \right)^2 + \bar{A}^2 \left(\frac{\partial \bar{W}}{\partial \bar{t}} \right)^2 \right] + \right. \\
&\quad \left. + 2\bar{S} \left[\frac{\partial \bar{U}}{\partial \bar{t}} \frac{\partial \bar{\Psi}_x}{\partial \bar{t}} + \bar{\lambda}^2 \frac{\partial \bar{V}}{\partial \bar{t}} \frac{\partial \bar{\Psi}_y}{\partial \bar{t}} \right] + \bar{J} \left[\left(\frac{\partial \bar{\Psi}_x}{\partial \bar{t}} \right)^2 + \bar{\lambda}^2 \left(\frac{\partial \bar{\Psi}_y}{\partial \bar{t}} \right)^2 \right] \right\} \bar{A} \bar{B} d\xi d\eta.
\end{aligned} \tag{5.27}$$

Безразмерные выражения для функционала статической задачи берутся в соответствии с (2.98).

5.3 МОДЕЛЬ 1. УРАВНЕНИЯ ДВИЖЕНИЯ ОТНОСИТЕЛЬНО УСИЛИЙ И МОМЕНТОВ

5.3.1 Модель Кирхгофа – Лява

Так как поведение системы на отрезке времени $[t_0, t_1]$ должно удовлетворять условию [36]

$$\delta \int_{t_0}^{t_1} (E_k - E_p + A) dt = 0, \tag{5.28}$$

будем искать первую вариацию от функционала (5.1) и далее приравняем ее к нулю.

Вначале найдем вариацию от кинетической энергии (5.5)

$$\delta \int_{t_0}^{t_1} E_k dt = \frac{\rho}{2} \int_{t_0}^{t_1} \int_0^a \int_0^b \left\{ (h + \bar{F}) \left[2 \frac{\partial U}{\partial t} \delta \left(\frac{\partial U}{\partial t} \right) + 2 \frac{\partial V}{\partial t} \delta \left(\frac{\partial V}{\partial t} \right) + 2 \frac{\partial W}{\partial t} \delta \left(\frac{\partial W}{\partial t} \right) \right] \right\} \bar{A} \bar{B} dx dy dt.$$

Требуется выполнить преобразование полученного выражения, чтобы под знаком интеграла по переменной t не осталось вариаций от производных по времени от искомых функций $U(x, y, t), V(x, y, t), W(x, y, t)$. Для этого воспользуемся формулой интегрирования по частям, и в результате получим

$$\begin{aligned} \delta \int_{t_0}^{t_1} E_k dt = & -\rho \int_{t_0}^{t_1} \int_{a_1}^a \int_0^b \left\{ (h + \bar{F}) \left[\frac{\partial^2 U}{\partial t^2} \delta U + \frac{\partial^2 V}{\partial t^2} \delta V + \frac{\partial^2 W}{\partial t^2} \delta W \right] \right\} AB dx dy dt + \\ & + \rho \int_{a_1}^a \int_0^b \left\{ (h + \bar{F}) \left[\frac{\partial U}{\partial t} \delta U + \frac{\partial V}{\partial t} \delta V + \frac{\partial W}{\partial t} \delta W \right] \right\} \Big|_{t=t_0}^{t=t_1} AB dx dy. \end{aligned} \quad (5.29)$$

Второе слагаемое в этом равенстве позволяет формировать начальные условия по переменной t , а именно – в начальный момент времени или все искомые функции равны нулю, или первые производные от этих функций равны нулю (равны нулю скорости изменения этих функций).

Первое слагаемое в полученном выражении, из которого будут сформированы уравнения движения (а точнее, инерционные члены этих уравнений), можно привести к виду

$$-\rho \int_{t_0}^{t_1} \int_{a_1}^a \int_0^b \left\{ (h + \bar{F}) \frac{\partial^2 U}{\partial t^2} \delta U + (h + \bar{F}) \frac{\partial^2 V}{\partial t^2} \delta V + (h + \bar{F}) \frac{\partial^2 W}{\partial t^2} \delta W \right\} AB dx dy dt.$$

Так как в выражении функционала статики E_s нет производных от искомых функций по переменной t , поэтому $\delta \int_{t_0}^{t_1} E_s dt = \int_{t_0}^{t_1} \delta E_s dt$. Функционал E_s имеет вид

[67]

$$\begin{aligned} E_s = & \frac{1}{2} \int_{a_1}^a \int_0^b \left\{ N_x \varepsilon_x + N_y \varepsilon_y + \frac{1}{2} (N_{xy} + N_{yx}) \gamma_{xy} + M_x \chi_1 + M_y \chi_2 + \right. \\ & \left. + (M_{xy} + M_{yx}) \chi_{12} - 2(P_x U + P_y V + qW) \right\} AB dx dy. \end{aligned} \quad (5.30)$$

Считая $P_x = P_y = 0$, найдем первую вариацию этого функционала и приравняем ее к нулю. Затем проведем известное преобразование, чтобы под знаком вариации не было производных от функций перемещений. В результате получим

$$-\int_{a_1}^a \int_0^b \left\{ \left[\frac{\partial B N_x}{\partial x} - N_y \frac{\partial B}{\partial x} + \frac{\partial A N_{xy}}{\partial y} + \frac{\partial A}{\partial y} N_{xy} \right] \delta U + \left[\frac{\partial A N_y}{\partial y} + \frac{\partial B N_{xy}}{\partial x} + N_{xy} \frac{\partial B}{\partial x} - \frac{\partial A}{\partial y} N_x \right] \delta V + \right.$$

$$\begin{aligned}
& + \left[AB(k_x N_x + k_y N_y) + \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{B}{A} \frac{\partial W}{\partial x} N_x \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{A}{B} \frac{\partial W}{\partial y} N_y \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\partial W}{\partial x} N_{xy} \right) + \right. \\
& + \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial W}{\partial y} N_{xy} \right) + \frac{\partial^2}{\partial x^2} \left(\frac{B}{A} M_x \right) + \frac{\partial^2}{\partial y^2} \left(\frac{A}{B} M_y \right) + 2 \frac{\partial^2 M_{xy}}{\partial x \partial y} - \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{1}{A} \frac{\partial B}{\partial x} M_y \right) - \\
& \quad \left. - \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{1}{B} \frac{\partial A}{\partial y} M_x \right) + ABq \right] \delta W \Bigg\} dx dy + \\
& + \int_{a_1}^a \left\{ AN_{xy} \delta U + AN_y \delta V + \left[\frac{A}{B} \frac{\partial W}{\partial y} N_y + \frac{\partial W}{\partial x} N_{xy} - \frac{1}{B} \frac{\partial A}{\partial y} M_x + \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{A}{B} M_y \right) + \frac{\partial M_{xy}}{\partial x} \right] \delta W - \right. \\
& \quad \left. - M_{xy} \delta \left(\frac{\partial W}{\partial x} \right) - \frac{A}{B} M_y \delta \left(\frac{\partial W}{\partial y} \right) \right\} \Bigg|_{y=0}^{y=b} dx + \\
& + \int_0^b \left\{ BN_x \delta U + BN_{xy} \delta V + \left[\frac{B}{A} \frac{\partial W}{\partial x} N_x + \frac{\partial W}{\partial y} N_{xy} - \frac{1}{A} \frac{\partial B}{\partial x} M_y + \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{B}{A} M_x \right) + \frac{\partial M_{xy}}{\partial y} \right] \delta W - \right. \\
& \quad \left. - \frac{B}{A} M_x \delta \left(\frac{\partial W}{\partial x} \right) - M_{xy} \delta \left(\frac{\partial W}{\partial y} \right) \right\} \Bigg|_{x=a_1}^{x=a} dy = 0.
\end{aligned}$$

Таким образом, уравнения движения для модели с учетом гипотез Кирхгофа – Лява принимают вид

$$\begin{aligned}
& \underline{\rho \left[(h + \bar{F}) \frac{\partial^2 U}{\partial t^2} \right]_{AB}} = \frac{\partial B N_x}{\partial x} - N_y \frac{\partial B}{\partial x} + \frac{\partial A}{\partial y} N_{xy} + \frac{\partial A N_{xy}}{\partial y}, \\
& \underline{\rho \left[(h + \bar{F}) \frac{\partial^2 V}{\partial t^2} \right]_{AB}} = \frac{\partial A N_y}{\partial y} + \frac{\partial B N_{xy}}{\partial x} + N_{xy} \frac{\partial B}{\partial x} - \frac{\partial A}{\partial y} N_x, \quad (5.31) \\
& \underline{\rho (h + \bar{F}) \frac{\partial^2 W}{\partial t^2} AB} = AB(k_x N_x + k_y N_y) + \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{B}{A} \frac{\partial W}{\partial x} N_x \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{A}{B} \frac{\partial W}{\partial y} N_y \right) + \\
& + \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\partial W}{\partial x} N_{xy} \right) + \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial W}{\partial y} N_{xy} \right) + \frac{\partial^2}{\partial x^2} \left(\frac{B}{A} M_x \right) + \frac{\partial^2}{\partial y^2} \left(\frac{A}{B} M_y \right) + \\
& + 2 \frac{\partial^2 M_{xy}}{\partial x \partial y} - \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{1}{A} \frac{\partial B}{\partial x} M_y \right) - \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{1}{B} \frac{\partial A}{\partial y} M_x \right) + ABq.
\end{aligned}$$

Подчеркнутые члены в системе (5.31) являются инерционными членами.

Система (5.31) – это система дифференциальных уравнений в частных производных. Решение такой системы вызывает определенные математические сложности.

5.3.2 Модель Тимошенко – Рейсснера

Будем искать первую вариацию от функционала (5.1) и далее приравняем ее к нулю, но уже с учетом того, что рассматривается модель Тимошенко – Рейсснера.

Найдем вначале вариацию от выражения для кинетической энергии (5.11)

$$\begin{aligned} \delta \int_{t_0}^{t_1} E_k dt = & \frac{\rho}{2} \delta \int_{t_0}^{t_1} \int_{a_1}^a \int_0^b \left\{ (h + \bar{F}) \left[2 \frac{\partial U}{\partial t} \delta \left(\frac{\partial U}{\partial t} \right) + 2 \frac{\partial V}{\partial t} \delta \left(\frac{\partial V}{\partial t} \right) + 2 \frac{\partial W}{\partial t} \delta \left(\frac{\partial W}{\partial t} \right) \right] + \right. \\ & + 2 \bar{S} \left[\frac{\partial U}{\partial t} \delta \left(\frac{\partial \Psi_x}{\partial t} \right) + \frac{\partial \Psi_x}{\partial t} \delta \left(\frac{\partial U}{\partial t} \right) + \frac{\partial V}{\partial t} \delta \left(\frac{\partial \Psi_y}{\partial t} \right) + \frac{\partial \Psi_y}{\partial t} \delta \left(\frac{\partial V}{\partial t} \right) \right] + \\ & \left. + \left(\frac{h^3}{12} + \bar{J} \right) \left[2 \frac{\partial \Psi_x}{\partial t} \delta \left(\frac{\partial \Psi_x}{\partial t} \right) + 2 \frac{\partial \Psi_y}{\partial t} \delta \left(\frac{\partial \Psi_y}{\partial t} \right) \right] \right\} AB dx dy dt. \end{aligned}$$

По аналогии с преобразованием, выполненным для модели Кирхгофа – Лява, здесь также применим интегрирование по частям. В результате, под знаком интеграла по переменной t не останется вариаций от производных по времени от искомых функций $U(x, y, t), V(x, y, t), W(x, y, t), \Psi_x(x, y, t), \Psi_y(x, y, t)$:

$$\begin{aligned} \delta \int_{t_0}^{t_1} E_k dt = & -\rho \int_{t_0}^{t_1} \int_{a_1}^a \int_0^b \left\{ (h + \bar{F}) \left[\frac{\partial^2 U}{\partial t^2} \delta U + \frac{\partial^2 V}{\partial t^2} \delta V + \frac{\partial^2 W}{\partial t^2} \delta W \right] + \right. \\ & + \bar{S} \left[\frac{\partial^2 U}{\partial t^2} \delta \Psi_x + \frac{\partial^2 \Psi_x}{\partial t^2} \delta U + \frac{\partial^2 V}{\partial t^2} \delta \Psi_y + \frac{\partial^2 \Psi_y}{\partial t^2} \delta V \right] + \\ & \left. + \left(\frac{h^3}{12} + \bar{J} \right) \left[\frac{\partial^2 \Psi_x}{\partial t^2} \delta \Psi_x + \frac{\partial^2 \Psi_y}{\partial t^2} \delta \Psi_y \right] \right\} AB dx dy dt + \\ & + \rho \int_{a_1}^a \int_0^b \left\{ (h + \bar{F}) \left[\frac{\partial U}{\partial t} \delta U + \frac{\partial V}{\partial t} \delta V + \frac{\partial W}{\partial t} \delta W \right] + \right. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& + \bar{S} \left[\frac{\partial U}{\partial t} \delta \Psi_x + \frac{\partial \Psi_x}{\partial t} \delta U + \frac{\partial V}{\partial t} \delta \Psi_y + \frac{\partial \Psi_y}{\partial t} \delta V \right] + \\
& + \left(\frac{h^3}{12} + \bar{J} \right) \left[\frac{\partial \Psi_x}{\partial t} \delta \Psi_x + \frac{\partial \Psi_y}{\partial t} \delta \Psi_y \right] \Bigg|_{t=t_0}^{t=t_1} AB dx dy. \quad (5.32)
\end{aligned}$$

Второе слагаемое в этом равенстве, которое можно записать в виде

$$\begin{aligned}
& \rho \int_{a_1}^a \int_0^b \left\{ \left[(h + \bar{F}) \frac{\partial U}{\partial t} + \bar{S} \frac{\partial \Psi_x}{\partial t} \right] \delta U + \left[(h + \bar{F}) \frac{\partial V}{\partial t} + \bar{S} \frac{\partial \Psi_y}{\partial t} \right] \delta V + \right. \\
& + (h + \bar{F}) \frac{\partial W}{\partial t} \delta W + \left[\bar{S} \frac{\partial U}{\partial t} + \left(\frac{h^3}{12} + \bar{J} \right) \frac{\partial \Psi_x}{\partial t} \right] \delta \Psi_x + \\
& \left. + \left[\bar{S} \frac{\partial V}{\partial t} + \left(\frac{h^3}{12} + \bar{J} \right) \frac{\partial \Psi_y}{\partial t} \right] \delta \Psi_y \right\} \Bigg|_{t=t_0}^{t=t_1} AB dx dy,
\end{aligned}$$

позволяет формировать начальные условия по переменной t , а именно – в начальный момент времени или все искомые функции равны нулю, или первые производные от этих функций равны нулю (равны нулю скорости изменения этих функций).

Первое слагаемое в (5.32), которое представляет собой выражение, стоящее под знаком интеграла по переменной t , и из которого будут сформированы уравнения движения (а точнее инерционные члены этих уравнений), приведя подобные члены, можно привести к виду

$$\begin{aligned}
& -\rho \int_{t_0}^{t_1} \int_{a_1}^a \int_0^b \left\{ \left[(h + \bar{F}) \frac{\partial^2 U}{\partial t^2} + \bar{S} \frac{\partial^2 \Psi_x}{\partial t^2} \right] \delta U + \left[(h + \bar{F}) \frac{\partial^2 V}{\partial t^2} + \bar{S} \frac{\partial^2 \Psi_y}{\partial t^2} \right] \delta V + \right. \\
& + (h + \bar{F}) \frac{\partial^2 W}{\partial t^2} \delta W + \left[\bar{S} \frac{\partial^2 U}{\partial t^2} + \left(\frac{h^3}{12} + \bar{J} \right) \frac{\partial^2 \Psi_x}{\partial t^2} \right] \delta \Psi_x + \\
& \left. + \left[\bar{S} \frac{\partial^2 V}{\partial t^2} + \left(\frac{h^3}{12} + \bar{J} \right) \frac{\partial^2 \Psi_y}{\partial t^2} \right] \delta \Psi_y \right\} AB dx dy dt. \quad (5.33)
\end{aligned}$$

Теперь найдем $\delta \int_{t_0}^{t_1} E_s dt$, где E_s – функционал задачи статики (2.2):

$$E_s = \frac{1}{2} \int_{a_1}^a \int_0^b \left\{ N_x \varepsilon_x + N_y \varepsilon_y + \frac{1}{2} (N_{xy} + N_{yx}) \gamma_{xy} + M_x \chi_1 + M_y \chi_2 + \right. \quad (5.34)$$

$$\left. + (M_{xy} + M_{yx}) \chi_{12} + Q_x (\Psi_x - \theta_1) + Q_y (\Psi_y - \theta_2) - 2(P_x U + P_y V + qW) \right\} AB dx dy.$$

В выражении E_s нет производных функций перемещений по t , поэтому

$$\delta \int_{t_0}^{t_1} E_s dt = \int_{t_0}^{t_1} \delta E_s dt.$$

После взятии первой вариации и некоторых преобразований, получим

$$\begin{aligned} \frac{\partial B N_x}{\partial x} - N_y \frac{\partial B}{\partial x} + \frac{\partial A N_{xy}}{\partial y} + N_{xy} \frac{\partial A}{\partial y} - AB k_x Q_x + \underline{AB k_x (N_x \theta_1 + N_{xy} \theta_2)} + AB P_x &= 0, \\ \frac{\partial A N_y}{\partial y} - N_x \frac{\partial A}{\partial y} + \frac{\partial B N_{xy}}{\partial x} + N_{xy} \frac{\partial B}{\partial x} - AB k_y Q_y + \underline{AB k_y (N_y \theta_2 + N_{xy} \theta_1)} + AB P_y &= 0, \\ AB (k_x N_x + k_y N_y) - \underline{\frac{\partial}{\partial x} B (N_x \theta_1 + N_{xy} \theta_2)} - \underline{\frac{\partial}{\partial y} A (N_y \theta_2 + N_{xy} \theta_1)} + \\ + \frac{\partial B Q_x}{\partial x} + \frac{\partial A Q_y}{\partial y} + AB q &= 0, \end{aligned} \quad (5.35)$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial B M_x}{\partial x} - M_y \frac{\partial B}{\partial x} + \frac{\partial A M_{xy}}{\partial y} + M_{xy} \frac{\partial A}{\partial y} - AB Q_x &= 0, \\ \frac{\partial A M_y}{\partial y} - M_x \frac{\partial A}{\partial y} + \frac{\partial B M_{xy}}{\partial x} + M_{xy} \frac{\partial B}{\partial x} - AB Q_y &= 0. \end{aligned}$$

Подчеркнутыми слагаемыми в первых двух уравнениях можно пренебречь [71, 114].

Таким образом

$$\delta \int_{t_0}^{t_1} E_s dt = \int_{t_0}^{t_1} \left\{ \Pi_1 \delta U + \Pi_2 \delta V + \Pi_3 \delta W + \Pi_4 \delta \Psi_x + \Pi_5 \delta \Psi_y \right\} AB dt, \quad (5.36)$$

где $\Pi_1 - \Pi_5$ – левые части уравнений (5.35).

Следовательно, уравнения движения для подкрепленных ортотропных оболочек при учете поперечных сдвигов и инерции вращения примут вид

$$\begin{aligned}
\rho \left[(h + \bar{F}) \frac{\partial^2 U}{\partial t^2} + \bar{S} \frac{\partial^2 \Psi_x}{\partial t^2} \right] AB &= \frac{\partial B N_x}{\partial x} - N_y \frac{\partial B}{\partial x} + \frac{\partial A N_{xy}}{\partial y} + \\
&+ N_{xy} \frac{\partial A}{\partial y} - AB k_x Q_x + AB P_x, \\
\rho \left[(h + \bar{F}) \frac{\partial^2 V}{\partial t^2} + \bar{S} \frac{\partial^2 \Psi_y}{\partial t^2} \right] AB &= \frac{\partial A N_y}{\partial y} - N_x \frac{\partial A}{\partial y} + \frac{\partial B N_{xy}}{\partial x} + \\
&+ N_{xy} \frac{\partial B}{\partial x} - AB k_y Q_y + AB P_y,
\end{aligned} \tag{5.37}$$

$$\begin{aligned}
\rho (h + \bar{F}) \frac{\partial^2 W}{\partial t^2} AB &= AB (k_x N_x + k_y N_y) - \frac{\partial}{\partial x} B (N_x \theta_1 + N_{xy} \theta_2) - \\
&- \frac{\partial}{\partial y} A (N_y \theta_2 + N_{xy} \theta_1) + \frac{\partial B Q_x}{\partial x} + \frac{\partial A Q_y}{\partial y} + AB q, \\
\rho \left[\bar{S} \frac{\partial^2 U}{\partial t^2} + \left(\frac{h^3}{12} + \bar{J} \right) \frac{\partial^2 \Psi_x}{\partial t^2} \right] AB &= \frac{\partial B M_x}{\partial x} - M_y \frac{\partial B}{\partial x} + \frac{\partial A M_{xy}}{\partial y} + M_{xy} \frac{\partial A}{\partial y} - AB Q_x, \\
\rho \left[\bar{S} \frac{\partial^2 V}{\partial t^2} + \left(\frac{h^3}{12} + \bar{J} \right) \frac{\partial^2 \Psi_y}{\partial t^2} \right] AB &= \frac{\partial A M_y}{\partial y} - M_x \frac{\partial A}{\partial y} + \frac{\partial B M_{xy}}{\partial x} + M_{xy} \frac{\partial B}{\partial x} - AB Q_y.
\end{aligned}$$

Система (5.37) является системой дифференциальных уравнений в частных производных. В данной системе искомые функции зависят от трех переменных x , y , t . Решение этой системы должно вестись с учетом начальных и граничных условий, т.е. решается смешанная задача.

Решение таких задач вызывает определенные математические трудности. Поэтому в дальнейшем получим в качестве математической модели систему обыкновенных дифференциальных уравнений относительно функций, зависящих только от одного переменного t . Решение начальной задачи для таких систем не вызывает трудностей, так как можно использовать большое число известных эффективных численных методов.

5.4 МОДЕЛЬ 2. УРАВНЕНИЯ ДВИЖЕНИЯ В ВИДЕ НАЧАЛЬНОЙ ЗАДАЧИ ДЛЯ СИСТЕМЫ ОБЫКНОВЕННЫХ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ

5.4.1 Модель Кирхгофа – Лява

Далее, в качестве математической модели поучим начальную задачу для системы ОДУ, применив к функционалу полной энергии деформации оболочки метод Л. В. Канторовича [62] (метод сведения трехмерного функционала к одномерному).

Функционал $\bar{I}$ можно представить в виде

$$\bar{I} = \int_{\bar{t}_0}^{\bar{t}_1} \int_0^1 \int_0^1 \left[\Phi_1(\dot{\bar{U}}, \dot{\bar{V}}, \dot{\bar{W}}) - \Phi_2(\bar{U}, \bar{V}, \bar{W}) \right] \bar{A} \bar{B} d\xi d\eta d\bar{t}. \quad (5.38)$$

Здесь Φ_1 соответствует выражениям, стоящим под знаком интеграла в $\bar{E}_k$, Φ_2 – соответственно в $\bar{E}_s$. Точками обозначены производные по временной координате.

Согласно методу Л. В. Канторовича, неизвестные функции представим в виде

$$\begin{aligned} \bar{U} = \bar{U}(\xi, \eta, \bar{t}) &= \sum_{i=1}^{\sqrt{N}} \sum_{j=1}^{\sqrt{N}} \bar{U}_{ij}(\bar{t}) X_1^i Y_1^j, \quad \bar{V} = \bar{V}(\xi, \eta, \bar{t}) = \sum_{i=1}^{\sqrt{N}} \sum_{j=1}^{\sqrt{N}} \bar{V}_{ij}(\bar{t}) X_2^i Y_2^j, \\ \bar{W} = \bar{W}(\xi, \eta, \bar{t}) &= \sum_{i=1}^{\sqrt{N}} \sum_{j=1}^{\sqrt{N}} \bar{W}_{ij}(\bar{t}) X_3^i Y_3^j, \end{aligned} \quad (5.39)$$

где $\bar{U}_{ij}(\bar{t}) - \bar{W}_{ij}(\bar{t})$ – неизвестные функции переменной $\bar{t}$ (далее, для уменьшения громоздкости изложения, указание аргумента $(\bar{t})$ опустим), а все остальные функции известны.

Интегралы по переменным ξ, η вычислять пока не будем, а при дифференцировании выражений Φ_1, Φ_2 будем учитывать (5.39).

Возьмем вариацию функционала (5.38), таким образом условие его минимума будет иметь вид

$$\delta \bar{I} = \delta_U \bar{I} + \delta_V \bar{I} + \delta_W \bar{I} = 0,$$

то есть получим систему

$$\begin{aligned} \delta_U \bar{I} &= \sum_{i=1}^{\sqrt{N}} \sum_{j=1}^{\sqrt{N}} \int_{\bar{t}_0}^{\bar{t}_1} \int_0^1 \int_0^1 \left[\frac{\partial \Phi_1}{\partial \dot{\bar{U}}_{kl}} \delta \dot{\bar{U}}_{kl} - \frac{\partial \Phi_2}{\partial \bar{U}_{kl}} \delta \bar{U}_{kl} \right] \bar{A} \bar{B} d\xi d\eta d\bar{t} = 0, \\ \delta_V \bar{I} &= \sum_{i=1}^{\sqrt{N}} \sum_{j=1}^{\sqrt{N}} \int_{\bar{t}_0}^{\bar{t}_1} \int_0^1 \int_0^1 \left[\frac{\partial \Phi_1}{\partial \dot{\bar{V}}_{kl}} \delta \dot{\bar{V}}_{kl} - \frac{\partial \Phi_2}{\partial \bar{V}_{kl}} \delta \bar{V}_{kl} \right] \bar{A} \bar{B} d\xi d\eta d\bar{t} = 0, \\ \delta_W \bar{I} &= \sum_{i=1}^{\sqrt{N}} \sum_{j=1}^{\sqrt{N}} \int_{\bar{t}_0}^{\bar{t}_1} \int_0^1 \int_0^1 \left[\frac{\partial \Phi_1}{\partial \dot{\bar{W}}_{kl}} \delta \dot{\bar{W}}_{kl} - \frac{\partial \Phi_2}{\partial \bar{W}_{kl}} \delta \bar{W}_{kl} \right] \bar{A} \bar{B} d\xi d\eta d\bar{t} = 0, \\ k, l &= 1, 2, \dots, \sqrt{N}. \end{aligned} \quad (5.40)$$

В соотношениях (5.40) перед знаками интеграла выносятся знак суммы из использованных ранее выражений (5.39). Притом в Φ_1, Φ_2 присутствуют неизвестные функции и с индексами i, j , и с индексами k, l . В развернутом виде это будет показано ниже.

После проведения соответствующих преобразований (интегрирования по частям в первых членах каждого уравнения и вынесении, соответственно, $\delta \bar{U}_{kl}, \delta \bar{V}_{kl}, \delta \bar{W}_{kl}$ за скобки), получим уравнения движения

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^{\sqrt{N}} \sum_{j=1}^{\sqrt{N}} \int_{\bar{t}_0}^{\bar{t}_1} \int_0^1 \int_0^1 \left[\frac{d}{d\bar{t}} \left(\frac{\partial \Phi_1}{\partial \dot{\bar{U}}_{kl}} \right) + \frac{\partial \Phi_2}{\partial \bar{U}_{kl}} \right] \bar{A} \bar{B} d\xi d\eta &= 0, \\ \sum_{i=1}^{\sqrt{N}} \sum_{j=1}^{\sqrt{N}} \int_{\bar{t}_0}^{\bar{t}_1} \int_0^1 \int_0^1 \left[\frac{d}{d\bar{t}} \left(\frac{\partial \Phi_1}{\partial \dot{\bar{V}}_{kl}} \right) + \frac{\partial \Phi_2}{\partial \bar{V}_{kl}} \right] \bar{A} \bar{B} d\xi d\eta &= 0, \\ \sum_{i=1}^{\sqrt{N}} \sum_{j=1}^{\sqrt{N}} \int_{\bar{t}_0}^{\bar{t}_1} \int_0^1 \int_0^1 \left[\frac{d}{d\bar{t}} \left(\frac{\partial \Phi_1}{\partial \dot{\bar{W}}_{kl}} \right) + \frac{\partial \Phi_2}{\partial \bar{W}_{kl}} \right] \bar{A} \bar{B} d\xi d\eta &= 0, \\ k, l &= 1, 2, \dots, \sqrt{N}. \end{aligned}$$

Теперь в этих выражениях можно вычислить интегралы от известных аппроксимирующих функций по переменным ξ, η . Здесь $\sum_{i=1}^{\sqrt{N}} \sum_{j=1}^{\sqrt{N}} \int_0^1 \int_0^1 \left[\frac{\partial \Phi_2}{\partial \bar{U}_{kl}} \right] \bar{A} \bar{B} d\xi d\eta$, $\sum_{i=1}^{\sqrt{N}} \sum_{j=1}^{\sqrt{N}} \int_0^1 \int_0^1 \left[\frac{\partial \Phi_2}{\partial \bar{V}_{kl}} \right] \bar{A} \bar{B} d\xi d\eta$, $\sum_{i=1}^{\sqrt{N}} \sum_{j=1}^{\sqrt{N}} \int_0^1 \int_0^1 \left[\frac{\partial \Phi_2}{\partial \bar{W}_{kl}} \right] \bar{A} \bar{B} d\xi d\eta$ – это левые части уравнений статики, которые могут быть получены применением метода Ритца к функционалу $\bar{E}_s$:

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^{\sqrt{N}} \sum_{j=1}^{\sqrt{N}} \int_0^1 \int_0^1 \left[\frac{\partial \Phi_2}{\partial \bar{U}_{kl}} \right] \bar{A} \bar{B} d\xi d\eta &= \sum_{i=1}^{\sqrt{N}} \sum_{j=1}^{\sqrt{N}} \left[\bar{U}_{ij} C_1^{ijkl} + \bar{V}_{ij} C_2^{ijkl} + \bar{W}_{ij} C_3^{ijkl} \right] + \tilde{A}_1^l = 0, \\ \sum_{i=1}^{\sqrt{N}} \sum_{j=1}^{\sqrt{N}} \int_0^1 \int_0^1 \left[\frac{\partial \Phi_2}{\partial \bar{V}_{kl}} \right] \bar{A} \bar{B} d\xi d\eta &= \sum_{i=1}^{\sqrt{N}} \sum_{j=1}^{\sqrt{N}} \left[\bar{U}_{ij} C_6^{ijkl} + \bar{V}_{ij} C_7^{ijkl} + \bar{W}_{ij} C_8^{ijkl} \right] + \tilde{A}_2^l = 0, \\ \sum_{i=1}^{\sqrt{N}} \sum_{j=1}^{\sqrt{N}} \int_0^1 \int_0^1 \left[\frac{\partial \Phi_2}{\partial \bar{W}_{kl}} \right] \bar{A} \bar{B} d\xi d\eta &= \sum_{i=1}^{\sqrt{N}} \sum_{j=1}^{\sqrt{N}} \left[\bar{U}_{ij} C_{11}^{ijkl} + \bar{V}_{ij} C_{12}^{ijkl} + \bar{W}_{ij} C_{13}^{ijkl} \right] + \tilde{A}_3^l - C_p^l \bar{P} = 0, \\ k, l &= 1, 2, \dots, \sqrt{N}. \end{aligned} \quad (5.41)$$

Здесь $C_1, \dots, C_{13}, C_p$ – полученные числовые коэффициенты, $\tilde{A}_1^l - \tilde{A}_3^l$ – нелинейные члены уравнений.

Остальные члены уравнения (5.40) преобразуем следующим образом

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^{\sqrt{N}} \sum_{j=1}^{\sqrt{N}} \frac{\partial \Phi_1}{\partial \dot{\bar{U}}_{kl}} &= \frac{2}{\bar{A}^2} \left[\left(1 + \bar{\bar{F}} \right) \sum_{i=1}^{\sqrt{N}} \sum_{j=1}^{\sqrt{N}} \dot{\bar{U}}_{ij} X_1^i Y_1^j \right] \cdot X_1^k Y_1^l, \\ \sum_{i=1}^{\sqrt{N}} \sum_{j=1}^{\sqrt{N}} \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial \Phi_1}{\partial \dot{\bar{U}}_{kl}} \right) &= \frac{2}{\bar{A}^2} \left[\left(1 + \bar{\bar{F}} \right) \sum_{i=1}^{\sqrt{N}} \sum_{j=1}^{\sqrt{N}} \ddot{\bar{U}}_{ij} X_1^i Y_1^j \right] \cdot X_1^k Y_1^l, \\ \sum_{i=1}^{\sqrt{N}} \sum_{j=1}^{\sqrt{N}} \int_0^1 \int_0^1 \left[\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial \Phi_1}{\partial \dot{\bar{U}}_{kl}} \right) \right] \bar{A} \bar{B} d\xi d\eta &= \sum_{i=1}^{\sqrt{N}} \sum_{j=1}^{\sqrt{N}} \ddot{\bar{U}}_{ij} B_1^{ijkl}, \\ \sum_{i=1}^{\sqrt{N}} \sum_{j=1}^{\sqrt{N}} \frac{\partial \Phi_1}{\partial \dot{\bar{V}}_{kl}} &= \frac{2}{\bar{A}^2} \left[\left(1 + \bar{\bar{F}} \right) \bar{\lambda}^2 \sum_{i=1}^{\sqrt{N}} \sum_{j=1}^{\sqrt{N}} \dot{\bar{V}}_{ij} X_2^i Y_2^j \right] \cdot X_2^k Y_2^l, \\ \sum_{i=1}^{\sqrt{N}} \sum_{j=1}^{\sqrt{N}} \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial \Phi_1}{\partial \dot{\bar{V}}_{kl}} \right) &= \frac{2}{\bar{A}^2} \left[\left(1 + \bar{\bar{F}} \right) \bar{\lambda}^2 \sum_{i=1}^{\sqrt{N}} \sum_{j=1}^{\sqrt{N}} \ddot{\bar{V}}_{ij} X_2^i Y_2^j \right] \cdot X_2^k Y_2^l, \end{aligned}$$

$$\sum_{i=1}^{\sqrt{N}} \sum_{j=1}^{\sqrt{N}} \int_0^1 \int_0^1 \left[\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial \tilde{\Phi}_1}{\partial \dot{V}_{kl}} \right) \right] \bar{A} \bar{B} d\xi d\eta = \sum_{i=1}^{\sqrt{N}} \sum_{j=1}^{\sqrt{N}} \ddot{V}_{ij} B_3^{ijkl},$$

$$\sum_{i=1}^{\sqrt{N}} \sum_{j=1}^{\sqrt{N}} \frac{\partial \Phi_1}{\partial \dot{W}_{kl}} = \frac{2}{\bar{A}^2} \left[\left(1 + \bar{\bar{F}} \right) \bar{A}^2 \sum_{i=1}^{\sqrt{N}} \sum_{j=1}^{\sqrt{N}} \dot{W}_{ij} X_3^i Y_3^j \right] \cdot X_3^k Y_3^l,$$

$$\sum_{i=1}^{\sqrt{N}} \sum_{j=1}^{\sqrt{N}} \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial \Phi_1}{\partial \dot{W}_{kl}} \right) = \left[2 \left(1 + \bar{\bar{F}} \right) \sum_{i=1}^{\sqrt{N}} \sum_{j=1}^{\sqrt{N}} \ddot{W}_{ij} X_3^i Y_3^j \right] \cdot X_3^k Y_3^l,$$

$$\sum_{i=1}^{\sqrt{N}} \sum_{j=1}^{\sqrt{N}} \int_0^1 \int_0^1 \left[\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial \Phi_1}{\partial \dot{W}_{kl}} \right) \right] \bar{A} \bar{B} d\xi d\eta = \sum_{i=1}^{\sqrt{N}} \sum_{j=1}^{\sqrt{N}} \ddot{W}_{ij} B_5^{ijkl}.$$

Здесь

$$B_1^{ijkl} = \int_0^1 \int_0^1 \frac{2}{\bar{A}^2} \left(1 + \bar{\bar{F}} \right) X_1^i Y_1^j X_1^k Y_1^l \bar{A} \bar{B} d\xi d\eta,$$

$$B_3^{ijkl} = \int_0^1 \int_0^1 \frac{2 \bar{\lambda}^2}{\bar{A}^2} \left(1 + \bar{\bar{F}} \right) X_2^i Y_2^j X_2^k Y_2^l \bar{A} \bar{B} d\xi d\eta,$$

$$B_5^{ijkl} = \int_0^1 \int_0^1 2 \left(1 + \bar{\bar{F}} \right) X_3^i Y_3^j X_3^k Y_3^l \bar{A} \bar{B} d\xi d\eta.$$

Таким образом, уравнения движения для подкрепленной ортотропной оболочки принимают вид

$$\sum_{i=1}^{\sqrt{N}} \sum_{j=1}^{\sqrt{N}} \left[\ddot{U}_{ij} B_1^{ijkl} \right] + D_1^l = 0,$$

$$\sum_{i=1}^{\sqrt{N}} \sum_{j=1}^{\sqrt{N}} \left[\ddot{V}_{ij} B_3^{ijkl} \right] + D_2^l = 0,$$

$$\sum_{i=1}^{\sqrt{N}} \sum_{j=1}^{\sqrt{N}} \left[\ddot{W}_{ij} B_5^{ijkl} \right] + D_3^l = 0, \quad (5.42)$$

$$k, l = 1, 2, \dots, \sqrt{N},$$

где D_1^l, D_2^l, D_3^l – левые части системы (5.41).

Таким образом, математическая модель сведена к начальной задаче для системы обыкновенных дифференциальных уравнений (ОДУ).

Краевые условия – условия закрепления контура оболочки – были использованы при выборе аппроксимирующих функций, на основе которых были получены коэффициенты матрицы B и коэффициенты в выражениях D .

Также требуемую систему уравнений можно получить, воспользовавшись известным многомерным вариантом уравнения Эйлера – Лагранжа. Для этого подставим формулы (5.39) в функционал (5.20). После вычисления интегралов по переменным ξ и η от известных функций, функционал $\bar{I}$ представляет собой одномерный функционал от функций $\bar{U}_{ij}(\bar{t}) - \bar{W}_{ij}(\bar{t})$. Далее применим формулу уравнения Эйлера – Лагранжа:

$$\frac{d}{d\bar{t}} \frac{\partial(\bar{E}_k - \bar{E}_s)}{\partial \dot{\bar{X}}_j(\bar{t})} - \frac{\partial(\bar{E}_k - \bar{E}_s)}{\partial \bar{X}_j(\bar{t})} = 0, \quad j = 1, 2, \dots, 3N, \quad (5.43)$$

где

$$\bar{X}(\bar{t}) = (\bar{U}_{ij}(\bar{t}), \bar{V}_{ij}(\bar{t}), \bar{W}_{ij}(\bar{t}))^T, \quad i, j = 1, \dots, \sqrt{N},$$

а точкой обозначена производная по времени. Такая форма записи является наиболее компактной.

Так как производные от искомым функций по переменной $\bar{t}$ содержатся только в выражении для кинетической энергии, а сами функции – только в выражении для $\bar{E}_s$, то справедливо

$$\frac{d}{d\bar{t}} \frac{\partial \bar{E}_k}{\partial \dot{\bar{X}}_j(\bar{t})} + \frac{\partial \bar{E}_s}{\partial \bar{X}_j(\bar{t})} = 0, \quad j = 1, 2, \dots, 3N. \quad (5.44)$$

Притом $\frac{\partial \bar{E}_s}{\partial \bar{X}_j(\bar{t})} = 0, \quad j = 1, 2, \dots, 3N$ – система уравнений задачи статики [132].

Систему необходимо решать при начальных условиях при $\bar{t} = 0$

$$\begin{aligned} \bar{U}_{ij} = \bar{V}_{ij} = \bar{W}_{ij} = 0, \quad \dot{\bar{U}}_{ij} = \dot{\bar{V}}_{ij} = \dot{\bar{W}}_{ij} = 0, \\ i, j = 1, 2, \dots, \sqrt{N}, \end{aligned} \quad (5.45)$$

или

$$\bar{X}_j = 0, \quad \dot{\bar{X}}_j = 0, \quad j = 1, 2, \dots, 3N.$$

Краевые условия – условия закрепления контура оболочки – учитываются при выборе аппроксимирующих функций в (5.39).

Теперь для решения начальной задачи для системы обыкновенных дифференциальных уравнений (5.44), (5.45) можно применить различные численные методы, например, неявную схему метода Рунге – Кутты. Также полученная система ОДУ может быть решена специальными средствами, предназначенными для жестких систем уравнений, встроенными в программные комплексы, например, в Maple, MatLab и др.

5.4.2 Модель Тимошенко – Рейсснера

В соответствии с методом Л. В. Канторовича, неизвестные функции представим в виде

$$\begin{aligned}\bar{U} &= \bar{U}(\xi, \eta, \bar{t}) = \sum_{i=1}^{\sqrt{N}} \sum_{j=1}^{\sqrt{N}} \bar{U}_{ij}(\bar{t}) X_1^i Y_1^j, \quad \bar{V} = \bar{V}(\xi, \eta, \bar{t}) = \sum_{i=1}^{\sqrt{N}} \sum_{j=1}^{\sqrt{N}} \bar{V}_{ij}(\bar{t}) X_2^i Y_2^j, \\ \bar{W} &= \bar{W}(\xi, \eta, \bar{t}) = \sum_{i=1}^{\sqrt{N}} \sum_{j=1}^{\sqrt{N}} \bar{W}_{ij}(\bar{t}) X_3^i Y_3^j, \\ \bar{\Psi}_x &= \bar{\Psi}_x(\xi, \eta, \bar{t}) = \sum_{i=1}^{\sqrt{N}} \sum_{j=1}^{\sqrt{N}} \bar{\Psi}_{xij}(\bar{t}) X_4^i Y_4^j, \quad \bar{\Psi}_y = \bar{\Psi}_y(\xi, \eta, \bar{t}) = \sum_{i=1}^{\sqrt{N}} \sum_{j=1}^{\sqrt{N}} \bar{\Psi}_{yij}(\bar{t}) X_5^i Y_5^j,\end{aligned}\tag{5.46}$$

где $\bar{U}_{ij}(\bar{t}) - \bar{\Psi}_{yij}(\bar{t})$ – неизвестные функции переменной $\bar{t}$ (далее, для уменьшения громоздкости изложения, указание аргумента $(\bar{t})$ опустим), а все остальные функции известны.

После подстановки в функционал выражений (5.46), получаются громоздкие произведения нескольких сумм. Преобразование таких выражений для выделения членов, интегралы от которых нужно вычислить по переменным ξ и η , вызывает определенные сложности.

Поэтому применим более эффективную методику сведения трехмерного функционала к одномерному и последующей его минимизации, которая позволит

использовать найденные методом Ритца левые части алгебраических уравнений статики.

Функционал $\bar{I}$ можно представить в виде

$$\bar{I} = \int_{\bar{t}_0}^{\bar{t}_1} \int_0^1 \int_0^1 \left[\Phi_1(\dot{\bar{U}}, \dot{\bar{V}}, \dot{\bar{W}}, \dot{\bar{\Psi}}_x, \dot{\bar{\Psi}}_y) - \Phi_2(\bar{U}, \bar{V}, \bar{W}, \bar{\Psi}_x, \bar{\Psi}_y) \right] \bar{A} \bar{B} d\xi d\eta d\bar{t}. \quad (5.47)$$

Здесь Φ_1 соответствует выражениям, стоящим под знаком интеграла в $\bar{E}_k$, Φ_2 – соответственно $\bar{E}_s$. Точками обозначены производные по временной координате.

