

Федеральное государственное бюджетное образовательное  
учреждение высшего образования  
«Вологодский государственный университет»

*На правах рукописи*

**Соловьев Сергей Александрович**

**МЕТОДЫ РАСЧЕТОВ НАДЕЖНОСТИ ИЗГИБАЕМЫХ  
ЖЕЛЕЗОБЕТОННЫХ ЭЛЕМЕНТОВ ПРИ ОГРАНИЧЕННОЙ  
СТАТИСТИЧЕСКОЙ ИНФОРМАЦИИ**

Специальность 05.23.17 – Строительная механика

**ДИССЕРТАЦИЯ**

на соискание ученой степени кандидата технических наук

Научный руководитель  
доктор технических наук  
профессор Уткин В.С.

Санкт-Петербург – 2019

**СОДЕРЖАНИЕ**

ВВЕДЕНИЕ.....	4
ГЛАВА 1. СОСТОЯНИЕ ВОПРОСА И НАПРАВЛЕНИЕ ДАЛЬНЕЙШИХ ИССЛЕДОВАНИЙ.....	10
1.1 Краткий обзор развития методов расчетов надежности несущих элементов сооружений .....	10
1.2 Проблемы и перспективы развития методов расчета надежности элементов сооружений .....	25
Выводы по первой главе .....	28
ГЛАВА 2. СПОСОБЫ ОПРЕДЕЛЕНИЯ НЕСУЩЕЙ СПОСОБНОСТИ ИЗГИБАЕМЫХ ЖЕЛЕЗОБЕТОННЫХ ЭЛЕМЕНТОВ НА СТАДИИ ЭКСПЛУАТАЦИИ.....	29
2.1 Определение несущей способности изгибаемого железобетонного элемента по критерию прочности сжатого бетона и рабочей арматуры .....	29
2.2 Определение несущей способности изгибаемого железобетонного элемента по критерию прогиба .....	41
2.3 Определение несущей способности изгибаемого железобетонного элемента по критерию ширины раскрытия трещины и длины трещины .....	53
2.4 Уточненный метод расчета несущей способности железобетонной балки при изгибе .....	60
Выводы по второй главе .....	65
ГЛАВА 3. РАСЧЕТ НАДЕЖНОСТИ ИЗГИБАЕМЫХ ЖЕЛЕЗОБЕТОННЫХ ЭЛЕМЕНТОВ НА ОСНОВЕ ТЕОРИИ НЕЧЕТКИХ МНОЖЕСТВ И ТЕОРИИ ВОЗМОЖНОСТЕЙ.....	67
3.1 Основные сведения из теории возможностей и теории нечетких множеств ...	67
3.2 Способ определения значения уровня среза (риска).....	75
3.3 Метод расчета надежности изгибаемых железобетонных на основе теории нечетких множеств и теории возможностей .....	81
3.3.1 Расчет надежности изгибаемых железобетонных элементов по критерию прочности бетона .....	81

3.3.2 Расчет надежности изгибаемых железобетонных элементов по критерию прочности рабочей арматуры .....	87
3.3.3 Расчет надежности изгибаемых железобетонных элементов по критерию жесткости (прогиба).....	90
3.3.4 Расчет надежности изгибаемых железобетонных элементов по критерию ширины раскрытия нормальных трещин .....	93
3.3.5 Расчет надежности изгибаемых железобетонных элементов по критерию длины трещины .....	104
3.3.6 Расчет надежности изгибаемых железобетонных элементов по критерию ширины раскрытия наклонных трещин .....	122
3.3.7 Расчет надежности железобетонных колонн .....	129
Выводы по третьей главе .....	135
ГЛАВА 4. РАСЧЕТ НАДЕЖНОСТИ ИЗГИБАЕМЫХ ЖЕЛЕЗОБЕТОННЫХ ЭЛЕМЕНТОВ НА ОСНОВЕ ТЕОРИИ СЛУЧАЙНЫХ МНОЖЕСТВ.....	136
4.1 Основные положения теории случайных множеств .....	136
4.2 Расчет надежности железобетонной балки по критерию прочности бетона и арматуры .....	150
4.3 Расчет надежности железобетонной балки по критерию прогиба .....	153
4.4 Расчет надежности железобетонной балки при наличии серии нормальных трещин .....	155
Выводы по четвертой главе .....	158
ГЛАВА 5. ЭКСПЕРИМЕНТАЛЬНЫЕ ИССЛЕДОВАНИЯ ЖЕЛЕЗОБЕТОННОЙ БАЛКИ.....	159
ЗАКЛЮЧЕНИЕ .....	164
СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ.....	165
Приложение 1. Справка о внедрении .....	181

## ВВЕДЕНИЕ

**Актуальность темы исследования.** Развитие методов оценки механической (конструкционной) безопасности элементов сооружений, в т.ч. изгибаемых железобетонных элементов, является актуальной научной задачей для обеспечения безопасности эксплуатации сооружений. В качестве количественной меры механической безопасности используется несущая способность, надежность, риск, остаточный ресурс несущих элементов конструкций.

По утверждению д.т.н., профессора Т.В. Золиной [23], подавляющее большинство аварий элементов строительных конструкций происходит из-за снижения их несущей способности в ходе эксплуатации при отсутствии должных методик контроля и оценки остаточного эксплуатационного ресурса. Данная работа посвящена восполнению методов и методик количественной оценки механической (конструкционной) безопасности эксплуатации изгибаемых железобетонных элементов.

В Межгосударственном стандарте ГОСТ 27751-2014 рекомендовано применение вероятностно-статистических подходов при стохастическом анализе структурных элементов сооружений. Такие подходы, в т.ч. методы расчета надежности, получили широкое научное и практическое развитие. Реализация вероятностных подходов осуществима только при достаточном объеме статистических данных о вариации исследуемых параметров, при условии, что по имеющемуся объему исходных данных можно проводить статистический анализ. Однако в практических задачах обследований и испытаний конструкций, полную статистическую информацию для уникальных по своей природе элементов строительных конструкций зачастую получить невозможно или затруднительно. Таким образом, для реализаций положений ГОСТ 27751-2014 возникает необходимость в разработке и развитии методов и теории расчета надежности при различной по количеству и качеству статистической информации в математических моделях предельных состояний. До сих пор актуальны слова д.т.н., профессора В.А. Клевцова [27] «Надежность лишь декларируется, но количественного

выражения не обретают. Проектировщик, выполнив расчет, так и не имеет строгого представления о результатах своей работы, о надежности и запасах созданной им конструкции», что также отмечает и В.Д. Райзер [60].

Разработанные в диссертационной работе методы расчетов надежности изгибаемых железобетонных элементов на примере железобетонных балок при различных качественных и количественных статистических данных о случайных параметрах в математических моделях восполняют и расширяют существующие методы оценки уровня механической безопасности эксплуатации изгибаемых железобетонных элементов.

### **Степень разработанности темы исследования.**

Значительный вклад в развитие теории надежности внесли российские ученые А.Р. Ржаницын, Б.А. Гарагаш, А.М. Половко, Б.В. Гнеденко, В.Д. Райзер, В.В. Болотин, А.С. Лычев, В.С. Уткин, Л.В. Уткин, А.М. Уздин, А.М. Юделевич, Г.С. Шульман, А.Г. Ройтман, а также зарубежные ученые Г. Аугусти, Г. Шпете, F. Tonon, P. Walley, M. Beer, J. Zhang, R.E. Melchers.