Подставлять (5.46) в (5.47) пока не будем, хотя при дифференцировании выражений Φ_1, Φ_2 будем учитывать (5.46). Например,

$$\frac{\partial \bar{\varepsilon}_x^2}{\partial \bar{U}_{kl}} = 2\bar{\varepsilon}_x \frac{\partial \bar{\varepsilon}_x}{\partial \bar{U}_{kl}} = 2\bar{\varepsilon}_x \left(X_1'^k Y_1^l + \bar{\theta}_1 k_x X_1^k Y_1^l \right).$$

Условия минимума интеграла (5.47) имеют вид

$$\delta \bar{I} = \delta_U \bar{I} + \delta_V \bar{I} + \delta_W \bar{I} + \delta_{\Psi_x} \bar{I} + \delta_{\Psi_y} \bar{I} = 0.$$

Или

$$\delta_U \bar{I} = \sum_{i=1}^{\sqrt{N}} \sum_{j=1}^{\sqrt{N}} \int_{\bar{t}_0}^{\bar{t}_1} \int_0^1 \int_0^1 \left[\frac{\partial \Phi_1}{\partial \dot{\bar{U}}_{kl}} \delta \dot{\bar{U}}_{kl} - \frac{\partial \Phi_2}{\partial \bar{U}_{kl}} \delta \bar{U}_{kl} \right] \bar{A} \bar{B} d\xi d\eta d\bar{t} = 0,$$

$$\delta_V \bar{I} = \sum_{i=1}^{\sqrt{N}} \sum_{j=1}^{\sqrt{N}} \int_{\bar{t}_0}^{\bar{t}_1} \int_0^1 \int_0^1 \left[\frac{\partial \Phi_1}{\partial \dot{\bar{V}}_{kl}} \delta \dot{\bar{V}}_{kl} - \frac{\partial \Phi_2}{\partial \bar{V}_{kl}} \delta \bar{V}_{kl} \right] \bar{A} \bar{B} d\xi d\eta d\bar{t} = 0,$$

$$\delta_W \bar{I} = \sum_{i=1}^{\sqrt{N}} \sum_{j=1}^{\sqrt{N}} \int_{\bar{t}_0}^{\bar{t}_1} \int_0^1 \int_0^1 \left[\frac{\partial \Phi_1}{\partial \dot{\bar{W}}_{kl}} \delta \dot{\bar{W}}_{kl} - \frac{\partial \Phi_2}{\partial \bar{W}_{kl}} \delta \bar{W}_{kl} \right] \bar{A} \bar{B} d\xi d\eta d\bar{t} = 0,$$

$$\delta_{\Psi_x} \bar{I} = \sum_{i=1}^{\sqrt{N}} \sum_{j=1}^{\sqrt{N}} \int_{\bar{t}_0}^{\bar{t}_1} \int_0^1 \int_0^1 \left[\frac{\partial \Phi_1}{\partial \dot{\bar{\Psi}}_{xkl}} \delta \dot{\bar{\Psi}}_{xkl} - \frac{\partial \Phi_2}{\partial \bar{\Psi}_{xkl}} \delta \bar{\Psi}_{xkl} \right] \bar{A} \bar{B} d\xi d\eta d\bar{t} = 0,$$

$$\delta_{\Psi_y} \bar{I} = \sum_{i=1}^{\sqrt{N}} \sum_{j=1}^{\sqrt{N}} \int_{\bar{t}_0}^{\bar{t}_1} \int_0^1 \int_0^1 \left[\frac{\partial \Phi_1}{\partial \dot{\bar{\Psi}}_{ykl}} \delta \dot{\bar{\Psi}}_{ykl} - \frac{\partial \Phi_2}{\partial \bar{\Psi}_{ykl}} \delta \bar{\Psi}_{ykl} \right] \bar{A} \bar{B} d\xi d\eta d\bar{t} = 0.$$

После выполнения соответствующих преобразований (интегрирования по частям в первых членах каждого уравнения и вынесении, соответственно, $\delta\bar{U}_{kl}, \delta\bar{V}_{kl}, \delta\bar{W}_{kl}, \delta\bar{\Psi}_{xkl}, \delta\bar{\Psi}_{ykl}$ за скобки), получим уравнения движения в виде

$$\begin{aligned}
& \sum_{i=1}^{\sqrt{N}} \sum_{j=1}^{\sqrt{N}} \int_0^1 \int_0^1 \left[\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial \Phi_1}{\partial \dot{\bar{U}}_{kl}} \right) + \frac{\partial \Phi_2}{\partial \bar{U}_{kl}} \right] \bar{A} \bar{B} d\xi d\eta = 0, \\
& \sum_{i=1}^{\sqrt{N}} \sum_{j=1}^{\sqrt{N}} \int_0^1 \int_0^1 \left[\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial \Phi_1}{\partial \dot{\bar{V}}_{kl}} \right) + \frac{\partial \Phi_2}{\partial \bar{V}_{kl}} \right] \bar{A} \bar{B} d\xi d\eta = 0, \\
& \sum_{i=1}^{\sqrt{N}} \sum_{j=1}^{\sqrt{N}} \int_0^1 \int_0^1 \left[\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial \Phi_1}{\partial \dot{\bar{W}}_{kl}} \right) + \frac{\partial \Phi_2}{\partial \bar{W}_{kl}} \right] \bar{A} \bar{B} d\xi d\eta = 0, \\
& \sum_{i=1}^{\sqrt{N}} \sum_{j=1}^{\sqrt{N}} \int_0^1 \int_0^1 \left[\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial \Phi_1}{\partial \dot{\bar{\Psi}}_{xkl}} \right) + \frac{\partial \Phi_2}{\partial \bar{\Psi}_{xkl}} \right] \bar{A} \bar{B} d\xi d\eta = 0, \\
& \sum_{i=1}^{\sqrt{N}} \sum_{j=1}^{\sqrt{N}} \int_0^1 \int_0^1 \left[\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial \Phi_1}{\partial \dot{\bar{\Psi}}_{ykl}} \right) + \frac{\partial \Phi_2}{\partial \bar{\Psi}_{ykl}} \right] \bar{A} \bar{B} d\xi d\eta = 0.
\end{aligned} \tag{5.48}$$

Теперь в этих выражениях можно вычислить интегралы от известных функций по переменным ξ, η .

Здесь

$$\begin{aligned}
& \sum_{i=1}^{\sqrt{N}} \sum_{j=1}^{\sqrt{N}} \int_0^1 \int_0^1 \left[\frac{\partial \Phi_2}{\partial \bar{U}_{kl}} \right] \bar{A} \bar{B} d\xi d\eta, \quad \sum_{i=1}^{\sqrt{N}} \sum_{j=1}^{\sqrt{N}} \int_0^1 \int_0^1 \left[\frac{\partial \Phi_2}{\partial \bar{V}_{kl}} \right] \bar{A} \bar{B} d\xi d\eta, \\
& \sum_{i=1}^{\sqrt{N}} \sum_{j=1}^{\sqrt{N}} \int_0^1 \int_0^1 \left[\frac{\partial \Phi_2}{\partial \bar{W}_{kl}} \right] \bar{A} \bar{B} d\xi d\eta, \quad \sum_{i=1}^{\sqrt{N}} \sum_{j=1}^{\sqrt{N}} \int_0^1 \int_0^1 \left[\frac{\partial \Phi_2}{\partial \bar{\Psi}_{xkl}} \right] \bar{A} \bar{B} d\xi d\eta, \\
& \sum_{i=1}^{\sqrt{N}} \sum_{j=1}^{\sqrt{N}} \int_0^1 \int_0^1 \left[\frac{\partial \Phi_2}{\partial \bar{\Psi}_{ykl}} \right] \bar{A} \bar{B} d\xi d\eta,
\end{aligned}$$

— это левые части уравнений статики, полученные применением метода Ритца к функционалу $\bar{E}_s$.

Выражение $\Phi_2(\bar{U}, \bar{V}, \bar{W}, \bar{\Psi}_x, \bar{\Psi}_y) \bar{A} \bar{B}$ — это подынтегральное выражение в функционале $\bar{E}_s$. Подставив разложение (5.46) в Φ_2 и вычислив интегралы по переменным ξ и η , получим

$$\bar{E}_s = \int_0^1 \int_0^1 \left[\Phi_2(\bar{U}, \bar{V}, \bar{W}, \bar{\Psi}_x, \bar{\Psi}_y) \right] \bar{A} \bar{B} d\xi d\eta = \tilde{\Phi}_2(\bar{U}_{ij}, \bar{V}_{ij}, \bar{W}_{ij}, \bar{\Psi}_{xij}, \bar{\Psi}_{yij}).$$

Алгебраические уравнения метода Ритца будут иметь вид

$$\frac{\partial \tilde{\Phi}_2}{\partial \bar{U}_{kl}} = 0, \quad \frac{\partial \tilde{\Phi}_2}{\partial \bar{V}_{kl}} = 0, \quad \frac{\partial \tilde{\Phi}_2}{\partial \bar{W}_{kl}} = 0, \quad \frac{\partial \tilde{\Phi}_2}{\partial \bar{\Psi}_{xkl}} = 0, \quad \frac{\partial \tilde{\Phi}_2}{\partial \bar{\Psi}_{ykl}} = 0, \quad (5.49)$$

$$k, l = 1, 2, \dots, \sqrt{N}.$$

Следовательно, например

$$\sum_{i=1}^{\sqrt{N}} \sum_{j=1}^{\sqrt{N}} \int_0^1 \int_0^1 \left[\frac{\partial \Phi_2}{\partial \bar{U}_{kl}} \right] \bar{A} \bar{B} d\xi d\eta = \frac{\partial \tilde{\Phi}_2}{\partial \bar{U}_{kl}}.$$

Остальные члены уравнения (5.48) преобразуем следующим образом

$$\frac{\partial \Phi_1}{\partial \dot{\bar{U}}_{kl}} = \frac{1}{\bar{A}^2} \left[\left(1 + \bar{F} \right) 2 \frac{\partial \bar{U}}{\partial \bar{t}} X_1^k Y_1^l + 2 \bar{S} \frac{\partial \bar{\Psi}_x}{\partial \bar{t}} X_1^k Y_1^l \right],$$

$$\frac{d}{d\bar{t}} \left(\frac{\partial \Phi_1}{\partial \dot{\bar{U}}_{kl}} \right) = \frac{2}{\bar{A}^2} \left[\left(1 + \bar{F} \right) \frac{\partial^2 \bar{U}}{\partial \bar{t}^2} + \bar{S} \frac{\partial^2 \bar{\Psi}_x}{\partial \bar{t}^2} \right] X_1^k Y_1^l,$$

$$\int_0^1 \int_0^1 \left[\frac{d}{d\bar{t}} \left(\frac{\partial \Phi_1}{\partial \dot{\bar{U}}_{kl}} \right) \right] \bar{A} \bar{B} d\xi d\eta = \sum_{i=1}^{\sqrt{N}} \sum_{j=1}^{\sqrt{N}} \left[\ddot{\bar{U}}_{ij} B_1^{ijkl} + \ddot{\bar{\Psi}}_{xij} B_2^{ijkl} \right];$$

$$\frac{\partial \Phi_1}{\partial \dot{\bar{V}}_{kl}} = \frac{1}{\bar{A}^2} \left[\left(1 + \bar{F} \right) 2 \bar{\lambda}^2 \frac{\partial \bar{V}}{\partial \bar{t}} X_2^k Y_2^l + 2 \bar{\lambda}^2 \bar{S} \frac{\partial \bar{\Psi}_y}{\partial \bar{t}} X_2^k Y_2^l \right],$$

$$\frac{d}{d\bar{t}} \left(\frac{\partial \Phi_1}{\partial \dot{\bar{V}}_{kl}} \right) = \frac{2 \bar{\lambda}^2}{\bar{A}^2} \left[\left(1 + \bar{F} \right) \frac{\partial^2 \bar{V}}{\partial \bar{t}^2} + \bar{S} \frac{\partial^2 \bar{\Psi}_y}{\partial \bar{t}^2} \right] X_2^k Y_2^l,$$

$$\int_0^1 \int_0^1 \left[\frac{d}{d\bar{t}} \left(\frac{\partial \Phi_1}{\partial \dot{\bar{V}}_{kl}} \right) \right] \bar{A} \bar{B} d\xi d\eta = \sum_{i=1}^{\sqrt{N}} \sum_{j=1}^{\sqrt{N}} \left[\ddot{\bar{V}}_{ij} B_3^{ijkl} + \ddot{\bar{\Psi}}_{yij} B_4^{ijkl} \right],$$

$$\frac{\partial \Phi_1}{\partial \dot{\bar{W}}_{kl}} = \frac{1}{\bar{A}^2} \left[\left(1 + \bar{F} \right) 2 \bar{A}^2 \frac{\partial \bar{W}}{\partial \bar{t}} X_3^k Y_3^l \right],$$

$$\frac{d}{d\bar{t}} \left(\frac{\partial \Phi_1}{\partial \dot{\bar{W}}_{kl}} \right) = \left[2 \left(1 + \bar{F} \right) \frac{\partial^2 \bar{W}}{\partial \bar{t}^2} \right] X_3^k Y_3^l,$$

$$\int_0^1 \int_0^1 \left[\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial \Phi_1}{\partial \dot{W}_{kl}} \right) \right] \bar{A} \bar{B} d\xi d\eta = \sum_{i=1}^{\sqrt{N}} \sum_{j=1}^{\sqrt{N}} \ddot{W}_{ij} B_5^{ijkl},$$

$$\frac{\partial \Phi_1}{\partial \dot{\Psi}_{xkl}} = \frac{1}{\bar{A}^2} \left[2\bar{S} \frac{\partial \bar{U}}{\partial \bar{t}} X_4^k Y_4^l + 2 \left(\frac{1}{12} + \bar{J} \right) \frac{\partial \bar{\Psi}_x}{\partial \bar{t}} X_4^k Y_4^l \right],$$

$$\frac{d}{d\bar{t}} \left(\frac{\partial \Phi_1}{\partial \dot{\Psi}_{xkl}} \right) = \frac{2}{\bar{A}^2} \left[\bar{S} \frac{\partial^2 \bar{U}}{\partial \bar{t}^2} + \left(\frac{1}{12} + \bar{J} \right) \frac{\partial^2 \bar{\Psi}_x}{\partial \bar{t}^2} \right] X_4^k Y_4^l,$$

$$\int_0^1 \int_0^1 \left[\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial \Phi_1}{\partial \dot{\Psi}_{xkl}} \right) \right] \bar{A} \bar{B} d\xi d\eta = \sum_{i=1}^{\sqrt{N}} \sum_{j=1}^{\sqrt{N}} \left[\ddot{U}_{ij} B_6^{ijkl} + \ddot{\Psi}_{xij} B_7^{ijkl} \right],$$

$$\frac{\partial \Phi_1}{\partial \dot{\Psi}_{ykl}} = \frac{1}{\bar{A}^2} \left[2\bar{S} \bar{\lambda}^2 \frac{\partial \bar{V}}{\partial \bar{t}} X_5^k Y_5^l + 2\bar{\lambda}^2 \left(\frac{1}{12} + \bar{J} \right) \frac{\partial \bar{\Psi}_y}{\partial \bar{t}} X_5^k Y_5^l \right],$$

$$\frac{d}{d\bar{t}} \left(\frac{\partial \Phi_1}{\partial \dot{\Psi}_{ykl}} \right) = \frac{2\bar{\lambda}^2}{\bar{A}^2} \left[\bar{S} \frac{\partial^2 \bar{V}}{\partial \bar{t}^2} + \left(\frac{1}{12} + \bar{J} \right) \frac{\partial^2 \bar{\Psi}_y}{\partial \bar{t}^2} \right] X_5^k Y_5^l,$$

$$\int_0^1 \int_0^1 \left[\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial \Phi_1}{\partial \dot{\Psi}_{ykl}} \right) \right] \bar{A} \bar{B} d\xi d\eta = \sum_{i=1}^{\sqrt{N}} \sum_{l=1}^{\sqrt{N}} \left[\ddot{V}_{ij} B_8^{ijkl} + \ddot{\Psi}_{yij} B_9^{ijkl} \right].$$

Здесь

$$B_1^{ijkl} = \int_0^1 \int_0^1 \frac{2}{\bar{A}^2} (1 + \bar{F}) X_1^i Y_1^j X_1^k Y_1^l \bar{A} \bar{B} d\xi d\eta,$$

$$B_2^{ijkl} = \int_0^1 \int_0^1 \frac{2}{\bar{A}^2} \bar{S} X_4^i Y_4^j X_1^k Y_1^l \bar{A} \bar{B} d\xi d\eta,$$

$$B_3^{ijkl} = \int_0^1 \int_0^1 \frac{2\bar{\lambda}^2}{\bar{A}^2} (1 + \bar{F}) X_2^i Y_2^j X_2^k Y_2^l \bar{A} \bar{B} d\xi d\eta,$$

$$B_4^{ijkl} = \int_0^1 \int_0^1 \frac{2\bar{\lambda}^2}{\bar{A}^2} \bar{S} X_5^i Y_5^j X_2^k Y_2^l \bar{A} \bar{B} d\xi d\eta,$$

$$B_5^{ijkl} = \int_0^1 \int_0^1 2(1 + \bar{F}) X_3^i Y_3^j X_3^k Y_3^l \bar{A} \bar{B} d\xi d\eta,$$

$$B_6^{ijkl} = \int_0^1 \int_0^1 \frac{2}{\bar{A}^2} \bar{S} X_1^i Y_1^j X_4^k Y_4^l \bar{A} \bar{B} d\xi d\eta,$$

$$B_7^{ijkl} = \int_0^1 \int_0^1 \frac{2}{\bar{A}^2} \left(\frac{1}{12} + \bar{J} \right) X_4^i Y_4^j X_4^k Y_4^l \bar{A} \bar{B} d\xi d\eta,$$

$$B_8^{ijkl} = \int_0^1 \int_0^1 \frac{2\bar{\lambda}^2}{\bar{A}^2} \bar{S} X_2^i Y_2^j X_5^k Y_5^l \bar{A} \bar{B} d\xi d\eta,$$

$$B_9^{ijkl} = \int_0^1 \int_0^1 \frac{2\bar{\lambda}^2}{\bar{A}^2} \left(\frac{1}{12} + \bar{J} \right) X_5^i Y_5^j X_5^k Y_5^l \bar{A} \bar{B} d\xi d\eta.$$

Таким образом, уравнения движения для ортотропной оболочечной конструкции, подкрепленной ребрами жесткости, с учетом поперечных сдвигов и инерции вращения принимают вид

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^{\sqrt{N}} \sum_{j=1}^{\sqrt{N}} \left[\ddot{U}_{ij} B_1^{ijkl} + \ddot{\Psi}_{xij} B_2^{ijkl} \right] + \Pi_1^{kl} &= 0, \\ \sum_{i=1}^{\sqrt{N}} \sum_{j=1}^{\sqrt{N}} \left[\ddot{V}_{ij} B_3^{ijkl} + \ddot{\Psi}_{yij} B_4^{ijkl} \right] + \Pi_2^{kl} &= 0, \\ \sum_{i=1}^{\sqrt{N}} \sum_{j=1}^{\sqrt{N}} \ddot{W}_{ij} B_5^{ijkl} + \Pi_3^{kl} &= 0, \\ \sum_{i=1}^{\sqrt{N}} \sum_{j=1}^{\sqrt{N}} \left[\ddot{U}_{ij} B_6^{ijkl} + \ddot{\Psi}_{xij} B_7^{ijkl} \right] + \Pi_4^{kl} &= 0, \\ \sum_{i=1}^{\sqrt{N}} \sum_{j=1}^{\sqrt{N}} \left[\ddot{V}_{ij} B_8^{ijkl} + \ddot{\Psi}_{yij} B_9^{ijkl} \right] + \Pi_5^{kl} &= 0. \end{aligned} \quad (5.50)$$

где

$$\begin{aligned} \Pi_1^{kl} &= \sum_{i=1}^{\sqrt{N}} \sum_{j=1}^{\sqrt{N}} \left[\bar{U}_{ij} C_1^{ijkl} + \bar{V}_{ij} C_2^{ijkl} + \bar{W}_{ij} C_3^{ijkl} + \bar{\Psi}_{xij} C_4^{ijkl} + \bar{\Psi}_{yij} C_5^{ijkl} \right] + \tilde{A}_1^{kl}, \\ \Pi_2^{kl} &= \sum_{i=1}^{\sqrt{N}} \sum_{j=1}^{\sqrt{N}} \left[\bar{U}_{ij} C_6^{ijkl} + \bar{V}_{ij} C_7^{ijkl} + \bar{W}_{ij} C_8^{ijkl} + \bar{\Psi}_{xij} C_9^{ijkl} + \bar{\Psi}_{yij} C_{10}^{ijkl} \right] + \tilde{A}_2^{kl}, \\ \Pi_3^{kl} &= \sum_{i=1}^{\sqrt{N}} \sum_{j=1}^{\sqrt{N}} \left[\bar{U}_{ij} C_{11}^{ijkl} + \bar{V}_{ij} C_{12}^{ijkl} + \bar{W}_{ij} C_{13}^{ijkl} + \bar{\Psi}_{xij} C_{14}^{ijkl} + \bar{\Psi}_{yij} C_{15}^{ijkl} \right] + \tilde{A}_3^{kl} - C_p^{kl} \bar{P}, \\ \Pi_4^{kl} &= \sum_{i=1}^{\sqrt{N}} \sum_{j=1}^{\sqrt{N}} \left[\bar{U}_{ij} C_{16}^{ijkl} + \bar{V}_{ij} C_{17}^{ijkl} + \bar{W}_{ij} C_{18}^{ijkl} + \bar{\Psi}_{xij} C_{19}^{ijkl} + \bar{\Psi}_{yij} C_{20}^{ijkl} \right] + \tilde{A}_4^{kl}, \end{aligned} \quad (5.51)$$

$$\Pi_5^{kl} = \sum_{i=1}^{\sqrt{N}} \sum_{j=1}^{\sqrt{N}} \left[\bar{U}_{ij} C_{21}^{ijkl} + \bar{V}_{ij} C_{22}^{ijkl} + \bar{W}_{ij} C_{23}^{ijkl} + \bar{\Psi}_{xij} C_{24}^{ijkl} + \bar{\Psi}_{yij} C_{25}^{ijkl} \right] + \tilde{A}_5^{kl},$$

$$k, l = 1, 2, \dots, \sqrt{N}.$$

Здесь $A_1^{kl} - A_5^{kl}$ – нелинейные члены уравнений.

Таким образом, получена математическая модель в виде начальной задачи для системы ОДУ.

По аналогии с вариантом модели Кирхгофа – Лява, требуемую систему уравнений можно получить более простым способом. Для этого подставим формулы (5.46) в функционал (5.20). После вычисления интегралов по переменным ξ и η от известных функций, функционал $\bar{I}$ представляет собой одномерный функционал от функций $\bar{U}_{ij}(\bar{t}) - \bar{\Psi}_{yij}(\bar{t})$. Далее используем известное уравнение Эйлера – Лагранжа [263]:

$$\frac{d}{d\bar{t}} \frac{\partial(\bar{E}_k - \bar{E}_s)}{\partial \dot{\bar{X}}_j(\bar{t})} - \frac{\partial(\bar{E}_k - \bar{E}_s)}{\partial \bar{X}_j(\bar{t})} = 0, \quad j = 1, 2, \dots, 5N, \quad (5.52)$$

где $\bar{X}(\bar{t}) = (\bar{U}_{ij}(\bar{t}), \bar{V}_{ij}(\bar{t}), \bar{W}_{ij}(\bar{t}), \bar{\Psi}_{xij}(\bar{t}), \bar{\Psi}_{yij}(\bar{t}))^T$, $i, j = 1, \dots, \sqrt{N}$, а точкой обозначена производная по времени. Такая форма записи является наиболее компактной.

Так как производные от искоемых функций по переменной $\bar{t}$ содержатся только в выражении для кинетической энергии, а сами функции – только в выражении для $\bar{E}_s$, то справедливо

$$\frac{d}{d\bar{t}} \frac{\partial \bar{E}_k}{\partial \dot{\bar{X}}_j(\bar{t})} + \frac{\partial \bar{E}_s}{\partial \bar{X}_j(\bar{t})} = 0, \quad j = 1, 2, \dots, 5N. \quad (5.53)$$

Притом $\frac{\partial \bar{E}_s}{\partial \bar{X}_j(\bar{t})} = 0$, $j = 1, 2, \dots, 5N$ – система уравнений задачи статики (3.15).

Систему необходимо решать при начальных условиях при $\bar{t} = 0$

$$\bar{U}_{ij} = \bar{V}_{ij} = \bar{W}_{ij} = \bar{\Psi}_{xij} = \bar{\Psi}_{yij} = 0, \quad \dot{\bar{U}}_{ij} = \dot{\bar{V}}_{ij} = \dot{\bar{W}}_{ij} = \dot{\bar{\Psi}}_{xij} = \dot{\bar{\Psi}}_{yij} = 0, \quad i, j = 1, 2, \dots, \sqrt{N}, \quad (5.54)$$

или

$$\bar{X}_j = 0, \quad \dot{\bar{X}}_j = 0, \quad j = 1, 2, \dots, 5N.$$

Краевые условия – условия закрепления контура оболочки – учитываются при выборе аппроксимирующих функций в (5.46).

Теперь для решения начальной задачи для системы обыкновенных дифференциальных уравнений (5.53), (5.54) можно применить различные численные методы, например, неявную схему метода Рунге – Кутты. Также полученная система ОДУ может быть решена специальными средствами, предназначенными для жестких систем уравнений, встроенными в программные комплексы, например, в Maple, MatLab и др.

5.5 МОДЕЛЬ 3. УРАВНЕНИЯ ДВИЖЕНИЯ В СМЕШАННОЙ ФОРМЕ

Будем считать, что оболочка является полой, в уравнениях (5.31), (5.37) пренебрегается инерционными членами, а также верно, что [79, 216]

$$\frac{1}{A} \frac{\partial W}{\partial x} \gg k_x U, \quad \frac{1}{B} \frac{\partial W}{\partial y} \gg k_y V. \quad (5.55)$$

Уравнения движения для ортотропных ребристых оболочек при неучете инерции вращения будут иметь вид (5.31), а усилия и моменты будут иметь вид в зависимости от метода учета ребер жесткости.

Введем функцию напряжений $\Phi(x, y, t)$, связанную с усилиями зависимостями

$$\begin{aligned} N_x &= \frac{1}{B} \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{1}{B} \frac{\partial \Phi}{\partial y} \right) + \frac{1}{A^2 B} \frac{\partial B}{\partial x} \frac{\partial \Phi}{\partial x} = F_1(\Phi), \\ N_y &= \frac{1}{A} \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{1}{A} \frac{\partial \Phi}{\partial x} \right) + \frac{1}{AB^2} \frac{\partial A}{\partial y} \frac{\partial \Phi}{\partial y} = F_2(\Phi), \\ N_{xy} &= \frac{1}{AB} \left(\frac{1}{A} \frac{\partial A}{\partial y} \frac{\partial \Phi}{\partial x} + \frac{1}{B} \frac{\partial B}{\partial x} \frac{\partial \Phi}{\partial y} - \frac{\partial^2 \Phi}{\partial x \partial y} \right) = F_3(\Phi), \end{aligned} \quad (5.56)$$

где $F_1(\Phi), F_2(\Phi), F_3(\Phi)$ – обозначения усилий, выраженных через функции W и Φ . Будем использовать их для краткости записи.

Рассмотрим теперь еще раз систему уравнений (5.31), но уже с учетом (5.56). Так как в третьем уравнении в (5.31) помимо усилий встречаются еще и моменты, их также необходимо выразить через функции W и Φ . Для этого выразим вначале из соотношений для усилий (2.1), (2.24) с учетом (5.56) деформации $\varepsilon_x, \varepsilon_y, \gamma_{xy}$:

$$\begin{aligned}\varepsilon_x &= \frac{\tilde{F}_x}{E_1 h} F_1(\Phi) - \frac{\tilde{F}_y}{E_2 h} \mu_{21} F_2(\Phi) - \tilde{S}_x (\chi_1 + \mu_{21} \chi_2) + \tilde{S}_y \mu_{21} (\chi_2 + \mu_{12} \chi_1), \\ \varepsilon_y &= \frac{\tilde{F}_y}{E_2 h} F_2(\Phi) - \frac{\tilde{F}_x}{E_1 h} \mu_{12} F_1(\Phi) - \tilde{S}_y (\chi_2 + \mu_{12} \chi_1) + \tilde{S}_x \mu_{12} (\chi_1 + \mu_{21} \chi_2), \\ \gamma_{xy} &= \frac{\tilde{F}_y}{G_{12} h} F_3(\Phi) - 2\tilde{S}_y \chi_{12} (1 - \mu_{12} \mu_{21}),\end{aligned}\quad (5.57)$$

где

$$\begin{aligned}\tilde{F}_x &= \frac{h}{h + F_x} = 1 - \frac{F_x}{h + F_x}, \quad \tilde{F}_y = \frac{h}{h + F_y} = 1 - \frac{F_y}{h + F_y}, \\ \tilde{S}_x &= \frac{S_x}{(h + F_x)(1 - \mu_{12} \mu_{21})}, \quad \tilde{S}_y = \frac{S_y}{(h + F_y)(1 - \mu_{12} \mu_{21})}.\end{aligned}\quad (5.58)$$

Подставив найденные выражения деформаций (5.57) в моменты (2.1), (2.24), получим

$$\begin{aligned}M_x &= \tilde{S}_x F_1(\Phi) (1 - \mu_{12} \mu_{21}) - \frac{E_1 \tilde{J}_x}{1 - \mu_{12} \mu_{21}} (\chi_1 + \mu_{21} \chi_2), \\ M_y &= \tilde{S}_y F_2(\Phi) (1 - \mu_{12} \mu_{21}) - \frac{E_2 \tilde{J}_y}{1 - \mu_{12} \mu_{21}} (\chi_2 + \mu_{12} \chi_1), \\ M_{xy} &= \tilde{S}_y F_3(\Phi) (1 - \mu_{12} \mu_{21}) - 2G_{12} \chi_{12} \tilde{J}_y.\end{aligned}\quad (5.59)$$

$$\text{Здесь } \tilde{J}_x = \frac{S_x^2}{h + F_x} - \frac{h^3}{12} - J_x, \quad \tilde{J}_y = \frac{S_y^2}{h + F_y} - \frac{h^3}{12} - J_y.$$

Теперь, подставив в третье уравнение (5.31) выражения (5.56) и (5.59), получим первое уравнение в смешанной форме

$$\begin{aligned}
& AB(k_x F_1(\Phi) + k_y F_2(\Phi)) + \\
& + \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{B}{A} \theta_1 F_1(\Phi) + \theta_2 F_3(\Phi) \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{A}{B} \theta_2 F_2(\Phi) + \theta_1 F_3(\Phi) \right) + \\
& + \frac{\partial^2}{\partial x^2} \left(\frac{B}{A} \tilde{S}_x F_1(\Phi) (1 - \mu_{12} \mu_{21}) - \frac{E_1 \tilde{J}_x}{1 - \mu_{12} \mu_{21}} \frac{B}{A} (\chi_1 + \mu_{21} \chi_2) \right) + \\
& + \frac{\partial^2}{\partial y^2} \left(\frac{A}{B} \tilde{S}_y F_1(\Phi) (1 - \mu_{12} \mu_{21}) - \frac{E_2 \tilde{J}_y}{1 - \mu_{12} \mu_{21}} \frac{A}{B} (\chi_2 + \mu_{12} \chi_1) \right) + \\
& + 2 \frac{\partial^2}{\partial x \partial y} \left(\tilde{S}_y F_3(\Phi) (1 - \mu_{12} \mu_{21}) - 2 G_{12} \chi_{12} \tilde{J}_y \right) - \\
& - \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{1}{A} \frac{\partial B}{\partial x} \left(\tilde{S}_y F_1(\Phi) (1 - \mu_{12} \mu_{21}) - \frac{E_2 \tilde{J}_y}{1 - \mu_{12} \mu_{21}} (\chi_2 + \mu_{12} \chi_1) \right) \right) - \\
& - \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{1}{B} \frac{\partial A}{\partial y} \left(\tilde{S}_x F_1(\Phi) (1 - \mu_{12} \mu_{21}) - \frac{E_1 \tilde{J}_x}{1 - \mu_{12} \mu_{21}} (\chi_1 + \mu_{21} \chi_2) \right) \right) + ABq = 0.
\end{aligned} \tag{5.60}$$

Воспользуемся третьим уравнением совместности деформаций [69]:

$$\begin{aligned}
-AB(k_x \chi_2 + k_y \chi_1 - \chi_1 \chi_2 + \chi_{12}^2) &= \frac{\partial}{\partial y} \left[\frac{1}{B} \left(\frac{\partial B}{\partial x} \gamma_{xy} + \frac{1}{2} B \frac{\partial \gamma_{xy}}{\partial x} + \frac{\partial A}{\partial y} \varepsilon_y - \frac{\partial A \varepsilon_x}{\partial y} \right) \right] + \\
&+ \frac{\partial}{\partial x} \left[\frac{1}{A} \left(\frac{\partial A}{\partial y} \gamma_{xy} + \frac{1}{2} A \frac{\partial \gamma_{xy}}{\partial y} + \frac{\partial B}{\partial x} \varepsilon_x - \frac{\partial B \varepsilon_y}{\partial x} \right) \right].
\end{aligned} \tag{5.61}$$

Подставим в уравнение (5.61) выражения для деформаций (5.57):

$$\begin{aligned}
-AB(k_x \chi_2 + k_y \chi_1 - \chi_1 \chi_2 + \chi_{12}^2) &= \frac{\partial}{\partial y} \left[\frac{1}{B} \left(\frac{\partial B}{\partial x} \left(\frac{\tilde{F}_y}{G_{12} h} F_3(\Phi) - 2 \tilde{S}_y \chi_{12} (1 - \mu_{12} \mu_{21}) \right) \right) + \right. \\
&+ \frac{1}{2} B \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\tilde{F}_y}{G_{12} h} F_3(\Phi) - 2 \tilde{S}_y \chi_{12} (1 - \mu_{12} \mu_{21}) \right) + \\
&+ \frac{\partial A}{\partial y} \left(\frac{\tilde{F}_y}{E_2 h} F_2(\Phi) - \frac{\tilde{F}_x}{E_1 h} \mu_{12} F_1(\Phi) - \tilde{S}_y (\chi_2 + \mu_{12} \chi_1) + \tilde{S}_x \mu_{12} (\chi_1 + \mu_{21} \chi_2) \right) - \\
&\left. - \frac{\partial}{\partial y} A \left(\frac{\tilde{F}_x}{E_1 h} F_1(\Phi) - \frac{\tilde{F}_y}{E_2 h} \mu_{21} F_2(\Phi) - \tilde{S}_x (\chi_1 + \mu_{21} \chi_2) + \tilde{S}_y \mu_{21} (\chi_2 + \mu_{12} \chi_1) \right) \right] +
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& + \frac{\partial}{\partial x} \left[\frac{1}{A} \left(\frac{\partial A}{\partial y} \left(\frac{\tilde{F}_y}{G_{12}h} F_3(\Phi) - 2\tilde{S}_y \chi_{12} (1 - \mu_{12}\mu_{21}) \right) \right) + \right. \\
& \quad \left. + \frac{1}{2} A \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\tilde{F}_y}{G_{12}h} F_3(\Phi) - 2\tilde{S}_y \chi_{12} (1 - \mu_{12}\mu_{21}) \right) + \right. \\
& \quad \left. + \frac{\partial B}{\partial x} \left(\frac{\tilde{F}_x}{E_1h} F_1(\Phi) - \frac{\tilde{F}_y}{E_2h} \mu_{21} F_2(\Phi) - \tilde{S}_x (\chi_1 + \mu_{21}\chi_2) + \tilde{S}_y \mu_{21} (\chi_2 + \mu_{12}\chi_1) \right) - \right. \\
& \quad \left. - \frac{\partial}{\partial x} B \left(\frac{\tilde{F}_y}{E_2h} F_2(\Phi) - \frac{\tilde{F}_x}{E_1h} \mu_{12} F_1(\Phi) - \tilde{S}_y (\chi_2 + \mu_{12}\chi_1) + \tilde{S}_x \mu_{12} (\chi_1 + \mu_{21}\chi_2) \right) \right] \Bigg].
\end{aligned} \tag{5.62}$$

Добавив в уравнение (5.60) инерционный член, получим уравнение движения в смешанной форме, и вместе с (5.62) получим систему:

$$\begin{aligned}
& \rho(h + F_p) \frac{\partial^2 W}{\partial t^2} AB = AB(k_x F_1(\Phi) + k_y F_2(\Phi)) + \\
& + \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{B}{A} \theta_1 F_1(\Phi) + \theta_2 F_3(\Phi) \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{A}{B} \theta_2 F_2(\Phi) + \theta_1 F_3(\Phi) \right) + \\
& + \frac{\partial^2}{\partial x^2} \left(\frac{B}{A} \tilde{S}_x F_1(\Phi) (1 - \mu_{12}\mu_{21}) - \frac{E_1 \tilde{J}_x}{1 - \mu_{12}\mu_{21}} \frac{B}{A} (\chi_1 + \mu_{21}\chi_2) \right) + \\
& + \frac{\partial^2}{\partial y^2} \left(\frac{A}{B} \tilde{S}_y F_1(\Phi) (1 - \mu_{12}\mu_{21}) - \frac{E_2 \tilde{J}_y}{1 - \mu_{12}\mu_{21}} \frac{A}{B} (\chi_2 + \mu_{12}\chi_1) \right) + \\
& + 2 \frac{\partial^2}{\partial x \partial y} \left(\tilde{S}_y F_3(\Phi) (1 - \mu_{12}\mu_{21}) - 2G_{12} \chi_{12} \tilde{J}_y \right) - \\
& - \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{1}{A} \frac{\partial B}{\partial x} \left(\tilde{S}_y F_1(\Phi) (1 - \mu_{12}\mu_{21}) - \frac{E_2 \tilde{J}_y}{1 - \mu_{12}\mu_{21}} (\chi_2 + \mu_{12}\chi_1) \right) \right) - \\
& - \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{1}{B} \frac{\partial A}{\partial y} \left(\tilde{S}_x F_1(\Phi) (1 - \mu_{12}\mu_{21}) - \frac{E_1 \tilde{J}_x}{1 - \mu_{12}\mu_{21}} (\chi_1 + \mu_{21}\chi_2) \right) \right) + ABq. \tag{5.63} \\
& - AB(k_x \chi_2 + k_y \chi_1 - \chi_1 \chi_2 + \chi_{12}^2) = \\
& = \frac{\partial}{\partial y} \left[\frac{1}{B} \left(\frac{\partial B}{\partial x} \left(\frac{\tilde{F}_y}{G_{12}h} F_3(\Phi) - 2\tilde{S}_y \chi_{12} (1 - \mu_{12}\mu_{21}) \right) + \right. \right.
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& + \frac{1}{2} B \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\tilde{F}_y}{G_{12} h} F_3(\Phi) - 2 \tilde{S}_y \chi_{12} (1 - \mu_{12} \mu_{21}) \right) + \\
& + \frac{\partial A}{\partial y} \left(\frac{\tilde{F}_y}{E_2 h} F_2(\Phi) - \frac{\tilde{F}_x}{E_1 h} \mu_{12} F_1(\Phi) - \tilde{S}_y (\chi_2 + \mu_{12} \chi_1) + \tilde{S}_x \mu_{12} (\chi_1 + \mu_{21} \chi_2) \right) - \\
& - \frac{\partial}{\partial y} A \left(\frac{\tilde{F}_x}{E_1 h} F_1(\Phi) - \frac{\tilde{F}_y}{E_2 h} \mu_{21} F_2(\Phi) - \right. \\
& \left. - \tilde{S}_x (\chi_1 + \mu_{21} \chi_2) + \tilde{S}_y \mu_{21} (\chi_2 + \mu_{12} \chi_1) \right) \Bigg] + \\
& + \frac{\partial}{\partial x} \left[\frac{1}{A} \left(\frac{\partial A}{\partial y} \left(\frac{\tilde{F}_y}{G_{12} h} F_3(\Phi) - 2 \tilde{S}_y \chi_{12} (1 - \mu_{12} \mu_{21}) \right) + \right. \right. \\
& + \frac{1}{2} A \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\tilde{F}_y}{G_{12} h} F_3(\Phi) - 2 \tilde{S}_y \chi_{12} (1 - \mu_{12} \mu_{21}) \right) + \\
& + \frac{\partial B}{\partial x} \left(\frac{\tilde{F}_x}{E_1 h} F_1(\Phi) - \frac{\tilde{F}_y}{E_2 h} \mu_{21} F_2(\Phi) - \right. \\
& \left. \left. - \tilde{S}_x (\chi_1 + \mu_{21} \chi_2) + \tilde{S}_y \mu_{21} (\chi_2 + \mu_{12} \chi_1) \right) - \right. \\
& \left. \left. - \frac{\partial}{\partial x} B \left(\frac{\tilde{F}_y}{E_2 h} F_2(\Phi) - \frac{\tilde{F}_x}{E_1 h} \mu_{12} F_1(\Phi) - \tilde{S}_y (\chi_2 + \mu_{12} \chi_1) + \tilde{S}_x \mu_{12} (\chi_1 + \mu_{21} \chi_2) \right) \right) \right].
\end{aligned}$$

Таким образом, получена система уравнений движения (5.63). Следует отметить, что здесь неизвестными функциями являются $W(x, y, t), \Phi(x, y, t)$.

5.6 МЕТОДЫ РЕШЕНИЯ СИСТЕМ УРАВНЕНИЙ И ПРОГРАММНАЯ РЕАЛИЗАЦИЯ

Далее будем рассматривать математическую модель, записанную в виде начальной задачи для системы ОДУ. Следует отметить, что в этой модели производные по временной координате от искомым функций имеют второй

порядок. Путем замены переменных такая система сводится к нормальному виду [129].

Чаще всего для решения таких систем применяется метод Рунге – Кутта [84, 170, 174, 189, 197, 227, 250] 4 порядка точности, однако при использовании явной схемы метода Рунге – Кутта приходится брать очень мелкий шаг по временной координате. Это вызвано тем, что уравнения движения для оболочечных конструкций относятся к так называемым жестким системам уравнений. Для решения жестких систем уравнений существуют специальные методы, например, методы Гира, Розенброка, BDF [129].

В работе [144] Н. А. Тарануха и Г. С. Лейзерович получают уравнения динамики методом Бубнова – Галеркина, а решения находятся методом Крылова – Боголюбова. В работах [53, 84, 88, 108, 142, 160] и др. применяется метод Бубнова – Галеркина, а в работах [26, 176, 209, 222, 228, 284] – метод Релея – Ритца.

В работе Ю. П. Дьяченко и др. [54] нестационарные задачи динамики для составных конструкций предлагается решать методом начальных параметров.

В работе [136] Ю. Э. Сеницким на основе уточнённой теории для построения аналитического решения осесимметричной динамической задачи используется обобщённый метод конечных интегральных преобразований. Решение строится для неоднородных по толщине круговых конических оболочек с конечной сдвиговой жёсткостью.

Статья А. И. Сейфуллайева и К. А. Новрузовой [127] посвящена решению задачи динамики подкрепленной ортотропной цилиндрической оболочки с вязкой жидкостью. На основе вариационного принципа Остроградского – Гамильтона, который применялся и в [100], построено частотное уравнение колебаний, а действующие поверхностные нагрузки со стороны жидкости определяются из решений линеаризованного уравнения Навье – Стокса.

В данной работе, процесс формирования системы (5.53), (5.54) был запрограммирован автором в среде аналитических вычислений Maple. Полученная система ОДУ решалась численно методом Розенброка [203, 267], который эффективен при решении жестких систем.

На разработанную программу было получено Свидетельство о государственной регистрации программы для ЭВМ (Семенов А.А. DynShell: dynamic buckling and nonlinear vibrations of orthotropic shells. Свидетельство № 2017662611, РФ от 13.11.2017 г.), приводится в Приложении Б.

5.7 МЕТОДИКА ИССЛЕДОВАНИЯ УСТОЙЧИВОСТИ И НЕЛИНЕЙНЫХ КОЛЕБАНИЙ ОБОЛОЧЕК ПРИ ДЕЙСТВИИ ДИНАМИЧЕСКОЙ НАГРУЗКИ

5.7.1 Методика исследования устойчивости

Процесс потери устойчивости оболочки при динамическом нагружении отличается от процесса потери устойчивости в статике. Хотя любые критерии потери устойчивости в своей основе используют критерий А. А. Ляпунова (при малом изменении входных данных происходит существенное изменение в решении задачи), в динамике используется свой критерий потери устойчивости.

На Рисунке 5.1 схематично показаны кривые «нагрузка – прогиб» для оболочки при статическом нагружении (кривая 1) и динамическом нагружении (кривая 2).

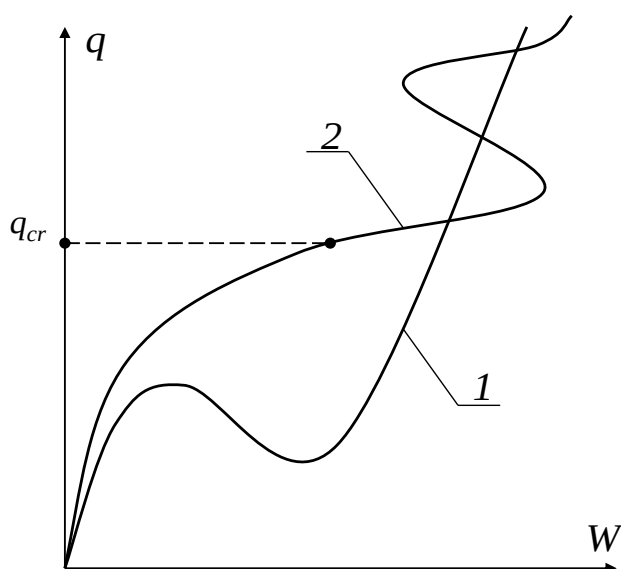


Рисунок 5.1. Схематичное изображение кривых «нагрузка – прогиб» при статическом и динамическом нагружении

Критерием потери устойчивости оболочки при динамическом воздействии является нагрузка, соответствующая точке перегиба графика «нагрузка – прогиб». Этот критерий предложен А. С. Вольмиром [36]. Как видно из графика, после потери устойчивости оболочка совершает колебания вокруг кривой равновесных состояний статической задачи. Если нагрузка $q = A_1 t$, то при увеличении скорости нагружения A_1 критическая нагрузка увеличивается (происходит запаздывание реакции конструкции на воздействие).

5.7.2 Методика исследования нелинейных колебаний

При исследовании свободных колебаний оболочки сначала решается динамическая задача (уравнения движения) до достижения некоторого значения нагрузки. Затем, при найденных ненулевых значениях перемещений переменная нагрузки обнуляется и продолжает решаться динамическая задача. В результате строится кривая «прогиб – время» (Рисунок 5.2) [129].

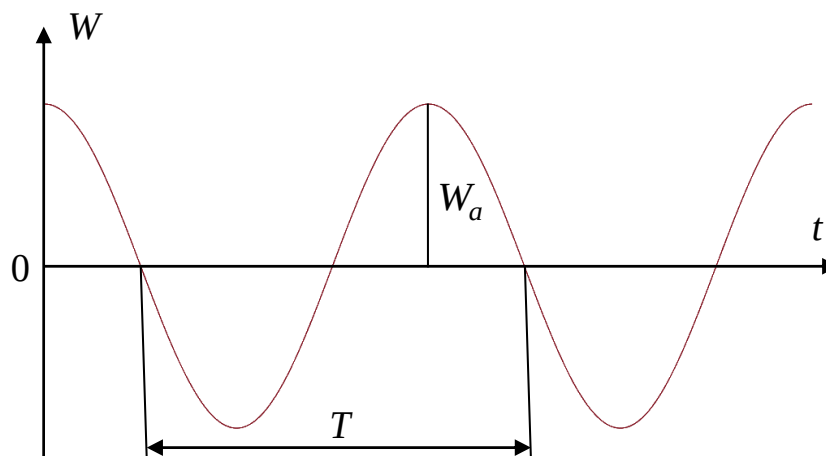


Рисунок 5.2. Вид кривой «прогиб – время» (T – период колебаний, W_a – амплитуда)

Как показано в работах А. С. Вольмира [36] и работах В. В. Карпова [67], зависимость « $W - t$ » при исследовании нелинейных колебаний тонких оболочек может быть очень сложной. Особенно эта зависимость усложняется, когда оболочечная конструкция содержит ребра или вырезы, либо выполнена из

ортотропного или анизотропного материала. Тогда разные точки оболочки могут колебаться даже в противофазе [129] (Рисунок 5.3 [67]).