### **Цель и задачи исследования.**

**Цель исследования** – разработка методов расчета изгибаемых железобетонных элементов на надежность при различной ограниченных количественных и качественных статистических данных о стохастических параметрах в моделях предельных состояний при рассмотрении железобетонного элемента как последовательной механической системы из независимых элементов.

### **Задачи исследования:**

1. Разработка способов определения несущей способности изгибаемых железобетонных элементов на стадии эксплуатации на примере железобетонных балок по критериям работоспособности Свод Правил 63.13330.2012 и по длине нормальной трещины.

2. Разработка метода расчета изгибаемых железобетонных элементов на надежность как условной последовательной механической системы с допущением о независимости элементов при неполной статистической информации.

3. Разработка метода расчета надежности изгибаемых железобетонных элементов при исходной статистической информации о контролируемых параметрах в виде подмножества интервалов на основе теории случайных множеств.

4. Разработка способа определения длины трещины в растянутой зоне бетона балки с учетом разрыхления бетона в вершине трещины.

**Объектом исследования** являются изгибаемые железобетонные элементы (железобетонные балки и балочные плиты).

**Предметом исследования** является надежность изгибаемых железобетонных элементов.

**Научная новизна исследования:**

1) Разработаны способы определения несущей способности эксплуатируемых изгибаемых железобетонных элементов по отдельным критериям предельных состояний;

2) Разработан метод расчета надежности изгибаемых железобетонных элементов на стадии эксплуатации как последовательной механической системы на основе теории возможностей;

3) Разработан метод расчета надежности изгибаемых железобетонных элементов по теории случайных множеств при наличии статистических данных о случайной величине в виде совокупности интервалов, и на основе расширенных функций доверия и правдоподобия, полученных на основе робастной модели Дирихле;

4) Разработан и запатентован способ установления длины нормальной трещины в бетоне железобетонной балки.

**Теоретическая значимость работы.** Разработанные способы определения остаточной несущей способности и методы расчетов надежности изгибаемых железобетонных элементов могут быть рекомендованы для включения в

нормативную документацию для практического использования при их количественной оценке уровня безопасности эксплуатации и категории технического состояния в целях предупреждения отказов и разрушений.

**Практическая значимость.** Разработанные методы расчетов надежности изгибаемых железобетонных элементов при неполной статистической информации позволяют более достоверно оценить уровень безопасности и риска эксплуатации, предусмотренные Межгосударственным стандартом ГОСТ 31937-2011, когда использование методов расчетов надежности базирующихся на теории вероятностей может привести к ошибочным результатам.

Дополнительную практическую значимость диссертационное исследование приобретает при количественной оценке безопасности эксплуатации элементов сооружений после природных и техногенных катастроф, а также других угроз (в соответствии с приоритетами научно-технологического развития РФ согласно Указу Президента РФ №642 от 01.12.2016), при условии ограниченного количества времени на сбор и анализ стохастических данных о случайных параметрах.

**Методология и методы диссертационного исследования** обеспечиваются анализом литературных источников по методам расчетов надежности элементов конструкций; строгим математическим подходом на современном методическом уровне, а также методологией научных исследований, базирующихся на принципах теории надежности.

**Положения, выносимые на защиту:**

- способы определения остаточной несущей способности изгибаемых железобетонных элементов по отдельным критериям работоспособности;
- метод расчета надежности изгибаемых железобетонных элементов как условных последовательных механических систем на основе теории нечетких множеств и теории возможностей;
- метод расчета надежности изгибаемых железобетонных элементов на основе теории случайных множеств (теории свидетельств Демпстера-Шефера) и на

основе расширенных функций доверия и правдоподобия с использованием робастной модели Дирихле;

- способ определения длины нормальной трещины железобетонного изгибаемого элемента.

**Область исследования** соответствует требованиям паспорта научной специальности ВАК: 05.23.17 – Строительная механика, п.6 «Теория и методы расчета сооружений на надежность».

**Степень достоверности и апробация результатов.** Достоверность диссертационного исследования обоснована строгим математическим подходом при постановке и решении задач, а также сопоставлением данных расчетов вероятностей безотказной работы по разработанным методам с данными расчетов вероятностей безотказной работы по известным методам, базирующихся на теории вероятностей и статистики, признанных в академическом сообществе и реализуемых на практике.

**Апробация работы.** Результаты диссертационной работы докладывались и обсуждались на:

Ежегодной научной сессии аспирантов и молодых ученых (г. Вологда, 2014, 2015, 2016 г.); Международной научной конференции «Молодые исследователи - регионам» (г. Вологда, 2015, 2016 г.); Международной научной конференции «Долговечность, прочность и механика разрушения бетона, железобетона и других строительных материалов: XI Академические чтения РААСН» (г. Санкт-Петербург, 2016 г.); Международной научной конференции «Современные проблемы расчета железобетонных конструкций, зданий и сооружений на аварийные воздействия» (г. Москва, 2016 г.); Научно-практической конференции по сейсмостойкому строительству (с международным участием) (г. Москва, 2016 г.); Всероссийской научной конференции с международным участием «Вузовская наука – региону» (г. Вологда, 2017 г.); VIII международной научно-практической конференции «Обследование зданий и сооружений: проблемы и пути их решения» (г. Санкт-Петербург, 2017 г.); Всероссийском научном форуме «Наука будущего – наука молодых (г. Казань, 2016 г.; г. Нижний Новгород, 2017 г.);

**Публикации.** Материалы диссертационной работы были опубликованы в 14 печатных работах, общим объемом 6 п.л., в том числе 8 статей в изданиях, входящих в Перечень ведущих рецензируемых научных журналов, утвержденный ВАК РФ, и 2 патента на изобретения.

**Структура и объем работы.** Диссертационная работа состоит из введения, пяти глав, заключения, списка литературы, включающего в себя 142 наименования, и 1 приложения. Общий объем диссертации составляет 181 страницу машинописного текста. Работа содержит 53 рисунка и 3 таблицы.

## ГЛАВА 1. СОСТОЯНИЕ ВОПРОСА И НАПРАВЛЕНИЕ ДАЛЬНЕЙШИХ ИССЛЕДОВАНИЙ

### 1.1 Краткий обзор развития методов расчетов надежности несущих элементов сооружений

Методы расчетов вероятности безотказной работы (надежности) элементов сооружений разрабатываются с целью более объективной оценки безопасности эксплуатации элементов строительной конструкции и достижения экономического эффекта при проектировании и эксплуатации сооружений.

Разработке методов расчета надежности элементов строительных конструкций посвящено множество работ российских и зарубежных ученых. Исследования в данной области проводили Стрелецкий Н.С. [70], Ржаницын А.Р. [62], Райзер В.Д. [60], Лычев А.С. [39], Болотин В.В. [8], Уткин В.С. [75, 76], Уткин Л.В. [90], Тамразян А.Г. [72], Кудзис А.П. [33], а также зарубежные исследователи Aven T. [100, 101], Jiang C. [116, 117], Li H. [120], Zhang [142] и другие.

Основоположником термина «надежность» (применительно к технике) принято считать английского философа Сэмюэла Кольриджа в 1816 году. До середины 20 века термин «надежность» был связан с повторяемостью – «испытания считались надежными, если при повторении получались одни и те же результаты».