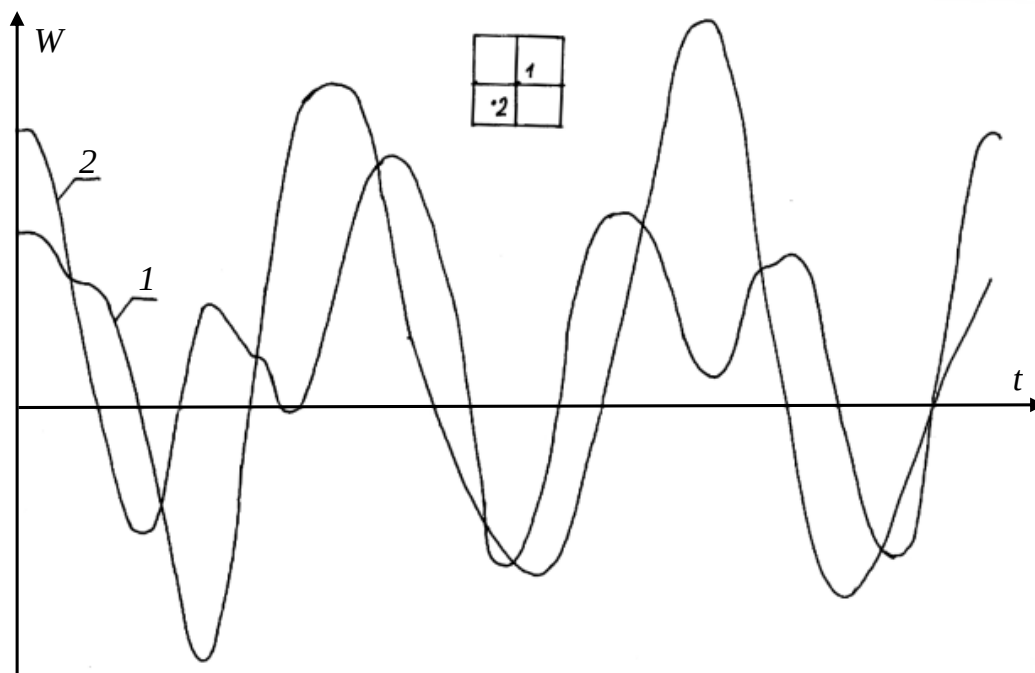


Рисунок 5.3 – Схематичное изображение колебаний центра конструкции (Кривая 1) и четверти конструкции (Кривая 2) в противофазе [67]

5.8 ВЫВОДЫ

В данной главе была получена математическая модель, описывающая процесс деформирования ортотропной оболочки при действии динамической нагрузки. Модель сформулирована в виде начальной задачи для системы ОДУ, которая решается значительно проще, чем система уравнений движения в частных производных. Представленная модель учитывает геометрическую нелинейность, ортотропию материала, инерцию вращения и возможность наличия подкрепления конструкции (ребра жесткости могут вводиться как дискретно, так и по методу конструктивной анизотропии с учетом их сдвиговой и крутильной жесткости). Ее отличительной особенностью является использование усовершенствованного дискретного метода учета ребер жесткости, предложенного автором.

Также были получены еще два варианта математической модели деформирования усиленных ребрами жесткости ортотропных оболочек при действии динамической нагрузки:

- в виде системы дифференциальных уравнений в частных производных, записанных через усилия и моменты. Решение такой системы вызывает определенные математические сложности.

- в виде уравнений в смешанной форме. Такой вариант модели является достаточно упрощенным, однако позволяет проводить исследование конструкций с шарнирно-подвижным способом закрепления контура, которое часто применяется в задачах строительства.

Для возможности сравнения показаны варианты математических моделей, когда за основу принимаются гипотезы Кирхгофа – Лява.

Предложена методика (алгоритм) исследования устойчивости оболочечных конструкций разной геометрической формы при динамическом нагружении. Используется метод Л. В. Канторовича для получения системы уравнений и метод Розенброка для решения жестких систем ОДУ.

Для описанных вариантов математических моделей предложен вариант безразмерных параметров.

По предложенному алгоритму автором было разработано программное обеспечение в среде аналитических вычислений Maple. На разработанную программу было получено Свидетельство о государственной регистрации программы для ЭВМ (Семенов А.А. DynShell: dynamic buckling and nonlinear vibrations of orthotropic shells. Свидетельство № 2017662611, РФ от 13.11.2017 г.), приводится в Приложении Б.

ГЛАВА 6. УСТОЙЧИВОСТЬ И НЕЛИНЕЙНЫЕ КОЛЕБАНИЯ ПОДКРЕПЛЕННЫХ ОБОЛОЧЕК ПРИ ДЕЙСТВИИ ДИНАМИЧЕСКОЙ НАГРУЗКИ

Моделирование процесса потери устойчивости при действии динамической нагрузки является сложной задачей, поскольку в таком случае система обыкновенных дифференциальных уравнений становится жесткой, и ее решение требует применения специальных численных методов и существенно больших вычислительных мощностей.⁷

Многие работы по динамике оболочечных конструкций посвящены исследованию колебательного процесса и анализу частот [160, 227, 232, 250, 254, 277, 285], в то время, как анализу устойчивости их посвящено сравнительно меньше [170, 197, 230, 248].

Azarboni, Ansari и Nazarinezhad [170] численно исследуют нелинейное деформирование пологих оболочек двоякой кривизны при динамическом нагружении. Для решения уравнений движения применяется метод Галеркина, используется тригонометрическая аппроксимация. Найдены значения критических нагрузок, фазовый портрет и другие характеристики системы.

⁷ По результатам проведенного исследования автором опубликованы, в том числе, работы:

- Семенов, А. А. Методика исследования устойчивости пологих ортотропных оболочек двоякой кривизны при динамическом нагружении / А. А. Семенов // International Journal for Computational Civil and Structural Engineering. – 2017. – Т. 13. – № 2. – С. 145–153.
- Semenov, A. Nonlinear Mathematical Model for Dynamic Buckling of Stiffened Orthotropic Shell Panels / A. Semenov // International Journal of Structural Stability and Dynamics. – 2022. – P. 2250191.
- Semenov, A. Dynamic Buckling of Stiffened Shell Structures with Transverse Shears under Linearly Increasing Load / A. Semenov // Journal of Applied and Computational Mechanics. – 2022. – Vol. 8. – No. 4. – P. 1343–1357.
- Semenov, A. A. Models of Deformation of Stiffened Orthotropic Shells under Dynamic Loading / A. A. Semenov // Journal of Siberian Federal University. Mathematics & Physics. – 2016. – Vol. 9. – No. 4. – P. 485–497.
- Семенов, А. А. Анализ свободных нелинейных колебаний полой ортотропной оболочки двоякой кривизны при действии внешней равномерно распределенной динамической нагрузки / А. А. Семенов // Архитектура – Строительство – Транспорт: Материалы 73-й научной конференции профессоров, преподавателей, научных работников, инженеров и аспирантов университета. – СПб.: СПбГАСУ, 2017. – Т. 1. – С. 9–15.
- Semenov, A. A. Stability of cylindrical shell panels of modern materials under dynamic loading / A. A. Semenov // AIP Conference Proceedings. – 2017. – Vol. 1915. – P. 030025.
- Semenov, A. Dynamic buckling of stiffened orthotropic shell structures / A. Semenov // Magazine of Civil Engineering. – 2018. – No. 6(82). – P. 3–11.
- Semenov, A. Mathematical model of deformation of orthotropic shell structures under dynamic loading with transverse shears / A. Semenov // Computers & Structures. – 2019. – Vol. 221. – P. 65–73.

Lavrenčič и Brank [230] изучают процесс потери устойчивости оболочки с помощью неявных численных схем. Расчетные примеры включают в себя, в том числе, классические задачи: например, потеря устойчивости цилиндрической оболочки под действием осевой нагрузки. Результаты, полученные для задачи динамики, сравниваются с результатами для задачи статики (используется метод продолжения решения).

В большинстве известных работ, математические модели деформирования оболочек построены на основе гипотез Кирхгофа – Лява (CSDT, “классические” модели, [8, 26, 53, 84, 127, 167, 232, 237, 248, 285] и др.), где неизвестными функциями являются только три функции нормальных перемещений. Существенно меньше работ используют модели на базе гипотез Тимошенко (Миндлина – Рейсснера, FSDT, [20, 54, 170, 243, 276] и др.), где к неизвестным функциям перемещений добавляются еще две функции, характеризующие углы поворота нормали. Такая модель является более точной, поскольку учитывает поперечные сдвиги, что особенно актуально при расчете оболочек, усиленных ребрами жесткости.

Huang и Qiao [207] исследуют потерю устойчивости многослойных композитных пологих оболочек двоякой кривизны с несовершенствами, подвергающихся сжатию и сдвигу в плоскости. Разработана новая эквивалентная модель с переменной жесткостью для ребристых оболочек, для учета переменной жесткости в двух ортогональных направлениях применяется функция Хевисайда.

В работе [54] Ю. П. Дьяченко, Э. Я. Еленицким и Д. В. Петровым предлагается подход, позволяющий получать решения нестационарных задач динамики пластин и оболочек вращения ступенчато-переменной толщины с конечной сдвиговой жёсткостью (теория типа С. П. Тимошенко).

В работе [26] представлены результаты исследования цилиндрической конструктивно анизотропной оболочки из стеклопластика при граничных условиях Навье. Расчет частот свободных колебаний выполнен на основании метода Рэлея – Ритца. Однако, рассматривается модель лишь первого приближения.

В работе Ю. Э. Сеницкого [136] для неоднородных по толщине круговых конических оболочек, защемлённых по торцам, рассматривается произвольное динамическое нагружение. В расчётной схеме учитываются диссипативные силы вязкого сопротивления. Анализируются напряжённо-деформированное состояние и динамические характеристики оболочек в зависимости от степени неоднородности конструкций.

В работе Z. del Prado, P. B. Gonçalves и M. P. Païdoussis [250] исследуется устойчивость при динамическом нагружении ортотропных цилиндрических оболочек (используются нелинейные уравнения теории оболочек Доннелла) с внутренним течением жидкости, которые подвергаются либо статическому осевому сжатию и гармонической осевой нагрузке, либо гармоническому боковому давлению. Метод Галеркина используется для вывода нелинейных уравнений движения, которые затем решаются методом Рунге – Кутты. Авторами анализируются конструкции из четырех различных ортотропных материалов. Результаты показывают, что материал ортотропии имеет сильное влияние на значения критических нагрузок, собственные частоты, форму потери устойчивости и амплитудно-частотную характеристику. Влияние нелинейных факторов возрастает с увеличением отношения модулей упругости.

D. V. Dung и V. H. Nam [189] на основе классической теории тонких оболочек (CSDT) с учетом геометрической нелинейности исследуют подкрепленные замкнутые цилиндрические оболочки из функционально-градиентных материалов. В работе используются метод «размазывания» жесткости ребер, метод Галеркина и метод Рунге – Кутты 4 порядка. Получены численные результаты, позволяющие оценить влияние ребер жесткости и значений других начальных данных на колебания и потерю устойчивости конструкций.

Особое внимание следует уделить подкрепленным оболочечным конструкциям. Исследования их нелинейного деформирования при действии динамической нагрузки можно найти в работах [20, 23, 54, 107, 127, 160, 189, 190, 222, 240, 248, 251, 254, 261, 270, 285] и др., среди которых одним из наиболее

полных исследований пологих подкрепленных оболочек двоякой кривизны являются работы В. В. Карпова [67, 73].

М. Rafiee и др. [256] исследуют устойчивость подкрепленных цилиндрических оболочек из стеклопластика, усиленных ребрами жесткости, при осевом сжатии. Ребра жесткости располагаются на внутренней и внешней поверхностях оболочки, и не обязательно располагаются в соответствии с координатными линиями. Уравнения движения получены на основе теории Койтера, в свою очередь основанной на теории первого порядка (FSDT), и решаются с использованием принципа минимума потенциальной энергии. Задача сводится к решению характеристических уравнений. Рассматривается жесткое закрепление контура оболочки, шарнирно-неподвижное и комбинированное. Выполнено сравнение с результатами, полученными по методу конечных элементов, а также экспериментальными данными. Анализируется влияние различных параметров, таких как коэффициент Пуассона, граничные условия, толщина и линейные размеры оболочки, параметры ребер жесткости и их количество.

В данной главе будем рассматривать ортотропные оболочечные конструкции произвольного вида толщиной h , находящиеся под действием внешней механической нагрузки, зависящей от времени (Рисунок 6.1). Будем рассматривать модель деформирования оболочки типа Тимошенко (Миндлина – Рейсснера).

Для демонстрации применимости предложенной математической модели и алгоритма, проведем расчеты устойчивости оболочечных конструкций из изотропных и ортотропных материалов. Далее расчеты будем проводить при использовании второго варианта математической модели (уравнения движения в виде начальной задачи для системы ОДУ).

Для исследования процесса деформирования оболочечных конструкций при действии нагрузки, зависящей от времени, возьмем те же варианты материалов и конструкций, что и для задач статики (см. Таблицу 4.1 и Таблицу 4.2). Выполним вычислительные эксперименты для конструкций трех видов: пологие оболочки двоякой кривизны; цилиндрические панели; конические панели.

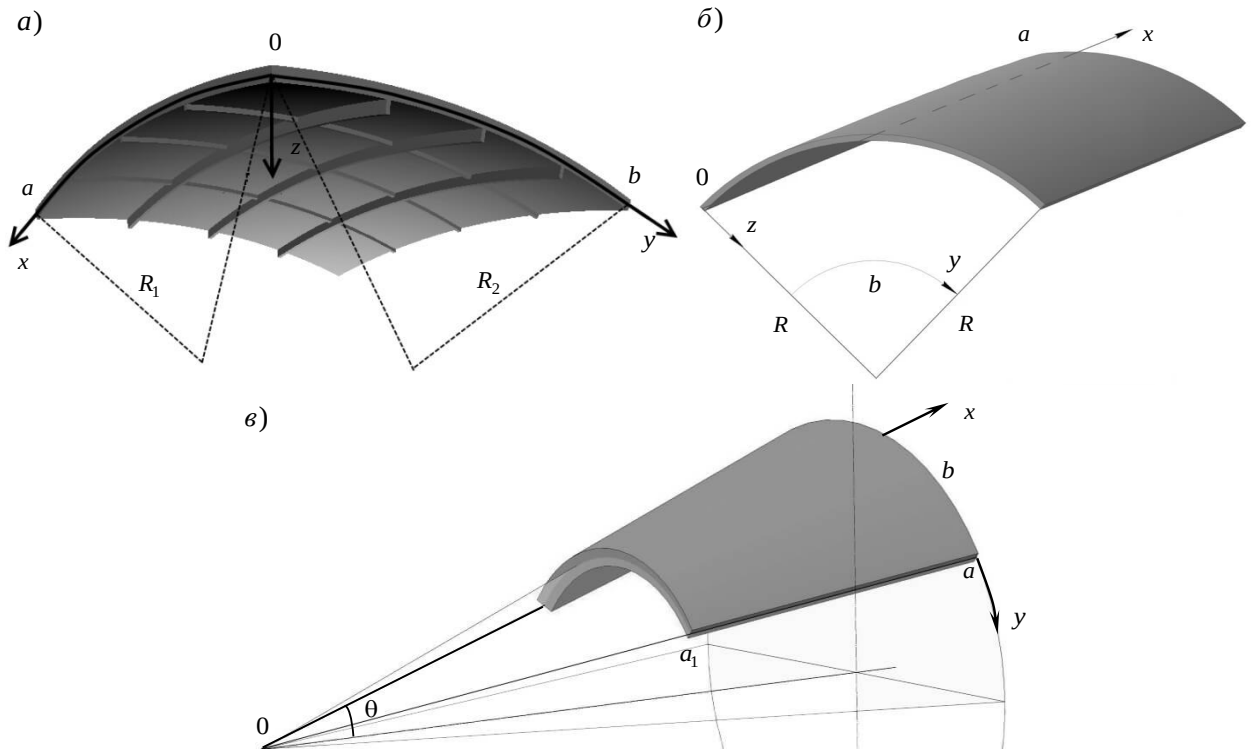


Рисунок 6.1. Вид рассматриваемых конструкций

Здесь и далее, если не указано обратное, все результаты и входные значения приводятся в размерных параметрах для удобства сравнения конструкций из разных материалов, притом в расчетной программе все вычисления делаются в безразмерных параметрах.

Для дальнейших вычислений примем $N=9$ (и $N=16$ для конических оболочек).

6.1 УСТОЙЧИВОСТЬ ПОЛОГИХ ОБОЛОЧЕК ДВОЯКОЙ КРИВИЗНЫ

Будем рассматривать пологие оболочки двоякой кривизны, шарнирно-неподвижно закрепленные по контуру. В соотношениях метода Л. В. Канторовича (5.46) будем использовать для шарнирно-неподвижного закрепления следующие аппроксимирующие функции:

$$\begin{aligned}
\bar{U} &= \bar{U}(\xi, \eta, \bar{t}) = \sum_{k=1}^{\sqrt{N}} \sum_{l=1}^{\sqrt{N}} \bar{U}_{kl}(\bar{t}) \sin(2k\pi\xi) \sin((2l-1)\pi\eta), \\
\bar{V} &= \bar{V}(\xi, \eta, \bar{t}) = \sum_{k=1}^{\sqrt{N}} \sum_{l=1}^{\sqrt{N}} \bar{V}_{kl}(\bar{t}) \sin((2k-1)\pi\xi) \sin(2l\pi\eta), \\
\bar{W} &= \bar{W}(\xi, \eta, \bar{t}) = \sum_{k=1}^{\sqrt{N}} \sum_{l=1}^{\sqrt{N}} \bar{W}_{kl}(\bar{t}) \sin((2k-1)\pi\xi) \sin((2l-1)\pi\eta), \\
\bar{\Psi}_x &= \bar{\Psi}_x(\xi, \eta, \bar{t}) = \sum_{k=1}^{\sqrt{N}} \sum_{l=1}^{\sqrt{N}} \bar{\Psi}_{xkl}(\bar{t}) \cos((2k-1)\pi\xi) \sin((2l-1)\pi\eta), \\
\bar{\Psi}_y &= \bar{\Psi}_y(\xi, \eta, \bar{t}) = \sum_{k=1}^{\sqrt{N}} \sum_{l=1}^{\sqrt{N}} \bar{\Psi}_{ykl}(\bar{t}) \sin((2k-1)\pi\xi) \cos((2l-1)\pi\eta).
\end{aligned} \tag{6.1}$$

Данный вариант аппроксимирующих функций учитывает симметрию, которая есть у оболочек двоякой кривизны, а также у цилиндрических панелей (при равномерности приложенной нагрузки и отсутствии несовершенств формы).

6.1.1 Пологие оболочки двоякой кривизны без ребер жесткости

6.1.1.1 Изотропные конструкции

Рассматриваемые варианты оболочек и полученные значения критических нагрузок показаны в Таблице 6.1. Геометрические параметры конструкций совпадают с данными из Таблицы 4.2 и здесь дублируются для удобства.

В ряде случаев, в процессе деформирования конструкции наблюдаются локальные потери устойчивости (образование вмятин и их возможное перераспределение по площади оболочки). Здесь и далее, если есть локальная потеря устойчивости, ее значение выделяется курсивом (здесь они наблюдаются при малых скоростях нагружения). Около значений критических нагрузок в скобках для сравнения указаны значения, полученные в работе [67].

Результаты для конструкции варианта 5 близки к результатам работы [67], притом являются более точными в связи с использованием математической модели

Тимошенко – Рейсснера и удержанием большего числа слагаемых в методе Л. В. Канторовича.

Таблица 6.1. Нагрузки потери устойчивости для пологих оболочек двоякой кривизны (изотропные конструкции)

Вар.	$a = b, \text{ м}$	$R_1 = R_2, \text{ м}$	$h, \text{ м}$	$\bar{A}_1$	$A_1, \text{ МПа/с}$	N	Материал	Критическая нагрузка		
								$\bar{P}_{cr}$	$q_{cr}, \text{ МПа}$	
1	16	25	0,08	4482,38	1	9	Сталь С345	17189,497	2,2561	
								22492,354	2,9521	
				44823,8	10			20069,497	2,6341	
				33875,211	4,4461					
				61303,782	8,0461					
4	10,8	40,05	0,09	100	0,425	9			918,38	0,9301
				1000	4,25				1141,7	1,1562
				6400	27,2	1		2388,0031	2,4184	
						4		2308,7581	2,3382	
						9		2107,3032	2,1341	
						16		2104,6171	2,1314	
						25		2107,3032	2,1341	
5	5,4	20,25	0,09	100	27,2	9		223,3 (256)	3,6	
				1000	272			395,9 (383)	4,7	

Демонстрация сходимости метода Л. В. Канторовича (изменение значения параметра N) представлена на Рисунке 6.2. Как видно из графика, форма кривых при $N = 9, 16, 25$ практически идентична.

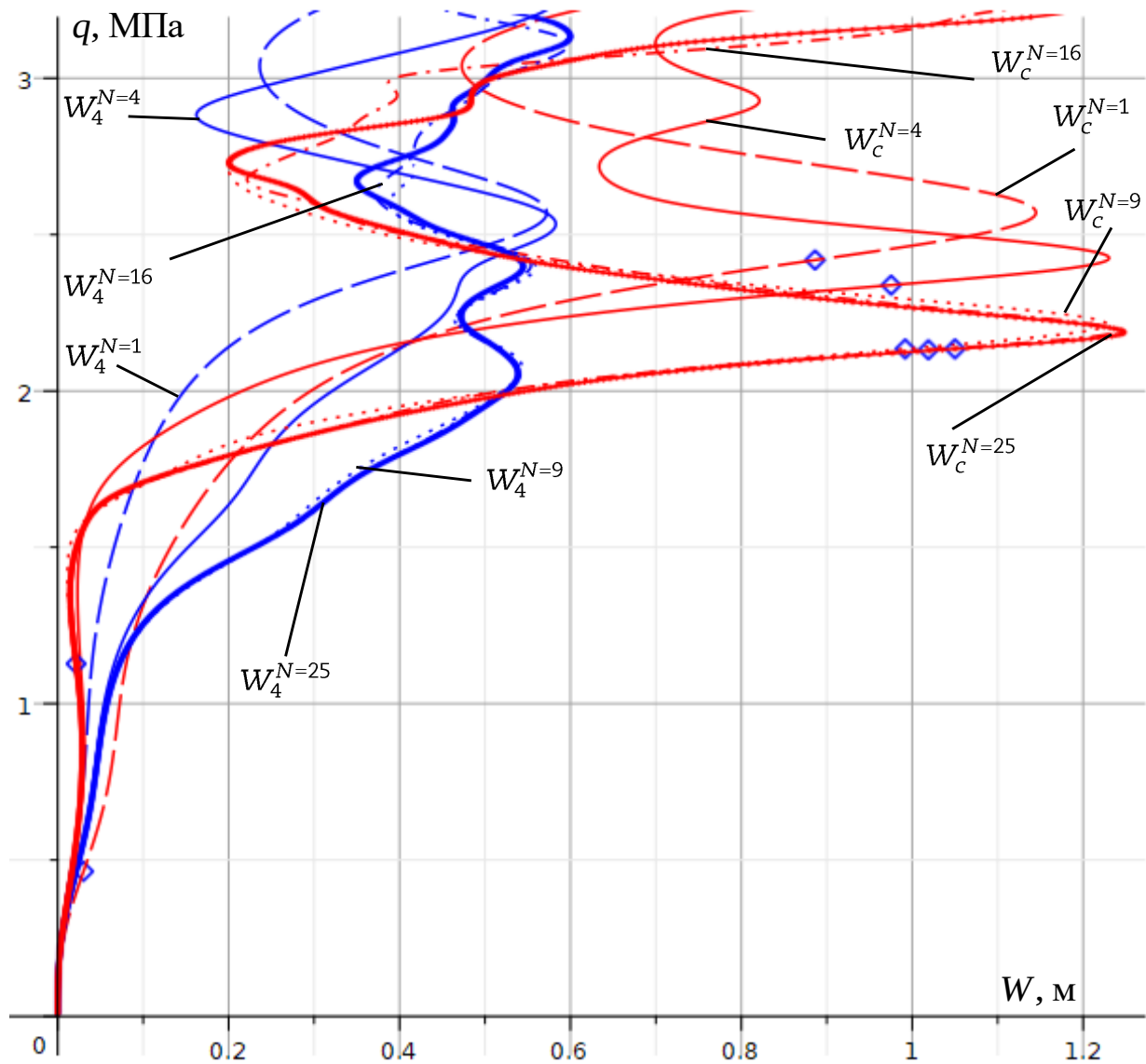


Рисунок 6.2. Зависимость «нагрузка – прогиб» для стальной пологой оболочки двойкой кривизны варианта 4 при различном значении N

6.1.1.2 Ортотропные конструкции

В Таблице 6.2 приведены значения нагрузок потери устойчивости $\bar{P}_{cr}$ для всех рассмотренных вариантов оболочек. По аналогии с Таблицей 6.1, здесь значения нагрузок локальных потерь устойчивости выделяются курсивом.

Таблица 6.2. Значения для ортотропных оболочек двойкой кривизны

Вар.	$a = b,$ м	$R_1 = R_2,$ м	$h,$ м	$\bar{A}_1$	A_1	Материал	Критическая нагрузка	
							$\bar{P}_{cr}$	$q_{cr},$ МПа
1	16	25	0,08	42894,311	1	Стеклопластик Т-10/УПЭ22-27	13278	0,244
							23183	0,426
				428943,11	10		47020	0,864
				4289431,1	100		166204	3,054
				42894311	1000		840816	15,450
				3898,295	1	Углепластик Т300/976	3494,35	0,3058
							7694,35	0,6733
				38982,95	10		10962,92	0,9593
				389829,5	100		42654,35	3,7323
				3898295	1000		153614,35	13,4413
				14370	1	Стеклопластик E-Glass / Ероху	12320,597	0,467411
				143700	10		18422,738	0,698909
4	10,8	40,05	0,09	100	0,044	Т-10/УПЭ22-27	524,38	0,0743
					1,765	М60J/Ероху	269,05	0,4282
				1000	0,440	Т-10/УПЭ22-27	801,94	0,1137
					17,65	М60J/Ероху	560,85	0,8926
5	5,4	20,25	0,09	100	2,84	Т-10/УПЭ22-27	152,19	0,3453
					112,9	М60J/Ероху	111,65	2,8433
				1000	28,4	Т-10/УПЭ22-27	353,56	0,8021
					1129	М60J/Ероху	334,57	8,5193

На Рисунке 6.3 приводится график зависимости «нагрузка – прогиб» для ортотропной оболочки варианта 4, выполненной из стеклопластика Т-10/УПЭ22-27, а на Рисунке 6.4 – для ортотропной оболочки варианта 5, выполненной из углепластика М60J/Ероху.

В обоих случаях скорость нагружения принималась $\bar{A}_1 = 1000$. Значения показаны в безразмерных параметрах. Красная кривая соответствует прогибу в центре конструкции, синяя – в четверти. Точкой на красной кривой показан перегиб графика, соответствующий нагрузке потери устойчивости.

Для пологой оболочки двоякой кривизны варианта 1 из стеклопластика Т-10/УПЭ22-27 проведем сравнение кривых «нагрузка – перемещение» в зависимости от скорости нагружения. Результат данного сравнения показан на Рисунке 6.5, скорость нагружения указывается в верхних индексах (МПа/с).

Следует отметить, что у данной конструкции перед общей потерей устойчивости наблюдается локальная потеря устойчивости.

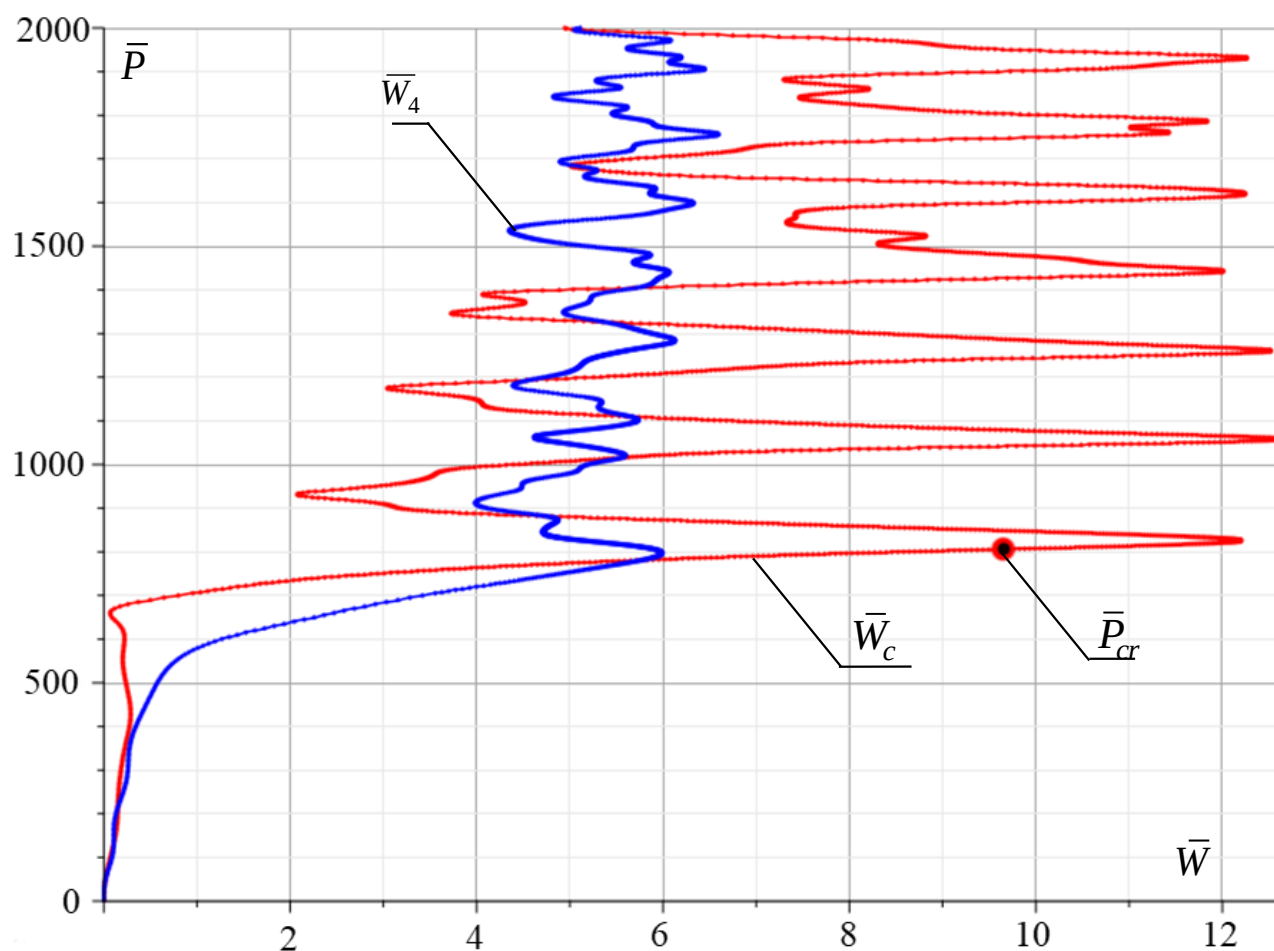


Рисунок 6.3. График зависимости «нагрузка – прогиб» для оболочки варианта 4 из стеклопластика Т-10/УПЭ22-27 (в безразмерных параметрах)

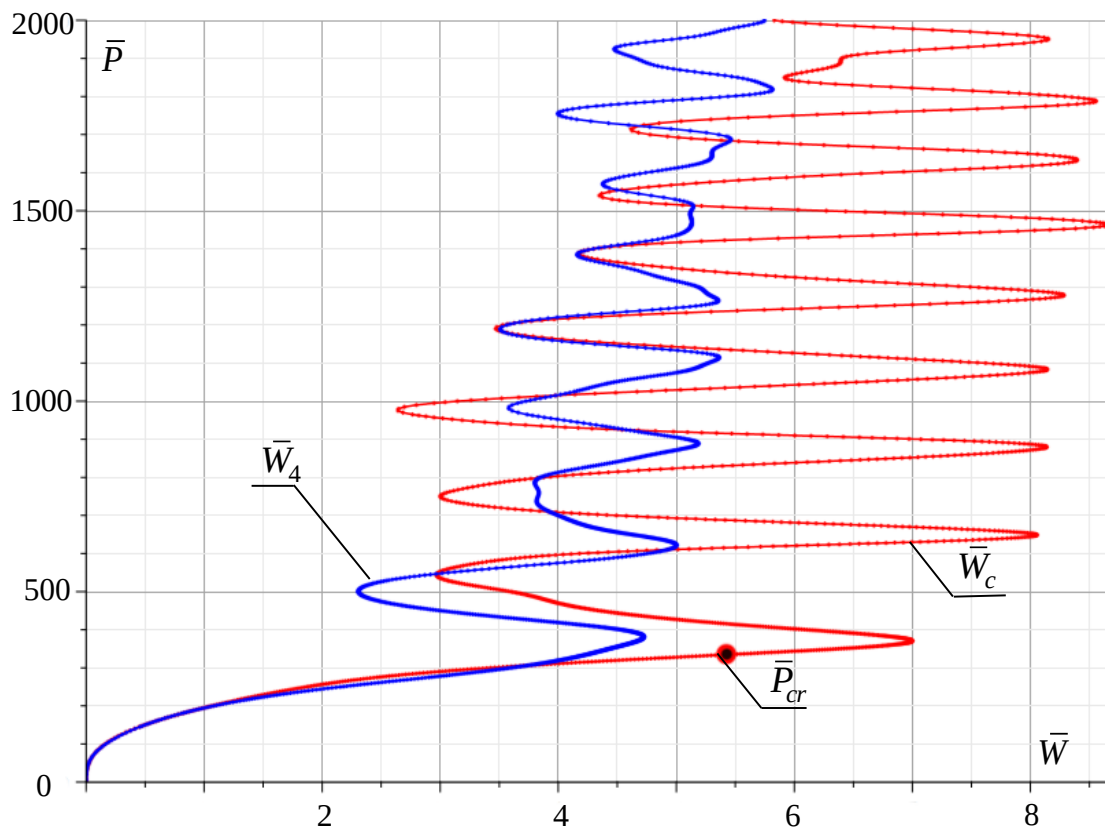


Рисунок 6.4. График зависимости «нагрузка – прогиб» для оболочки варианта 5 из материала М60J/Ероху (в безразмерных параметрах)

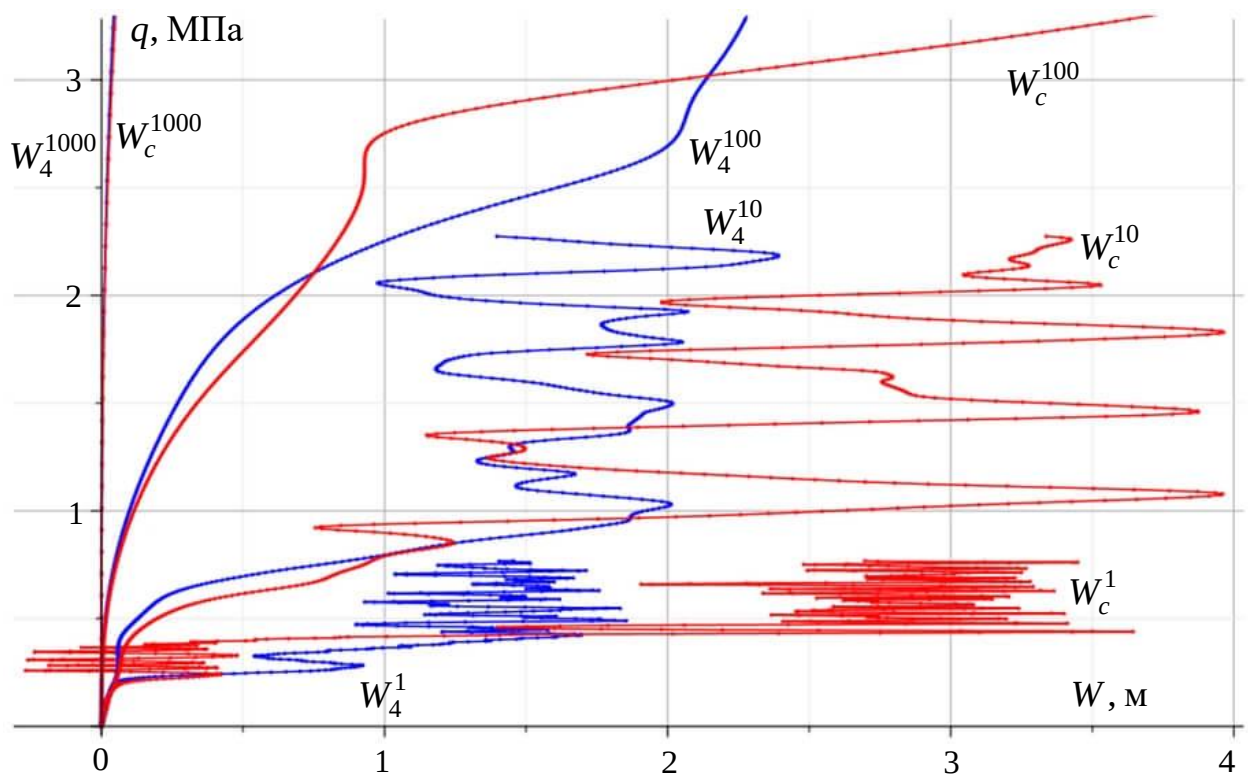


Рисунок 6.5. Зависимость «нагрузка – прогиб» оболочки двоякой кривизны варианта 1 из материала Т-10/УПЭ22-27 при разных скоростях нагружения

На Рисунке 6.6 показан график зависимости перемещения W от нагрузки для этой же конструкции при скорости нагружения 10 МПа/с и выборе различных ортотропных и изотропных материалов. Точками отмечены участки кривых, где наблюдается локальная или общая потеря устойчивости, верхний индекс соответствует названию материала.

В Таблице 6.3 приведен фазовый портрет (зависимость между W и $\frac{\partial W}{\partial t}$) для пологой оболочки двоякой кривизны варианта 1 из углепластика Т300/976 при разных скоростях нагружения.

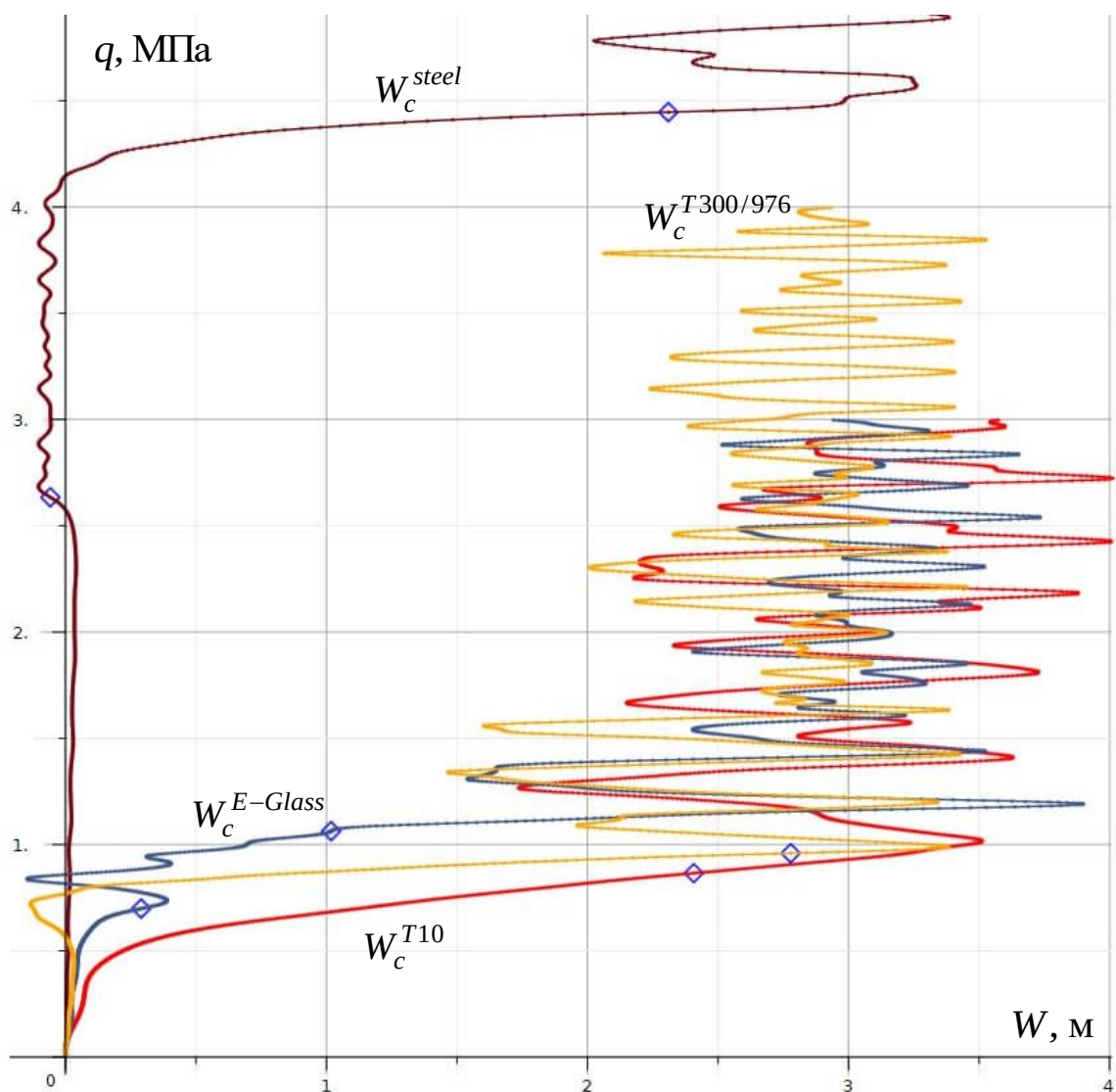
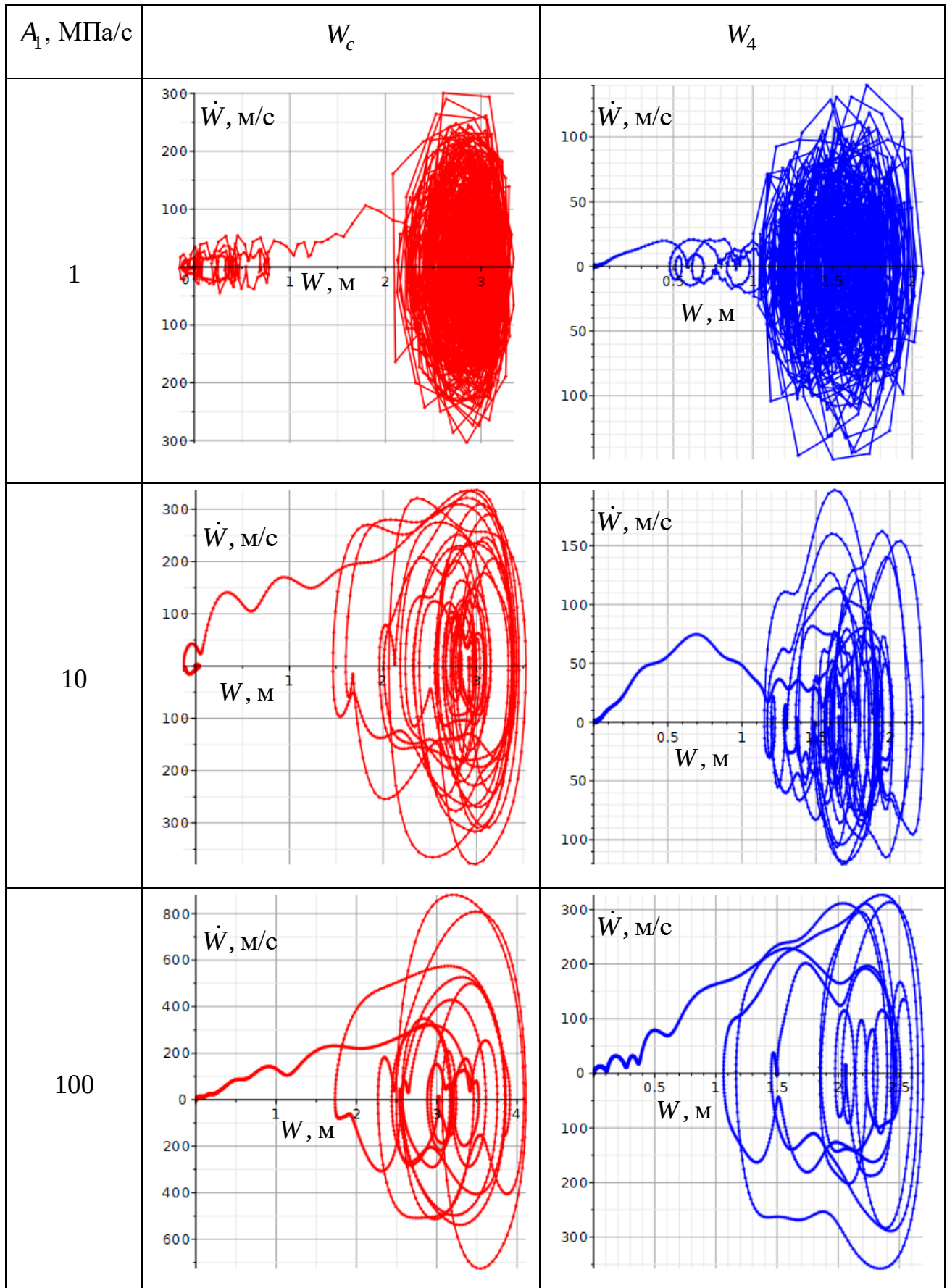
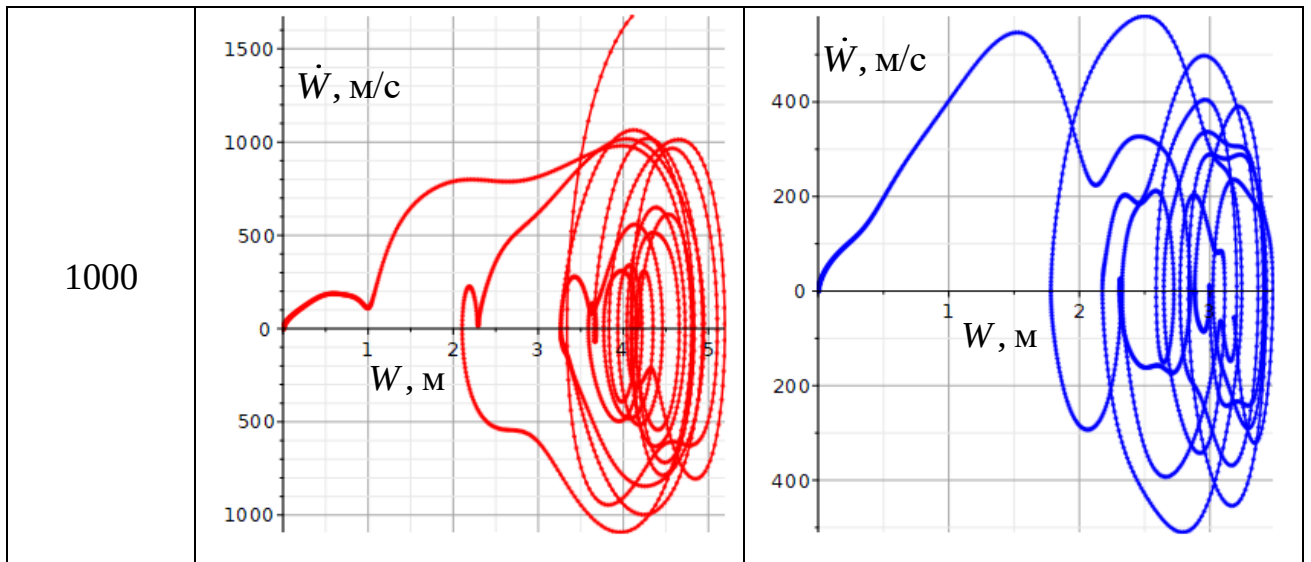


Рисунок 6.6. Зависимость « $q - W$ » для пологой оболочки двоякой кривизны варианта 1 при использовании разных ортотропных и изотропных материалов (скорость нагружения 10 МПа/с)

Таблица 6.3. Фазовый портрет для полой оболочки двойкой кривизны варианта 1 из углепластика Т300/976 и при разных скоростях нагружения





На Рисунках 6.7, 6.8 показаны зависимости «нагрузка – перемещение W » для пологих оболочек двоякой кривизны вариантов 4 и 5 при выборе разных материалов и скоростей нагружения.

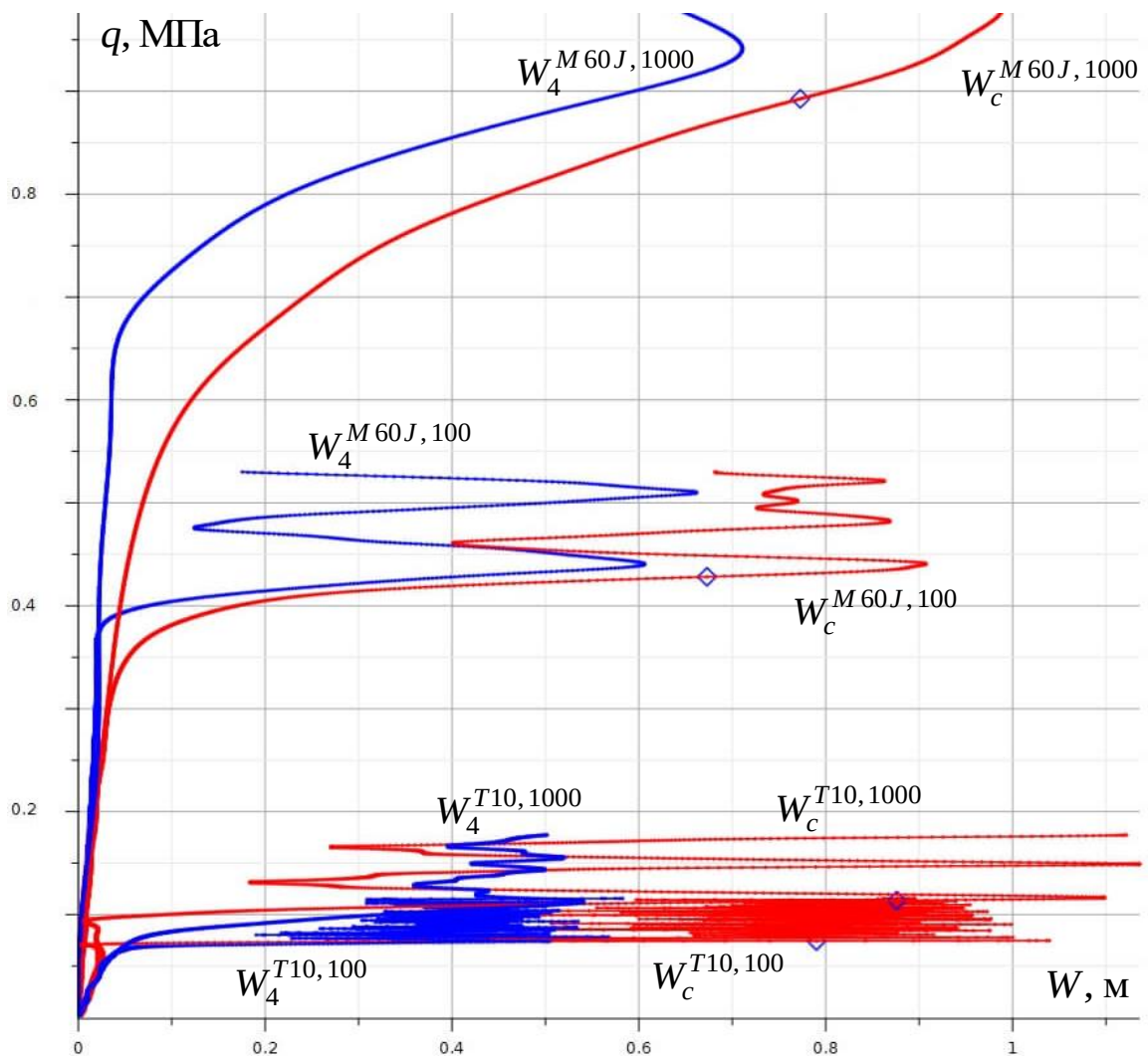


Рисунок 6.7. Зависимость «нагрузка – прогиб», полученная для оболочки двоякой кривизны варианта 4 при выборе разных материалов и скоростей нагружения

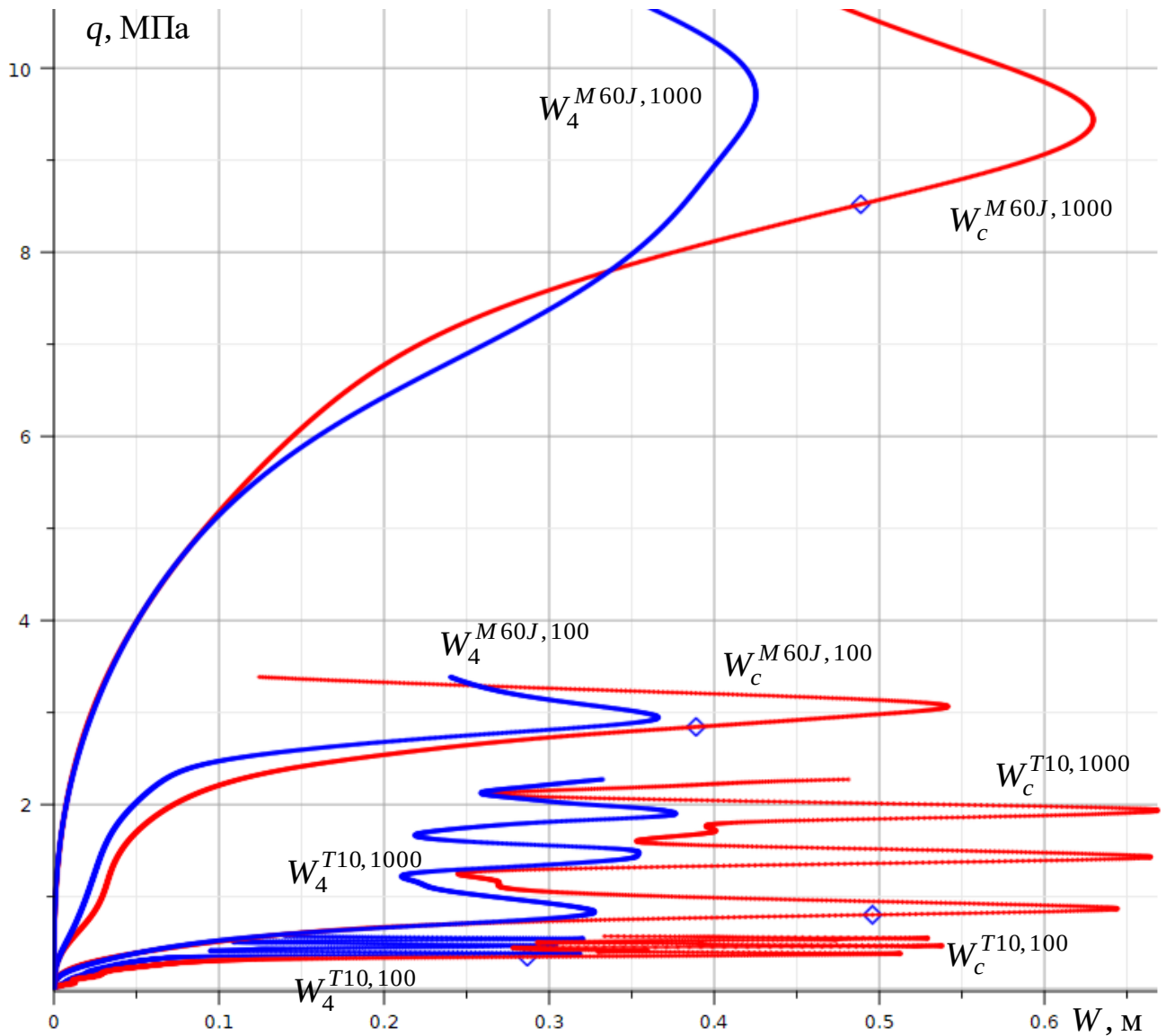


Рисунок 6.8. Зависимость «нагрузка – прогиб» оболочки двоякой кривизны варианта 5 при выборе разных материалов и скоростей нагружения

Полученные в ходе выполнения расчетов критические нагрузки для конструкций из углепластика M60J/Ероху существенно выше, чем для конструкций из материала Т-10/УПЭ22-27, что согласуется с их разницей в модулях упругости и других характеристиках.

Притом, максимальная величина прогибов после потери устойчивости для них примерно одинакова.

6.1.2 Пологие оболочки двоякой кривизны, подкрепленные ребрами жесткости

Как и в предыдущем параграфе, оболочки находятся под действием внешней равномерно распределенной поперечной нагрузки $q = q(x, y, t) = q_{sv} + A_1 t$, $P_x = P_x(x, y) = P_{xsv}$, $P_y = P_y(x, y) = P_{ysv}$. Здесь q_{sv}, P_{xsv}, P_{ysv} – компоненты нагрузки от собственного веса.

Усиление конструкции осуществляется за счет расположения подкрепляющих элементов со стороны вогнутости, которые распределены по области конструкции с шагом x_r . Их параметры: $r^j = r^i = 2h$, $h^j = h^i = 3h$. Внешние ребра располагаются от края оболочки на расстоянии $0,5x_r$.

Рассмотрим пологую оболочку двоякой кривизны варианта 4 при скорости нагружения $A_1 = 27,2$ МПа/с.

На Рисунке 6.9 [295] рассматриваемый вариант конструкции с сеткой ребер жесткости 4×4 показан в глобальной системе координат (X, Y, Z) .

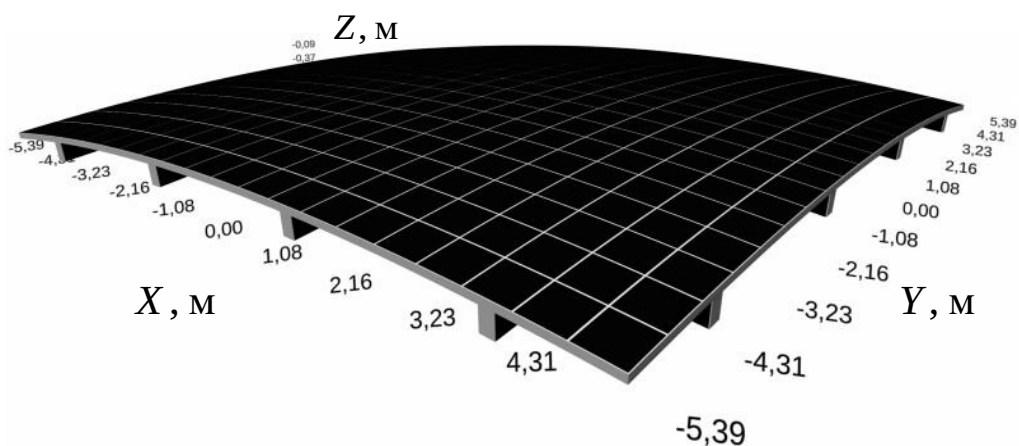


Рисунок 6.9. Оболочка двоякой кривизны варианта 4 в глобальной системе координат [295]

Зависимость прогиба от нагрузки для данной оболочки, выполненной из стали С345, проанализирована в зависимости от количества подкрепляющих элементов (верхний индекс в обозначениях кривых) на Рисунке 6.10. На кривой прогиба W_c значение, соответствующее потере устойчивости, отмечено синей

точкой (соответствует точке перегиба). Результаты показывают, что увеличение количества ребер жесткости от сетки 1×1 до 2×2 оказывает наибольшее влияние на увеличение значения критической нагрузки. Также для этого типа конструкции характерно проявление максимального прогиба в центральной точке, притом со значительно большей амплитудой перемещения, чем в точке четверти [263].

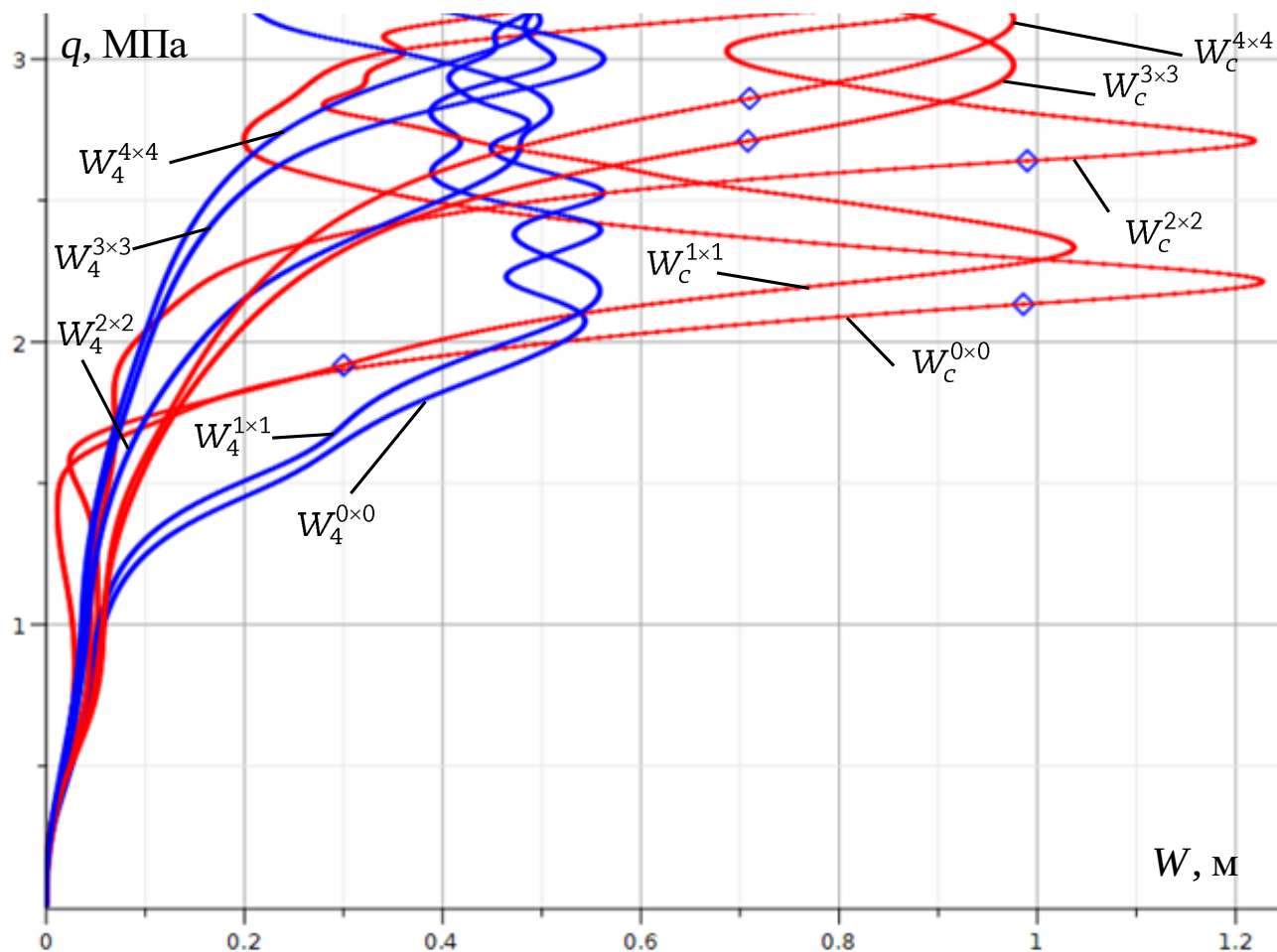


Рисунок 6.10. Зависимость « $q - W$ » для оболочки двоякой кривизны при различном числе ребер жесткости

В Таблице 6.4 показан график фазового портрета (зависимости между W и $\frac{\partial W}{\partial t}$) для рассматриваемой оболочки двоякой кривизны с различным количеством ребер жесткости при $A_1 = 27,2$ МПа/с.

В Таблице 6.5 приведены критические нагрузки q_{cr} пологой оболочки двоякой кривизны 4 из стали С345 при различных вариантах усиления. Используется уточненный дискретный метод, предложенный автором, и обычный дискретный, известный ранее.

Таблица 6.4. Фазовый портрет для стальной полой оболочки двойной кривизны варианта 4 с различным количеством ребер жесткости при $A_1 = 27,2$ МПа/с.

Сетка ребер	W_c	W_4
0×0		
1×1		
2×2		
3×3		

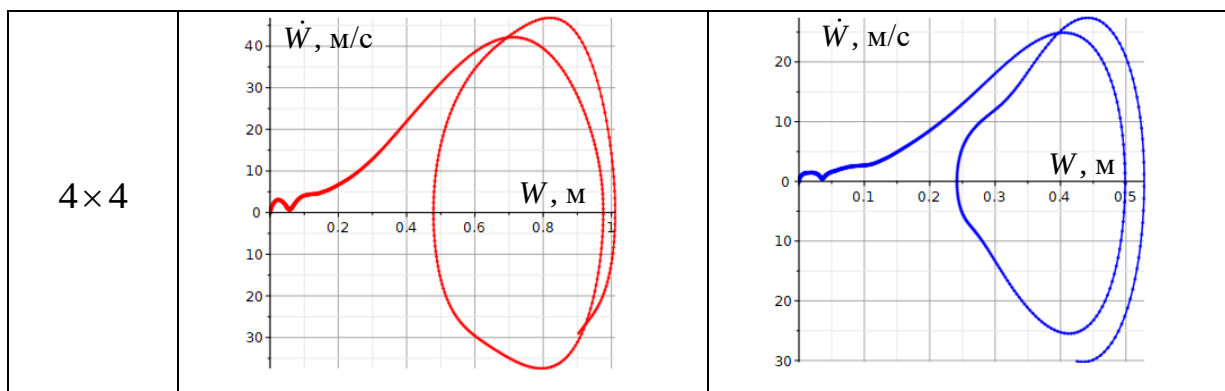


Таблица 6.5. Нагрузки потери устойчивости оболочки двойкой кривизны варианта 4 при различных методах учета и схемах усиления

Метод	Значение q_{cr} , МПа				
	0×0	1×1	2×2	3×3	4×4
Дискретный	2,1328	2,5265	2,7448	3,0829	3,2685
Уточненный дискретный	2,1328	1,9172	2,6401	2,7102	2,8605

На Рисунке 6.11 представлены зависимости «нагрузка – прогиб» для рассматриваемой оболочки при разных методах учета ребер для схем подкрепления 1×1 и 4×4.

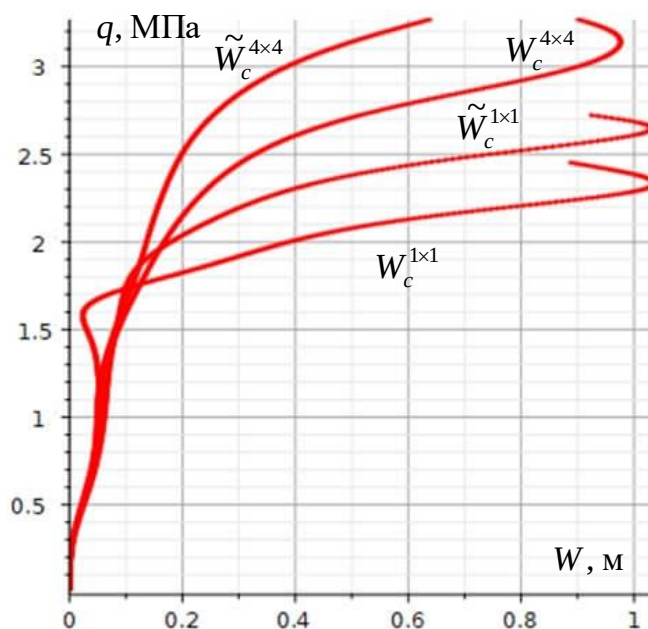


Рисунок 6.11. Влияние выбора метода учета ребер на зависимость «нагрузка – перемещение» (кривые $\tilde{W}$ получены по обычному дискретному методу)

Как видно из полученных данных, значения критических нагрузок, полученные при помощи обычного дискретного метода, могут быть завышены.

6.2 УСТОЙЧИВОСТЬ ЦИЛИНДРИЧЕСКИХ ПАНЕЛЕЙ

При динамическом нагружении устойчивость цилиндрических панелей из современных материалов, и, в частности, ортотропных [234, 272], исследовалась в работах [230, 234, 237, 248, 272].

Ng и др. [243] исследована устойчивость при динамическом нагружении шарнирно-неподвижно закрепленных изотропных цилиндрических панелей под совместным действием статических и периодических осевых нагрузок. Использовано расширение теории оболочек Доннелла до теории первого порядка (FSDT), получена система уравнений Матье – Хилла. Результаты сравниваются с данными, полученными с использованием классической теории оболочек (CSDT).

Авторами работы [222] разработан теоретический метод исследования влияния кольцевых элементов жесткости на динамические характеристики композитных цилиндрических оболочек, подвергнутых импульсному нагружению. Используется теория тонких оболочек Кирхгофа – Лява в сочетании с дискретным способом ввода ребер жесткости. Анализ основан на разложении функций перемещений в двойные ряды Фурье, удовлетворяющие граничным условиям. Исследовано влияние эксцентриситета, количества, размера и положения ребер жесткости на процесс деформирования оболочек.

Далее будем рассматривать изотропные и ортотропные цилиндрические панели, шарнирно-неподвижно закрепленные по контуру. Нагрузка, действующая на конструкции, состоит из равномерно-распределенной зависящей от времени составляющей и компонент постоянной нагрузки от собственного веса:

$$q = q(x, y, t) = q_{sv} + A_1 t, \quad P_x = P_x(x, y) = P_{xsv}, \quad P_y = P_y(x, y) = P_{ysv},$$

где q_{sv}, P_{xsv}, P_{ysv} – нагрузка от собственного веса; A_1 – скорость нагружения.

При выборе такой конструкции в соотношениях математической модели необходимо принять

$$A = 1, \quad B = R_2, \quad R_1 = \infty, \quad R_2 = \text{const.}$$

6.2.1 Цилиндрические панели без ребер жесткости

6.2.1.1 Изотропные конструкции

Рассматриваемые варианты оболочек и полученные значения критических нагрузок потери устойчивости показаны в Таблице 6.6. Геометрические параметры конструкций совпадают с данными из Таблицы 4.2 и здесь дублируются для удобства.

Как и в случае с пологими оболочками двоякой кривизны, здесь наблюдается появление локальных потерь устойчивости при малых скоростях нагружения.

Таблица 6.6. Значения критических нагрузок потери устойчивости

Вар.	a , м	b , рад	R_2 , м	h , м	$\bar{A}_1$	A_1 , МПа/с	Материал	Критическая нагрузка	
								$\bar{P}_{cr}$	q_{cr} , МПа
1	16	1	16	0,08	4482,4	1	Сталь С345	8046,6395	1,0561
								197379,97	25,9061
					44824	10		12427,593	1,6311
								199856,16	26,2310
					448200	100		28618,07	3,7561
					4482000	1000		159132,36	20,8860
3	1,5	0,4	2,5	0,01	100	1		1728,48	0,7177

6.2.1.2 Ортотропные конструкции

Рассмотрим вначале цилиндрическую панель с геометрическими параметрами: $h = 0,08$ м, $a = 16$ м, $b = 1$ рад, $R_2 = 16$ м (вариант 1 в Таблице 4.2).

Сопоставление кривых «нагрузка – перемещение» для рассматриваемой панели из материала E-Glass/Ероху в зависимости от скорости нагружения показано на Рисунке 6.12.

На Рисунке 6.13 построены кривые зависимостей «нагрузка – прогиб» при скорости нагружения 100 МПа/с и выборе различных ортотропных и изотропных материалов.

В Таблице 6.7 показаны все полученные значения нагрузок потери устойчивости рассматриваемой цилиндрической панели в зависимости от выбора ортотропного материала и скорости нагружения.

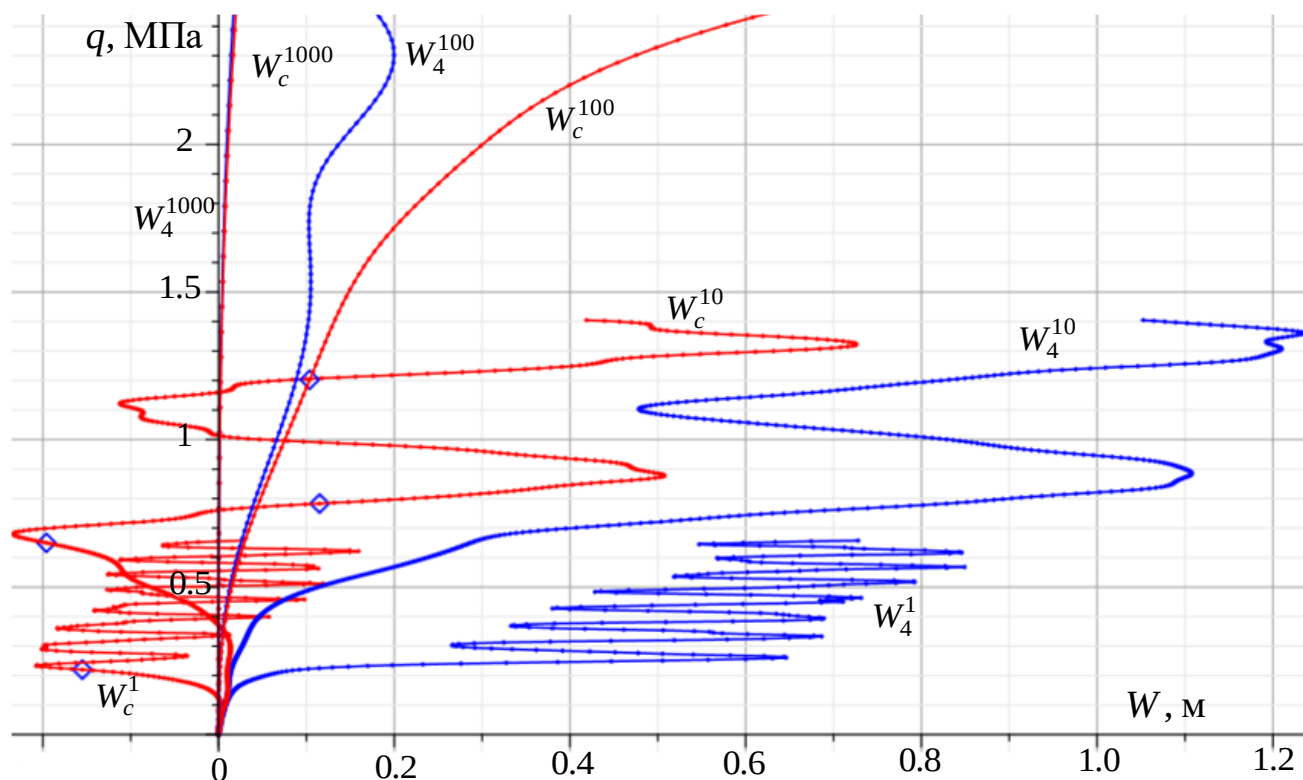


Рисунок 6.12. Зависимость «нагрузка – прогиб» для цилиндрической панели варианта 1 при разных значениях скорости нагружения (материал E-Glass/Ероху)

Далее рассмотрим панель цилиндрической оболочки протяженностью $a = 150h$, углом разворота $b = 0,4$ рад, радиусом $R_2 = 250h$ и толщиной $h = 0,01$ м (вариант 3) при скорости нагружения $A_1 = 1$ МПа/с. Направление укладки волокон в ортотропном материале № 2 соответствует направлению образующей (ось x). Расчеты проводились при $N = 9$.

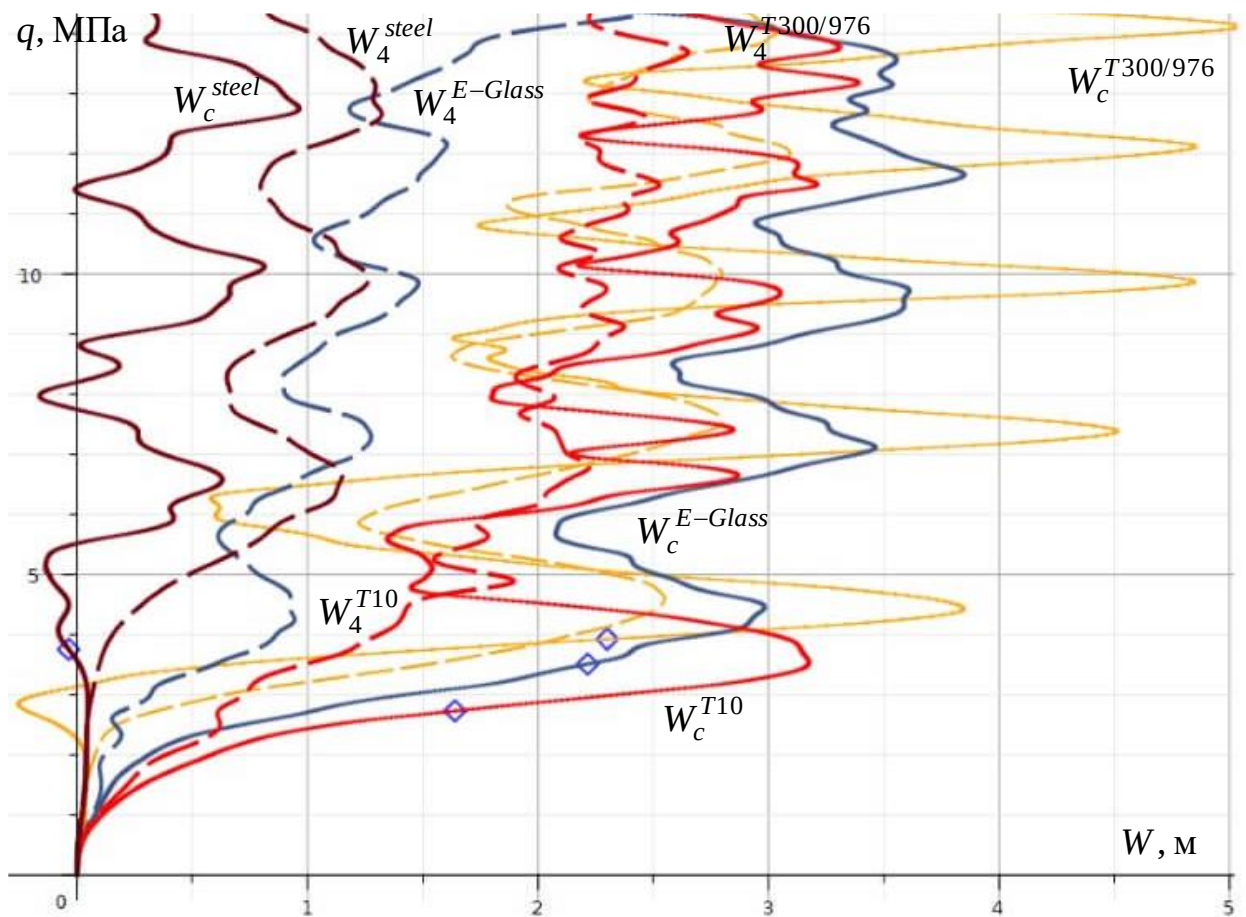


Рисунок 6.13. Зависимость « $q - W$ » для цилиндрической панели варианта 1 при использовании разных ортотропных и изотропных материалов

Таблица 6.7. Результаты расчета для цилиндрической панели 1

Материал	A_1 , МПа/с			
	1	10	100	1000
	Критическая нагрузка q_{cr} , МПа			
Стеклопластик Т-10/УПЭ22-27	0,1205	0,6504	2,7314	15,3014
Углепластик Т300/976	0,2753	0,7663	3,9263	16,3513
Стеклопластик Е-Glass / Ероху	0,2294 9,5414	0,6374 7,0774	3,5114	15,2014
Сталь С345	1,0561 25,9061	1,6311 26,2311	3,7561	20,8861

Рассмотрим случаи, когда панель выполнена из ортотропных или изотропных материалов: E-Glass/Эпоxy [280], AS/3501 Graphite/Эпоxy [280], T-10/УПЭ22-27 [152], M60J/Эпоxy [137], а также изотропного – стали С345. На Рисунке 6.14 показаны соответствующие им кривые «нагрузка – прогиб».

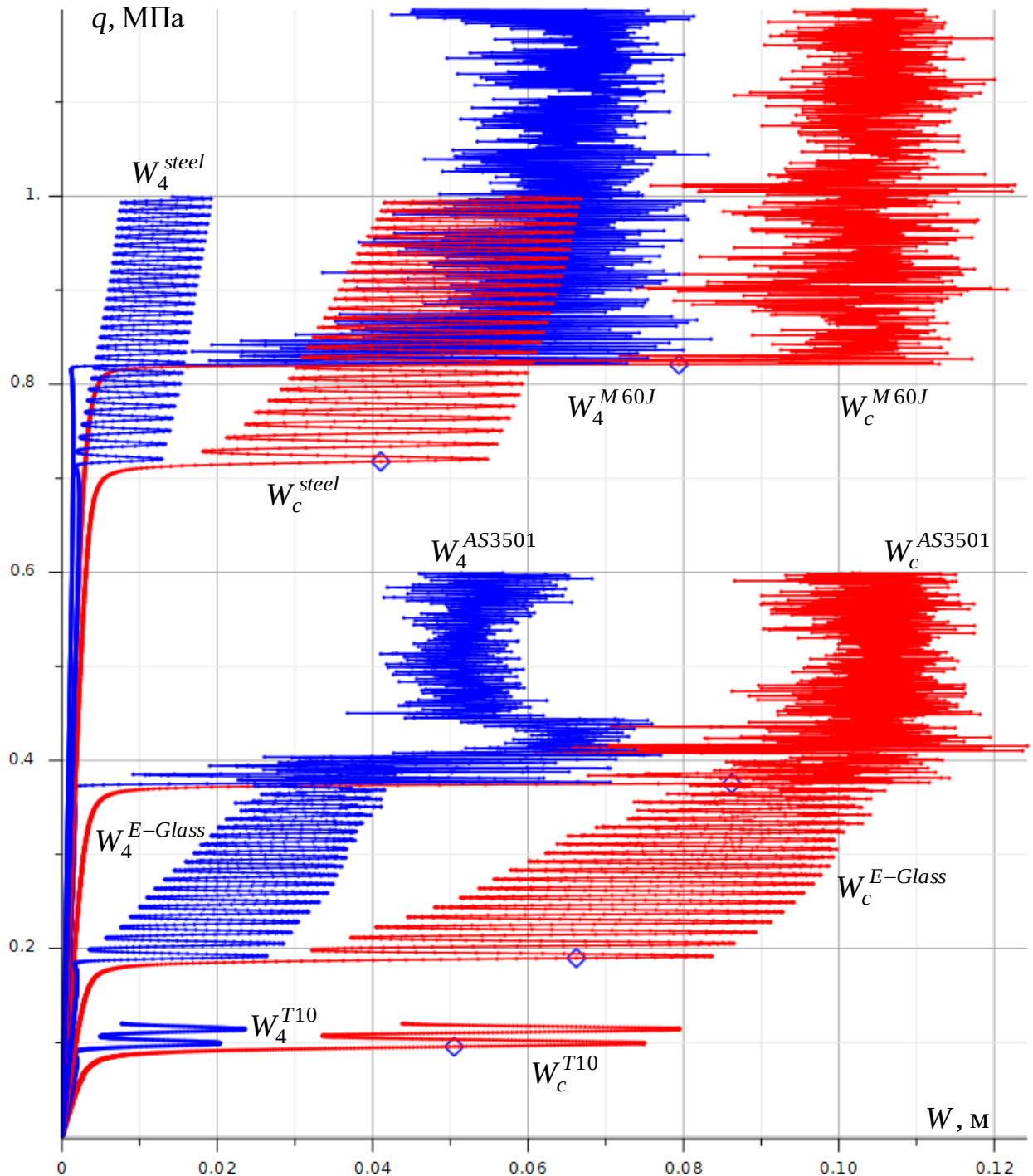


Рисунок 6.14. Зависимости «нагрузка – прогиб» для варианта панели 3 при скорости нагружения 1 МПа/с и выборе разных материалов

В ряде случаев, по аналогии с задачами статики, возникают сложности с определением локальных потерь устойчивости, так как они практически незаметны при анализе графика зависимости “ $q - W$ ” (или, в безразмерном случае, “ $\bar{P} - \bar{W}$ ” – Рисунок 6.15, а), однако они становятся видны, если посмотреть на график зависимости других функций перемещений (Рисунок 6.15, б).

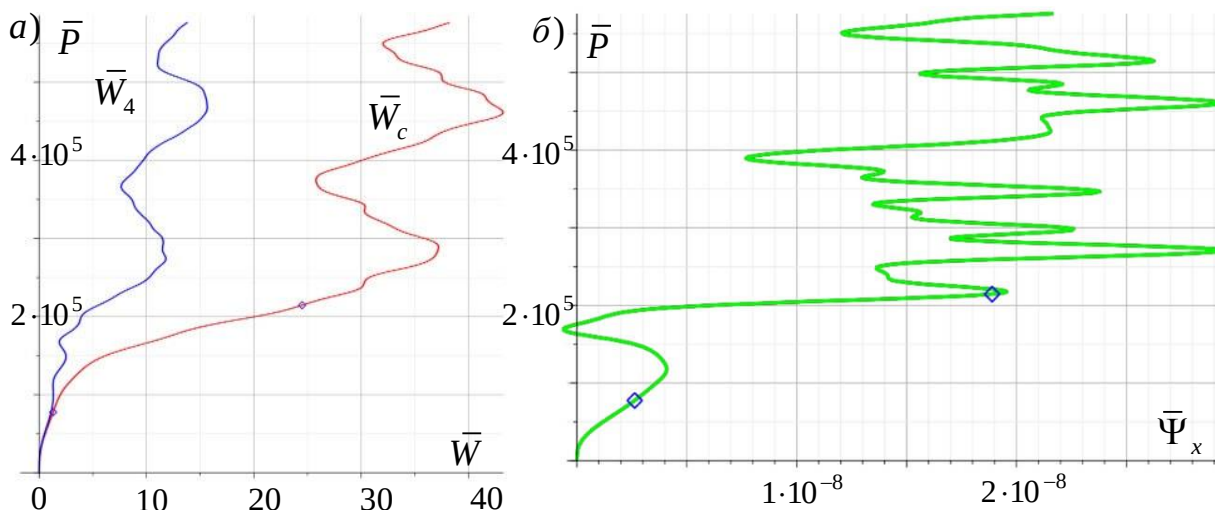


Рисунок 6.15. Определение локальных потерь устойчивости по графикам других компонент перемещений

На данных рисунках показаны зависимости для цилиндрической панели варианта 1 из материала E-Glass/Ероху и скорости нагружения 100 МПа/с. Как видно из графиков, первая (локальная) потеря устойчивости более явно выражена на графике зависимости “ $\bar{P} - \bar{\Psi}_x$ ”.

Таким образом, был проведен анализ устойчивости некоторых вариантов цилиндрических панелей, выполненных из ортотропных материалов, при динамическом нагружении.

6.2.2 Цилиндрические панели, подкрепленные ребрами жесткости

Рассмотрим панели, подкрепленные с внутренней стороны ортогональной сеткой ребер жесткости, равномерно распределенных по поверхности. Ширина ребер принимается $r^j = r^i = 2h$, а высота $h^j = h^i = 3h$. Расстояние между ребрами жесткости равно χ_r . Внешние ребра отстоят от края конструкции на $0,5\chi_r$.

Подробнее остановимся на цилиндрической панели варианта 1 при скорости нагружения $A_1 = 10$ МПа/с. На Рисунке 6.16 [295] рассматриваемый вариант конструкции со схемой подкрепления жесткостными элементами 8×8 показан в глобальной системе координат (X, Y, Z) .

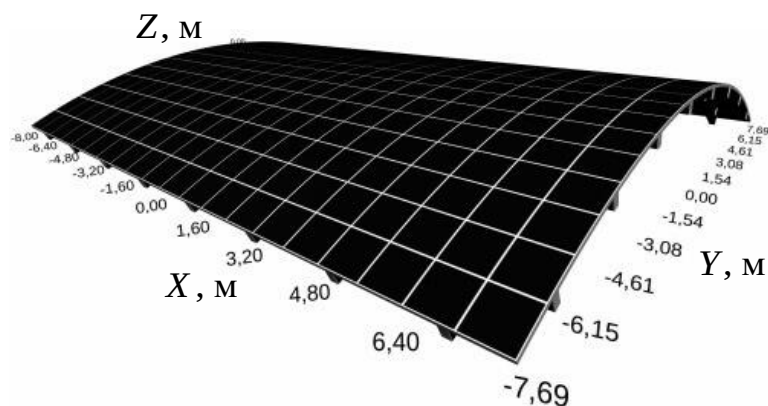


Рисунок 6.16. Цилиндрическая панель варианта 1 в глобальной системе координат [295]

Для данной панели (вариант 1, материал – сталь С345) сравнение кривых «нагрузка – прогиб» в зависимости от количества подкрепляющих элементов показано на Рисунке 6.17.