Впервые нормирование коэффициента запаса, прямо пропорционально связанного с вероятностью безотказной работы, было зафиксировано в 1840 году, когда Торговая Палата Великобритании утвердила при проектировании железнодорожных мостов для чугуна максимальное допускаемое напряжение, равное 5 тонн/кв. дюйм [127]. Такое значение было получено путем деления среднего значения предельного напряжения ковкого чугуна, полученного по результатам испытаний, на «коэффициент запаса» принятый равным 4.

Аналогичный коэффициент запаса был использован в первых британских стандартах проектирования стальных конструкций в 1909 г.

В 1920-ых годах доктор Уолтер Шухарт связывал вероятность безотказной работы с качеством продукции, а также предлагал оценку качества продукции посредством ее статистического контроля. В 1926 году вероятностно-статистический анализ коэффициента запаса несущей способности элемента конструкции был продемонстрирован М. Майером, где вместо расчета по допускаемым напряжениям для выбора значений параметров в математических моделях предлагались вероятностные методы. А в 1929 г. Хоциалов Н.Ф. предложил проектирование конструкций на основе оптимальной суммы капитальных затрат на строительство и вероятности дефектов и убытков от аварий.

В 1940-1950-ых годах в США были сформированы Общество надежности (Reliability society) и Консультативная группа по надежности электронного оборудования (Advisory Group on the Reliability of Electronic Equipment (AGREE)), которые были направлены на решение проблем, связанных с надежностью, под которой уже понималась характеристика продукта, отражающая его возможность функционировать в течение заданного периода времени.

Николай Станиславович Стрелецкий был одним из первых российских ученых, которые фундаментально исследовали совместное случайное распределение нагрузки и прочности несущего элемента [70].

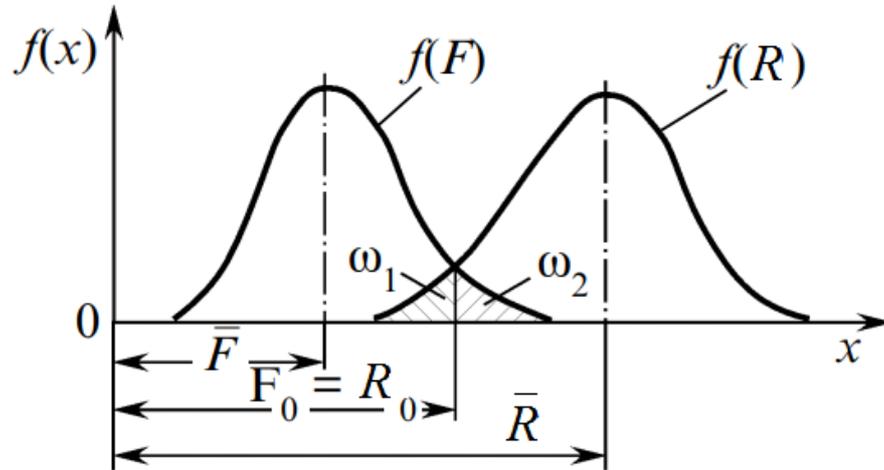


Рисунок 1.1 – К определению «гарантии неразрушимости» в работе Н.С. Стрелецкого [70]

На рисунке 1.1 представлены графики плотностей распределения случайных величин: нагрузки  $F$  и прочности  $R$ . Плотности распределения случайных величин пересекаются в одной точке, соответствующей  $F_0$  – усилию от нагрузки, и  $R_0$  – несущей способности. Оценку безопасности элемента строительной конструкции по Стрелецкому [70] характеризует параметр, названный как гарантия неразрушимости:

$$\Gamma = 1 - \omega_1 \omega_2, \quad (1.1)$$

где  $\Gamma$  – «гарантия неразрушимости» элемента строительной конструкции;  $\omega_1$  – вероятность того, что прочность получит заниженное значение:  $R < R_0$ ;  $\omega_2$  – вероятность завышенного значения нагрузки:  $F < F_0$ ;  $\omega_1 \omega_2$  – вероятность отказа.

Вероятности и вычисляются (при известных функциях плотностей распределения) следующим образом:

$$\omega_1 = \int_{-\infty}^{R_0} f(R) dR, \quad \omega_2 = \int_{F_0}^{+\infty} f(F) dF. \quad (1.2)$$

Развитием работы стала двухсторонняя оценка вероятности отказа  $Q$  (где  $Q=1-\Gamma$ ):

$$\omega_1 \omega_2 < Q < \omega_1 + \omega_2 - \omega_1 \omega_2. \quad (1.3)$$

Дальнейшее развитие теории надежности применительно к строительным конструкциям было отражено в работах А.Р. Ржаницына. В своей основной работе [62] на данную тему он формулировал расчет надежности как следующую задачу: стохастический расчет вероятности выхода из строя сооружения при определенных параметрах эксплуатации или иначе: выявление на основе определенной экономически целесообразной вероятности безотказной работы необходимых геометрических параметров конструкции, эксплуатационных нагрузок или оптимального расчетного срока эксплуатации сооружения. Кроме того, в книге приводится краткая историческая справка о применении положений теории надежности к расчету строительных конструкций, теории риска и оптимизации строительных конструкций. В труде приводятся сведения о случайных величинах, параметрах случайных величин и их функций распределения, вводится понятие характеристики безопасности  $\beta$ , а также рассматриваются проблемы расчета на надежность изгибаемых элементов и задачи вероятностного расчета сжатых стержней на устойчивость.

В работах А.Р. Ржаницына введено понятие резерва прочности:  $g = R - F$ . Отказ элемента конструкции происходит при выполнении условия:  $R - F < 0$  или  $g < 0$ . Тогда вероятность отказа можно определить следующим образом:

$$Q = \int_{-g_{\min}}^0 f(g) dg, \quad (1.4)$$

где  $g_{\min} = |R_{\min} - F_{\max}|$ .

При статистически независимых нагрузке и прочности можно записать:

$$f(R) = \int_{R_{\min}}^{R_{\max}} f_R(R) f_F(R - g) dR, \quad (1.5)$$

где  $R_{\min}$  и  $R_{\max}$  – минимальное и максимальное значения несущей способности.

Вероятность неразрушения в общем виде можно записать как:

$$P_s = \int_{-\infty}^{+\infty} f_R(R)F_F(R)dR. \quad (1.6)$$

Вероятность отказа можно записать в виде:

$$Q = 1 - \int_{R_{\min}}^{R_{\max}} f_R(R)F_F(R)dR = 1 - \Phi(\beta), \quad (1.7)$$

где  $\beta$  – «характеристика безопасности», определяемая как  $\beta = \frac{\bar{g}}{S_g} = \frac{\bar{R} - \bar{F}}{\sqrt{S_R^2 + S_F^2}}$ ,

где  $\bar{R}$  и  $\bar{F}$  – средние значения прочности и нагрузки;  $S_R$  и  $S_F$  – среднеквадратические отклонения прочности и нагрузки. Зависимость «характеристики безопасности» от вероятности безотказной работы  $P_s$  (probability of successful) приведена на рис. 1.2.