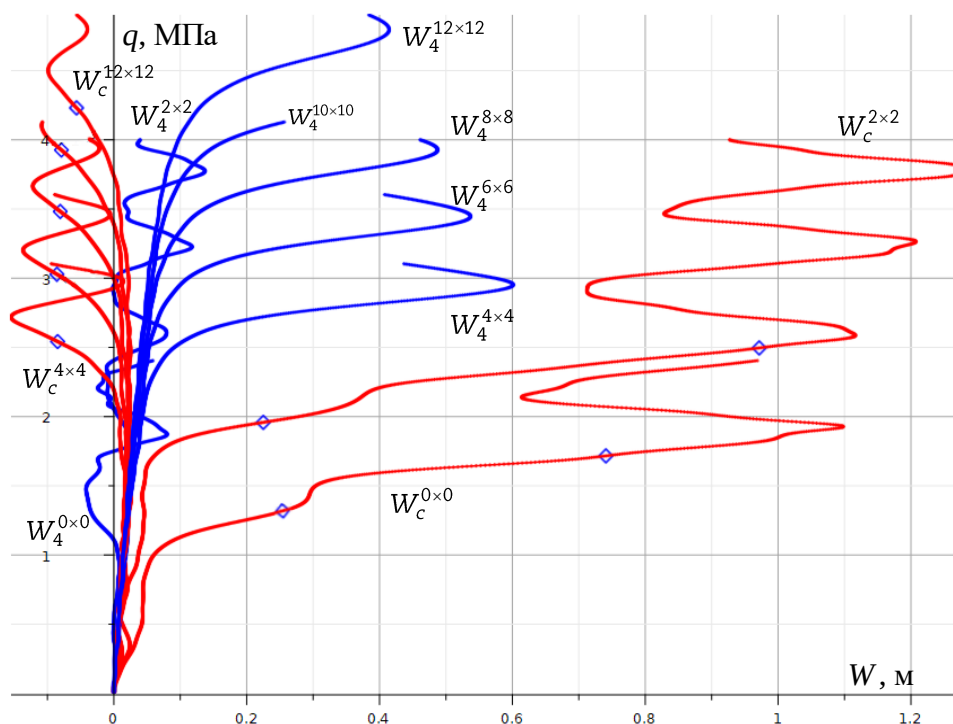
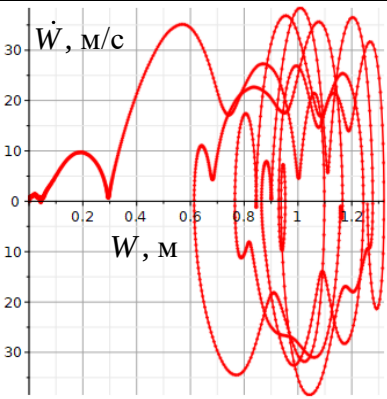
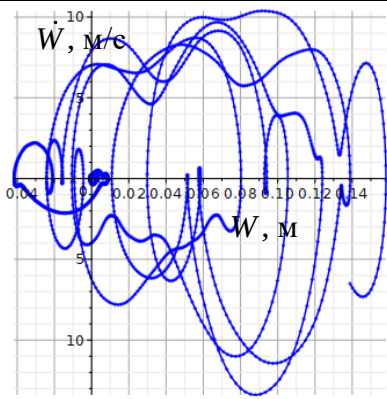
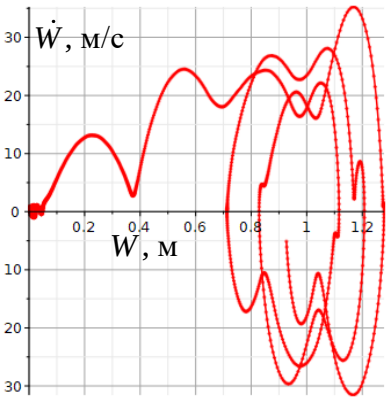
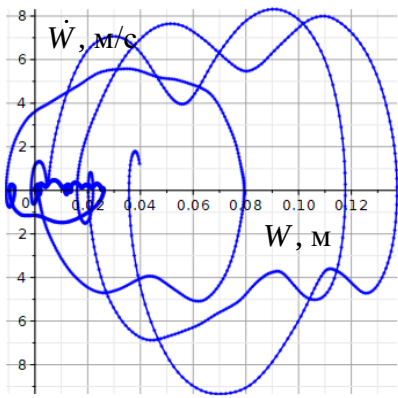
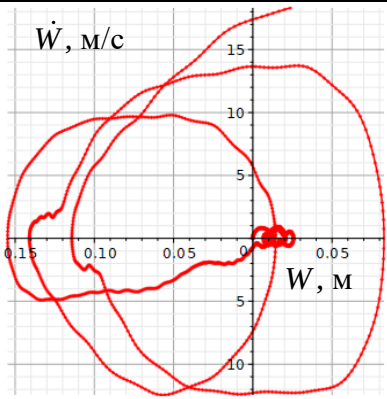
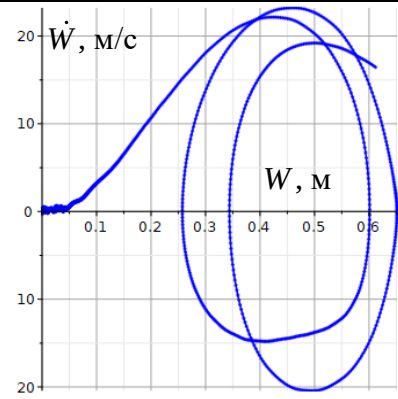
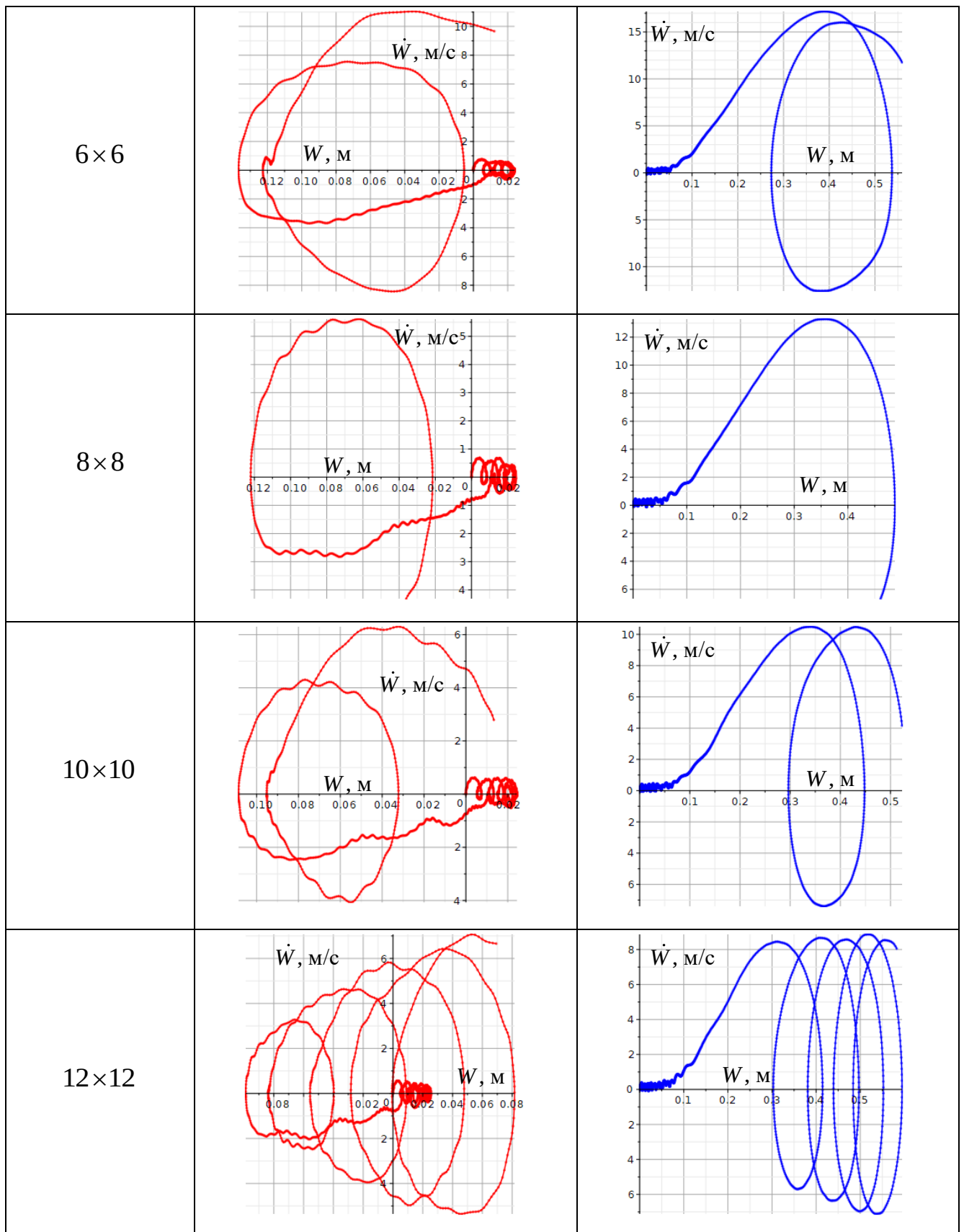


Рисунок 6.17. Зависимость «нагрузка – прогиб» для исследуемой цилиндрической панели при различном числе подкрепляющих элементов

Следует отметить, что для данной конструкции локальная потеря устойчивости наблюдается до общей потери устойчивости. В Таблице 6.8 приведен фазовый портрет (зависимость между W и $\frac{\partial W}{\partial t}$) для рассматриваемой цилиндрической панели с различными вариантами схемы усиления при скорости нагружения $A_1 = 10$ МПа/с [263].

Таблица 6.8. Фазовый портрет для цилиндрической панели варианта 1 при $A_1 = 10$ МПа/с и разными вариантами усиления

Сетка ребер	W_c	W_4
0×0		
2×2		
4×4		



В Таблице 6.9 показаны критические нагрузки потери устойчивости q_{cr} цилиндрической панели 1 при различных методах учета ребер жесткости и схемах

усиления. В дополнение к уточненному дискретному методу, предложенному автором, представлен ранее использовавшийся обычный дискретный метод, без учета уточняющих коэффициентов (2.43), а также метод конструктивной анизотропии и метод учета ребер жесткости при контакте с обшивкой «по линии». Также в Таблице 6.9 показана разница в процентах между критическими нагрузками потери устойчивости при расчете по дискретному и уточненному дискретному методам усиления.

Таблица 6.9. Критические нагрузки потери устойчивости цилиндрической панели варианта 1 из стали С345 при различных методах и вариантах усиления

Метод	Критическая нагрузка потери устойчивости q_{cr} , МПа						
	0×0	2×2	4×4	6×6	8×8	10×10	12×12
Дискретный	1,7162	2,2291	2,9881	4,0141	4,9021	5,3641	5,9463
Уточненный дискретный		1,9582	2,5421	3,0281	3,4821	3,9261	4,2306
МКА		2,1211	2,5711	3,0086	3,4661	3,8886	4,2761
По линии		1,7436	2,1286	2,4836	2,8511	2,8511	2,8511
Разница в значениях по дискретному и уточненному дискретному методам, %	–	12,15	14,93	24,56	28,97	26,81	28,85

Исходя из полученных данных видно, что увеличение числа подкрепляющих элементов приводит к увеличению разницы в значениях, получаемых по разным методам. В данном случае, это вызвано накоплением отклонения в дискретном методе в связи с отсутствием уточняющих коэффициентов, присутствующих в уточненном дискретном методе.

Усиление цилиндрической панели подкрепляющими элементами позволяет повысить значения нагрузок потери устойчивости (например, для рассмотренного варианта панели при сетке ребер 10×10 – в два раза).

6.3 УСТОЙЧИВОСТЬ КОНИЧЕСКИХ ПАНЕЛЕЙ

Будем рассматривать конические панели, шарнирно-неподвижно закрепленные по контуру. Нагрузка, действующая на конструкции, состоит из равномерно-распределенной зависящей от времени составляющей и компонент постоянной нагрузки от собственного веса:

$$q = q(x, y, t) = q_{sv} + A_1 t, \quad P_x = P_x(x, y) = P_{xsv}, \quad P_y = P_y(x, y) = P_{ysv},$$

где q_{sv}, P_{xsv}, P_{ysv} – нагрузка от собственного веса; A_1 – скорость нагружения.

При выборе такой конструкции в соотношениях математической модели необходимо принять

$$A = 1, \quad B = x \cdot \sin \theta, \quad R_1 = \infty, \quad R_2 = x \cdot \operatorname{tg} \theta,$$

где θ – угол конусности.

Следует отметить, что для конической панели в связи с отсутствием симметрии вдоль оси x (безразмерная ось ξ) аппроксимирующие функции, используемые ранее, здесь использовать нельзя. Поэтому возьмем их в следующем виде:

$$\begin{aligned} \bar{U} &= \bar{U}(\xi, \eta, \bar{t}) = \sum_{k=1}^{\sqrt{N}} \sum_{l=1}^{\sqrt{N}} \bar{U}_{kl}(\bar{t}) \sin(k\pi\xi) \sin((2l-1)\pi\eta), \\ \bar{V} &= \bar{V}(\xi, \eta, \bar{t}) = \sum_{k=1}^{\sqrt{N}} \sum_{l=1}^{\sqrt{N}} \bar{V}_{kl}(\bar{t}) \sin(k\pi\xi) \sin(2l\pi\eta), \\ \bar{W} &= \bar{W}(\xi, \eta, \bar{t}) = \sum_{k=1}^{\sqrt{N}} \sum_{l=1}^{\sqrt{N}} \bar{W}_{kl}(\bar{t}) \sin(k\pi\xi) \sin((2l-1)\pi\eta), \\ \bar{\Psi}_x &= \bar{\Psi}_x(\xi, \eta, \bar{t}) = \sum_{k=1}^{\sqrt{N}} \sum_{l=1}^{\sqrt{N}} \bar{\Psi}_{xkl}(\bar{t}) \cos(k\pi\xi) \sin((2l-1)\pi\eta), \\ \bar{\Psi}_y &= \bar{\Psi}_y(\xi, \eta, \bar{t}) = \sum_{k=1}^{\sqrt{N}} \sum_{l=1}^{\sqrt{N}} \bar{\Psi}_{ykl}(\bar{t}) \sin(k\pi\xi) \cos((2l-1)\pi\eta), \end{aligned} \tag{6.2}$$

а также для достижения необходимой точности расчетов примем $N = 16$.

6.3.1 Конические панели без ребер жесткости

Будем рассматривать коническую панель варианта 1 (геометрические параметры: $h = 0,08$ м, $a_1 = 16$ м, $a = 32$ м, $b = 2,574$ рад). Сравнение кривых «нагрузка – прогиб» для рассматриваемой оболочки, выполненной из материала E-Glass / Ероху, в зависимости от скорости нагружения (верхний индекс, МПа/с) приводится на Рисунке 6.18.

В связи с тем, что для конических оболочек $a_1 \neq 0$, точка центра будет определяться как $(x = (a_1 + a) / 2, y = b / 2)$, а точка четверти конструкции $(x = a_1 + (a - a_1) / 4, y = b / 4)$.

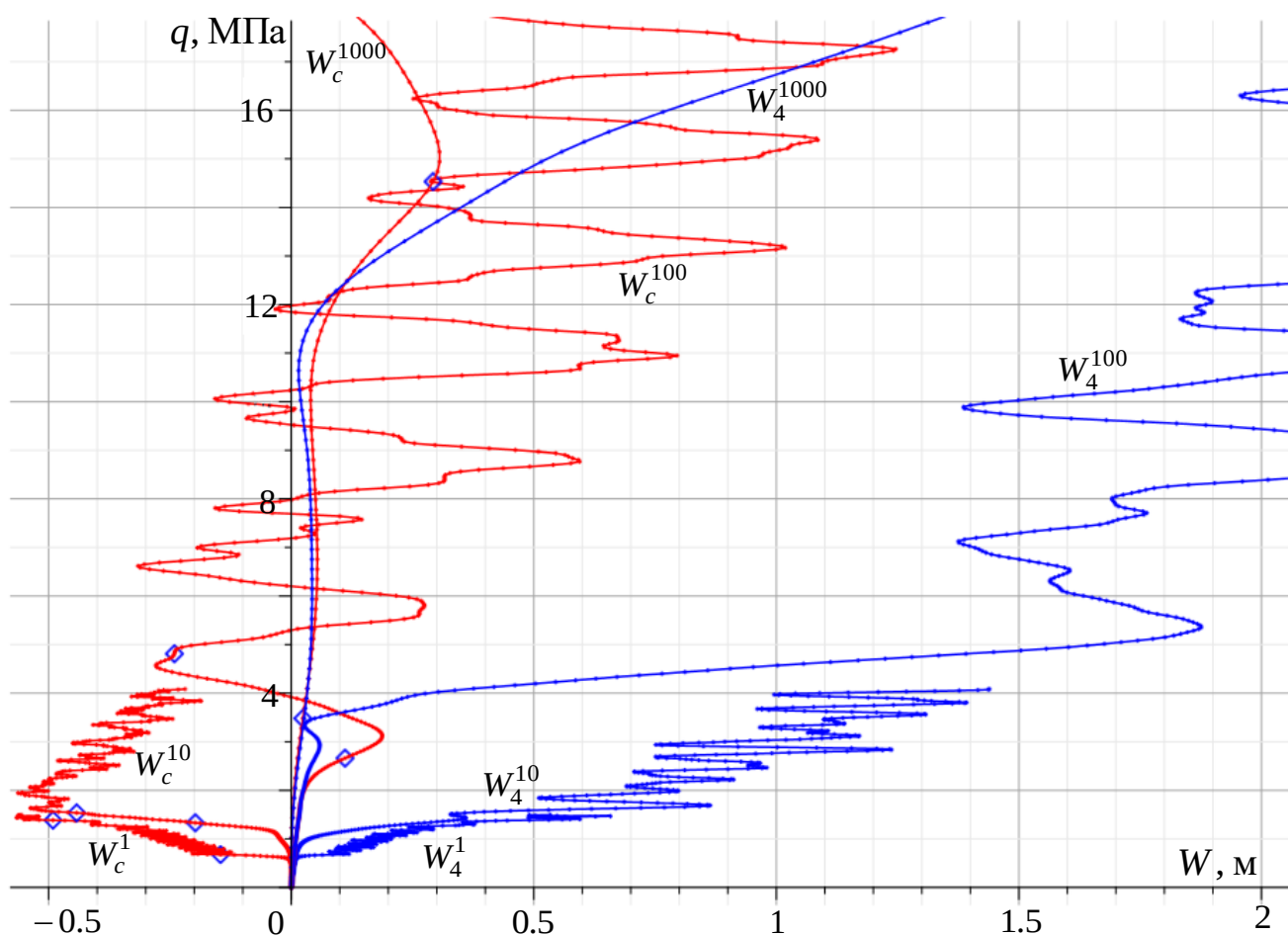


Рисунок 6.18. Зависимость «нагрузка – прогиб» для рассматриваемой конической панели при разных значениях скорости нагружения (материал E-Glass / Ероху)

На Рисунке 6.19 представлен график зависимости «нагрузка – прогиб» при скорости нагружения 100 МПа/с и выборе различных ортотропных и изотропных материалов.

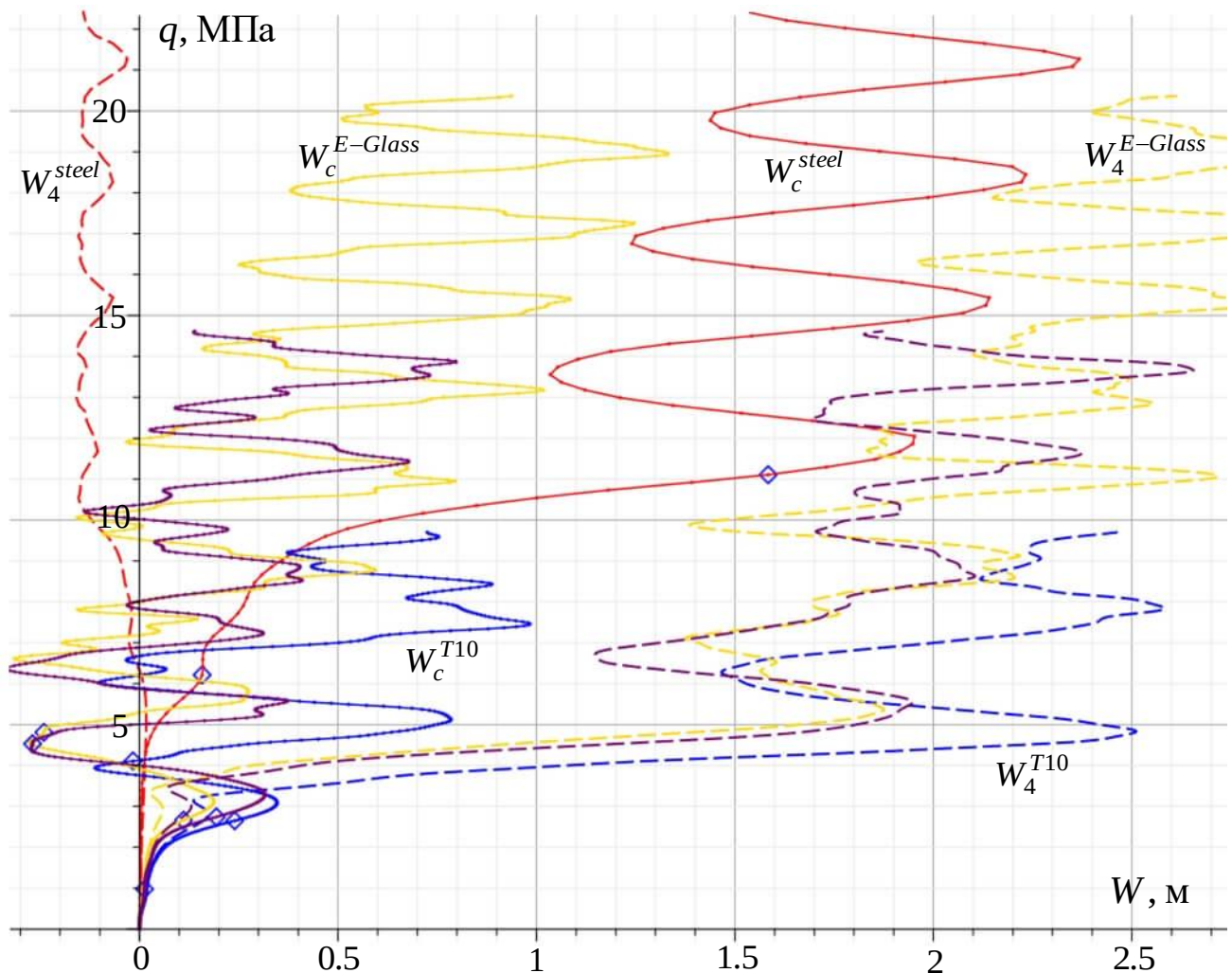


Рисунок 6.19. Зависимость «нагрузка – прогиб» для рассматриваемой конической панели варианта 1 при использовании разных ортотропных и изотропных материалов

В Таблице 6.10 показаны все найденные критические нагрузки потери устойчивости рассматриваемой конической панели в зависимости от выбора материала и скорости нагружения.

Таблица 6.10. Критические нагрузки потери устойчивости конической панели варианта 1 в зависимости от выбора материала и скорости нагружения

Материал	Критическая нагрузка q_{cr} , МПа			
	$A_1 = 1$ МПа/с	$A_1 = 10$ МПа/с	$A_1 = 100$ МПа/с	$A_1 = 1000$ МПа/с
Стеклопластик Т-10/УПЭ22-27	0,3610 0,5229	0,7074 1,1888	2,6498 4,1085	8,5088 21,2720
Стеклопластик E-Glass / Ероху	0,6754 1,3850	1,3304 1,5351	2,6608 4,8099	3,4795 22,1054
Сталь С345	2,5612 6,0243	2,8427 6,5326	6,2125 11,1073	19,7673 32,0042

6.3.2 Конические панели, подкрепленные ребрами жесткости

Далее рассмотрим конические панели, усиленные ребрами жесткости. Панели с внутренней стороны подкреплены ортогональной сеткой ребер, равномерно распределенных по поверхности. Ширина ребер принимается $r^j = r^i = 2h$, а высота $h^j = h^i = 3h$. Расстояние между ребрами жесткости равно χ_r . Внешние ребра отстоят от края конструкции на $0,5\chi_r$.

Рассмотрим коническую панель варианта 1 при скорости нагружения $A_1 = 10$ МПа/с и $\varphi = 90^\circ$. Сравнение кривых «нагрузка – прогиб» для рассматриваемой панели из стеклопластика Т10/УПЭ22-27 в зависимости от количества подкрепляющих элементов представлено на Рисунке 6.20 (ребра жесткости учитываются по методу конструктивной анизотропии). Кроме того, для более полного анализа поведения системы при выборе разного числа ребер в Таблице 6.11 приводятся соответствующие фазовые портреты.

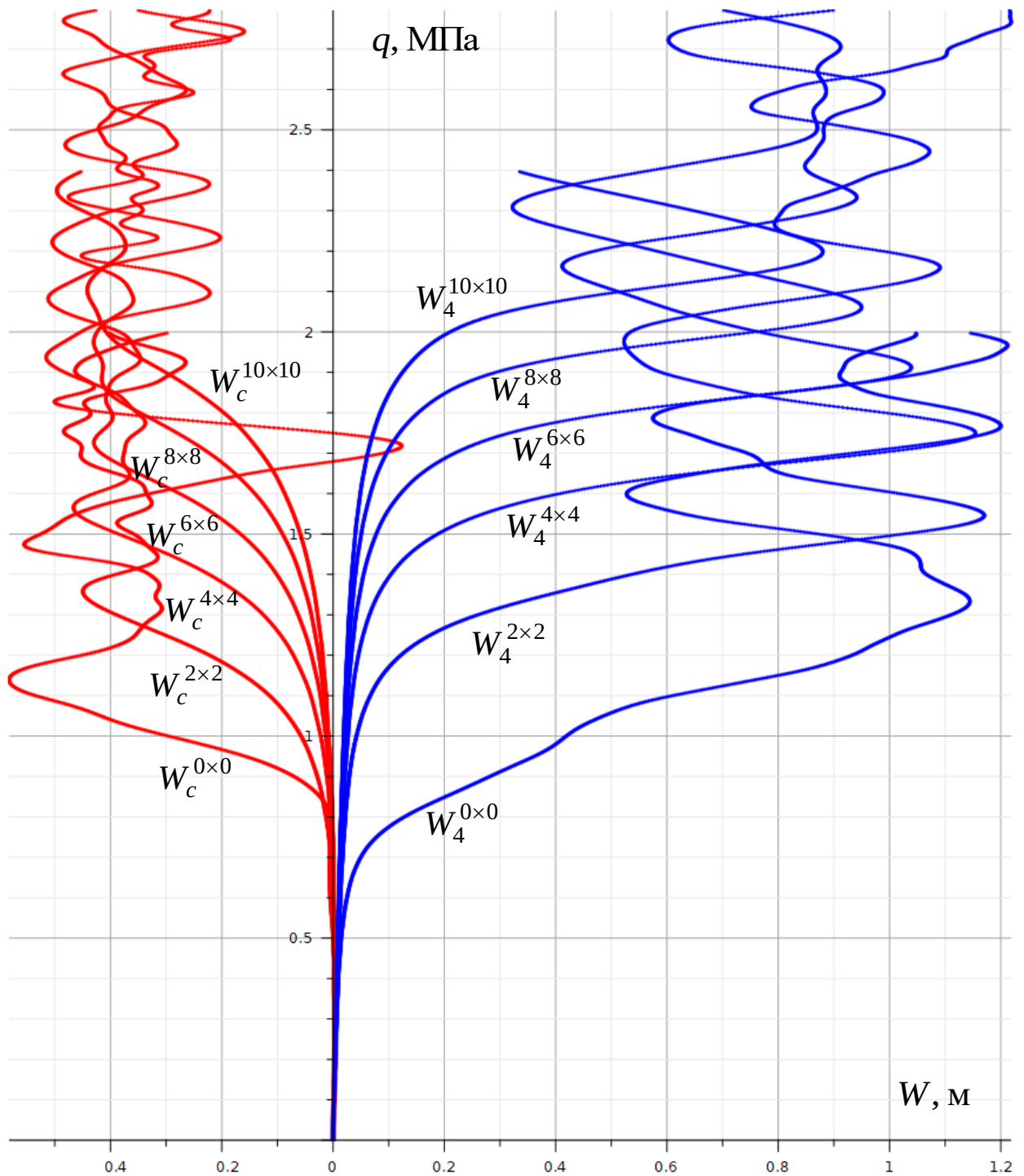
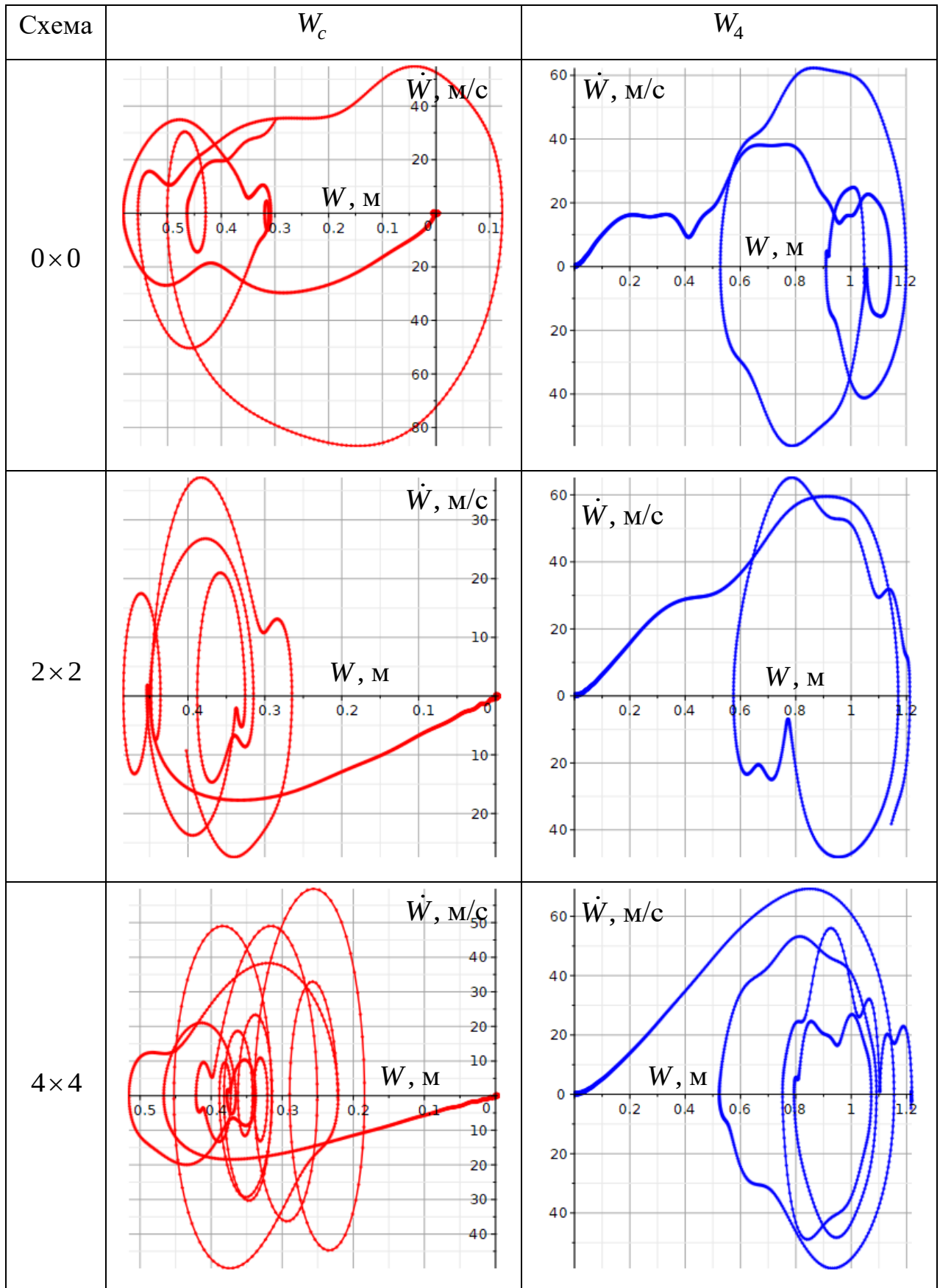


Рисунок 6.20. Зависимость « $q - W$ » для конической панели варианта 1 из стеклопластика при различном числе ребер жесткости

В Таблице 6.12 показаны критические нагрузки потери устойчивости q_{cr} для ортотропной конической панели варианта 1 из материала Т-10/УПЭ22-27 при различных методах расчета и вариантах усиления. Угол укладки волокон материала выбран $\varphi = \pi / 2$.

Таблица 6.11. Фазовый портрет для конической панели варианта 1 с различным количеством ребер жесткости при $A_1 = 10$ МПа/с



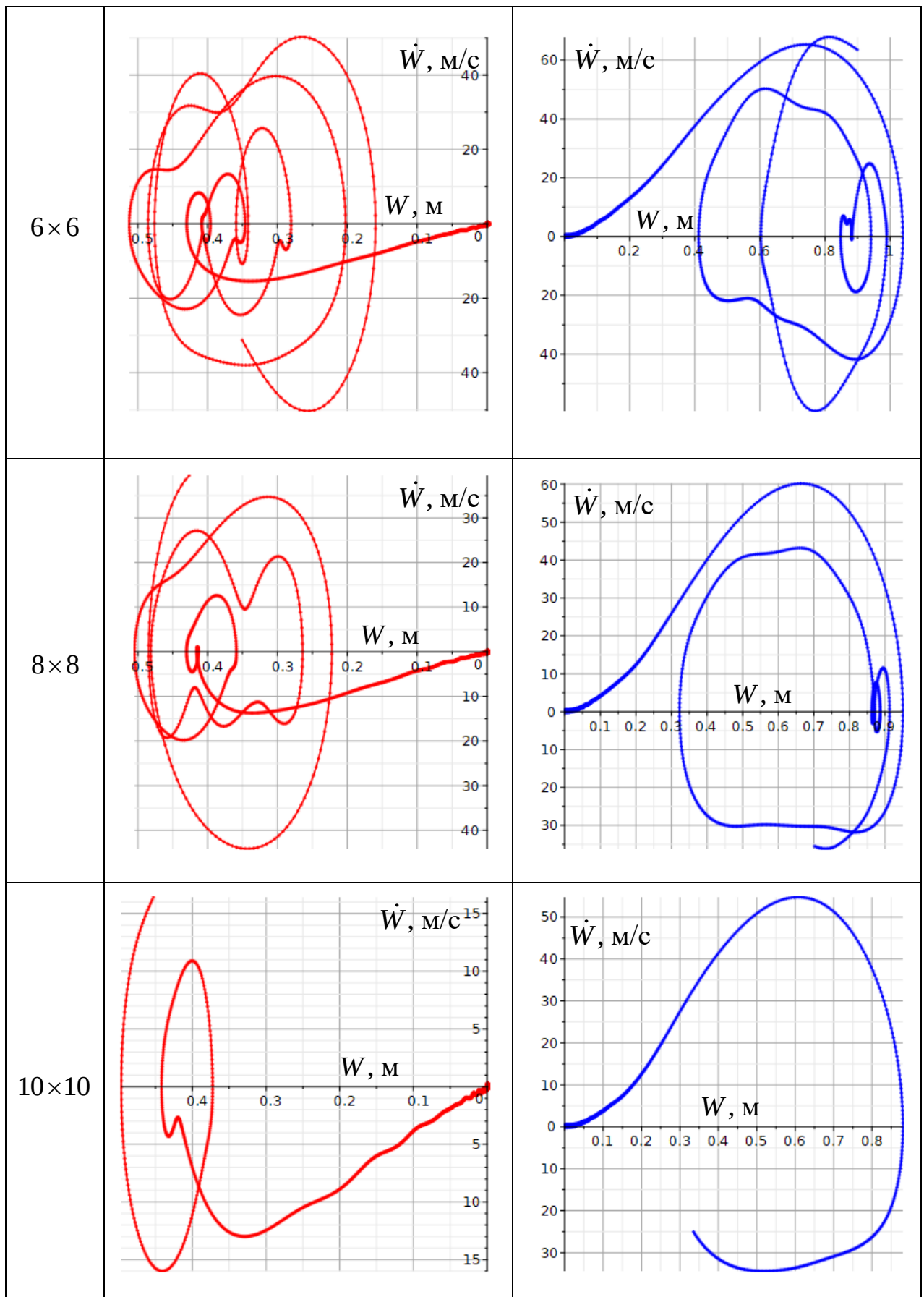


Таблица 6.12. Критические нагрузки потери устойчивости конической панели варианта 1 из материала Т-10/УПЭ22-27 при различных методах учета подкрепления и вариантах усиления (угол укладки волокон $\varphi = \pi / 2$, скорость нагружения 10 МПа/с)

Метод	N	Критическая нагрузка потери устойчивости q_{cr} , МПа					
		0×0	2×2	4×4	6×6	8×8	10×10
МКА	9	0,7539	1,451	1,634	1,8072	1,9628	2,1072
	16	1,194	1,417	1,6184	1,7794	1,9264	2,0604
По линии	9	0,7539	1,31701	1,4238	1,50221	1,5806	1,6512
	16	1,194	1,055	1,412	1,49	1,564	1,6284

Также могут представлять интерес поля прогибов при достижении значения критической нагрузки. Для панели с вариантами подкрепления 0×0 и 10×10 (с расчетом по методу конструктивной анизотропии) поля прогибов показаны на Рисунке 6.21.

В задачах динамики, кроме фазового портрета функции прогиба W , интерес может представлять построение фазовых портретов отдельных неизвестных коэффициентов, которые входят в состав функции W .

В том случае, если в методе Л. В. Канторовича принять $N = 16$, то количество таких коэффициентов тоже будет равно 16.

В Таблице 6.13 показаны фазовые портреты для неизвестных коэффициентов конической панели варианта 1 при наличии подкрепления (по методу конструктивной анизотропии) и без него.

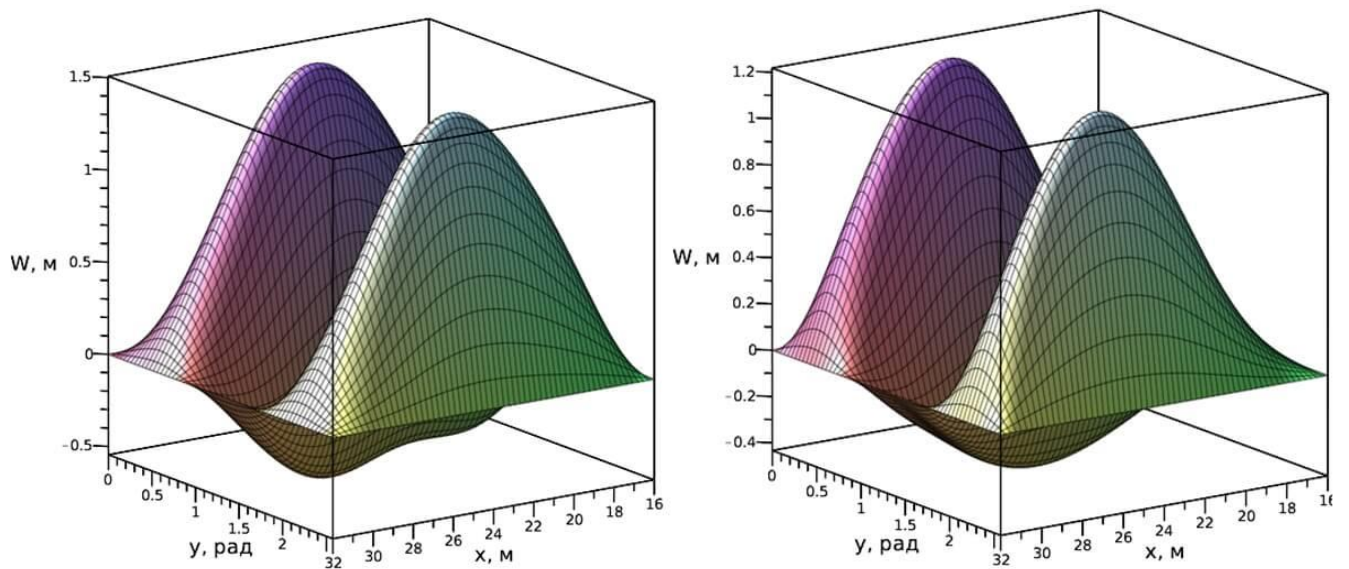
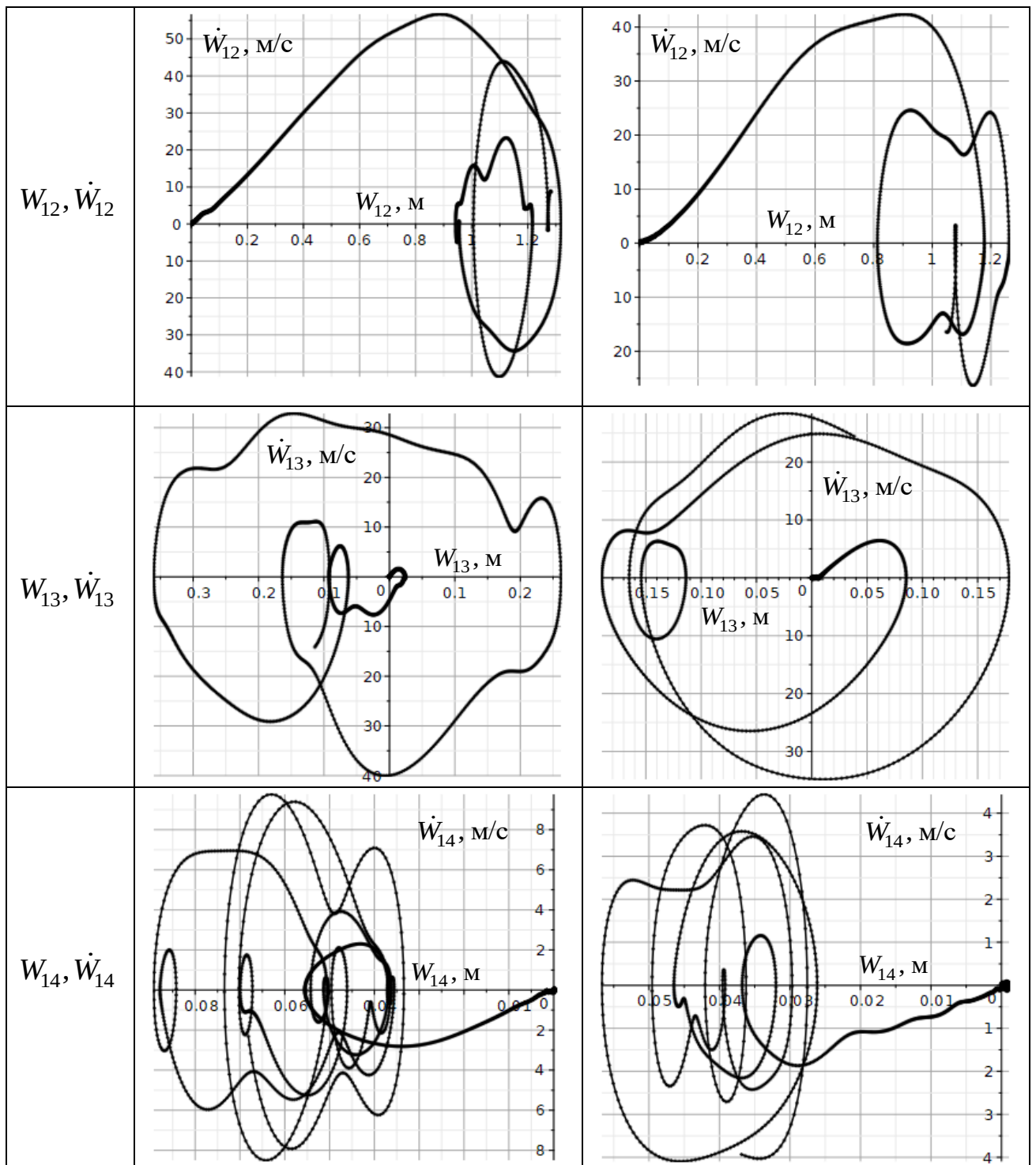
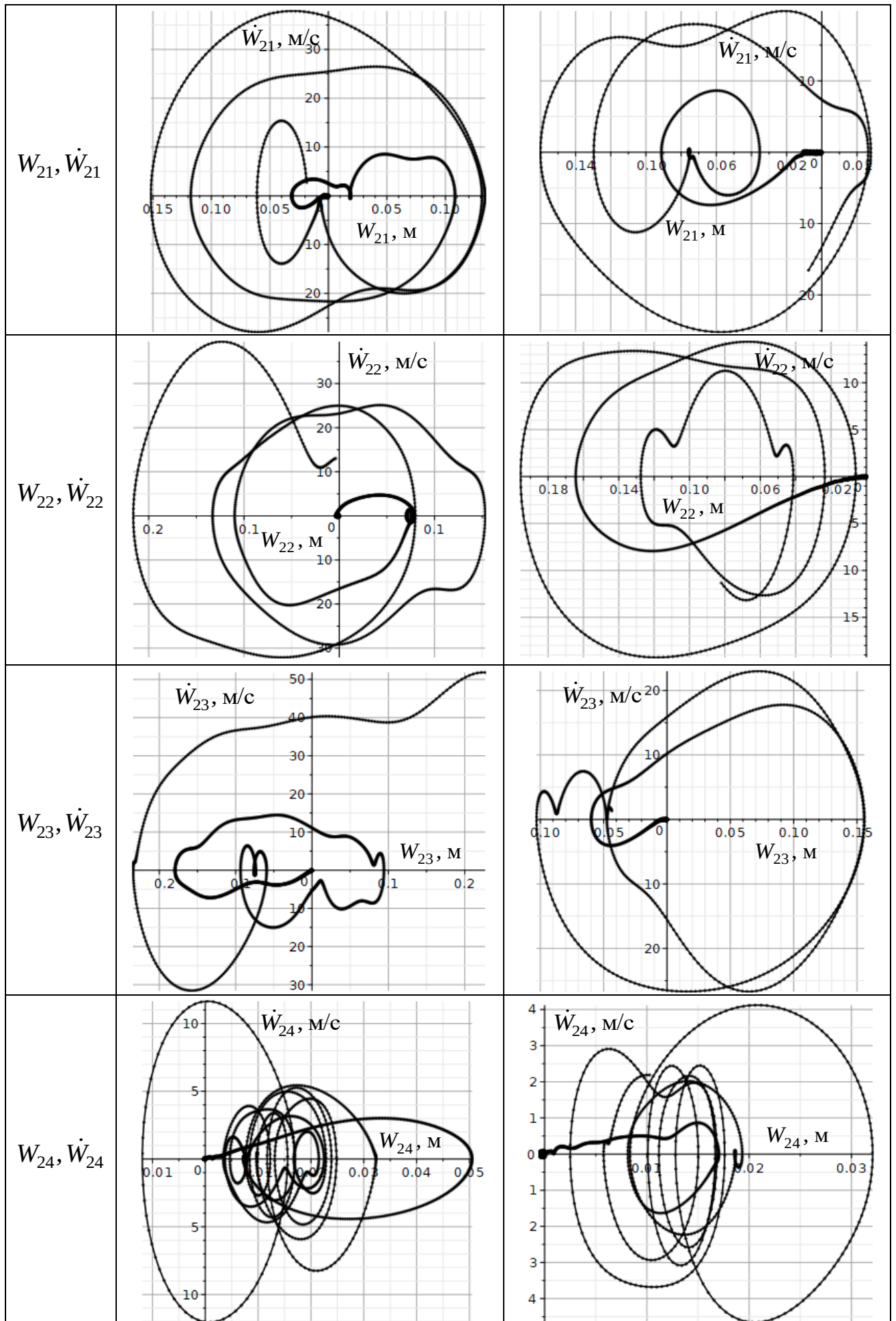