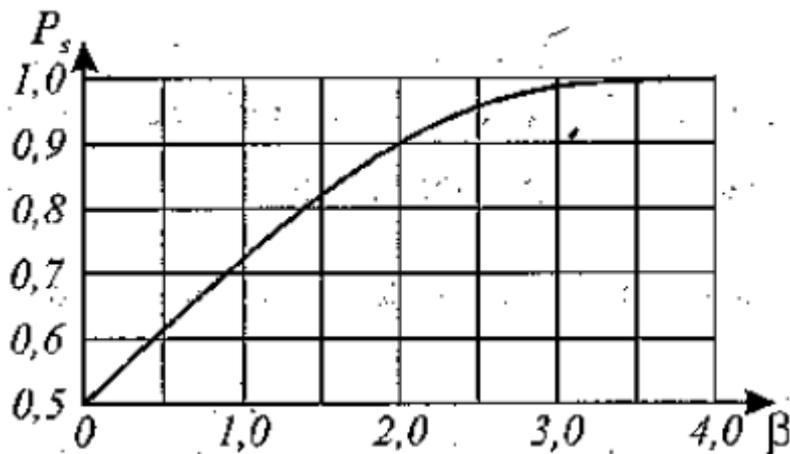


Рисунок 1.2 – Зависимость вероятности безотказной работы от индекса надежности  $\beta$

В зарубежной литературе *характеристика безопасности* называется *индексом надежности* и показывает число стандартов  $S_g$ , укладывающихся в интервале от  $g = 0$  до  $g = \bar{g}$ .

Дальнейшее развитие методов расчета надежности строительных конструкций определялось работами В.В. Болотина [8], где в основу метода расчета надежности было заложено представление работы строительных конструкций в виде случайного процесса, а под отказом конструкций следует понимать случайный выброс характеристик НДС конструкции из области ее допустимых состояний. Первым делом следует рассмотреть безотказность внутренней определенной системы под внешними воздействиями как стохастический процесс или условную надежность. При таком подходе надежность зависит от некоторых случайных параметров, которые характеризуют свойства всей системы. Далее для системы используется формула полной вероятности:

$$P(t) = 1 - \int_{-\infty}^{+\infty} \dots \int_{-\infty}^{+\infty} Q(F > R / x_1, x_2, \dots, x_n; t) \cdot f(x_1, x_2, \dots, x_n) dx_1 dx_2 \dots dx_n, \quad (1.8)$$

где  $Q(F > R / x_1, x_2, \dots, x_n; t)$  - условная вероятность превышения нагрузкой  $F$  несущей способности  $R$  при заданных характеристиках несущей способности  $x_1, x_2, \dots, x_n$  за определенный временной промежуток  $t$ .

Большой вклад в развитие теории надежности строительных конструкций внес В.Д. Райзер [60]. В своей работе [60] он проводит большой анализ развития методов расчета строительных конструкций. Надежность рассматривается как многоэлементная система с различными вариантами соединения элементов (параллельное соединение, последовательное и смешанное). Выведены расчетные формулы для определения надежности различных многоэлементных систем. Решены задачи расчета сжато-изогнутого стержня на надежность по критерию его устойчивости при различных видах закреплений методом статистических испытаний. Анализируются и классифицируются нагрузки и воздействия на здания и сооружения, и предпринимается попытка представить все нагрузки (и их сочетания) в вероятностном виде. Также рассматривается важная задача развития нормирования механических характеристик строительных материалов и методов

их контроля в процессе строительства и эксплуатации зданий и сооружений. Также в [60] решены задачи расчеты на надежность мачтовых сооружений, ребристых куполов, тентовых оболочек, пологих оболочек и пластин и др. элементов конструкций и сооружений; а также построена теория коррозионного износа во времени и оценка надежности с учетом износа.

Вклад в систематизацию и развитие теории надежности строительных конструкций внес Лычев А.С. [39]. Он классифицировал виды отказов строительных конструкций, рассмотрел основы планирования эксперимента при создании алгоритма подсчета отказов, привел рекомендации по выбору функции распределения для расчета вероятностей безотказной работы и ресурса до отказа, рассмотрел возможность учета неэкономических потерь при обрушении зданий и сооружений, а также алгоритмы оптимизации вероятностных расчетов и применение ЭВМ для решения задач теории надежности.

Вопросами теории надежности занимался Герхард Шпете [94]. Он рассматривал безопасность несущих элементов строительных конструкций как комплексный показатель, предложив определенные меры по исключению ошибок человеческого фактора и меры по ограничению размера ущерба от обрушения строительной конструкции. Также в [94] предложена зависимость вероятности отказа от времени, на основе которой рассчитывается срок эксплуатации зданий и сооружений. Приводится обширная статистическая информация о строительных материалах и их параметрах (коэффициенте вариации и др.) необходимых для расчетов вероятности безотказной работы на стадии проектирования. Постоянные и временные нагрузки на здания и сооружения также представляются в виде случайных величин с различными функциями распределения.

В работе А.П. Кудзиса [33] приведены методы оценки «приемлемости» конструкций в виде оценки бездефектности, живучести и приспособляемости. Приведены методы расчета надежности несущих железобетонных элементов при

стационарном и нестационарном процессе сопротивления, а также расчеты железобетонных конструкций на долговечность.

Ройтман А.Г в своей работе [64] предлагает в качестве предельных значений показателей надежности использовать вероятность отказа по условию обеспечения безопасности эксплуатации несущего элемента. На основе опыта эксплуатации сооружений Ройтман А.Г. сформировал нормативные значения начальной надежности  $P(0)$ , а также надежности при завершении расчетного периода эксплуатации  $P(t)$  отдельных элементов и конструкций сооружений в целом, в зависимости от их ответственности. Так, например, для самонесущих ограждающих элементов принимаются значения надежности:  $P(0) = 0.95, P(t) = 0.85$ ; для несущих элементов конструкций с последовательными отказами, например, колонны:  $P(0) = 0.999, P(t) = 0.99$ ; а для элементов в статически неопределимых системах, за прочностным отказом которых не последует внезапного обрушения всего сооружения как системы  $P(0) = 0.99, P(t) = 0.95$ .

Значительное развитие получила теория надежности строительных конструкций благодаря работам итальянских авторов Г. Аугусти, А. Баратта и Ф. Кашиати [2]. Ими рассмотрены концепции «слабого звена» и систем с безопасным отказом. Теория расчета элементов сооружений тесно связана с подходом к расчету риска сооружений по различным критериям [73].

Большой вклад в систематизацию и развитие методов расчетов надежности несущих элементов, в том числе железобетонных балок, внес В.П. Чирков [91]. Им были разработаны методы и методики для оценки надежности элементов железобетонных конструкций на стадии эксплуатации, а также методы расчета начальной надежности железобетонных конструкций. В работе [91] предложены методы прогнозирования срока службы элементов железобетонных конструкций по различным критериям их работоспособности на основе вероятностно-статистических методов. Отмечается, что крайне важную научную проблему

составляют задачи определения надежности и анализа поведения сооружений в процессе их эксплуатации.

В работе [42] представлен метод расчета надежности железобетонной балки с применением положений теории вероятностей на стадии ее эксплуатации по критериям прочности нормальных и наклонных сечений балки. Среднее значение резерва прочности  $\bar{g}_1$  для нормальных сечений предложено определять по формуле:

$$\bar{g}_1 = R_{s,n} A_s \left( h_0 - 0,5 \frac{R_{s,n} A_s}{R_{b,n} b} \right) - \frac{(g_n + v_n) l^2}{8}, \quad (1.9)$$

где  $g_n$  и  $v_n$  – значения равномерно распределенных нормативных постоянных и длительных нагрузок; остальные обозначения параметров в (1.9) можно найти в СП 63.13330.2012.