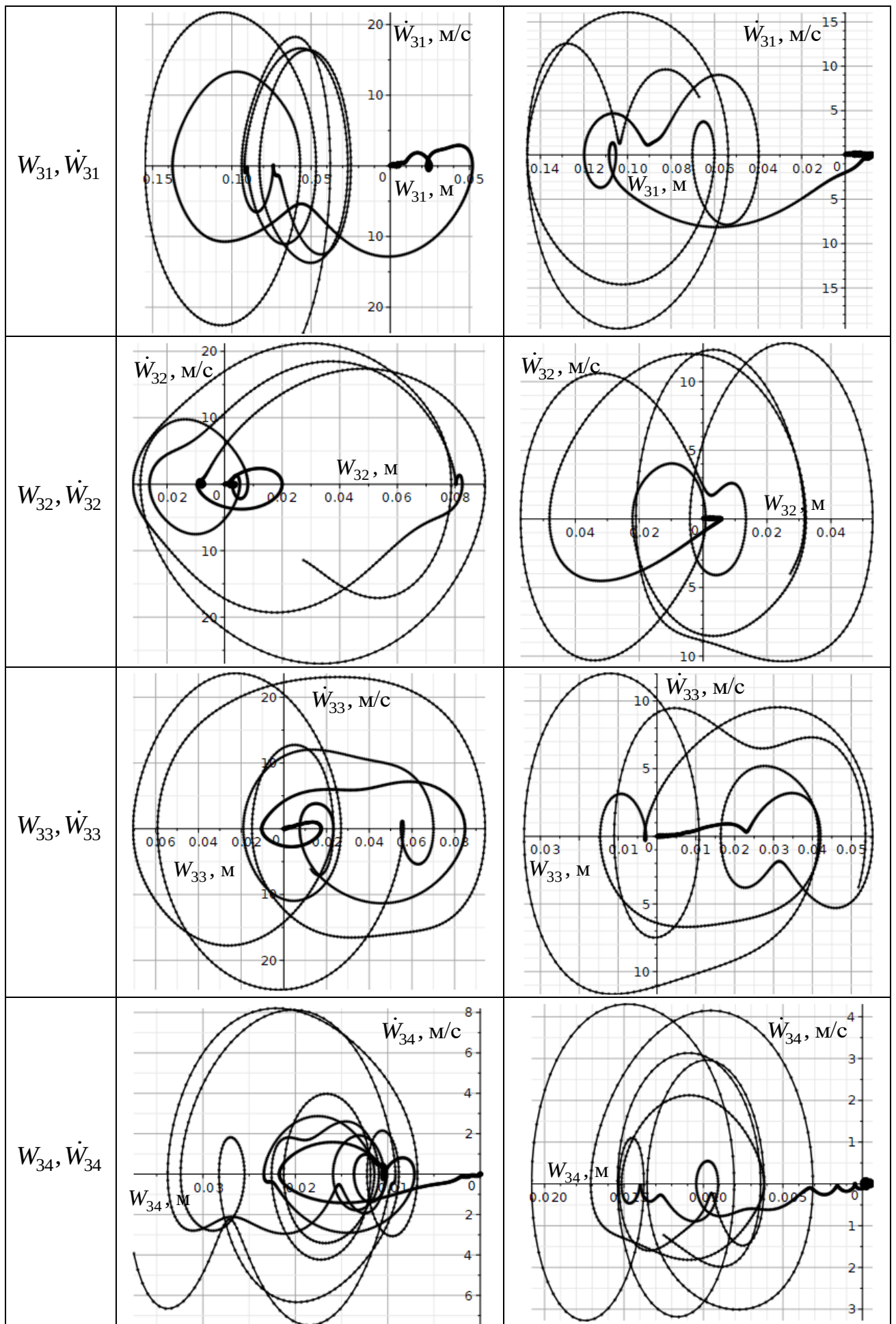
Рисунок 6.21. Поле перемещений W при достижении критической нагрузки для конической панели 1 (схема подкрепления 0×0 и 10×10 соответственно)

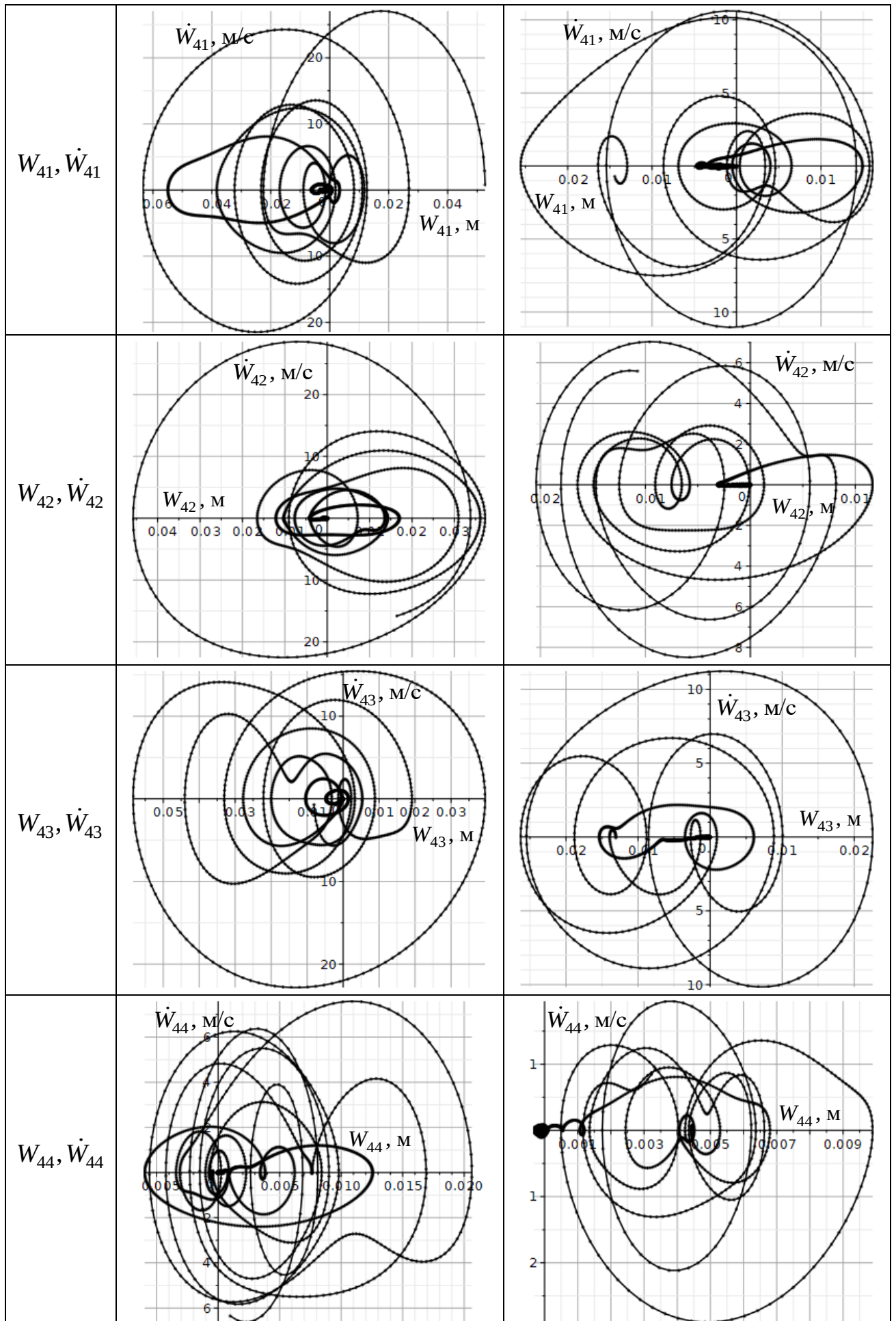
Таблица 6.13. Фазовые портреты неизвестных коэффициентов для конической панели варианта 1 при $A_1 = 10$ МПа/с (с ребрами жесткости и без них)

	Схема подкрепления	
	0×0	8×8
$W_{11}, \dot{W}_{11}$		









6.4 ИССЛЕДОВАНИЕ НЕЛИНЕЙНЫХ КОЛЕБАНИЙ ПОЛОГИХ ОБОЛОЧЕК ДВОЯКОЙ КРИВИЗНЫ

Будем рассматривать ортотропные оболочечные конструкции двойкой кривизны, шарнирно-неподвижно закрепленные по контуру и находящиеся под действием внешней равномерно распределенной поперечной нагрузки без учета демпфирования. Для конструкции варианта 4 ($a = b = 10,8$ м, $R_1 = R_2 = 40,5$ м, $h = 0,09$ м) из стеклопластика Т-10/УПЭ22-27, при скорости нагружения $\bar{A}_1 = 1000$ (0,440 МПа/с) критическая нагрузка составила 0,1143 МПа. Для анализа нелинейных колебаний остановим работу программы и «снимем нагрузку», когда она составит 0,0914 МПа (80 % от критической). Состояние системы в момент времени $t_k = 9 \cdot 10^{-5}$ сек (нагрузка 0,0914 МПа) описывается набором значений неизвестных функций и их производных по времени (Таблица 6.14).

Будем рассматривать колебательный процесс, происходящий при снятии указанной выше нагрузки.

Решая систему (5.53), (5.54) при $q(x, y, t) = 0$ ($\bar{P}(\xi, \eta, \bar{t}) = 0$) и данных из таблицы, получим зависимость прогиба $\bar{W}$ от времени $\bar{t}$ в безразмерных параметрах (приводится на Рисунке 6.23, а) при $N = 9$. Красным цветом (кривая $\bar{W}_c$) показано поведение конструкции в центре ($x = a/2, y = b/2$ или $\xi = 0,5, \eta = 0,5$), синим (кривая $\bar{W}_4$) – в четверти ($x = a/4, y = b/4$ или $\xi = 0,25, \eta = 0,25$), коричневым (кривая $\bar{W}_8$) – в восьмой части ($x = a/8, y = b/8$ или $\xi = 0,125, \eta = 0,125$) [129].

На Рисунке 6.23, б показан график изменения периода колебаний.

Таблица 6.14. Значения неизвестных безразмерных функций и их производных по времени

в момент $t_k = 9 \cdot 10^{-5}$ сек ($\bar{t}_k = 0,645$) [129]

i	j	$\bar{U}_{ij}(\bar{t}_k)$	$\bar{V}_{ij}(\bar{t}_k)$	$\bar{W}_{ij}(\bar{t}_k)$	$\bar{\Psi}_{xij}(\bar{t}_k)$	$\bar{\Psi}_{yij}(\bar{t}_k)$	$\dot{\bar{U}}_{ij}(\bar{t}_k)$	$\dot{\bar{V}}_{ij}(\bar{t}_k)$	$\dot{\bar{W}}_{ij}(\bar{t}_k)$	$\dot{\bar{\Psi}}_{xij}(\bar{t}_k)$	$\dot{\bar{\Psi}}_{yij}(\bar{t}_k)$
1	1	-2,7560	-2,8380	1,4530	-4,5530	-4,5540	-87,0313	-76,8431	20,2270	-63,2841	-63,2981
1	2	-2,1300	-3,1760	0,99000	-3,0970	-9,2930	-73,4885	-61,6103	14,8432	-46,3623	-139,3239
1	3	0,3960	-1,3010	-0,0390	0,1220	0,6090	9,7374	-29,4402	-0,1350	0,3970	2,0430
2	1	-3,3280	-2,0450	1,0350	-9,6950	-3,2400	-43,6944	-50,5992	7,7250	-72,3702	-24,0971
2	2	-2,6110	-2,6520	0,6900	-6,4480	-6,4630	-24,9740	-24,7591	-0,8140	7,5660	7,6160
2	3	0,3160	-1,1420	-0,0300	0,2840	0,4710	5,0410	-9,9070	0,5740	-5,3520	-8,9400
3	1	-1,4090	0,2750	-0,0300	0,4650	0,0940	-12,7382	12,3615	-1,1110	17,1032	3,4350
3	2	-1,1550	0,2930	-0,0390	0,6000	0,3650	-0,8820	13,3921	-0,7140	10,9662	6,6630
3	3	0,2250	0,2220	-0,0070	0,1060	0,1060	3,3040	9,8880	-0,4750	7,3050	7,3540

Поля перемещений, соответствующие данным в Таблице 6.14, показаны на Рисунке 6.22.

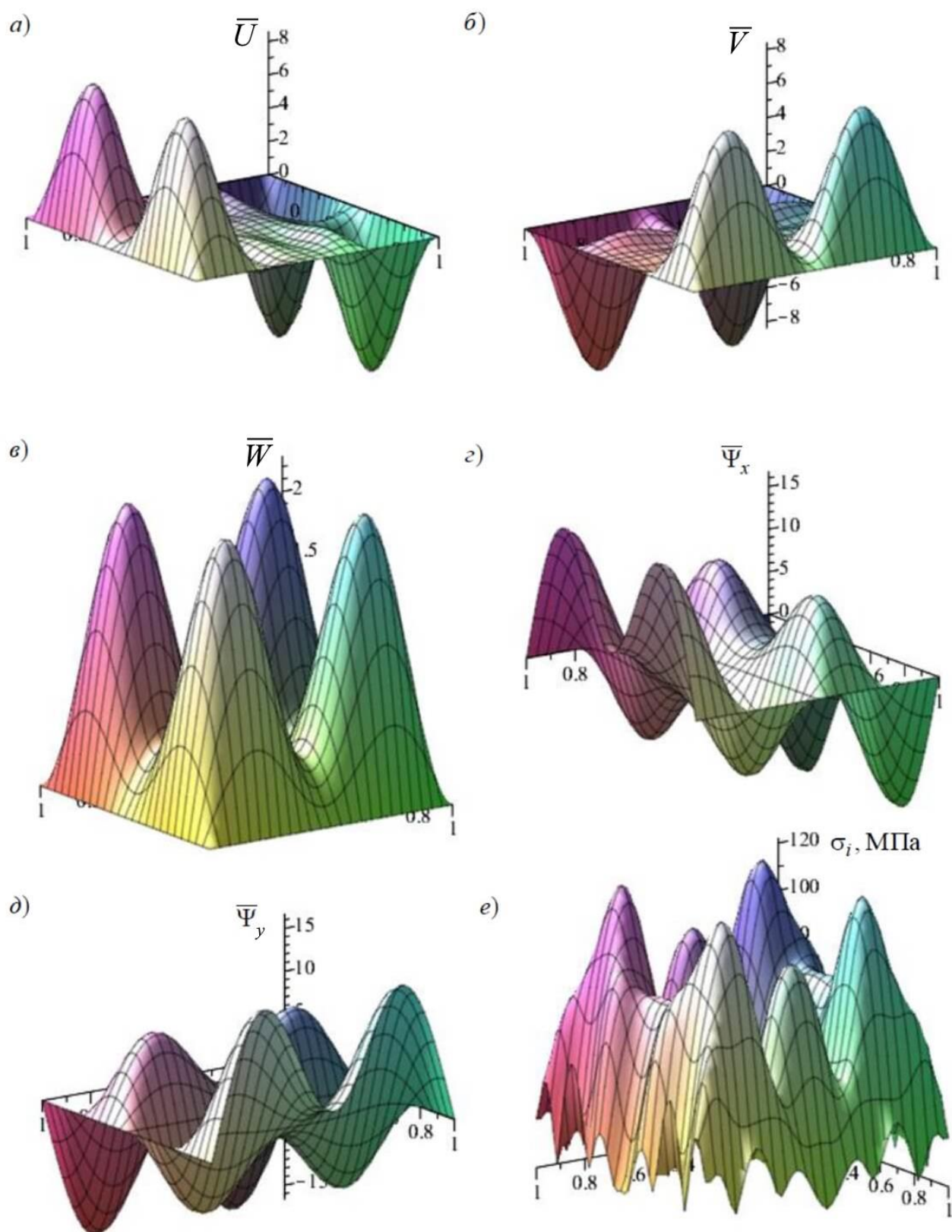


Рисунок 6.22. Поля перемещений и интенсивности напряжений в момент времени

$$t_k = 9 \cdot 10^{-5} \text{ сек } (\bar{t}_k = 0,645)$$

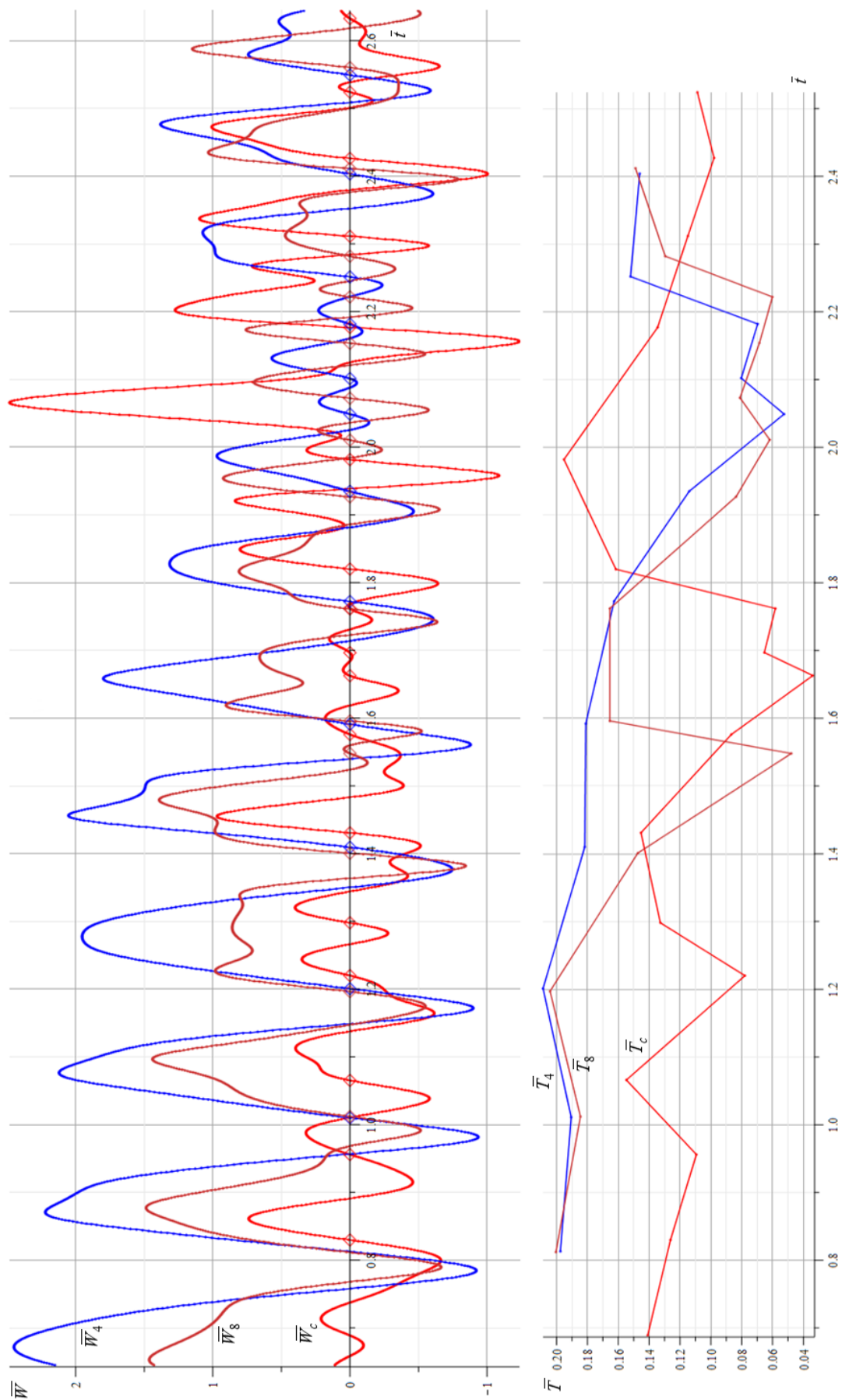


Рисунок 6.23. а) Зависимость « $\bar{W} - \bar{t}$ » после снятия нагрузки,
 б) Зависимость « $\bar{T} - \bar{t}$ » после снятия нагрузки

Из представленных данных видно, что для рассматриваемой конструкции колебательный процесс носит существенно нелинейный характер: например, амплитуда колебаний в четверти конструкции изначально больше, чем в центре или в восьмой части, но спустя $18 \cdot 10^{-5}$ секунд она становится минимальной, зато единократно существенно возрастает значение амплитуды колебаний в центре [129].

Следует отметить, что на большей части рассматриваемого отрезка времени период колебаний центра почти в два раза меньше, чем период четверти или восьмой части конструкции, и в отдельные моменты времени это приводит к тому, что разные части оболочки осуществляют колебания в противофазе.

Появление такого разброс значений в прогибах оказывает существенное воздействие на конструкцию, и может ускорить процесс ее повреждения или разрушения [129].

6.5 ВЫВОДЫ

Таким образом, получены значения нагрузок, при которых конструкции теряют устойчивость при динамическом нагружении, для пологих оболочек двоякой кривизны, цилиндрических и конических панелей из ортотропных и изотропных материалов. В том числе, результаты получены для конструкций разных видов, но одинаковой покрывной площади. Выявлены общие и локальные потери устойчивости. Показано, что наиболее часто локальные потери устойчивости проявляются при малых скоростях нагружения конструкции. Продемонстрировано влияние скорости нагружения на значения критических нагрузок.

Получены данные о деформировании рассматриваемых оболочек для схемы усиления жесткостными элементами в виде ортогональной сетки ребер. На основании этих данных можно сделать вывод об эффективности такого усиления, что может служить основой для дальнейших исследований других схем усиления и видов жесткостных элементов.

Численные результаты показали значительную неравномерность деформации конструкции в связи с ортотропией материала.

Показана сходимость метода Л. В. Канторовича (при увеличении числа неизвестных коэффициентов) и метода конструктивной анизотропии (при увеличении числа ребер жесткости).

Для некоторых вариантов задач построены фазовые портреты системы, которые можно использовать для анализа процесса ее деформирования.

Представлена методика исследования свободных нелинейных колебаний тонкостенной ортотропной оболочки, возникающих при снятии динамической нагрузки. Был проанализирован колебательный процесс в конструкции из стеклопластика, когда при нагрузке, близкой к критической, воздействие на оболочку снимается. Полученные данные показали существенный разброс значений амплитуды колебаний разных частей конструкции, и их изменение с течением времени, а также разброс значений периода колебаний.

На основании проведенных расчетов ортотропных оболочечных конструкций можно сделать вывод о том, что при использовании современных ортотропных материалов (например, углепластика или стеклопластика) возможно уменьшение значения критической нагрузки в несколько раз, однако такие конструкции существенно легче, чем конструкции, выполненные из традиционных изотропных материалов (например, стали).

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

На основе

- разработанных моделей деформирования подкрепленных оболочечных конструкций при статическом или динамическом нагружении, учитывающих геометрическую нелинейность, ортотропию материала, поперечные сдвиги, наличие ребер жесткости, когда их контакт с обшивкой происходит по полосе, и при этом учитывается сдвиговая и крутильная жесткости ребер;

- методов решения нелинейных задач теории оболочек, а именно метода Ритца сведения вариационной задачи о минимуме функционала полной потенциальной энергии деформации конструкции к системе нелинейных алгебраических уравнений для задач статики; метода продолжения решения по наилучшему параметру с адаптивным выбором шага продолжения решения для обхода особых точек графика «нагрузка – прогиб» и обеспечения необходимой точности расчетов; метода Л. В. Канторовича для задач динамики; метода Розенброка для решения жестких систем ОДУ;

- программного обеспечения, разработанного автором для исследования прочности и устойчивости подкрепленных ортотропных оболочек при статическом или динамическом нагружении на основе современных технологий программирования;

было проведено комплексное исследование прочности и устойчивости подкрепленных ортотропных оболочечных конструкций, по результатам которого можно сделать следующие выводы:

1. Оболочки из ортотропных материалов, к которым можно отнести однонаправленные композиты (стеклопластик, углепластик и др.), по сравнению с оболочками из традиционных материалов, применяемых для покрытия большепролетных строительных объектов, не уступают по прочности и устойчивости традиционным, но по своей массе гораздо легче. Исследовать такие конструкции на прочность и устойчивость необходимо комплексно: в большинстве рассмотренных случаев начало невыполнения условий прочности наступает

раньше потери устойчивости, однако имеет место и обратное. В связи с этим, нельзя заранее исключить какой-либо из этих факторов.

2. Предложенная модель учета жесткостных характеристик ребер при контакте их с обшивкой по полосе, когда при учете жесткости ребер, расположенных перпендикулярно основному направлению, вводится некоторый коэффициент приведения, является наиболее точной.

Модель, основанная на введении ребер «по линии», дает заниженные значения критической нагрузки потери устойчивости.

Модель, основанная на контакте ребер с обшивкой «по полосе», которая использовалась в работах Л. В. Енджиевского, И. Н. Преображенского и В. В. Карпова, дает завышенные значения критической нагрузки потери устойчивости.

3. Постановка ребер жесткости существенно повышает критическую нагрузку потери устойчивости ортотропных оболочек, повышает предельно допустимые нагрузки потери прочности, снижает концентрацию напряжений благодаря их перераспределению по оболочке. Путем соответствующей постановки ребер и подбору схемы подкрепления можно избежать потери устойчивости оболочки.

4. Анализ различных вариантов усиления оболочек показал: наличие ортогональной сетки ребер жесткости со стороны выпуклости конструкции дает более высокую критическую нагрузку по сравнению с наличием ребер со стороны вогнутости оболочки. Для цилиндрических панелей рассмотрены разные схемы подкреплений. В порядке повышения значений критической нагрузки: 1) стрингеры с внешней стороны, 2) стрингеры с внутренней стороны, 3) шпангоуты с внутренней стороны, 4) ортогональная сетка ребер с внутренней стороны, 5) шпангоуты с внешней стороны, 6) ортогональная сетка ребер с внешней стороны.

5. Анализ использования различных критериев прочности ортотропных оболочек, таких как: критерий максимальных напряжений, Мизеса – Хилла, Фишера, Гольденבלата – Копнова, Liu – Huang – Stout, Цая – Ву, Хоффмана, показал, что все критерии дают близкие результаты начала процесса потери прочности оболочки, однако наиболее практичным и простым является критерий

максимальных напряжений. При продолжении нагружения определяется область невыполнения условий прочности, анализируя которую инженеры-проектировщики могут принять решение об изменении параметров конструкции (например, изменение параметров подкрепления для обеспечения безопасной работы конструкции).

6. При динамическом нагружении происходит запаздывание реакции оболочки на воздействие нагрузки. Показано, что наиболее часто локальные потери устойчивости проявляются при малых скоростях нагружения. Численные результаты показали значительную неравномерность деформирования конструкции в связи с ортотропией материала. Как и при статическом нагружении, наличие ребер жесткости значительно повышает критическую нагрузку потери устойчивости.

Проведенное комплексное исследование прочности и устойчивости позволяет на стадии проектирования находить опасные режимы работы оболочечных конструкций, и путем изменения их параметров этого избегать, в том числе за счет постановки ребер жесткости.

СПИСОК СОКРАЩЕНИЙ И УСЛОВНЫХ ОБОЗНАЧЕНИЙ

Системы координат, геометрия конструкций, нагрузки

1, 2 – направления главных осей ортотропии;

x, y, z – локальная система координат оболочки;

X, Y, Z – глобальная декартова система координат;

a, b – предельные значения вдоль осей координат x, y , [м] или [рад];

h – толщина оболочки, [м];

a_1 – смещение конструкции от начала координат вдоль оси x , [м];

R_1, R_2 – главные радиусы кривизны оболочки вдоль осей x, y , [м];

R – радиус кривизны для сферической и тороидальной оболочек [м];

d_1 – смещение образующего сектора от оси вращения для тороидальной оболочки, [м];

d – стрела подъема оболочки, [м];

A, B – параметры Ляме, [м] или [рад];

θ – угол конусности конической оболочки, [рад];

k_x, k_y – главные кривизны оболочки вдоль осей x, y , [1/м];

D – область, занимаемая оболочкой;

P_x, P_y, q – составляющие внешней нагрузки, действующие в направлениях осей координат x, y, z [МПа];

P_{xsv}, P_{ysv}, q_{sv} – составляющие нагрузки от собственного веса, действующие в направлениях осей координат x, y, z [МПа];

$\xi, \eta, \bar{z}$ – локальная безразмерная система координат в срединной поверхности оболочки;

k_ξ, k_η – главные кривизны оболочки вдоль безразмерных осей ξ, η ;

Перемещения и деформации

U^z, V^z, W^z – перемещения вдоль осей x, y, z в слое, отстоящем на z от срединной поверхности, [м];

U, V, W – перемещения точек срединной поверхности вдоль осей x, y, z , [м];

Ψ_x, Ψ_y – углы поворота нормали в плоскостях xOz, yOz , [рад];

$\varepsilon_x, \varepsilon_y, \varepsilon_z$ – деформации удлинения вдоль осей x, y, z ;

$\gamma_{xy}, \gamma_{xz}, \gamma_{yz}$ – деформации сдвига в плоскостях xOy, xOz, yOz ;

$\varepsilon_x^z, \varepsilon_y^z$ – деформации удлинения вдоль осей x, y , действующие в слое на расстоянии z от срединной поверхности оболочки;

γ_{xy}^z – деформация сдвига в плоскости xOy , действующая в слое на расстоянии z от срединной поверхности оболочки;

χ_1, χ_2 – функции изменения кривизн;

χ_{12} – функция кручения;

Напряжения и характеристики материалов конструкций

$\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3$ – главные напряжения, [МПа];

$\sigma_x, \sigma_y, \sigma_z$ – нормальные напряжения в направлении осей x, y, z , [МПа];

$\tau_{xy}, \tau_{xz}, \tau_{yz}$ – касательные напряжения в плоскостях xOy, xOz, yOz , [МПа];

σ_i – интенсивность напряжений, [МПа];

σ_T – предел текучести для изотропного материала, [МПа];

E_1, E_2 – модули упругости в направлениях x и y , [МПа];

G_{12}, G_{13}, G_{23} – модули сдвига в плоскостях xOy, xOz, yOz соответственно, [МПа];

μ_{12}, μ_{21} – коэффициенты Пуассона;

ρ – плотность материала, [кг/м³];

E, μ, G – модуль упругости, коэффициент Пуассона и модуль сдвига для изотропного материала;

φ – угол укладки армирующих элементов относительно оси x , [град];

F_x^+, F_y^+ – пределы прочности при растяжении в направлениях x, y , [МПа];

F_x^-, F_y^- – пределы прочности при сжатии в направлениях x, y , [МПа];

F_{yz}, F_{xz}, F_{xy} – пределы прочности при сдвиге в плоскостях yOz, xOz, xOy , [МПа];

K_r – значение критерия прочности;

Усилия, моменты и поперечные силы

N_x, N_y, N_{xy}, N_{yx} – нормальные усилия вдоль осей x, y и сдвиговые усилия в плоскости xOy ;

M_x, M_y, M_{xy}, M_{yx} – изгибающие моменты в направлении осей x, y и крутящие моменты;

Q_x, Q_y – поперечные (перерезывающие) силы в плоскостях xOz, yOz , [МПа·м];

$\bar{N}_x, \bar{N}_y, \bar{N}_{xy}, \bar{N}_{yx}$ – безразмерные нормальные усилия вдоль осей ξ, η и сдвиговые усилия в плоскости $\xi O \eta$;

$\bar{M}_x, \bar{M}_y, \bar{M}_{xy}, \bar{M}_{yx}$ – безразмерные изгибающие моменты в направлении осей ξ, η и крутящие моменты;

$\bar{Q}_x, \bar{Q}_y$ – безразмерные поперечные (перерезывающие) силы в плоскостях $\xi O \bar{z}, \eta O \bar{z}$;

Подкрепление конструкции

$H(x, y)$ – функция, характеризующая расположение и высоту ребер у оболочки;

r_i, r_j – ширина ребер, параллельных оси x и y соответственно, [м] или [рад];

h^i, h^j – высота ребер, параллельных оси x и y соответственно, [м];

n, m – количество ребер, параллельных оси x и y соответственно;

$F_x, F_y, S_x, S_y, J_x, J_y$ – площадь поперечного или продольного сечения ребра, приходящаяся на единицу длины сечения; статический момент и момент инерции этого сечения, являющиеся функциями координат x, y при введении ребер жесткости по методу конструктивной анизотропии, $[м]$, $[м^2]$, $[м^3]$;

$F_{x1}, F_{x2}, F_{y1}, F_{y2}, S_{x1}, S_{x2}, S_{y1}, S_{y2}, J_{x1}, J_{x2}, J_{y1}, J_{y2}$ – составные части жесткостных характеристик;

$\bar{F}, \bar{S}, \bar{J}$ – аналогичные характеристики при дискретном введении ребер жесткости, $[м]$, $[м^2]$, $[м^3]$;

$\bar{F}_x = \bar{F}_x(\xi, \eta), \bar{F}_y = \bar{F}_y(\xi, \eta), \bar{S}_x = \bar{S}_x(\xi, \eta), \bar{S}_y = \bar{S}_y(\xi, \eta), \bar{J}_x = \bar{J}_x(\xi, \eta), \bar{J}_y = \bar{J}_y(\xi, \eta)$

– безразмерные жесткостные характеристики ребер при введении ребер жесткости по методу конструктивной анизотропии;

r_a, r_b – коэффициенты в уточненном дискретном методе учета ребер жесткости;

Некоторые обозначения в модели и алгоритме

I – функционал полной энергии деформации оболочки;

E_k – кинетическая энергия деформации оболочки;

E_s – функционал полной потенциальной энергии деформации оболочки;

E_p – потенциальная энергия деформации оболочки;

E_p^0 – потенциальная энергия деформации обшивки;

E_p^R – потенциальная энергия деформации ребер жесткости;

E_k^0 – кинетическая энергия деформации обшивки;

E_k^R – кинетическая энергия деформации ребер жесткости;

A – работа внешних сил;

$U_{kl}, V_{kl}, W_{kl}, \Psi_{xkl}, \Psi_{ykl}$ – неизвестные числовые параметры при разложении искомых функций в ряды;

$\bar{U}_{kl}, \bar{V}_{kl}, \bar{W}_{kl}, \bar{\Psi}_{xkl}, \bar{\Psi}_{ykl}$ – безразмерные неизвестные числовые параметры при разложении искомых функций в ряды;

N – количество членов разложения искомых функций в ряды в методе Ритца или методе Л. В. Канторовича;

$C_1^{i,l} - C_{25}^{i,l}$ – коэффициенты линейных членов в СНАУ;

$A_1^l - A_5^l$ – нелинейные составляющие СНАУ;

X – вектор неизвестных числовых параметров;

P – параметр нагрузки;

$\tilde{X}$ – вектор неизвестных числовых параметров, включая параметр нагрузки;

$F(X, P)$ – вектор-функция, характеризующая СНАУ;

λ – длина дуги траектории нагружения в пространстве состояний;

J – матрица Якоби вектор-функции F ;

$\bar{J}$ – расширенная матрица Якоби вектор-функции F ;

q_{cr} – значение критической нагрузки [МПа];

q_{pr} – значение нагрузки начала невыполнения условий прочности [МПа];

k_m – коэффициент масштабирования значений прогибов.

Параметры динамики

t – время, [сек];

$\bar{t}$ – безразмерный параметр времени;

A_1 – скорость нагружения, [МПа/с];

$\bar{A}_1$ – безразмерная скорость нагружения;

T – период колебаний, [сек];

Безразмерные параметры для ортотропных оболочечных конструкций

$$\xi = \frac{x - a_1}{a - a_1}, \quad \eta = \frac{y}{b}, \quad \bar{\lambda} = \frac{aA}{bB}, \quad k_\xi = hk_x, \quad k_\eta = hk_y,$$

$$\bar{U} = \frac{aUA}{h^2}, \quad \bar{V} = \frac{bVB}{h^2}, \quad \bar{W} = \frac{W}{h}, \quad \bar{\Psi}_x = \frac{\Psi_x aA}{h}, \quad \bar{\Psi}_y = \frac{\Psi_y bB}{h},$$

$$\bar{\sigma}_x = \frac{\sigma_x(1 - \mu_{12}\mu_{21})a^2A^2}{E_1h^2}, \quad \bar{\sigma}_y = \frac{\sigma_y(1 - \mu_{12}\mu_{21})a^2A^2}{E_2h^2}, \quad \bar{\tau}_{xy} = \frac{\tau_{xy}a^2A^2}{G_{12}h^2},$$

$$\bar{P} = \frac{a^4A^4q}{h^4E_1}, \quad \bar{A} = \frac{aA}{h}, \quad \bar{B} = \frac{bB}{h}, \quad \bar{z} = \frac{z}{h}, \quad \bar{t} = \frac{h}{a^2A^2} \sqrt{\frac{E_1}{(1 - \mu_{12}\mu_{21})\rho}} \cdot t,$$

$$\bar{F}_x = \frac{F_x}{h}, \quad \bar{F}_y = \frac{F_y}{h}, \quad \bar{S}_x = \frac{S_x}{h^2}, \quad \bar{S}_y = \frac{S_y}{h^2}, \quad \bar{J}_x = \frac{J_x}{h^3}, \quad \bar{J}_y = \frac{J_y}{h^3}, \quad \bar{H} = \frac{H}{h},$$

$$\bar{x}_j = \frac{x_j}{a}, \quad \bar{r}_j = \frac{r_j}{a}, \quad \bar{h}^j = \frac{h^j}{h}, \quad \bar{a}_j = \frac{a_j}{a}, \quad \bar{b}_j = \frac{b_j}{a},$$

$$\bar{y}_i = \frac{y_i}{b}, \quad \bar{r}_i = \frac{r_i}{b}, \quad \bar{h}^i = \frac{h^i}{h}, \quad \bar{c}_i = \frac{c_i}{b}, \quad \bar{d}_i = \frac{d_i}{b}.$$

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Абросимов, Н. А.* Нелинейные задачи динамики композитных конструкций / Н. А. Абросимов, В. Г. Баженов. – Н. Новгород: Изд-во ННГУ, 2002. – 400 с.
2. *Абросимов, Н. А.* Численный анализ динамической прочности композитных цилиндрических оболочек при многократных импульсных воздействиях / Н. А. Абросимов, А. В. Елесин // Вестник ПНИПУ. Механика. – 2016. – № 4. – С. 7–19.
3. *Аксельрад, Э. Л.* Гибкие оболочки / Э. Л. Аксельрад. – М.: Наука, 1976. – 376 с.
4. *Алиев, М. М. О.* Критерии прочности и разрушения разнопрочных материалов с учетом влияния всестороннего давления / М. М. О. Алиев, С. В. Шафиева, Н. Г. Каримова // Вестник ЧГПУ им. И.Я. Яковлева. Серия: Механика предельного состояния. – 2012. – № 3(13). – С. 64–71.
5. *Аликин, В. Н.* Критерии прочности и надежность конструкций / В. Н. Аликин, И. Е. Литвин, С. Г. Сесюнин, М. И. Соколовский, Н. В. Ушин. – М.: ООО «Недра-Бизнесцентр», 2005. – 164 с.
6. *Алумяз, Н. А.* Дифференциальные уравнения состояния равновесия тонкостенных упругих оболочек в после критической стадии / Н. А. Алумяз // Прикладная математика и механика. – 1949. – Т. 13. – № 1. – С. 95–107.
7. *Алфутов, Н. А.* Расчет многослойных пластин и оболочек из композиционных материалов / Н. А. Алфутов, П. А. Зиновьев, Б. Г. Попов. – М.: Машиностроение, 1984. – 264 с.
8. *Амабили, М.* Нелинейные колебания пологих оболочек двоякой кривизны / М. Амабили, Р. Гарзиера, Р. Мухарлямов, К. Рябова // Вестник технологического университета. – 2015. – Т. 18. – № 6. – С. 158–162.
9. *Амбарцумян, С. А.* Теория анизотропных оболочек / С. А. Амбарцумян. – М.: Физматлит, 1961. – 384 с.

10. *Амиро, И. Я.* Методы расчета оболочек. Т. 2. Теория ребристых оболочек / И. Я. Амиро, В. А. Заруцкий. – Киев: Наукова думка, 1980. – 368 с.
11. *Амиро, И. Я.* Динамика ребристых оболочек / И. Я. Амиро, В. А. Заруцкий, В. Г. Паламарчук. – Киев: Наукова думка, 1983. – 201 с.
12. *Андрианов, И. В.* Метод усреднения в статике и динамике ребристых оболочек / И. В. Андрианов, В. А. Лесничая, Л. И. Маневич. – М.: Наука, 1985. – 220 с.
13. *Бадриев, И. Б.* Осесимметричные задачи о геометрически нелинейном деформировании и устойчивости трехслойной цилиндрической оболочки с контурными подкрепляющими стержнями / И. Б. Бадриев, М. В. Макаров, В. Н. Паймушин, С. А. Холмогоров // Ученые записки Казанского университета. Серия: Физико-математические науки. – 2017. – Т. 159. – № 4. – С. 395–428.
14. *Бажанов, В. Л.* Пластинки и оболочки из стеклопластиков / В. Л. Бажанов, И. И. Гольденблат, В. А. Копнов, А. Д. Поспелов, А. М. Синюков. – М.: Высшая школа, 1970. – 408 с.
15. *Баженов, В. Г.* Устойчивость и предельные состояния упругопластических сферических оболочек при статических и динамических нагружениях / В. Г. Баженов, Е. Г. Гоник, А. И. Кибец, Д. В. Шошин // Прикладная механика и техническая физика. – 2014. – Т. 55. – № 1(323). – С. 13–22.
16. *Бакусов, П. А.* Устойчивость сегментов тороидальных оболочек при изменении угла отклонения от вертикальной оси / П. А. Бакусов, А. А. Семенов // Вестник ПНИПУ. Механика. – 2017. – № 3. – С. 17–36.
17. *Баранова, Д. А.* Алгоритм исследования устойчивости подкрепленных оболочек вращения на основе метода L-BFGS / Д. А. Баранова // Промышленное и гражданское строительство. – 2012. – № 3. – С. 58–59.
18. *Баранова, Д. А.* Компьютерное моделирование местных и общих форм потери устойчивости тонкостенных оболочек / Д. А. Баранова, В. В. Карпов, А. А. Семенов // Вычислительная механика сплошных сред. – 2015. – Т. 8. – № 3. – С. 229–244.

19. *Барышев, А. Н.* Построение критерия прочности углерод-углеродного композиционного материала типа 4ДЛ при трехосном напряженном состоянии / А. Н. Барышев, С. В. Цветков // Известия высших учебных заведений. Машиностроение. – 2017. – № 6(687). – С. 78–85.
20. *Беликов, Г. И.* Оптимизация топологии подкреплённых цилиндрических оболочек мостовых конструкций при свободных колебаниях / Г. И. Беликов, С. Ю. Калашников // Вестник ВолгГАСУ. Серия: Строительство и архитектура. – 2011. – № 25(44). – С. 14–20.
21. *Беликов, Г. И.* Статика, динамика и устойчивость сетчатых и подкреплённых оболочек с учетом поперечного сдвига / Г. И. Беликов. – Волгоград: ВолгГАСА, 2003. – 298 с.
22. *Белозеров, Л. Г.* Композитные оболочки при силовых и тепловых воздействиях / Л. Г. Белозеров, В. А. Киреев. – М.: Физматлит, 2003. – 388 с.
23. *Белосточный, Г. Н.* Динамическая устойчивость геометрически нерегулярной нагретой пологой цилиндрической оболочки в сверхзвуковом потоке газа / Г. Н. Белосточный, О. А. Мыльцина // Вестник СамГТУ. Серия: Физико-математические науки. – 2018. – Т. 22. – № 4. – С. 750–761.
24. *Бендюков, В. В.* О влиянии заполнителя на критические параметры импульса давления при динамической потере устойчивости цилиндрической оболочки / В. В. Бендюков, В. В. Дерюшев, М. М. Лурье, П. Н. Овчаров // Научный вестник МГТУ ГА. – 2005. – № 84(2). – С. 131–137.
25. *Биргер, И. А.* Стержни, пластинки, оболочки / И. А. Биргер. – М.: Наука, 1992. – 390 с.
26. *Босяков, С. М.* Анализ свободных колебаний цилиндрической оболочки из стеклопластика при граничных условиях Навье / С. М. Босяков, В. Чживэй // Механика машин, механизмов и материалов. – 2011. – № 3(16). – С. 24–27.
27. *Валиуллин, А. Х.* Большие деформации и перемещения композитной цилиндрической оболочки / А. Х. Валиуллин // Вестник Казанского технологического университета. Сер. Физика. – 2011. – № 3. – С. 109–117.