Дисперсию резерва несущей способности предлагается определять по формуле:

$$S_{g_1}^2 = S^2(R_{s,n}) \left( \frac{\partial g_1}{\partial R_{s,n}} \right)^2 + S^2(R_{b,n}) \left( \frac{\partial g_1}{\partial R_{b,n}} \right)^2 + S^2(g_n) \left( \frac{\partial g_1}{\partial g_n} \right)^2 + S^2(v_n) \left( \frac{\partial g_1}{\partial v_n} \right)^2 + S^2(h_0) \left( \frac{\partial g_1}{\partial h_0} \right)^2 + S^2(l) \left( \frac{\partial g_1}{\partial l} \right)^2. \quad (1.10)$$

Надежность балки по нормальному сечению определяется через характеристику безопасности  $P_1 = 0,5 + \Phi(\beta_1) = 0,5 + \Phi\left(\frac{\bar{g}_1}{S_{g_1}}\right)$ . Затем аналогично рассчитывается вероятность безотказной работы наклонных сечений на действие поперечной силы  $P_2$  и изгибающего момента  $P_3$ . Надежность балки рассчитывается как для условной последовательной механической системы по формуле:  $P = P_1 \cdot P_2 \cdot P_3$ .

Однако расчет надежности железобетонной балки по данному методу вызывает некоторое недоверие, т.к. во-первых, не учитываются другие критерии работоспособности балки; во-вторых, в качестве средних значений прочности бетона используются нормативные сопротивления, которые в свое очередь принимаются уже с заданной 95%-ой обеспеченностью.

В [60] предложен вероятностный алгоритм для определения несущей способности железобетонного элемента по изгибающему моменту.

В статье [68] анализируется надежность (логарифмический показатель надежности) однопролетной железобетонной балки по критерию прочности наклонного сечения. Приведен график зависимости логарифмического показателя надежности от длину приопорной зоны балки.

В работе [69] рассматривается метод расчета надежности железобетонных балок перекрытия на основе обобщенной формулы Байеса и методов теории информации по оценке вероятности различных состояний железобетонной балки при ее эксплуатации.

В 1990-ых – начале 2000-ых профессором Уткиным Владимиром Сергеевичем разрабатывались методы расчета элементов сооружений на основе положений теории возможностей. Данные методы отличались от существующих тем, что было дано теоретическое обоснование их использования в условиях дефицита статистических данных – при невыявленном законе распределения, невозможности оценки его параметров с достаточной точностью, а также сложностью оценки корреляционных моментов для случайных переменных в принятых математических моделях. Разработанные методы расчетов надежности были ориентированы на практическое использование в случаях, когда не удается выявить исчерпывающую статистическую информацию о случайных величинах вследствие ограниченности времени на испытания, стоимости и труднодоступности отдельных испытаний и прочих причин. Более подробно ключевые положения теории возможностей, а также разработка методы и

алгоритмы расчета возможности и необходимости отказа изгибаемых железобетонных элементов приведены в главе 3.

В работе [75] приведены подходы к определению возможности и необходимости безотказной работы железобетонных балочных конструкций по прочности бетона и рабочей арматуры с применением положений теории возможностей. В работе [95] также рассматривается проблема анализа статистических данных в рамках неполной статистической информации, где в качестве объекта исследования принимаются железобетонные плотины.

Расчет возможности и необходимости безотказной работы железобетонной балки по прочности арматуры в [75] проводится из предположения, что предел прочности арматуры растяжению  $\sigma_s$  и площадь рабочей арматуры  $A_s$  определяются на стадии эксплуатации балки и являются нечеткими переменными (в терминах теории возможностей). Расчетная математическая модель предельного состояния была построена на основе нормативной модели и имеет следующий вид:

$$R_s A_s (h_0 - 0,5x) \geq M_0, \quad (1.11)$$

где  $M_0$  – расчетный момент в расчетном сечении;  $x = \frac{R_s A_s}{R_b b}$  – высота сжатой зоны бетона балки.

После некоторых преобразований, условие прочности можно записать в виде:

$$R_s A_s \geq R_b b h_0 - \sqrt{(R_b b h_0)^2 - 2M_0 R_b b}. \quad (1.12)$$

Для распределения предела прочности арматуры растяжению и площади рабочей арматуры были использованы типовые функции распределения возможностей вида:  $\pi_{\sigma_s} = \exp\{-(z-a)/b\}^2\}$  и  $\pi_{A_s} = \exp\{-(z-c)/d\}^2\}$ , где  $a, b, c, d$  – параметры функций распределения возможностей соответственно для  $\sigma_s$  и  $A_s$ . Их

значения определяются по результатам испытаний и измерений:

$a = 0,5 \left( \max_{1 \leq i \leq n} (\sigma_{s,i}) + \min_{1 \leq i \leq n} (\sigma_{s,i}) \right)$  и аналогично для параметра  $c$ :

$c = 0,5 \left( \max_{1 \leq i \leq n} (A_{s,i}) + \min_{1 \leq i \leq n} (A_{s,i}) \right)$ . Для определения параметров  $b$  и  $d$  следует назначить

уровнем риска  $\alpha$  или задать его в логарифмическом виде  $\varepsilon = \sqrt{-\ln \alpha}$ . Так

$b = 0,5 \left( \max_{1 \leq i \leq n} (\sigma_{s,i}) - \min_{1 \leq i \leq n} (\sigma_{s,i}) \right) / \varepsilon_\alpha$  и аналогично для  $d$ .

Вводится обозначение  $\tilde{Y} = \tilde{\sigma}_s \tilde{A}_s$ ,  $\tilde{Y}$  - нечеткая переменная, т.к.  $\tilde{\sigma}_s$  и  $\tilde{A}_s$  нечеткие переменные. При уровне среза  $\alpha = \pi(z)$  имеем:  $z = a \pm b \sqrt{-\ln \alpha}$  и  $z = c \pm d \sqrt{-\ln \alpha}$ . Исходя из результатов, можно записать:

$$\begin{cases} \mu^-(\alpha) = \pi_{\tilde{\sigma}_s}^-(\alpha) \cdot \pi_{\tilde{A}_s}^-(\alpha) \\ \mu^+(\alpha) = \pi_{\tilde{\sigma}_s}^+(\alpha) \cdot \pi_{\tilde{A}_s}^+(\alpha) \end{cases}$$

где  $\pi_{\tilde{\sigma}_s}^\pm(\alpha) = \inf(\sup)\{z \mid \pi_{\tilde{\sigma}_s}(z) \geq \alpha\}$ ;  $\pi_{\tilde{A}_s}^\pm(\alpha) = \inf(\sup)\{z \mid \pi_{\tilde{A}_s}(z) \geq \alpha\}$ ;

$\mu^\pm(\alpha) = \inf(\sup)\{z \mid \pi_Y(z) \geq \alpha\}$ .