28. *Валишвили, Н. В.* Методы расчета оболочек вращения на ЭЦВМ / Н. В. Валишвили. – М.: Машиностроение, 1976. – 278 с.
29. *Васильев, В. В.* Механика конструкций из композиционных материалов / В. В. Васильев. – М.: Машиностроение, 1988. – 272 с.
30. *Видюшенков, С. А.* Основные разрешающие дифференциальные уравнения оболочек вращения с переменными жесткостными и грузовыми параметрами / С. А. Видюшенков, Н. С. Бушуев // Инфраструктура транспорта. – 2021. – № 2 (2). – С. 10–18.
31. *Видюшенков, С. А.* Теория расчета пластин и оболочек / С. А. Видюшенков, О. В. Козьминская, В. И. Смирнов. – СПб.: ПГУПС, 2022. – 65 с.
32. *Власов, В. З.* Контактные задачи по теории оболочек и тонкостенных стержней / В. З. Власов // Изв. АН СССР. ОТН. – 1949. – № 6. – С. 819–939.
33. *Власов, В. З.* Общая теория оболочек и ее приложение в технике / В. З. Власов. – М., Л.: Гостехиздат, 1949. – 784 с.
34. *Володин, Г. Т.* Геометрическая нелинейность в задачах разрушения оболочечных конструкций взрывом / Г. Т. Володин, А. С. Новиков // Известия ТулГУ. Технические науки. – 2014. – № 3. – С. 94–103.
35. *Вольмир, А. С.* Нелинейная динамика пластинок и оболочек / А. С. Вольмир. – М.: Наука, 1972. – 432 с.
36. *Вольмир, А. С.* Устойчивость деформируемых систем / А. С. Вольмир. – М.: Наука, 1967. – 984 с.
37. *Ворович, И. И.* К решению нелинейных краевых задач теории упругости методом перехода к задаче Коши / И. И. Ворович, В. Ф. Зипалова // Прикладная математика и механика. – 1965. – Т. 29. – № 5. – С. 894–901.
38. *Ворович, И. И.* О существовании решений в нелинейной теории оболочек / И. И. Ворович // Известия АН СССР. Сер. Математика. – 1955. – Т. 19. – № 4. – С. 203–206.

39. *Гаврюшин, С. С.* Численный анализ элементов конструкций машин и приборов / С. С. Гаврюшин, О. О. Барышникова, О. Ф. Борискин. – 2. – М.: Изд-во МГТУ им. Н.Э. Баумана, 2014. – 479 с.

40. *Галеркин, Б. Г.* К теории упругой цилиндрической оболочки / Б. Г. Галеркин // Доклады АН СССР. – 1934. – Т. 4. – № 5–6.

41. *Герасименко, П. В.* Численный алгоритм исследования напряженно-деформированного состояния цилиндрических оболочек железнодорожных цистерн / П. В. Герасименко, В. А. Ходаковский // Вестник Санкт-Петербургского университета. Математика. Механика. Астрономия. – 2019. – Т. 6. – № 2. – С. 308–317.

42. *Голоскоков, Д. П.* Изгиб ребристой пластины при сложном нагружении / Д. П. Голоскоков, А. В. Матросов // Вестник Санкт-Петербургского университета. Прикладная математика. Информатика. Процессы управления. – 2021. – Т. 17. – № 2. – С. 120–130.

43. *Гольденблат, И. И.* Критерии прочности и пластичности конструкционных материалов / И. И. Гольденблат, В. А. Копнов. – М.: Машиностроение, 1968. – 191 с.

44. *Гольденвейзер, А. Л.* Уравнения теории тонких оболочек / А. Л. Гольденвейзер // Прикладная математика и механика. – 1940. – Т. 4. – № 2. – С. 35–42.

45. *Гребень, Е. С.* Основные соотношения технической теории ребристых оболочек / Е. С. Гребень // Известия АН СССР. Механика. – 1965. – № 3. – С. 81–92.

46. *Григолюк, Э. И.* Устойчивость оболочек / Э. И. Григолюк, В. В. Кабанов. – М.: Наука, 1978. – 359 с.

47. *Григолюк, Э. И.* Влияние осесимметричных начальных неправильностей сферической оболочки на ее критическую нагрузку / Э. И. Григолюк, Е. А. Лопаницын // Известия Московского государственного технического университета МАМИ. – 2008. – № 1. – С. 233–246.

48. Григолюк, Э. И. Конечные прогибы, устойчивость и закритическое поведение тонких пологих оболочек / Э. И. Григолюк, Е. А. Лопаницын. – М.: Изд-во МАМИ, 2004. – 162 с.
49. Григолюк, Э. И. Проблемы нелинейного деформирования: Метод продолжения решения по параметру в нелинейных задачах механики твердого деформируемого тела / Э. И. Григолюк, В. И. Шалашилин. – М.: Наука, 1988. – 232 с.
50. Гриневич, Д. В. Критерии разрушения полимерных композиционных материалов (обзор) / Д. В. Гриневич, Н. О. Яковлев, А. В. Славин // Труды ВИАМ. – 2019. – № 7(79). – С. 92–111.
51. Давиденко, Д. Ф. Об одном новом методе численного решения систем нелинейных уравнений / Д. Ф. Давиденко // Доклады АН СССР. – 1953. – Т. 88. – № 4. – С. 601–602.
52. Дмитриев, В. Г. Экспериментальное исследование устойчивости цилиндрических оболочек при действии сильных воздушных ударных волн / В. Г. Дмитриев, Э. Д. Скурлатов // Проблемы машиностроения и автоматизации. – 2006. – № 1. – С. 69–74.
53. Дубровин, В. М. Моделирование динамической устойчивости цилиндрической оболочки при действии осевой сжимающей нагрузки / В. М. Дубровин, Т. А. Бутина // Математическое моделирование и численные методы. – 2015. – № 2(6). – С. 46–57.
54. Дьяченко, Ю. П. Нестационарные задачи динамики пластин и цилиндрических оболочек вращения ступенчатого сечения / Ю. П. Дьяченко, Э. Я. Еленицкий, Д. В. Петров // Вестник СамГТУ. Серия Физико-математические науки. – 2011. – № 2(23). – С. 278–288.
55. Енджиевский, Л. В. Нелинейные деформации ребристых оболочек / Л. В. Енджиевский. – Красноярск: Изд-во Красноярск. ун-та, 1982. – 295 с.
56. Жгутов, В. М. Метод конструктивной анизотропии для ортотропных и изотропных ребристых оболочек / В. М. Жгутов // Инженерно-строительный журнал. – 2009. – № 8(10). – С. 40–46.

57. Железнов, Л. П. Исследование нелинейного деформирования и устойчивости некруговых цилиндрических оболочек при осевом сжатии и внутреннем давлении / Л. П. Железнов, В. В. Кабанов // Прикладная механика и техническая физика. – 2002. – Т. 43. – № 4(254). – С. 155–160.
58. Жилин, П. А. Общая теория ребристых оболочек / П. А. Жилин // Прочность гидротурбин: Труды ЦКТИ. – Л., 1971. – Т. 88. – С. 46–70.
59. Захаров, К. В. Критерий прочности для слоистых масс / К. В. Захаров // Пластические массы. – 1961. – № 8. – С. 61–67.
60. Ильин, В. П. Устойчивость ребристых оболочек при больших перемещениях / В. П. Ильин, В. В. Карпов. – Л.: Стройиздат, 1986. – 168 с.
61. Каменев, И. В. Обоснование использования метода конструктивной анизотропии при расчете пологих оболочек двоякой кривизны, ослабленных вырезами / И. В. Каменев, А. А. Семенов // Вестник ПНИПУ. Механика. – 2016. – № 2. – С. 54–68.
62. Канторович, Л. В. Один прямой метод приближенного решения задач о минимуме двойного интеграла / Л. В. Канторович // Известия АН СССР. ОМЭН. – 1933. – № 5. – С. 647–652.
63. Кармишин, А. В. Статика и динамика тонкостенных оболочечных конструкций / А. В. Кармишин, В. А. Лясковец, В. И. Мяченков, А. Н. Фролов. – М.: Машиностроение, 1975. – 376 с.
64. Карпов, В. В. Особенности напряженно-деформированного состояния панелей ребристых оболочек вращения при динамическом нагружении / В. В. Карпов, Д. И. Аристов, А. А. Овчаров // Вестник ТГАСУ. – 2007. – № 1. – С. 94–101.
65. Карпов, В. В. Программный комплекс исследования устойчивости оболочек / В. В. Карпов, Д. А. Баранова, Р. Т. Беркалиев. – СПб.: СПбГАСУ, 2009. – 104 с.
66. Карпов, В. В. Геометрически нелинейные задачи для пластин и оболочек и методы их решения / В. В. Карпов. – СПб., М.: СПбГАСУ, АСВ, 1999. – 154 с.

67. *Карпов, В. В.* Нелинейные математические модели деформирования оболочек переменной толщины и алгоритмы их исследования / В. В. Карпов, О. В. Игнатьев, А. Ю. Сальников. – М.: АСВ; СПб: СПбГАСУ, 2002. – 420 с.

68. *Карпов, В. В.* Математическое моделирование, алгоритмы исследования модели, вычислительный эксперимент в теории оболочек / В. В. Карпов. – СПб.: СПбГАСУ, 2006. – 330 с.

69. *Карпов, В. В.* Обоснование уравнения совместности деформаций для ребристых оболочек / В. В. Карпов // Архитектура – Строительство – Транспорт: Материалы 72-й научной конференции профессоров, преподавателей, научных работников, инженеров и аспирантов университета. – СПб.: СПбГАСУ, 2016. – Т. 1. – С. 22–27.

70. *Карпов, В. В.* Уточнение решений при использовании шаговых методов в теории гибких пластинок и оболочек / В. В. Карпов, В. В. Петров // Известия Академии наук СССР. Механика твердого тела. – 1975. – № 5. – С. 189–191.

71. *Карпов, В. В.* Прочность и устойчивость подкрепленных оболочек вращения: в 2 ч. Ч. 1: Модели и алгоритмы исследования прочности и устойчивости подкрепленных оболочек вращения / В. В. Карпов. – М.: Физматлит, 2010. – 288 с.

72. *Карпов, В. В.* Прочность и устойчивость подкрепленных оболочек вращения: в 2 ч. Ч. 2: Вычислительный эксперимент при статическом механическом воздействии / В. В. Карпов. – М.: Физматлит, 2011. – 248 с.

73. *Карпов, В. В.* Вариационный метод вывода нелинейных уравнений движения пологих ребристых оболочек / В. В. Карпов, А. Ю. Сальников // Вестник гражданских инженеров. – 2008. – № 4(17). – С. 121–124.

74. *Карпов, В. В.* Безразмерные параметры в теории подкрепленных оболочек / В. В. Карпов, А. А. Семенов // Вестник ПНИПУ. Механика. – 2015. – № 3. – С. 74–94.

75. *Карпов, В. В.* Критерии прочности для тонкостенных ортотропных оболочек. Ч. 1: Анализ основных критериев прочности изотропных и ортотропных материалов / В. В. Карпов, А. А. Семенов // Вестник гражданских инженеров. – 2014. – № 6(47). – С. 43–51.

76. *Карпов, В. В.* Критерии прочности для тонкостенных ортотропных оболочек. Ч. 2: Расчеты и анализ / В. В. Карпов, А. А. Семенов // Вестник гражданских инженеров. – 2015. – № 1(48). – С. 60–70.

77. *Карпов, В. В.* Математическая модель деформирования подкрепленных ортотропных оболочек вращения / В. В. Карпов, А. А. Семенов // Инженерно-строительный журнал. – 2013. – № 5(40). – С. 100–106.

78. *Карпов, В. В.* Математические модели и алгоритмы исследования прочности и устойчивости оболочечных конструкций / В. В. Карпов, А. А. Семенов // Сибирский журнал индустриальной математики. – 2017. – Т. 20. – № 1(69). – С. 53–65.

79. *Карпов, В. В.* Уравнения в смешанной форме для ребристых оболочек общего вида и методика их решения / В. В. Карпов // Вестник ПНИПУ. Механика. – 2019. – № 2. – С. 116–134.

80. *Каюмов, Р. А.* Расчет цилиндрической оболочки на циклическую прочность / Р. А. Каюмов, Б. Ф. Тазюков // Вестник Казанского технологического университета. – 2012. – Т. 15. – № 9. – С. 162–164.

81. *Климанов, В. И.* Нелинейные задачи подкрепленных оболочек / В. И. Климанов, С. А. Тимашев. – Свердловск: УНЦ АН СССР, 1985. – 291 с.

82. *Коваленко, Г. В.* Особенности проектирования и конструирования пологих железобетонных оболочек / Г. В. Коваленко, И. В. Дудина, А. О. Гузиев // Труды Братского государственного университета. Серия: Естественные и инженерные науки. – 2019. – Т. 2. – С. 150–154.

83. *Коган, Е. А.* Нелинейные колебания трехслойных и многослойных пластин и оболочек при периодических воздействиях (обзор) : Естественные науки / Е. А. Коган, А. А. Юрченко // Известия МГТУ «МАМИ». – 2014. – Т. 4. – № 1(19). – С. 55–70.

84. *Коломоец, А. А.* Устойчивость равновесных состояний цилиндрической оболочки при действии неравномерного внешнего давления / А. А. Коломоец, А. С. Модин // Известия высших учебных заведений. Строительство. – 2014. – № 1(661). – С. 13–17.

85. *Копнов, В. А.* Оценка прочности композиционных материалов и других сред с различными видами анизотропии / В. А. Копнов, Г. П. Белов // Известия Института инженерной физики. – 2014. – № 2(32). – С. 73–80.
86. *Корсун, В. И.* Современные критерии прочности для бетонов при объемных напряженных состояниях / В. И. Корсун, С. Н. Карпенко, С. Ю. Макаренко, А. В. Недорезов // Строительство и реконструкция. – 2021. – № 5(97). – С. 16–30.
87. *Кривошапко, С. Н.* О возможностях оболочечных сооружений в современной архитектуре и строительстве / С. Н. Кривошапко // Строительная механика инженерных конструкций и сооружений. – 2013. – № 1(1). – С. 51–56.
88. *Крысько, А. В.* Хаотические колебания замкнутых цилиндрических оболочек и панелей. Часть I / А. В. Крысько, В. А. Крысько, Н. Е. Савельева // Вестник СГТУ. – 2005. – № 3(8). – С. 32–61.
89. *Крысько, В. А.* Динамика и статика секториальных оболочек / В. А. Крысько, И. В. Кравцова // Вестник СГТУ. – 2004. – № 2(3). – С. 27–36.
90. *Крысько, В. А.* Нелинейная статика и динамика неоднородных оболочек / В. А. Крысько. – Саратов: Изд-во Саратов. ун-та, 1976. – 216 с.
91. *Кубенко, В. Д.* Нелинейные задачи колебаний тонких оболочек (обзор) / В. Д. Кубенко, П. С. Ковальчук // Прикладная механика. – 1998. – Т. 34. – № 8. – С. 3–31.
92. *Кузнецов, Е. Б.* Параметризация задачи Коши для систем обыкновенных дифференциальных уравнений с предельными особыми точками / Е. Б. Кузнецов, С. С. Леонов // Журнал вычислительной математики и математической физики. – 2017. – Т. 57. – № 6. – С. 934–957.
93. *Кузнецов, Е. Б.* Некоторые приложения метода продолжения решения по наилучшему параметру / Е. Б. Кузнецов. – М.: Изд-во МАИ, 2013. – 160 с.
94. *Кузнецов, Е. Б.* Параметризация краевых задач и прохождение точек бифуркации / Е. Б. Кузнецов. – М.: Изд-во МАИ, 2016. – 160 с.
95. *Лебедев, А. А.* Механические свойства конструкционных материалов при сложном напряженном состоянии: Справочник / А. А. Лебедев,

Б. И. Ковальчук, Ф. Ф. Гигиняк, В. П. Ламашевский. – Киев: Наукова думка, 1983. – 366 с.

96. *Лехницкий, С. Г.* Анизотропные пластинки / С. Г. Лехницкий. – М.: Физматгиз, 1957. – 463 с.

97. *Лурье, А. И.* Общие уравнения оболочки, подкрепленной ребрами жесткости / А. И. Лурье. – Л., 1948. – 28 с.

98. *Малмейстер, А. К.* Геометрия теорий прочности / А. К. Малмейстер // Механика полимеров. – 1966. – № 4. – С. 519–534.

99. *Медведский, А. Л.* Численный анализ поведения слоистой композитной панели с межслоевыми дефектами под действием динамических нагрузок / А. Л. Медведский, М. И. Мартиросов, А. В. Хомченко // Строительная механика инженерных конструкций и сооружений. – 2019. – Т. 15. – № 2. – С. 127–134.

100. *Мехтиев, М. А.* Нелинейные параметрические колебания подкрепленной цилиндрической оболочки с вязкоупругим заполнителем / М. А. Мехтиев // Механика машин, механизмов и материалов. – 2011. – № 3(16). – С. 28–30.

101. *Милейковский, И. Е.* Устойчивость прямоугольных в плане пологих оболочек / И. Е. Милейковский, И. П. Гречанинов // Расчет пространственных конструкций: Сб. статей. – М.: Стройиздат, 1969. – Т. 12. – С. 168–176.

102. *Михайлов, Б. К.* Пластины и оболочки с разрывными параметрами / Б. К. Михайлов. – Л.: Изд. ЛГУ, 1980. – 196 с.

103. *Москаленко, Л. П.* Методика исследования устойчивости пологих ребристых оболочек на основе метода продолжения решения по наилучшему параметру / Л. П. Москаленко // Вестник гражданских инженеров. – 2011. – № 4(29). – С. 161–164.

104. *Москаленко, Л. П.* Модели и алгоритмы исследования устойчивости и закритического поведения пологих оболочек, подкрепленных ребрами переменной высоты: дис. ... канд. техн. наук: 05.13.18 / Л. П. Москаленко. – СПб.: ПГУПС, 2012. – 125 с.

105. *Моссаковский, П. А.* О критериях разрушения металлов при динамическом нагружении / П. А. Моссаковский, Ф. К. Антонов, М. Е. Колотников, Л. А. Костырева // Вестник Нижегородского университета им. Н.И. Лобачевского. – 2011. – № 4–4. – С. 1639–1641.

106. *Муштари, Х. М.* Нелинейная теория упругих оболочек / Х. М. Муштари, К. З. Галимов. – Казань: Таткнигоиздат, 1957. – 431 с.

107. *Назаров, Н. А.* О колебаниях пологих оболочек, подкреплённых ребрами жесткости / Н. А. Назаров // Прикладная механика. – 1965. – Т. 1. – № 3. – С. 24–31.

108. *Никитин, К. Е.* Расчет ребристых оболочек в рамках геометрически нелинейной теории методом конечных элементов в смешанной формулировке / К. Е. Никитин, Л. Ю. Ступишин, А. Н. Ватанин // Известия Юго-Западного государственного университета. Серия: Техника и технологии. – 2012. – № 2–2. – С. 27–30.

109. *Никифоров, С. Н.* Роль грантов в развитии научной школы по нелинейным проблемам подкреплённых оболочек / С. Н. Никифоров // Вестник гражданских инженеров. – 2011. – № 4(29). – С. 165–173.

110. *Новожилов, В. В.* Теория тонких оболочек / В. В. Новожилов. – Л.: Судпромиздат, 1962. – 431 с.

111. *Орешко, Е. И.* Обзор критериев прочности материалов / Е. И. Орешко, В. С. Ерасов, Д. В. Гриневич, П. В. Шершак // Труды ВИАМ. – 2019. – № 9(81). – С. 108–126.

112. *Паймушин, В. Н.* Статические и динамические балочные формы потери устойчивости длинной ортотропной цилиндрической оболочки при внешнем давлении / В. Н. Паймушин // Прикладная математика и механика. – 2008. – Т. 72. – № 6. – С. 1014–1027.

113. *Панин, А. Н.* Устойчивость пологих железобетонных ребристых оболочек / А. Н. Панин // Вестник гражданских инженеров. – 2012. – № 2(31). – С. 101–106.

114. *Перцев, А. К.* Динамика оболочек и пластин: (Нестационарные задачи) / А. К. Перцев, Э. Г. Платонов. – Л.: Судостроение, 1987. – 316 с.
115. *Петров, В. В.* К расчету пологих оболочек при конечных прогибах / В. В. Петров // Научные доклады высшей школы. Строительство. – 1959. – № 1. – С. 27–35.
116. *Петров, В. В.* Метод последовательных нагружений в нелинейной теории пластинок и оболочек / В. В. Петров. – Саратов: Изд-во Сарат. ун-та, 1975. – 119 с.
117. *Петров, В. В.* Расчет гибких пластин и пологих оболочек вариационным методом В.З. Власова / В. В. Петров // Прикладная механика. – 1966. – Т. 2. – № 5.
118. *Петров, Д. С.* Анализ устойчивости ортотропной цилиндрической оболочечной конструкции в программном комплексе ANSYS Mechanical APDL / Д. С. Петров, А. А. Семенов // Научно-технический вестник информационных технологий, механики и оптики. – 2023. – Т. 23. – № 3. – С. 618–627.
119. *Писаренко, Г. С.* Деформирование и прочность материалов при сложном напряженном состоянии / Г. С. Писаренко, А. А. Лебедев // Прикладная механика. – 1968. – Т. 4. – № 3. – С. 45–50.
120. *Платонов, В. В.* Устойчивость трансверсально изотропной сферической оболочки под действием динамического нормального давления / В. В. Платонов // Вестник Санкт-Петербургского университета. Серия 1. Математика. Механика. Астрономия. – 2010. – № 3. – С. 105–110.
121. *Полилов, А. Н.* Экспериментальное обоснование критериев прочности волокнистых композитов, проявляющих направленный характер разрушения / А. Н. Полилов, Н. А. Татусь // Вестник ПНИПУ. Механика. – 2012. – № 2. – С. 140–166.
122. *Преображенский, И. Н.* Устойчивость и колебания конических оболочек / И. Н. Преображенский, В. З. Грищак. – М.: Машиностроение, 1986. – 240 с.

123. *Преображенский, И. Н.* Устойчивость и колебания пластинок и оболочек с отверстиями / И. Н. Преображенский. – М.: Машиностроение, 1981. – 191 с.
124. *Радченко, П. А.* Влияние применения различных критериев прочности на поведение анизотропных материалов при динамическом нагружении / П. А. Радченко, А. В. Радченко // Материалы Международной конференции «Современные проблемы прикладной математики и механики: теория, эксперимент и практика», посвященной 90-летию со дня рождения академика Н.Н. Яненко. – Новосибирск: ИВТ СО РАН, 2011. – С. 1–6.
125. *Рикардс, Р. Б.* Устойчивость оболочек из композитных материалов / Р. Б. Рикардс, Г. А. Тетерс. – Рига: Зинатне, 1974. – 310 с.
126. *Рикс, Э.* Применение метода Ньютона к задаче упругой устойчивости / Э. Рикс // Прикладная механика. – 1972. – № 4. – С. 204–210.
127. *Сейфуллаев, А. И.* Исследование колебания продольно подкрепленной ортотропной цилиндрической оболочки с вязкой жидкостью / А. И. Сейфуллаев, К. А. Новрузова // Восточно-Европейский журнал передовых технологий. – 2015. – Т. 3. – № 7(75). – С. 29–33.
128. *Семенов, А. А.* Анализ прочности оболочечных конструкций из современных материалов в соответствии с различными критериями прочности / А. А. Семенов // Diagnostics, Resource and Mechanics of Materials and Structures. – 2018. – № 1. – С. 16–33.
129. *Семенов, А. А.* Анализ свободных нелинейных колебаний пологой ортотропной оболочки двоякой кривизны при действии внешней равномерно распределенной динамической нагрузки / А. А. Семенов // Архитектура – Строительство – Транспорт: Материалы 73-й научной конференции профессоров, преподавателей, научных работников, инженеров и аспирантов университета. – СПб.: СПбГАСУ, 2017. – Т. 1. – С. 9–15.
130. *Семенов, А. А.* Геометрически нелинейная математическая модель расчета прочности и устойчивости ортотропных оболочечных конструкций: дис. ... канд. техн. наук: 05.23.17 / А. А. Семенов. – СПб.: СПбГАСУ, 2014. – 183 с.

131. Семенов, А. А. Метод непрерывного продолжения решения по наилучшему параметру при расчете оболочечных конструкций / А. А. Семенов, С. С. Леонов // Ученые записки Казанского университета. Серия: Физико-математические науки. – 2019. – Т. 161. – № 2. – С. 230–249.

132. Семенов, А. А. Методика исследования устойчивости пологих ортотропных оболочек двоякой кривизны при динамическом нагружении / А. А. Семенов // International Journal for Computational Civil and Structural Engineering. – 2017. – Т. 13. – № 2. – С. 145–153.

133. Семенов, А. А. Устойчивость цилиндрических панелей, подкрепленных ортогональной сеткой ребер / А. А. Семенов, Л. П. Москаленко, В. В. Карпов, М. В. Сухотерин // Вестник гражданских инженеров. – 2020. – № 6(83). – С. 117–125.

134. Семенов, А. А. Прочность и устойчивость подкрепленных пологих оболочек из стеклопластика / А. А. Семенов // Архитектура – Строительство – Транспорт: Материалы 72-й научной конференции профессоров, преподавателей, научных работников, инженеров и аспирантов университета. – СПб.: СПбГАСУ, 2016. – Т. 1. – С. 27–30.

135. Семенов, А. А. Уточненный дискретный метод расчета подкрепленных ортотропных оболочек / А. А. Семенов // Вестник ПНИПУ. Механика. – 2022. – № 4. – С. 90–102.

136. Сеницкий, Ю. Э. Осесимметричная задача динамики для неоднородной конической оболочки / Ю. Э. Сеницкий // Вестник СамГТУ. Серия: Физико-математические науки. – 2012. – № 1(26). – С. 74–91.

137. Смердов, А. А. Анализ оптимальных сочетаний требований к разрабатываемым углепластикам для крупногабаритных ракетно-космических конструкций / А. А. Смердов, И. А. Буянов, И. В. Чуднов // Известия высших учебных заведений. Машиностроение. – 2012. – № 8. – С. 70–77.

138. Смердов, А. А. Возможности повышения местной устойчивости подкрепленных и интегральных композитных конструкций / А. А. Смердов //

Известия высших учебных заведений. Машиностроение. – 2014. – № 10(655). – С. 70–79.

139. *Соколов, В. Г.* Параметрические колебания и динамическая устойчивость магистральных газопроводов при наземной прокладке / В. Г. Соколов, И. О. Разов // Вестник гражданских инженеров. – 2014. – № 2(43). – С. 65–68.

140. *Соловей, Н. А.* Конечнэлементные модели исследования нелинейного деформирования оболочек ступенчато-переменной толщины с отверстиями, каналами и выемками / Н. А. Соловей, О. П. Кривенко, О. А. Малыгина // Инженерно-строительный журнал. – 2015. – № 1(53). – С. 56–69.

141. *Старовойтов, Э. И.* Деформирование трехслойных элементов конструкций на упругом основании / Э. И. Старовойтов, А. В. Яровая, Д. В. Леоненко. – М.: Физматлит, 2006. – 378 с.

142. *Ступишин, Л. Ю.* Исследование оптимальных форм пологих геометрически нелинейных оболочек по критерию максимума значений низших частот малых свободных колебаний / Л. Ю. Ступишин, А. Г. Колесников, И. В. Соломатников // Известия Юго-Западного государственного университета. – 2011. – № 5–2(38). – С. 313–316.

143. *Сухинин, С. Н.* Прикладные задачи устойчивости многослойных композитных оболочек / С. Н. Сухинин. – М.: Физматлит, 2010. – 248 с.

144. *Тарануха, Н. А.* Нелинейные свободные изгибные колебания тонких круговых цилиндрических оболочек / Н. А. Тарануха, Г. С. Лейзерович // Дальневосточный математический журнал. – 2000. – Т. 1. – № 1. – С. 102–110.

145. *Теребушко, О. И.* Устойчивость и закритическая деформация оболочек, подкрепленных редко расставленными ребрами / О. И. Теребушко // Расчет пространственных конструкций: Сб. статей. – М.: Стройиздат, 1964. – Т. 9. – С. 131–160.

146. *Тимашев, С. А.* Устойчивость подкрепленных оболочек / С. А. Тимашев. – М.: Стройиздат, 1974. – 256 с.

147. *Товстик, П. Е.* Устойчивость тонких оболочек. Асимптотические методы / П. Е. Товстик. – М.: Наука, 1995. – 307 с.

148. *Трещев, А. А.* Анизотропные пластины и оболочки из разносопротивляющихся материалов / А. А. Трещев. – М.; Тула: РААСН; ТулГУ, 2007. – 160 с.

149. *Трещев, А. А.* Деформирование цилиндрической оболочки из титанового сплава под воздействием агрессивной водородсодержащей среды / А. А. Трещев, В. О. Кузнецова // Строительная механика и конструкции. – 2022. – № 2(33). – С. 26–39.

150. *Трещев, А. А.* Исследование НДС прямоугольной в плане оболочки положительной гауссовой кривизны из ортотропных материалов с учетом свойств разносопротивляемости / А. А. Трещев, М. Б. Шерешевский // Вестник Волгоградского государственного архитектурно-строительного университета. Серия: Строительство и архитектура. – 2013. – № 31–2 (50). – С. 414–421.

151. *Трушин, С. И.* Устойчивость и бифуркации гибких пологих сетчатых оболочек / С. И. Трушин, А. В. Михайлов // Вестник НИЦ Строительство. – 2010. – № 2. – С. 150–158.

152. *Тышкевич, В. Н.* Выбор критерия прочности для труб из армированных пластиков / В. Н. Тышкевич // Известия ВолгГТУ. – 2011. – № 5 (78). – С. 76–79.

153. *Филатов, В. Н.* Математическое моделирование напряженно-деформированного состояния гибких оболочек, жестко заделанных по контуру / В. Н. Филатов, А. А. Абросимов // Инженерно-строительный журнал. – 2011. – № 3(21). – С. 28–31.

154. *Хейдари, А.* Факторы, влияющие на критическую нагрузку и распространение местной потери устойчивости в сетчатых оболочках (современные достижения) / А. Хейдари, В. В. Галишникова // Вестник Российского университета дружбы народов. Серия: Инженерные исследования. – 2013. – № 1. – С. 118–133.

155. *Цветков, С. В.* Критерии прочности однонаправленного органопластика при трехосном напряженном состоянии / С. В. Цветков,

Г. Г. Кулиш // Вестник МГТУ им. Н.Э. Баумана. Серия: Машиностроение. – 2011. – № SP. – С. 19–28.

156. *Цепенников, М. В.* Верификация численной методики расчета разрушения конструкций из композиционных материалов / М. В. Цепенников, И. А. Повышев, О. Ю. Сметанников // Вестник ПНИПУ. Прикладная математика и механика. – 2012. – № 10. – С. 225–241.

157. *Черных, К. Ф.* Общая нелинейная теория упругих оболочек / К. Ф. Черных, С. А. Кабриц, Е. И. Михайловский, П. Е. Товстик, В. А. Шамина. – СПб.: Изд-во СПбГУ, 2002. – 388 с.

158. *Шалашилин, В. И.* Метод продолжения решения по параметру и наилучшая параметризация (в прикладной математике и механике) / В. И. Шалашилин, Е. Б. Кузнецов. – М.: Эдиториал УРСС, 1999. – 222 с.

159. *Янковский, А. П.* Асимптотический анализ решения нелинейной задачи нестационарной теплопроводности слоистых анизотропных неоднородных оболочек при граничных условиях первого рода на лицевых поверхностях / А. П. Янковский // Вестник СамГТУ. Серия Физико-математические науки. – 2014. – № 1(34). – С. 168–185.

160. *Abramovich, H.* Stability and vibrations of nonclosed circular cylindrical shells reinforced with discrete longitudinal ribs / H. Abramovich, V. A. Zarutskii // International Applied Mechanics. – 2008. – Vol. 44. – No. 1. – P. 16–22.

161. *Abrosimov, N. A.* Computer Modeling of the Dynamic Strength of Metal-Plastic Cylindrical Shells Under Explosive Loading / N. A. Abrosimov, N. A. Novosel'tseva // Mechanics of Composite Materials. – 2017. – Vol. 53. – No. 2. – P. 139–148.

162. *Alijani, F.* Application of the extended Kantorovich method to the bending of clamped cylindrical panels / F. Alijani, M. M. Aghdam, M. Abouhamze // European Journal of Mechanics – A/Solids. – 2008. – Vol. 27. – No. 3. – P. 378–388.

163. *Alijani, F.* Non-linear vibrations of shells: A literature review from 2003 to 2013 / F. Alijani, M. Amabili // International Journal of Non-Linear Mechanics. – 2014. – Vol. 58. – P. 233–257.

164. *Allgower, E. L.* Introduction to Numerical Continuation Methods / E. L. Allgower, K. Georg. – Berlin; Heidelberg: Springer, 1990. – 388 p.
165. *Amabili, M.* Non-linearities in rotation and thickness deformation in a new third-order thickness deformation theory for static and dynamic analysis of isotropic and laminated doubly curved shells / M. Amabili // International Journal of Non-Linear Mechanics. – 2015. – Vol. 69. – P. 109–128.
166. *Amabili, M.* Review of studies on geometrically nonlinear vibrations and dynamics of circular cylindrical shells and panels, with and without fluid-structure interaction / M. Amabili, M. P. Païdoussis // Applied Mechanics Reviews. – 2003. – Vol. 56. – No. 4. – P. 349–381.
167. *Amiro, I. Ya.* Stability of ribbed shells / I. Ya. Amiro, V. A. Zarutskii // Soviet Applied Mechanics. – 1983. – Vol. 19. – No. 11. – P. 925–940.
168. *Ashok, R. B.* Buckling Behaviour of Cylindrical Panels / R. B. Ashok, C. V. Srinivasa, Y. J. Suresh, W. P. Prema Kumar // Nonlinear Engineering. – 2015. – Vol. 4. – No. 2. – P. 67–75.
169. *Awrejcewicz, J.* On the wavelet transform application to a study of chaotic vibrations of the infinite length flexible panels driven longitudinally / J. Awrejcewicz, A. V. Krysko, V. Soldatov // International Journal of Bifurcation and Chaos. – 2009. – Vol. 19. – No. 10. – P. 3347–3371.
170. *Azarboni, H. R.* Chaotic dynamics and stability of functionally graded material doubly curved shallow shells / H. R. Azarboni, R. Ansari, A. Nazarinezhad // Chaos, Solitons & Fractals. – 2018. – Vol. 109. – P. 14–25.
171. *Bacciocchi, M.* Vibration analysis of variable thickness plates and shells by the Generalized Differential Quadrature method / M. Bacciocchi, M. Eisenberger, N. Fantuzzi, F. Tornabene, E. Viola // Composite Structures. – 2016. – Vol. 156. – P. 218–237.
172. *Bai, X.* Analysis of the influence of stiffness reduction on the load carrying capacity of ring-stiffened cylindrical shell / X. Bai, W. Xu, H. Ren, J. Li // Ocean Engineering. – 2017. – Vol. 135. – P. 52–62.

173. *Baruch, M.* Effect of Eccentricity of Stiffeners on the General Instability of Stiffened Cylindrical Shells under Hydrostatic Pressure / M. Baruch, J. Singer // *Journal of Mechanical Engineering Science*. – 1963. – Vol. 5. – No. 1. – P. 23–27.

174. *Bich, D. H.* Nonlinear static and dynamic buckling analysis of functionally graded shallow spherical shells including temperature effects / D. H. Bich, D. V. Dung, L. K. Hoa // *Composite Structures*. – 2012. – Vol. 94. – No. 9. – P. 2952–2960.

175. *Bich, D. H.* Research on dynamical buckling of imperfect stiffened three-layered toroidal shell segments containing fluid under mechanical loads / D. H. Bich, D. G. Ninh // *Acta Mechanica*. – 2017. – Vol. 228. – No. 2. – P. 711–730.

176. *Bosyakov, S. M.* Analysis of the effect of the winding angle of glass fiber on the frequencies of free vibrations of a shell made of glass-reinforced plastic under nonsymmetric boundary conditions / S. M. Bosyakov, Z. W. Wang // *Journal of Engineering Physics and Thermophysics*. – 2011. – Vol. 84. – No. 2. – P. 440–444.

177. *Buragohain, M.* Buckling Analysis of Composite Hexagonal Lattice Cylindrical Shell using Smeared Stiffener Model / M. Buragohain, R. Velmurugan // *Defence Science Journal*. – 2009. – Vol. 59. – No. 3. – P. 230–238.

178. *Bushnell, D.* Approximate method for the optimum design of ring and stringer stiffened cylindrical panels and shells with local, inter-ring, and general buckling modal imperfections / D. Bushnell, W. D. Bushnell // *Computers & Structures*. – 1996. – Vol. 59. – No. 3. – P. 489–527.

179. *Calladine, C. R.* Shell buckling, without ‘imperfections’ / C. R. Calladine // *Advances in Structural Engineering*. – 2018. – Vol. 21. – No. 16. – P. 2393–2403.

180. *Campen, D. H. van.* Semi-analytical stability analysis of doubly-curved orthotropic shallow panels – considering the effects of boundary conditions / D. H. van Campen, V. P. Bouwman, G. Q. Zhang, J. Zhang, B. J. W. ter Weeme // *International Journal of Non-Linear Mechanics*. – 2002. – Vol. 37. – No. 4–5. – P. 659–667.

181. *Carrera, E.* Plates and shells for smart structures: classical and advanced theories for modelling and analysis / E. Carrera, S. Brischetto, P. Nali. – 1st ed. – Hoboken, NJ: Wiley, 2011. – 309 p.

182. *Chen, B.* Design optimization of stiffened storage tank for spacecraft / B. Chen, G. Liu, J. Kang, Y. Li // Structural and Multidisciplinary Optimization. – 2008. – Vol. 36. – No. 1. – P. 83–92.
183. *Chen, H.-J.* Analysis and Optimum Design of Composite Grid Structures / H.-J. Chen, S. W. Tsai // Journal of Composite Materials. – 1996. – Vol. 30. – No. 4. – P. 503–534.
184. *Chupin, V. V.* Stability of flexible spherical panels of variable thickness under various fixing conditions / V. V. Chupin, D. E. Chernogubov // Diagnostics, Resource and Mechanics of materials and structures. – 2015. – No. 5. – P. 45–57.
185. *Dai, Q.* Parametric instability analysis of truncated conical shells using the Haar wavelet method / Q. Dai, Q. Cao // Mechanical Systems and Signal Processing. – 2018. – Vol. 105. – P. 200–213.
186. *Dey, T.* Dynamic stability of simply supported composite cylindrical shells under partial axial loading / T. Dey, L. S. Ramachandra // Journal of Sound and Vibration. – 2015. – Vol. 353. – P. 272–291.
187. *Donnell, L. H.* A new theory for the buckling of thin cylinders under axial compression and bending / L. H. Donnell // Transactions of the ASME. – 1934. – Vol. 56. – P. 795–806.
188. *Dung, D. V.* Analytical investigation on mechanical buckling of FGM truncated conical shells reinforced by orthogonal stiffeners based on FSDT / D. V. Dung, D. Q. Chan // Composite Structures. – 2017. – Vol. 159. – P. 827–841.
189. *Dung, D. V.* An analytical approach to analyze nonlinear dynamic response of eccentrically stiffened functionally graded circular cylindrical shells subjected to time dependent axial compression and external pressure. Part 2: Numerical results and discussion / D. V. Dung, V. H. Nam // Vietnam Journal of Mechanics. – 2014. – Vol. 36. – No. 4. – P. 255–265.
190. *Efimov, B. M.* Forced vibrations of plates and cylindrical shells with regular orthogonal system of stiffeners / B. M. Efimov, L. A. Lazarev // Journal of Sound and Vibration. – 2009. – Vol. 327. – No. 1–2. – P. 41–54.

191. *Evensen, D. A.* Nonlinear vibrations of circular cylindrical shells / D. A. Evensen // *Thin-Shell Structures: Theory, Experiment and Design* / eds. Y. C. Fung, E. E. Sechler. – Englewood Cliffs, NJ: Prentice-Hall, 1974. – P. 133–155.
192. *Feng, K.* Buckling Analysis of Composite Cylindrical Shell Panels by Using Legendre Polynomials Hierarchical Finite-Strip Method / K. Feng, J. Xu // *Journal of Engineering Mechanics*. – 2017. – Vol. 143. – No. 4. – P. 04016121.
193. *Feng, W.-Z.* Buckling of Cylindrical Shells with Arbitrary Circumferential Thickness Variations Under External Pressure / W.-Z. Feng, Z.-P. Chen, P. Jiao, F. Zhou, H.-G. Fan // *Journal of Mechanics*. – 2017. – Vol. 33. – No. 1. – P. 55–64.
194. *Fisher, L.* How to predict structural behavior of R.P. Laminates / L. Fisher // *Modern Plastics*. – 1960. – Vol. 37. – No. 6. – P. 122–209.
195. *Galishnikova, V. V.* Ductility and flexure of lightweight expanded clay basalt fiber reinforced concrete slab / V. V. Galishnikova, A. Heidari, P. C. Chiadighikaobi, A. A. Muritala, D. A. Emiri // *Structural Mechanics of Engineering Constructions and Buildings*. – 2021. – Vol. 17. – No. 1. – P. 74–81.
196. *Ganeeva, M. S.* Large deflections and rigidity of a long cylindrical orthotropic glass-plastic panel subjected to intermittent-uniform loads / M. S. Ganeeva, G. V. Sachenkova // *Polymer Mechanics*. – 1974. – Vol. 8. – No. 5. – P. 724–730.
197. *Gao, K.* Nonlinear dynamic stability of the orthotropic functionally graded cylindrical shell surrounded by Winkler-Pasternak elastic foundation subjected to a linearly increasing load / K. Gao, W. Gao, D. Wu, C. Song // *Journal of Sound and Vibration*. – 2018. – Vol. 415. – P. 147–168.
198. *Gavryushin, S. S.* Method of change of the subspace of control parameters and its application to problems of synthesis of nonlinearly deformable axisymmetric thin-walled structures / S. S. Gavryushin, A. S. Nikolaeva // *Mechanics of Solids*. – 2016. – Vol. 51. – No. 3. – P. 339–348.
199. *Ghorbanpour Arani, A.* Elastic Buckling Analysis of Ring and Stringer-stiffened Cylindrical Shells under General Pressure and Axial Compression via the Ritz Method / A. Ghorbanpour Arani, A. Loghman, A. A. Mosallaie Barzoki, R. Kolahchi // *Journal of Solid Mechanics*. – 2010. – Vol. 2. – No. 4. – P. 332–347.

200. *Gupta, A. K.* Progressive damage of laminated cylindrical/conical panels under meridional compression / A. K. Gupta, B. P. Patel, Y. Nath // *European Journal of Mechanics – A/Solids*. – 2015. – Vol. 53. – P. 329–341.
201. *Gürdal, Z.* Optimal design of geodesically stiffened composite cylindrical shells / Z. Gürdal, G. Gendron // *Composites Engineering*. – 1993. – Vol. 3. – No. 12. – P. 1131–1147.
202. *Guz, A. N.* Elastoplastic state of flexible cylindrical shells with two circular holes / A. N. Guz, E. A. Storozhuk, I. S. Chernyshenko // *International Applied Mechanics*. – 2004. – Vol. 40. – No. 10. – P. 1152–1156.
203. *Hairer, E.* Solving Ordinary Differential Equations II : Springer Series in Computational Mathematics / E. Hairer, G. Wanner. – Berlin, Heidelberg: Springer Berlin Heidelberg, 1991. – 601 p.
204. *Hao, P.* Hybrid optimization of hierarchical stiffened shells based on smeared stiffener method and finite element method / P. Hao, B. Wang, G. Li, Z. Meng, K. Tian, X. Tang // *Thin-Walled Structures*. – 2014. – Vol. 82. – P. 46–54.
205. *Hashin, Z.* Failure Criteria for Unidirectional Fiber Composites / Z. Hashin // *Journal of Applied Mechanics*. – 1980. – Vol. 47. – No. 2. – P. 329–334.
206. *Hoffman, O.* The Brittle Strength of Orthotropic Materials / O. Hoffman // *Journal of Composite Materials*. – 1967. – Vol. 1. – No. 2. – P. 200–206.
207. *Huang, S.* A new semi-analytical method for nonlinear stability analysis of stiffened laminated composite doubly-curved shallow shells / S. Huang, P. Qiao // *Composite Structures*. – 2020. – Vol. 251. – P. 112526.
208. *Huybrechts, S.* Analysis and behavior of grid structures / S. Huybrechts, S. W. Tsai // *Composites Science and Technology*. – 1996. – Vol. 56. – No. 9. – P. 1001–1015.
209. *Jaunky, N.* Formulation of an improved smeared stiffener theory for buckling analysis of grid-stiffened composite panels / N. Jaunky, N. F. Knight, D. R. Ambur // *Composites Part B: Engineering*. – 1996. – Vol. 27. – No. 5. – P. 519–526.

210. *Jones, R. M.* Buckling of circular cylindrical shells with multiple orthotropic layers and eccentric stiffeners / R. M. Jones // *AIAA Journal*. – 1968. – Vol. 6. – No. 12. – P. 2301–2305.
211. *Kalamkarov, A. L.* Analysis, design, and optimization of composite structures / A. L. Kalamkarov, A. G. Kolpakov. – Chichester, West Sussex, England; New York: J. Wiley & Sons, 1997. – 356 p.
212. *Karman, T.* The Buckling of Spherical Shells by External Pressure / T. Karman, H.-S. Tsien // *Journal of the Aeronautical Sciences*. – 1939. – Vol. 7. – No. 2. – P. 43–50.
213. *Karpov, V.* Variational method for derivation of equations of mixed type for shells of a general type / V. Karpov // *Architecture and Engineering*. – 2016. – Vol. 1. – No. 2. – P. 43–48.
214. *Karpov, V. V.* Models of the shells having ribs, reinforcement plates and cutouts / V. V. Karpov // *International Journal of Solids and Structures*. – 2018. – Vol. 146. – P. 117–135.
215. *Karpov, V. V.* Mathematical models and algorithms for studying strength and stability of shell structures / V. V. Karpov, A. A. Semenov // *Journal of Applied and Industrial Mathematics*. – 2017. – Vol. 11. – No. 1. – P. 70–81.
216. *Karpov, V. V.* Mixed-Form Equations for Stiffened Orthotropic Shells of Arbitrary Canonical Shape with Static Loading / V. V. Karpov, A. A. Semenov // *Journal of Mechanics*. – 2018. – Vol. 34. – No. 4. – P. 469–474.
217. *Karpov, V. V.* Refined model of stiffened shells / V. V. Karpov, A. A. Semenov // *International Journal of Solids and Structures*. – 2020. – Vol. 199. – P. 43–56.
218. *Karpov, V. V.* Structural anisotropy method for shells with orthogonal stiffeners / V. V. Karpov, A. A. Semenov // *Structures*. – 2021. – Vol. 34. – P. 3206–3221.
219. *Kayumov, R. A.* Nonlinear problems of stability cylindrical panels with imperfection / R. A. Kayumov, B. F. Tazyukov, I. Z. Muhamedova // *IOP Conference Series: Materials Science and Engineering*. – 2016. – Vol. 158. – P. 012051.