Следовательно  $\mu^-(\alpha) = (a - b \cdot \sqrt{-\ln \alpha})(c - d \cdot \sqrt{-\ln \alpha})$ . Обозначим  $\sqrt{-\ln \alpha} = \beta$  и  $\alpha = e^{-\beta^2}$ . Возможность безотказной работы (надежность)  $N = \text{возможность}\{Y \leq \varphi_{np}\} = \sup_{\gamma \geq \varphi_{np}} \mu_Y(\gamma)$ . Возможность отказа балки:  $Q = \sup_{\gamma < \varphi_{np}} \mu_Y(\gamma)$ . С

учетом  $\mu_Y(z) = e^{-\beta^2}$  эти условия можно записать в виде:

$$N = \sup_{\gamma \geq \varphi_{np}} \mu_Y(z) = \begin{cases} e^{-\beta^2}, & \text{если } ad < \varphi_{np} \\ 1, & \text{если } ad \geq \varphi_{np} \end{cases} \text{ и } Q = \sup_{\gamma < \varphi_{np}} \mu_Y(z) = \begin{cases} e^{-\beta^2}, & \text{если } ad \geq \varphi_{np} \\ 1, & \text{если } ad < \varphi_{np} \end{cases}.$$

Дальнейшим развитием в данном направлении было создание комбинированного (вероятностно-возможностного) метода расчета вероятности безотказной работы элементов сооружений [76]. Такой подход позволил повысить информативность интервала, характеризующего надежность, в случае, если для

отдельных элементов в модели предельного состояния представляется возможность накопить статистические данные для вероятностного анализа.

Нижняя и верхняя граница вероятности безотказной работы в комбинированном методе расчета надежности в общем случае записываются в виде:

$$\left\{ \begin{array}{l} \underline{P} = \int_0^{a_x} \rho_Y(x) 0 dx + \int_{a_x}^{+\infty} \rho_Y(x) (1 - \pi_X(x)) dx \\ \bar{P} = \int_0^{a_x} \rho_Y(x) \pi_X(x) dx + \int_{a_x}^{+\infty} \rho_Y(x) 1 dx \end{array} \right. , \quad (1.13)$$

где  $\rho_Y(x)$  – плотность вероятности «прочности»;  $\pi_X(x)$  – функция распределения возможностей для «нагрузки».

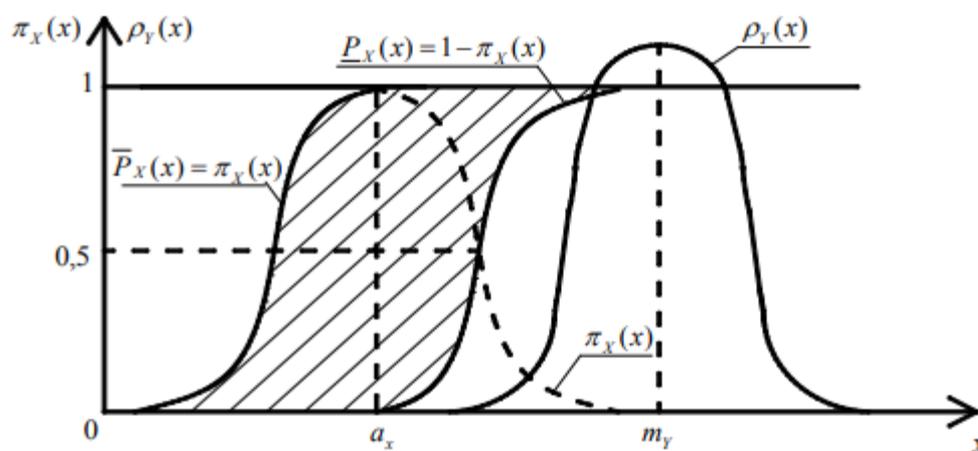


Рисунок 1.3 – Графики функций плотности распределения вероятностей  $\rho_Y(y)$  и функции распределения возможностей  $\pi_X(x)$

При нормальном законе распределения случайной величины имеем:

$$\left\{ \begin{array}{l} \underline{P} = \int_0^{a_x} \frac{1}{\sqrt{2\pi}S_Y} \exp\left[-\frac{(x-m_Y)^2}{2S_Y^2}\right] \left[1 - \exp\left(-\left(\frac{x-a_x}{b_x}\right)^2\right)\right] dx \\ \bar{P} = \int_0^{a_x} \frac{1}{\sqrt{2\pi}S_Y} \exp\left[-\frac{(x-m_Y)^2}{2S_Y^2}\right] \left[\exp\left(-\left(\frac{x-a_x}{b_x}\right)^2\right)\right] dx + \int_{a_x}^{+\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi}S_Y} \exp\left[-\frac{(x-m_Y)^2}{2S_Y^2}\right] dx \end{array} \right. , (1.14)$$

В [73] рассмотрены примеры расчета безотказности для железобетонного изгибаемого элемента при условии прочности сжатого бетона и рабочей арматуры с использованием комбинированного метода расчета надежности.

Дальнейшим развитием теории надежности сооружений в условиях неполных статистических данных стали методы расчетов вероятности отказа элементов сооружений с использованием распределения на основе неравенства П.Л. Чебышева [97]. В [97] приведены расчетные формулы для определения нижней и верхней границы вероятности безотказной работы для функций распределения на основе неравенства Чебышева:

$$\begin{aligned} \bar{P}(x) &= \begin{cases} \frac{S_X^2}{(m_X - x)^2 + S_X^2}, & \text{если } x < m_X \\ 1, & \text{если } x \geq m_X \end{cases} \\ P(x) &= \begin{cases} 0, & \text{если } x < m_X \\ 1 - \frac{m_X}{x}, & \text{если } m_X \leq x < m_X + \frac{S_X^2}{m_X} \\ \frac{(m_X - x)^2}{(m_X - x)^2 + S_X^2}, & \text{если } x > m_X + \frac{S_X^2}{m_X} \end{cases} \end{aligned} \quad (1.15)$$

На рисунке 1.4 приведен график этих функций.

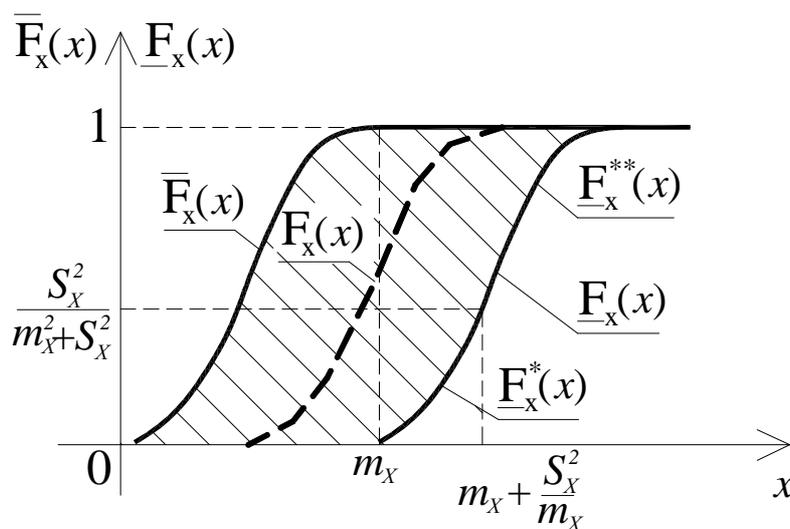


Рисунок 1.4 – Графики функция распределения, полученных на основе неравенства Чебышева

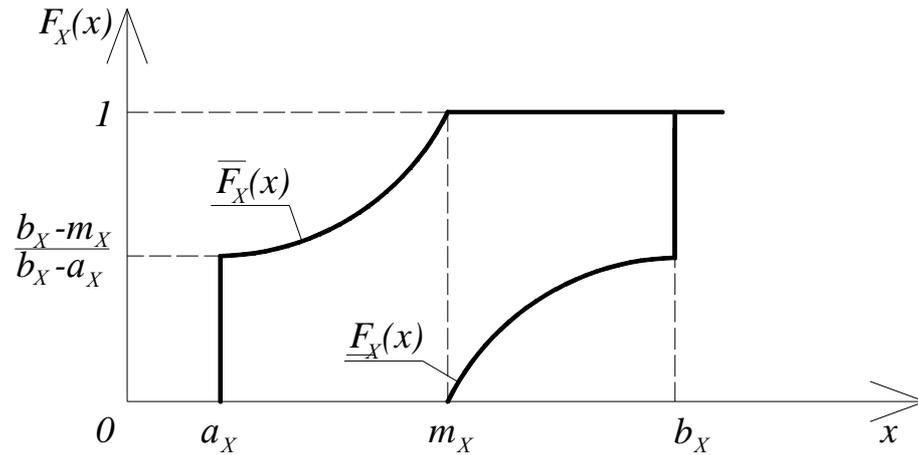
Такой подход к расчету надежности можно использовать при неизвестном законе распределения случайной величины, но известных параметрах случайной величины (математического ожидания  $m_X$  и стандартного отклонения  $S_X$ ) или их оценке. В работе [97] приведены методы расчета надежности изгибаемого железобетонного элемента по критерию прочности сжатого бетона и рабочей арматуры, а также жесткости элемента и ширины нормальных трещин на основе функций распределения из неравенства П.Л. Чебышева.

Также в работе [97] рассматривается подход к расчету надежности элементов сооружений на основе усеченного интервального распределения вероятностей. Случайную величину  $X$ , имеющую статистическую информацию в виде точных границ значений  $X \in (a_x, b_x)$  и среднего значения  $m_x$ , предлагается описывать усеченным интервальным законом распределения, который содержит нижнюю  $\underline{F}_x(x)$  и верхнюю  $\overline{F}_x(x)$  функции границ распределения:

$$\begin{aligned} \overline{F}(x) &= \begin{cases} 0, & \text{если } x < m_x \\ \frac{x - m_x}{x - a_x}, & \text{если } m_x < x < b_x \\ 1, & \text{если } x \geq b_x \end{cases}, \\ \underline{F}(x) &= \begin{cases} 0, & \text{если } x < a_x \\ \frac{b_x - m_x}{b_x - x}, & \text{если } a_x < x < m_x \\ 1, & \text{если } x \geq m_x \end{cases}, \end{aligned} \quad (1.16)$$

где  $a_X$  и  $b_X$  – определенные крайние граничные интервальные значения случайной переменной  $X$ ,  $m_X$  – математическое ожидание  $X$ .

Графическое отображение выражений (1.16) условно приведено на рис. 1.5.

Рисунок 1.5 – Графическое отображение  $\bar{F}_X(x)$  и  $\underline{F}_X(x)$ 

По выражениям (1.16) можно выразить плотности вероятности на основе дифференциалов  $\underline{F}_X(x)$ ,  $\bar{F}_X(x)$  в виде:

$$f_{\underline{X}}(x) = \begin{cases} 0, & x < m_X, \\ \frac{m_X - a_X}{(a_X - x)^2}, & m_X \leq x \leq b_X, \\ \frac{m_X - a_X}{b_X - a_X} \delta(x - b_X), & x = b_X, \\ 0, & x > b_X, \end{cases}; \quad \bar{f}_X(x) = \begin{cases} 0, & x < a_X, \\ \frac{b_X - m_X}{b_X - a_X} \delta(x - a_X), & x = a_X, \\ \frac{b_X - m_X}{(b_X - x)^2}, & a_X < x \leq m_X, \\ 0, & x > m_X, \end{cases}, \quad (1.17)$$

где  $\delta(x - b_X)$  - функция Дирака в  $b_X$ ;  $\delta(x - a_X)$  - функция Дирака в  $a_X$ .

Рассмотренные методики и подходы к расчету надежности (применительно к структурным элементам сооружений) направлены на решения задач расчетов надежности при различной по количеству и качеству статистической информации о случайных величинах.

## 1.2 Проблемы и перспективы развития методов расчета надежности элементов сооружений

Авторы современных научных публикаций по проблеме оценки безопасности эксплуатации сооружений [31, 54, 59] отмечают, что дальнейшее совершенствование методов расчета строительных конструкций и методов оценки безопасности эксплуатации элементов сооружений требует использования

положений теории надежности. В работе [31] постулируется, что полувероятностный расчет не позволяет сделать вывод о вероятности выхода из строя сооружения или его элемента, не дает возможность провести проектирование на определенный уровень безотказности сооружения и не позволяет провести качественный анализ проектного решения по заданным критериям работоспособности.

В [41] доктора технических наук Митасов В.М. и Адищев В.В. отмечают, что решения в вероятностной постановке, пригодные для практического использования, просто отсутствуют, а применение существующих вероятностно-статистических методов лишь декларируется. Также отмечается важность альтернативного подхода к расчету надежности – на основе теории нечетких множеств (fuzzy sets).

В работе [59] также отмечается, что в настоящее время обобщенный российский и мировой опыт может служить опорой для разработки новых стандартов по вероятностному проектированию, а при реставрации и обследовании эксплуатируемых сооружений использовать стохастические подходы к оценке безопасности. В Научно-исследовательском институте железобетона приводят тезис о том, что настоящие методы расчета по предельным состояниям не отвечают на вопрос количественной оценки риска при проектировании и эксплуатации сооружений, а более объективной характеристикой безопасности элементов сооружений можно считать стохастические методы с использованием положений теории надежности. В работе [72] А.Г. Тамразян указывает на то, что расчет риска и определение надежности элементов сооружений - есть крайне важное условие безопасности их эксплуатации.

В статье [71] профессор МГСУ А.Г. Тамразян, резюмируя основные положения фундаментального форума в РФ «Бетон и железобетон – проблемы и перспективы» в 2014 г., приводит тезис о том, что принцип безопасности на

стадиях разработки проекта и эксплуатации сооружения полностью реализуется лишь в рамках дальнейшего прогрессирования подходов к расчету надежности элементов сооружений.

Из приведенных выше высказываний можно сделать вывод, что вопросы и проблемы дальнейшего развития стохастического проектирования сооружений на всех стадиях его работы с применением положений такой науки как теория надежности является в настоящее время актуальной научной проблемой. В Своде Правил 63 уже на данный момент отмечается, что проектирование элементов ЖБК допускается проводить на заданную надежность (уровень надежности) с использованием методов на базе теории вероятностей и при полной статистической информации.

Зарубежные научные исследования формируют новые направления в области теории надежности строительных конструкций на основе новых математических теорий и с использованием ЭВМ. Так, например, в [120] предложено развитие метода расчета надежности возможностными и комбинированными методами, где нечеткие переменные преобразуются в неопределенные интервальные переменные в соответствии с теоремой нечеткого разложения и используется принцип синтеза ошибок (error synthesis principle). Также в [120] отмечается, что с углубляющимися исследованиями ученых установлено, что имеют место не только случайные величины, но нечеткие переменные при практических инженерных задачах.

Развиваются неклассические методы расчетов надежности строительных конструкций на основе метамоделирования – метод поверхности отклика, метод на основе «кригинга», теория полиномиального хаоса и другие. В работе [112] ставится проблема сложности аппроксимации математических моделей при расчете надежности несущих элементов методом поверхности отклика (response surface method) и предлагается новый алгоритм для расчета надежности.