220. *Kiani, Y.* Dynamic analysis and active control of smart doubly curved FGM panels / Y. Kiani, M. Sadighi, M. R. Eslami // *Composite Structures*. – 2013. – Vol. 102. – P. 205–216.
221. *Kidane, S.* Buckling load analysis of grid stiffened composite cylinders / S. Kidane, G. Li, J. Helms, S.-S. Pang, E. Woldeesenbet // *Composites Part B: Engineering*. – 2003. – Vol. 34. – No. 1. – P. 1–9.
222. *Kim, Y.-W.* Transient analysis of ring-stiffened composite cylindrical shells with both edges clamped / Y.-W. Kim, Y.-S. Lee // *Journal of Sound and Vibration*. – 2002. – Vol. 252. – No. 1. – P. 1–17.
223. *Kolli, M.* Finite element analysis of stiffened laminated plates under transverse loading / M. Kolli, K. Chandrashekhara // *Composites Science and Technology*. – 1996. – Vol. 56. – No. 12. – P. 1355–1361.
224. *Kondratyeva, L. N.* Analytical Method of Determining Folded Depressed Shells Free Oscillation Frequency / L. N. Kondratyeva, Y. L. Routman, A. M. Maslennikov, O. V. Golykh // *Advanced Materials Research*. – 2014. – Vol. 1020. – P. 291–296.
225. *Krivoshapko, S. N.* Research on General and Axisymmetric Ellipsoidal Shells Used as Domes, Pressure Vessels, and Tanks / S. N. Krivoshapko // *Applied Mechanics Reviews*. – 2007. – Vol. 60. – No. 6. – P. 336–355.
226. *Krivoshapko, S. N.* Shell structures and shells at the beginning of the 21st century / S. N. Krivoshapko // *Structural Mechanics of Engineering Constructions and Buildings*. – 2021. – Vol. 17. – No. 6. – P. 553–561.
227. *Krysko, V. A.* Chaotic vibrations of spherical and conical axially symmetric shells / V. A. Krysko, J. Awrejcewicz, T. V. Shchekaturova // *Archive of Applied Mechanics*. – 2005. – Vol. 74. – No. 5–6. – P. 338–358.
228. *Kumar, Y.* The Rayleigh–Ritz method for linear dynamic, static and buckling behavior of beams, shells and plates: A literature review / Y. Kumar // *Journal of Vibration and Control*. – 2017. – Vol. 24. – No. 7. – P. 1205–1227.

229. *Lahaye, M. E.* Solution of system of transcendental equations / M. E. Lahaye // Académie Royale de Belgique. Bulletin de la Classe des Sciences. – 1948. – Vol. 5. – P. 805–822.
230. *Lavrenčič, M.* Simulation of shell buckling by implicit dynamics and numerically dissipative schemes / M. Lavrenčič, B. Brank // Thin-Walled Structures. – 2018. – Vol. 132. – P. 682–699.
231. *Leissa, A. W.* Vibration of Shells. Rep. No. NASA-SP-288, LC-77-186367 / A. W. Leissa. – 1973.
232. *Leonenko, D. V.* Vibrations of Cylindrical Sandwich Shells with Elastic Core under Local Loads / D. V. Leonenko, E. I. Starovoitov // International Applied Mechanics. – 2016. – Vol. 52. – No. 4. – P. 359–367.
233. *Li, Z.-M.* Buckling and Postbuckling of Anisotropic Laminated Doubly Curved Panels under Lateral Pressure / Z.-M. Li, T. Liu, P. Qiao // International Journal of Mechanical Sciences. – 2021. – Vol. 206. – P. 106615.
234. *Liew, K. M.* Dynamic stability analysis of composite laminated cylindrical panels via the mesh-free kp-Ritz method / K. M. Liew, Y. Y. Lee, T. Y. Ng, X. Zhao // International Journal of Mechanical Sciences. – 2007. – Vol. 49. – No. 10. – P. 1156–1165.
235. *Liu, C.* On the asymmetric yield surface of plastically orthotropic materials: A phenomenological study / C. Liu, Y. Huang, M. G. Stout // Acta Materialia. – 1997. – Vol. 45. – No. 6. – P. 2397–2406.
236. *Love, A. E. H.* The small free vibrations and deformation of a thin elastic shell / A. E. H. Love // Philosophical Transactions of the Royal Society of London. (A.). – 1888. – Vol. 179. – P. 491–546.
237. *Luo, K.* Nonlinear static and dynamic analysis of hyper-elastic thin shells via the absolute nodal coordinate formulation / K. Luo, C. Liu, Q. Tian, H. Hu // Nonlinear Dynamics. – 2016. – Vol. 85. – No. 2. – P. 949–971.
238. *Ma, G.* Dynamic plastic behavior of circular plate using unified yield criterion / G. Ma, S. Iwasaki, Y. Miyamoto, H. Deto // International Journal of Solids and Structures. – 1999. – Vol. 36. – No. 22. – P. 3257–3275.

239. *Maksimyuk, V. A.* Variational finite-difference methods in linear and nonlinear problems of the deformation of metallic and composite shells (review) / V. A. Maksimyuk, E. A. Storozhuk, I. S. Chernyshenko // *International Applied Mechanics*. – 2012. – Vol. 48. – No. 6. – P. 613–687.

240. *McElman, J. A.* Static and dynamic effects of eccentric stiffening of plates and cylindrical shells / J. A. McElman, M. M. Mikulas, Jr., M. Stein // *AIAA Journal*. – 1966. – Vol. 4. – No. 5. – P. 887–894.

241. *Moussaoui, F.* Non-Linear Vibrations of Shell-Type Structures: A Review with Bibliography / F. Moussaoui, R. Benamar // *Journal of Sound and Vibration*. – 2002. – Vol. 255. – No. 1. – P. 161–184.

242. *Nekliudova, E. A.* Experimental research and finite element analysis of elastic and strength properties of fiberglass composite material / E. A. Nekliudova, A. S. Semenov, B. E. Melnikov, S. G. Semenov // *Magazine of Civil Engineering*. – 2014. – No. 3(47). – P. 25–39.

243. *Ng, T. Y.* Dynamic stability of cylindrical panels with transverse shear effects / T. Y. Ng, K. Y. Lam, J. N. Reddy // *International Journal of Solids and Structures*. – 1999. – Vol. 36. – No. 23. – P. 3483–3496.

244. *Niu, J.* Comparison of yield strength theories with experimental results / J. Niu, G. Liu, J. Tian, Y.-X. Zhang, L.-P. Meng // *Engineering Mechanics*. – 2014. – Vol. 31. – No. 1. – P. 181–187.

245. *Noh, H. C.* Ultimate strength of large scale reinforced concrete thin shell structures / H. C. Noh // *Thin-Walled Structures*. – 2005. – Vol. 43. – No. 9. – P. 1418–1443.

246. *Obodan, N. I.* The complete bifurcation structure of nonlinear boundary problem for cylindrical panel subjected to uniform external pressure / N. I. Obodan, V. A. Gromov // *Thin-Walled Structures*. – 2016. – Vol. 107. – P. 612–619.

247. *Paczos, P.* Critical load of a bilayered orthotropic elastic–plastic conical shell with the change of the shell basic surface location / P. Paczos, J. Zielnica // *Thin-Walled Structures*. – 2007. – Vol. 45. – No. 10–11. – P. 911–915.

248. *Patel, S. N.* Buckling and dynamic instability analysis of stiffened shell panels / S. N. Patel, P. K. Datta, A. H. Sheikh // *Thin-Walled Structures*. – 2006. – Vol. 44. – No. 3. – P. 321–333.
249. *Petrov, D.* Buckling of cylindrical shell panels in ANSYS / D. Petrov, A. Semenov // *AIP Conference Proceedings*. – 2020. – Vol. 2315. – P. 020032.
250. *Prado, Z. del.* Non-linear vibrations and instabilities of orthotropic cylindrical shells with internal flowing fluid / Z. del Prado, P. B. Gonçalves, M. P. Païdoussis // *International Journal of Mechanical Sciences*. – 2010. – Vol. 52. – No. 11. – P. 1437–1457.
251. *Prusty, B. G.* Free vibration and buckling response of hat-stiffened composite panels under general loading / B. G. Prusty // *International Journal of Mechanical Sciences*. – 2008. – Vol. 50. – No. 8. – P. 1326–1333.
252. *Pshenichnov, S. G.* Nonstationary dynamic problems of nonlinear viscoelasticity / S. G. Pshenichnov // *Mechanics of Solids*. – 2013. – Vol. 48. – No. 1. – P. 68–78.
253. *Qatu, M. S.* Recent research advances on the dynamic analysis of composite shells: 2000–2009 / M. S. Qatu, R. W. Sullivan, W. Wang // *Composite Structures*. – 2010. – Vol. 93. – No. 1. – P. 14–31.
254. *Qu, Y.* Vibration analysis of ring-stiffened conical-cylindrical-spherical shells based on a modified variational approach / Y. Qu, S. Wu, Y. Chen, H. Hua // *International Journal of Mechanical Sciences*. – 2013. – Vol. 69. – P. 72–84.
255. *Raeesi, A.* Failure analysis of steel silos subject to wind load / A. Raeesi, H. Ghaednia, J. Zohrehheydariha, S. Das // *Engineering Failure Analysis*. – 2017. – Vol. 79. – P. 749–761.
256. *Rafiee, M.* Buckling response of composite cylindrical shells with various stiffener layouts under uniaxial compressive loading / M. Rafiee, M. Hejazi, H. Amoushahi // *Structures*. – 2021. – Vol. 33. – P. 4514–4537.
257. *Reddy, J. N.* Shear Deformation Plate and Shell Theories: From Stavsky to Present / J. N. Reddy, R. A. Arciniega // *Mechanics of Advanced Materials and Structures*. – 2004. – Vol. 11. – No. 6. – P. 535–582.

258. *Reissner, E.* Note on the Membrane Theory of Shell of Revolution / E. Reissner // Journal of Mathematics and Physics. – 1947. – Vol. 26. – No. 1–4. – P. 290–293.

259. *Reissner, H.* Formänderung und Spannungen einer dünnwandigen, an den Rändern frei aufliegenden, beliebig belasteten Zylinderschale. Eine Erweiterung der Navierschen Integrationsmethode / H. Reissner // ZAMM – Zeitschrift für Angewandte Mathematik und Mechanik. – 1933. – Vol. 13. – No. 2. – P. 133–138.

260. *Ren, M.* Numerical investigation into the buckling behavior of advanced grid stiffened composite cylindrical shell / M. Ren, T. Li, Q. Huang, B. Wang // Journal of Reinforced Plastics and Composites. – 2014. – Vol. 33. – No. 16. – P. 1508–1519.

261. *Ren, S.* Experimental study on dynamic buckling of submerged grid-stiffened cylindrical shells under intermediate-velocity impact / S. Ren, Y. Song, A.-M. Zhang, S. Wang, P. Li // Applied Ocean Research. – 2018. – Vol. 74. – P. 237–245.

262. *Sahu, S. K.* Research Advances in the Dynamic Stability Behavior of Plates and Shells: 1987–2005 – Part I: Conservative Systems / S. K. Sahu, P. K. Datta // Applied Mechanics Reviews. – 2007. – Vol. 60. – No. 2. – P. 65–75.

263. *Semenov, A.* Dynamic Buckling of Stiffened Shell Structures with Transverse Shears under Linearly Increasing Load / A. Semenov // Journal of Applied and Computational Mechanics. – 2022. – Vol. 8. – No. 4. – P. 1343–1357.

264. *Semenov, A. A.* Models of Deformation of Stiffened Orthotropic Shells under Dynamic Loading / A. A. Semenov // Journal of Siberian Federal University. Mathematics & Physics. – 2016. – Vol. 9. – No. 4. – P. 485–497.

265. *Sengupta, J.* Progressive Failure Analysis of Laminated Composite Cylindrical Shell Roofs / J. Sengupta, A. Ghosh, D. Chakravorty // Journal of Failure Analysis and Prevention. – 2015. – Vol. 15. – No. 3. – P. 390–400.

266. *Shadmehri, F.* Buckling of conical composite shells / F. Shadmehri, S. V. Hoa, M. Hojjati // Composite Structures. – 2012. – Vol. 94. – No. 2. – P. 787–792.

267. *Shampine, L. F.* Initial value problems for ODEs in problem solving environments / L. F. Shampine, R. M. Corless // Journal of Computational and Applied Mathematics. – 2000. – Vol. 125. – No. 1–2. – P. 31–40.

268. *Shelofast, V. V.* Experimental identification of dynamic parameters of carbon-fiber-reinforced plastic (CFRP) and their use in a national experimental complex for finite element analysis / V. V. Shelofast, G. G. Kulish, A. A. Smerdov, M. Y. Rostovtcev // International Journal of Applied Engineering Research. – 2017. – T. 12. – № 5. – С. 728–737.

269. *Shokrieh, M. M.* Investigation of Strain Rate Effects on the Dynamic Response of a Glass/Epoxy Composite Plate Under Blast Loading by Using the Finite-Difference Method / M. M. Shokrieh, A. Karamnejad // Mechanics of Composite Materials. – 2014. – Vol. 50. – No. 3. – P. 295–310.

270. *Shul'ga, N. A.* Forced Axisymmetric Nonlinear Vibrations of Reinforced Conical Shells / N. A. Shul'ga, S. Yu. Bogdanov // International Applied Mechanics. – 2003. – Vol. 39. – No. 12. – P. 1447–1451.

271. *Singer, J.* On the stability of eccentrically stiffened cylindrical shells under axial compression / J. Singer, M. Baruch, O. Harari // International Journal of Solids and Structures. – 1967. – Vol. 3. – No. 4. – P. 445–470.

272. *Sirivolu, D.* Dynamic stability of double-curvature composite shells under external blast / D. Sirivolu, M. S. Hoo Fatt // International Journal of Non-Linear Mechanics. – 2015. – Vol. 77. – P. 281–290.

273. *Slinchenko, D.* Structural analysis of composite lattice shells of revolution on the basis of smearing stiffness / D. Slinchenko, V. E. Verijenko // Composite Structures. – 2001. – Vol. 54. – No. 2–3. – P. 341–348.

274. *Sofiyev, A. H.* Domains of dynamic instability of FGM conical shells under time dependent periodic loads / A. H. Sofiyev, N. Kuruoglu // Composite Structures. – 2016. – Vol. 136. – P. 139–148.

275. *Storozhuk, E. A.* Analytical-Numerical Solution of Static Problems for Noncircular Cylindrical Shells of Variable Thickness / E. A. Storozhuk, A. V. Yatsura // International Applied Mechanics. – 2017. – Vol. 53. – No. 3. – P. 313–325.

276. *Timergaliev, S. N.* Solvability of geometrically nonlinear boundary-value problems for shallow shells of Timoshenko type with pivotally supported edges /

S. N. Timergaliev, A. N. Uglov, L. S. Kharasova // Russian Mathematics. – 2015. – Vol. 59. – No. 5. – P. 41–51.

277. *Tornabene, F.* Numerical and exact models for free vibration analysis of cylindrical and spherical shell panels / F. Tornabene, S. Brischetto, N. Fantuzzi, E. Viola // Composites Part B: Engineering. – 2015. – Vol. 81. – P. 231–250.

278. *Troitsky, M. S.* Stiffened plates: bending, stability, and vibrations / M. S. Troitsky. – Amsterdam; New York: New York: Elsevier Scientific Pub. Co.; distributors for the U.S. and Canada, Elsevier/North-Holland, 1976. – 410 p.

279. *Tsai, S. W.* A General Theory of Strength for Anisotropic Materials / S. W. Tsai, E. M. Wu // Journal of Composite Materials. – 1971. – Vol. 5. – No. 1. – P. 58–80.

280. *Ungbhakorn, V.* A Scaling Law for Vibration Response of Laminated Doubly Curved Shallow Shells by Energy Approach / V. Ungbhakorn, P. Singhatanadgid // Mechanics of Advanced Materials and Structures. – 2009. – Vol. 16. – No. 5. – P. 333–344.

281. *Van der Neut, A.* The General Instability of Stiffened Cylindrical Shells under Axial Compression / A. Van der Neut. – National Aeronautical Research Institute (Amsterdam), 1947.

282. *Vasiliev, V. V.* Anisogrid lattice structures – survey of development and application / V. V. Vasiliev, V. A. Barynin, A. F. Rasin // Composite Structures. – 2001. – Vol. 54. – No. 2–3. – P. 361–370.

283. *Vasiliev, V. V.* Anisogrid composite lattice structures – Development and aerospace applications / V. V. Vasiliev, V. A. Barynin, A. F. Rasin // Composite Structures. – 2012. – Vol. 94. – No. 3. – P. 1117–1127.

284. *Wang, B.* Numerical-based smeared stiffener method for global buckling analysis of grid-stiffened composite cylindrical shells / B. Wang, K. Tian, P. Hao, Y. Zheng, Y. Ma, J. Wang // Composite Structures. – 2016. – Vol. 152. – P. 807–815.

285. *Wang, C. M.* Ritz Method for Vibration Analysis of Cylindrical Shells with Ring Stiffeners / C. M. Wang, S. Swaddiwudhipong, J. Tian // Journal of Engineering Mechanics. – 1997. – Vol. 123. – No. 2. – P. 134–142.

286. Wang, J. T.-S. Discrete analysis of stiffened composite cylindrical shells / J. T.-S. Wang, T.-M. Hsu // *AIAA Journal*. – 1985. – Vol. 23. – No. 11. – P. 1753–1761.
287. Wang, X. Nonlinear stability analysis of thin doubly curved orthotropic shallow shells by the differential quadrature method / X. Wang // *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*. – 2007. – Vol. 196. – No. 17–20. – P. 2242–2251.
288. Watts, G. Nonlinear bending and snap-through instability analyses of conical shell panels using element free Galerkin method / G. Watts, M. K. Singha, S. Pradyumna // *Thin-Walled Structures*. – 2018. – Vol. 122. – P. 452–462.
289. Xiang, Y. Buckling of intermediate ring supported cylindrical shells under axial compression / Y. Xiang, C. M. Wang, C. W. Lim, S. Kitipornchai // *Thin-Walled Structures*. – 2005. – Vol. 43. – No. 3. – P. 427–443.
290. Yankovskii, A. P. Steady-state creep of complexly reinforced shallow metal-composite shells / A. P. Yankovskii // *Mechanics of Composite Materials*. – 2010. – Vol. 46. – No. 1. – P. 89–100.
291. Yin, M. An experimental study of triaxial compressive dynamic mechanical properties of foam plastics / M. Yin, H. Li, X. P. Han // *Journal of Xi'an Jiaotong University*. – 1998. – Vol. 32. – No. 6. – P. 78–81.
292. Yokoyama, N. O. A numerical study on the impact resistance of composite shells using an energy based failure model / N. O. Yokoyama, M. V. Donadon, S. F. M. de Almeida // *Composite Structures*. – 2010. – Vol. 93. – No. 1. – P. 142–152.
293. Yu, M.-H. Advances in strength theories for materials under complex stress state in the 20th Century / M.-H. Yu // *Applied Mechanics Reviews*. – 2002. – Vol. 55. – No. 3. – P. 169–218.
294. Yu, Y.-Y. Influence of Transverse Shear and Edge Condition on Nonlinear Vibration and Dynamic Buckling of Homogeneous and Sandwich Plates / Y.-Y. Yu, J.-L. Lai // *Transactions of the ASME*. – 1966. – Vol. 33. – No. 4. – P. 934–936.
295. Zgoda, Iu. N. High performance modeling of the stress-strain state of thin-walled shell structures with the use of deep learning / Iu. N. Zgoda // *Scientific and Technical Journal of Information Technologies, Mechanics and Optics*. – 2023. – Vol. 23. – No. 2. – P. 430–435.

296. *Zhang, B.* A load reconstruction model for advanced grid-stiffened composite plates / B. Zhang, J. Zhang, Z. Wu, S. Du // *Composite Structures*. – 2008. – Vol. 82. – No. 4. – P. 600–608.

297. *Zhang, J.* Stability and bifurcation of doubly curved shallow panels under quasi-static uniform load / J. Zhang, D. H. van Campen // *International Journal of Non-Linear Mechanics*. – 2003. – Vol. 38. – No. 4. – P. 457–466.

298. *Zhao, X.* Geometrically nonlinear analysis of functionally graded shells / X. Zhao, K. M. Liew // *International Journal of Mechanical Sciences*. – 2009. – Vol. 51. – No. 2. – P. 131–144.

**ПРИЛОЖЕНИЕ А. Свидетельство о государственной регистрации
программы для ЭВМ «DimShell: dimensionless calculations of orthotropic
shells»**

РОССИЙСКАЯ ФЕДЕРАЦИЯ



СВИДЕТЕЛЬСТВО

о государственной регистрации программы для ЭВМ

№ 2015661781

DimShell: dimensionless calculations of orthotropic shells

Правообладатель: **Федеральное государственное бюджетное
образовательное учреждение высшего профессионального
образования «Санкт-Петербургский государственный
архитектурно-строительный университет» (RU)**

Авторы: **Карпов Владимир Васильевич (RU),
Семенов Алексей Александрович (RU)**



Заявка № **2015618771**

Дата поступления **24 сентября 2015 г.**

Дата государственной регистрации
в Реестре программ для ЭВМ **09 ноября 2015 г.**

Руководитель Федеральной службы
по интеллектуальной собственности

Г.П. Излиев

**ПРИЛОЖЕНИЕ Б. Свидетельство о государственной регистрации
программы для ЭВМ «DynShell: dynamic buckling and nonlinear vibrations of
orthotropic shells»**

РОССИЙСКАЯ ФЕДЕРАЦИЯ



СВИДЕТЕЛЬСТВО

о государственной регистрации программы для ЭВМ

№ 2017662611

**DynShell: dynamic buckling and nonlinear vibrations of
orthotropic shells**

Правообладатель: *Федеральное государственное бюджетное
образовательное учреждение высшего образования
«Санкт-Петербургский государственный
архитектурно-строительный университет» (RU)*

Автор: *Семенов Алексей Александрович (RU)*



Заявка № **2017619137**

Дата поступления **12 сентября 2017 г.**

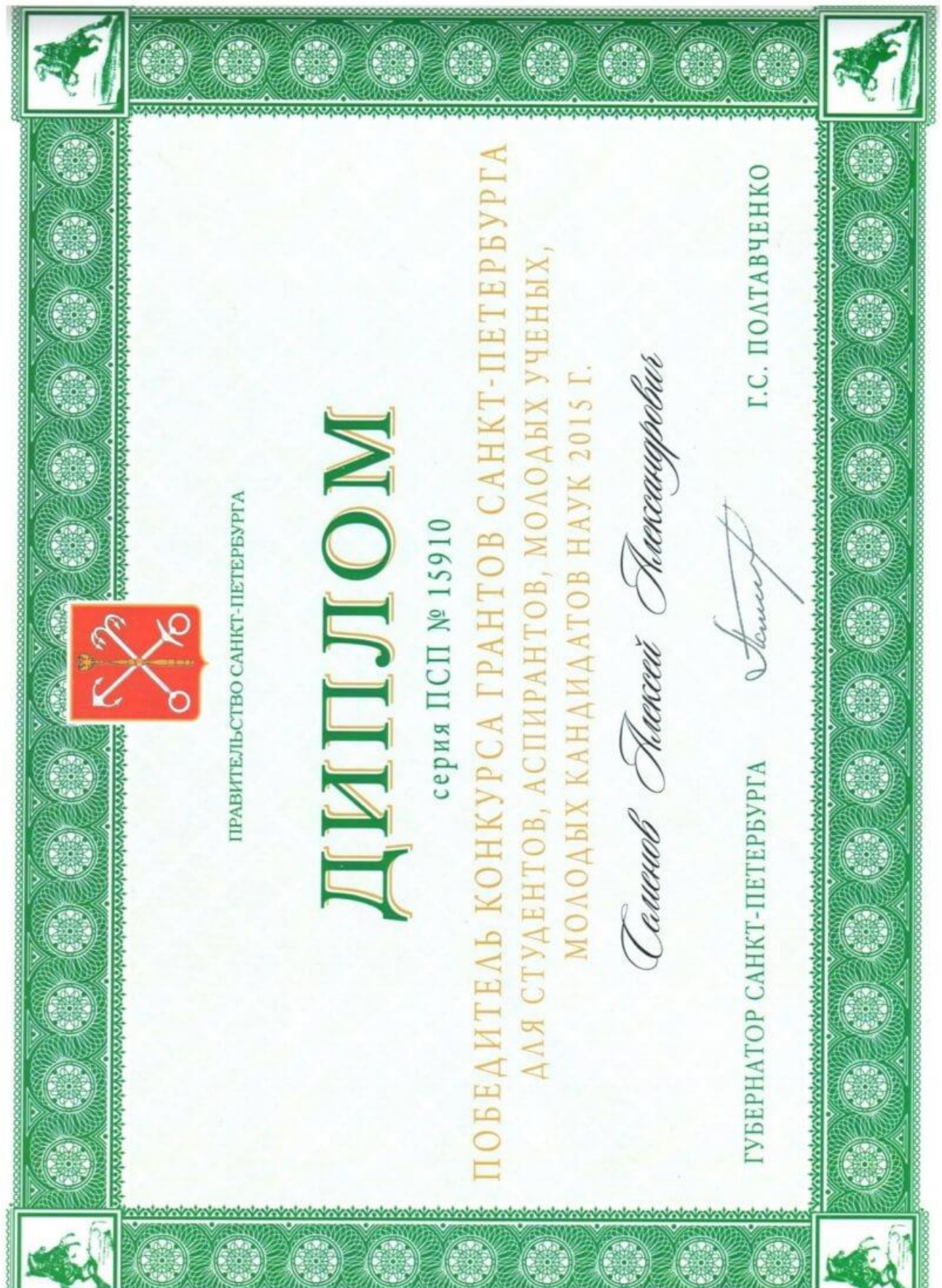
Дата государственной регистрации

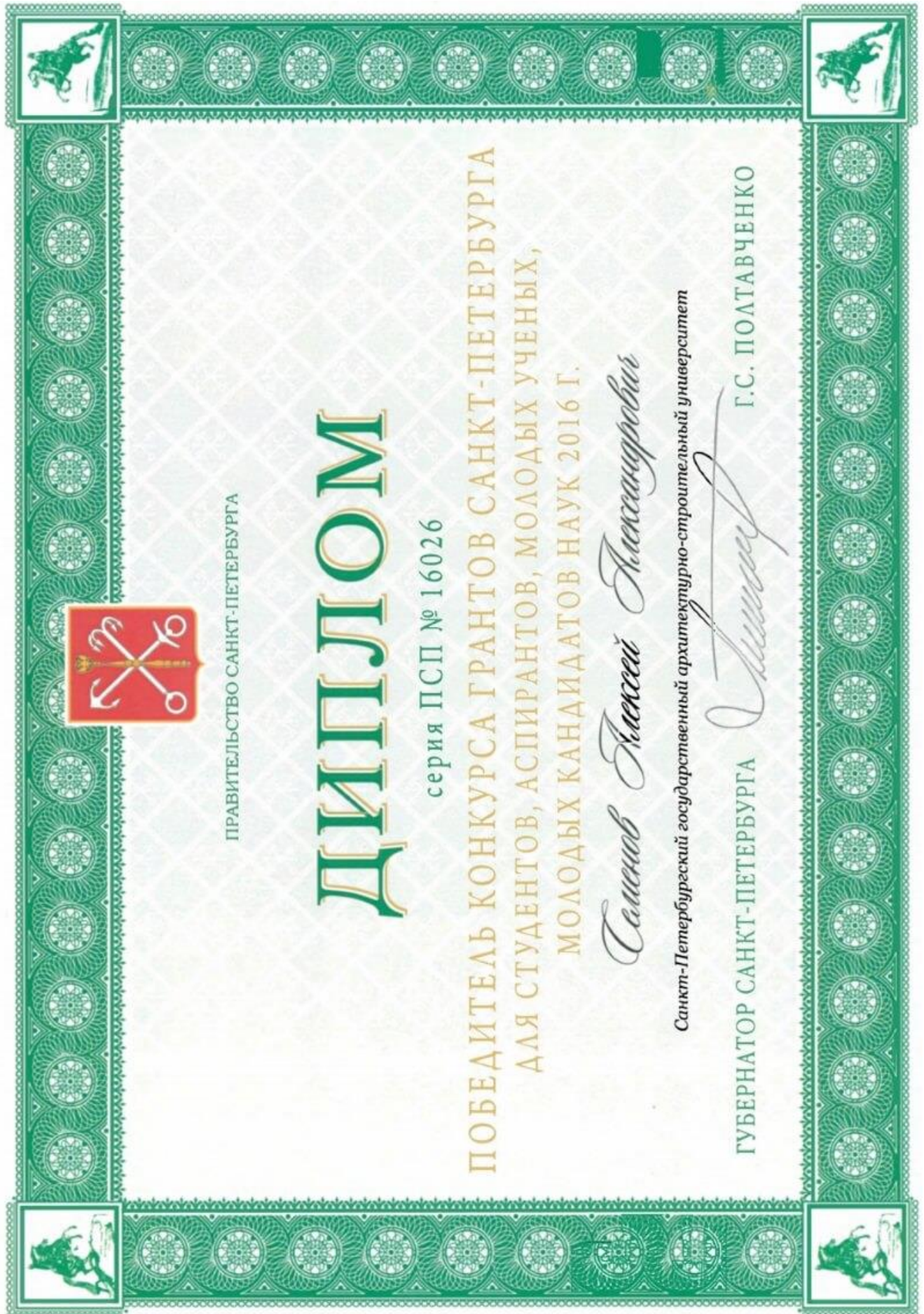
в Реестре программ для ЭВМ **13 ноября 2017 г.**

Руководитель Федеральной службы
по интеллектуальной собственности

Г.П. Ивлиев

ПРИЛОЖЕНИЕ В. Дипломы Комитета по науке и высшей школе Санкт-Петербурга







ПРАВИТЕЛЬСТВО САНКТ-ПЕТЕРБУРГА

ДИПЛОМ

серия ПСП № 17117

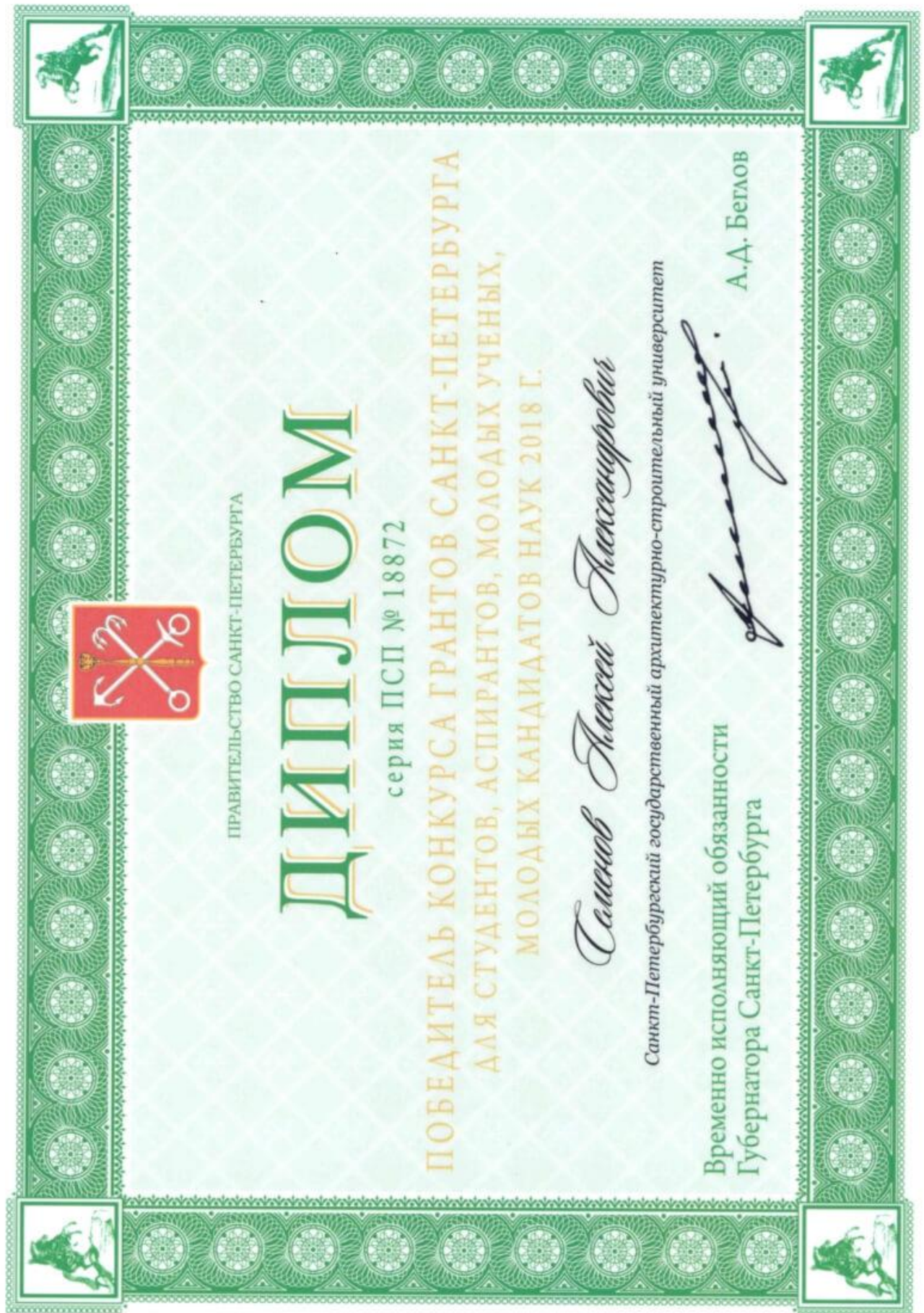
ПОБЕДИТЕЛЬ КОНКУРСА ГРАНТОВ САНКТ-ПЕТЕРБУРГА
ДЛЯ СТУДЕНТОВ, АСПИРАНТОВ, МОЛОДЫХ УЧЕНЫХ,
МОЛОДЫХ КАНДИДАТОВ НАУК 2017 Г.

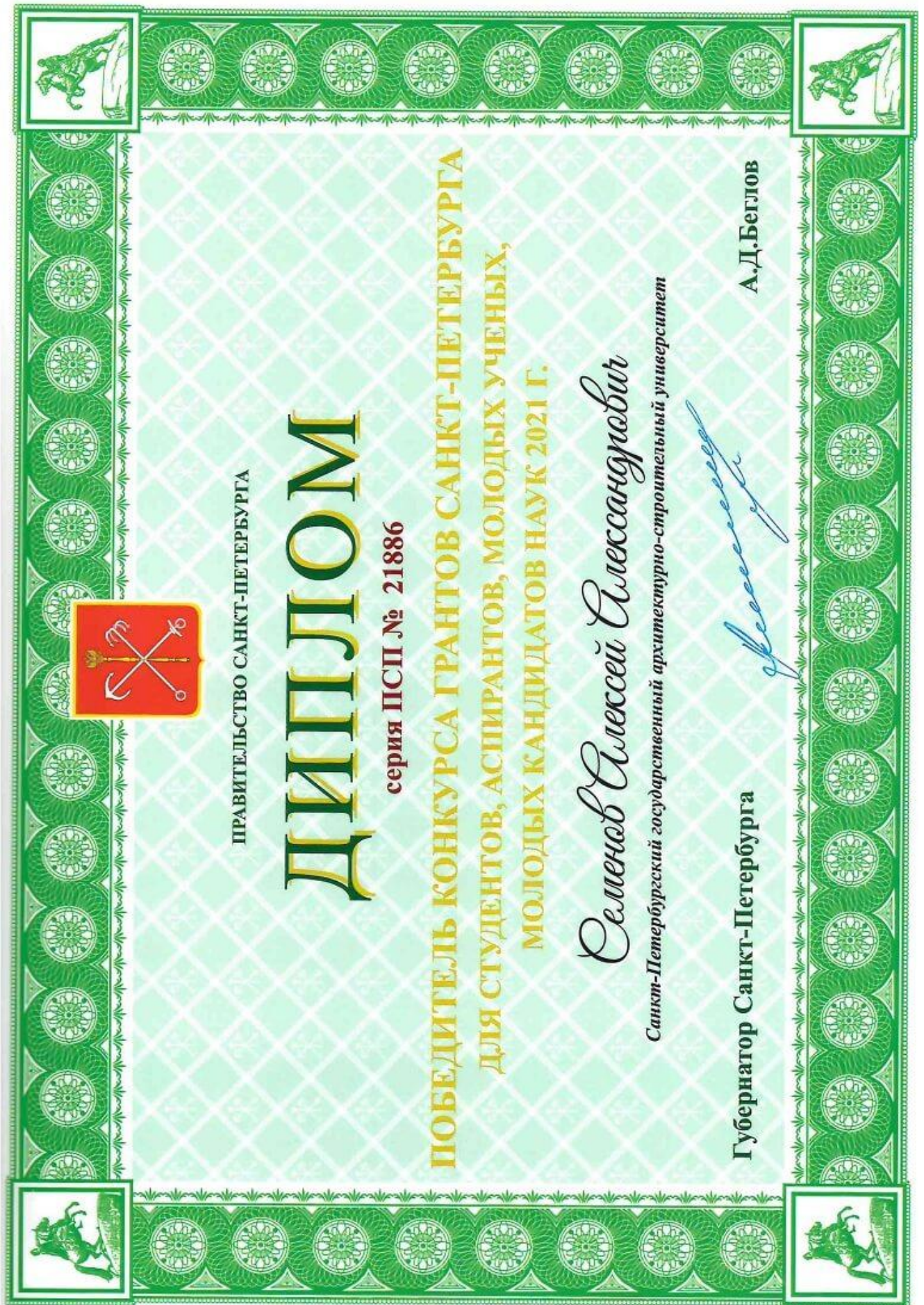
Самойлов Алексей Александрович

Санкт-Петербургский государственный архитектурно-строительный университет

ГУБЕРНАТОР САНКТ-ПЕТЕРБУРГА

Г.С. ПОЛТАВЧЕНКО







ПРИЛОЖЕНИЕ Г. Акт о внедрении результатов диссертационной работы 1



Акционерное Общество
«Институт Гипростроймост – Санкт-Петербург»

АКТ

о внедрении результатов работы,
представленной на соискание ученой степени доктора технических наук

**«Прочность и устойчивость подкрепленных ортотропных оболочечных конструкций в задачах статики и динамики»
(автор – Семенов Алексей Александрович)**

Настоящим актом подтверждаем, что результаты диссертационной работы «Прочность и устойчивость подкрепленных ортотропных оболочечных конструкций в задачах статики и динамики», представленной на соискание ученой степени доктора технических наук, приняты к внедрению в проектно-конструкторской деятельности АО «Институт Гипростроймост – Санкт-Петербург», а именно:

1. Методики по определению напряженно-деформированного состояний тонкостенных элементов конструкций металлических пролетных строений с ортотропной плитой открытого и закрытого профиля.

2. Рекомендации по эффективному расположению усиливающих элементов для обеспечения прочности и жесткости пролетных строений мостов.

3. Методики расчета металлических конструкций пролетных строений открытого и закрытого профиля при разных видах нагружения.

Использование указанных результатов позволит повысить достоверность численных расчетов оболочечных конструкций, эффективность использования строительных материалов и качество проектирования.

Председатель комиссии

Технический директор,
Заслуженный строитель Российской Федерации, Почетный транспортный строитель

Комиссия:

Начальник расчетного отдела, кандидат технических наук по специальностям: «строительная механика»; «проектирование и строительство дорог, метрополитенов, аэродромов, мостов и транспортных тоннелей»

Заместитель начальника расчетного
отдела

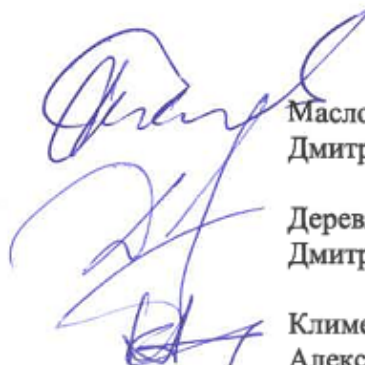
Заместитель начальника расчетного
отдела

Начальник технического отдела



Коллюшев
Игорь Евгеньевич

Гузеев
Роман Николаевич



Маслов
Дмитрий Алексеевич

Деревянкин
Дмитрий Викторович

Клименков
Алексей Алексеевич

ПРИЛОЖЕНИЕ Д. Акт о внедрении результатов диссертационной работы 2



МИНОБРНАУКИ РОССИИ
Федеральное государственное бюджетное образовательное
учреждение высшего образования
«Санкт-Петербургский государственный
архитектурно-строительный университет» (СПбГАСУ)

2-я Красноармейская ул., 4, Санкт-Петербург, 190005

[Акт внедрения материалов
диссертации в учебный процесс]



03 2022 г.

АКТ ВНЕДРЕНИЯ (ИСПОЛЬЗОВАНИЯ)

в учебный процесс результатов диссертационной работы «Прочность и устойчивость
подкрепленных ортотропных оболочечных конструкций в задачах статики и динамики»,
выполненной заведующим кафедрой информационных технологий
Санкт-Петербургского государственного архитектурно-строительного университета
СЕМЕНОВЫМ Алексеем Александровичем

Учебно-методическая комиссия Строительного факультета в составе:

Председателя:

д-ра техн. наук, доцента А. Н. Гайдо, декана Строительного факультета,

Секретаря:

канд. техн. наук, доцента Л. В. Волковой, доцента кафедры организации строительства,

Членов комиссии:

М. П. Клековкиной, Е. А. Кобелева, Р. А. Мангушева, Р. В. Мотылева, А. Н. Панина, Ю. В. Пухаренко, А. А. Семенова, А. О. Хегая, А. Г. Черных, Г. В. Якуниной

Настоящим подтверждает внедрение материалов, содержащихся в диссертации на соискание ученой степени доктора технических наук «Прочность и устойчивость подкрепленных ортотропных оболочечных конструкций в задачах статики и динамики» заведующего кафедрой «Информационных технологий» Семенова Алексея Александровича (научный консультант: доктор технических наук, профессор Карпов Владимир Васильевич), в учебный процесс кафедры информационных технологий Строительного факультета, в дисциплины:

1. «Компьютерное и математическое моделирование», направление подготовки 01.03.02 «Прикладная математика и информатика».

2. «Компьютерное и математическое моделирование», направление подготовки 09.03.02 «Информационные системы и технологии».

3. «Компьютерное моделирование нелинейных процессов в строительстве», направление подготовки 09.04.02 «Информационные системы и технологии», направленность (профиль) «Программирование и BIM-технологии в строительстве».

Внедрение подтверждается актуализированными рабочими программами соответствующих дисциплин.

Внедрение результатов диссертационной работы обсуждено на заседании учебно-методической комиссии Строительного факультета Санкт-Петербургского государственного архитектурно-строительного университета 17 марта 2022 года (протокол № 3).

Внедрение выполнено в части:

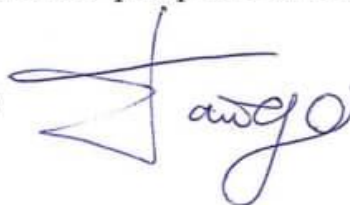
1. Разработанной автором математической модели деформирования ортотропных оболочек при статическом нагружении с учетом (в совокупности) следующих факторов: геометрической нелинейности, поперечных сдвигов, наличия ребер жесткости в соответствии с рассмотренными методами их учета. Все варианты модели могут быть использованы для конструкций разной геометрической формы, которая может быть задана через параметры Ляме и радиусы главных кривизн.

2. Разработанного автором уточненного дискретного метода для учета ребер жесткости тонкостенных оболочечных конструкций. Для ребер, направленных перпендикулярно рассматриваемому направлению, вводится коэффициент приведения, равный отношению ширины ребер этого направления к линейному размеру оболочки в рассматриваемом направлении.

3. Предложенной автором методики исследования прочности и устойчивости подкрепленных оболочечных конструкций при статическом или динамическом нагружении путем нахождения напряженно-деформированного состояния конструкции при последовательном увеличении нагрузки и построении кривой равновесных состояний.

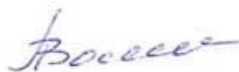
4. Разработанной автором математической модели деформирования ортотропных оболочек при динамическом нагружении в виде системы обыкновенных дифференциальных уравнений первого порядка с учетом геометрической нелинейности, поперечных сдвигов, инерции вращения, наличия ребер жесткости в соответствии с рассмотренными методами их учета.

Председатель учебно-методической комиссии
Строительного факультета,
декан, д.т.н., доцент



А.Н. Гайдо

Секретарь:
к.т.н., доцент, доцент кафедры
организации строительства



Л.В. Волкова