В работе [119] предложен прямой оптимизированный метод расчета надежности (Direct Optimized Probabilistic Calculation). Это полностью численный способ решения интеграла вида (1.4), основанный на теории вероятностей и не требующий моделирования или аппроксимации. Это эффективный способ вероятностного расчета с точки зрения времени вычисления и точности решения для многих вероятностных задач, новизна которого заключается в оптимизации численного интегрирования.

Выводы по первой главе:

1. Приведены краткие сведения о развитии теории надежности и вероятностных методов расчета строительных конструкций;
2. Методы расчетов надежности элементов строительных конструкций вызывают широкий научный интерес как российских, так и зарубежных исследователей;
3. Рассмотрены перспективные направления дальнейшего развития методов расчета надежности строительных конструкций на основе новых математических теорий и подходов к решению стохастических задач;
4. Приведена информация о проблеме расчетов вероятности безотказной работы различных элементов сооружений и возможности включения стохастических методов проектирования в нормативную документацию.

## **ГЛАВА 2. СПОСОБЫ ОПРЕДЕЛЕНИЯ НЕСУЩЕЙ СПОСОБНОСТИ ИЗГИБАЕМЫХ ЖЕЛЕЗОБЕТОННЫХ ЭЛЕМЕНТОВ НА СТАДИИ ЭКСПЛУАТАЦИИ**

В соответствии с Межгосударственным стандартом ГОСТ 31937-2011 по значению несущей способности строительной конструкции определяется степень эксплуатационной пригодности несущих элементов и конструкции в целом. По степени эксплуатационной пригодности несущие элементы и конструкции в целом характеризуются как нормативные, работоспособные, ограниченно-работоспособные и аварийные.

### **2.1. Определение несущей способности изгибаемого железобетонного элемента по критерию прочности сжатого бетона и рабочей арматуры**

В соответствии с Законом №384-ФЗ, Межгосударственным стандартом ГОСТ 31937-2011 и СП 13-102-2003 при определении предельной нагрузки (как меры несущей способности) на элементы конструкций по всем критериям предельных состояний возникает необходимость в проведении экспериментально-теоретических проверочных расчетов на основе неразрушающих испытаний физико-механических свойств материалов эксплуатируемых конструкций. В приложении ГОСТ 31937-2011 можно найти информацию о наиболее распространенных повреждениях и дефектах в несущих железобетонных конструкциях, а также об их влиянии на несущую способность конструкций. За время эксплуатации железобетонных конструкций показатели их несущей способности зачастую понижаются [63] по причине деградации конструкционных материалов, образования повреждений, развития дефектов и т.д. В диссертационном исследовании [3] рассмотрен анализ несущей способности железобетонных элементов при их локальном разрушении по прочности бетона, а также разработана экспериментальная методика исследования железобетонных балок. В диссертационной работе [36] исследуются железобетонные балки по несущей способности при изгибе по критерию трещинообразования на основе

положений механики разрушения. Исследования А.Н. Бедова и В.Ф. Сапрыкина [7] также направлены на определение несущей способности эксплуатируемых железобетонных элементов с повреждениями и неисправностями. Также в [7] рассмотрены методики испытаний образцов арматуры и бетона эксплуатируемых железобетонных конструкций с последующим анализом результатов измерений. В работе [22] анализируются методы и методики проведения испытаний железобетонных элементов при их эксплуатации различными методами, в т.ч. неразрушающими. В патенте на изобретение [49] изложен экспериментально-теоретический способ оценки несущей способности стальных элементов конструкций, а в патенте на изобретение [47] приведен аналогичный способ для элементов из железобетона. Измеряемыми параметрами в патенте на изобретение [47] являются относительные деформации рабочей арматуры  $\varepsilon_s$  и сжатого бетона  $\varepsilon_b$  изгибаемого элемента конструкции. Недостатком данных подходов может служить то, что для предельных показателей относительной деформаций были приняты их средние арифметические значения, при отсутствии учета изменчивости случайных величин. В [47] принимаются следующие предельные относительные деформации:  $\varepsilon_{b,np} = 0,002$  и  $\varepsilon_{s,np} = R_s / E_s$ , где  $R_s$  - расчетное сопротивление стали арматуры,  $E_s$  - среднее арифметическое значение модуля упругости стержней стальной рабочей арматуры. Также функциональные зависимости испытательной нагрузки от относительных деформаций арматуры и бетона принимаются в [47] линейными, однако наиболее рационально их представлять в криволинейном виде с учетом нелинейности работы железобетонного элемента конструкции.

Влияние коррозионных повреждений в железобетонных элементах конструкций на их несущую способность рассмотрено в статье [124], но метод количественной оценки предельной нагрузки, характеризующий несущую способность железобетонных элементов, в работе не представлен.

Наиболее эффективным способом оценки показателей несущей способности эксплуатируемых изгибаемых железобетонных элементов можно считать подход на основе метода интегральных испытаний с контролем случайных параметров при учете фактических физико-механических характеристик бетона и стальной арматуры элемента. Общий алгоритм проведения такого вида интегральных испытаний можно найти в работах [47, 75, 79 и др.]. В работе [75] приведены способы оценки остаточной несущей способности железобетонных и металлических элементов строительных конструкций при неполной статистической информации о случайных величинах с помощью использования положений методов теории возможностей [135]. При неполной статистической информации функциональное описание такого рода неопределенностей возможностными подходами вполне оправдано [135, 136 и др.], но вследствие аккуратного подхода и рассмотрении возможного множества распределений случайных величин, при описании неопределенностей зачастую не удается оценить резерв несущей способности, что влияет на экономическую эффективность такого подхода.

В диссертационной работе разработан (и запатентован) новый подход для выявления интервала предельной нагрузки на эксплуатируемые изгибаемые железобетонные элементы по критериям прочности сжатого бетона и рабочей арматуры. Для этого железобетонный элемент, например, железобетонная балка, нагружается экспериментальной нагрузкой, которая направлена противоположно нагрузке от эксплуатационных воздействий (которую при испытаниях рекомендуется минимизировать) и собственного веса. Такого рода нагрузка (разгрузка) на практике реализуется, например, при помощи гидравлического домкрата с манометром. Экспериментальная нагрузка прикладывается в сечении с максимальным моментом от эксплуатационных воздействий. Максимальное значение экспериментальной нагрузки  $F_{\max}$  можно вычислить из условия  $M_F \leq M_q$ , где  $M_q$  - максимальный изгибающий момент от собственного веса конструкции и эксплуатационных воздействий;  $M_F$  - изгибающий момент от

экспериментальной нагрузки  $F_{\max}$  в аналогичном сечении, который вычисляется теоретически. Проведение испытаний экспериментальными ступенями разгрузки  $F_i < F_{\max}$  следует реализовывать несколькими ( $n \geq 10$ ) испытаниями при более чем трех ступенях экспериментальной нагрузки  $F_i$ , для последующей возможности анализа статистической выборки, а также использования правила трех сигм [92]. Перед проведением испытаний, на участке воздействия экспериментальной нагрузки  $F$  следует убрать защитный слой бетона у крайних арматурных стержней длиной порядка 150-250 мм. На рабочую арматуру и верхнюю грань бетона балки наклеиваются измерители относительных деформаций, например, тензорезисторы. Испытуемый элемент конструкции следует выдержать под воздействием экспериментальной нагрузки до трех часов или стабилизации деформаций. Относительные деформации в соответствии с [22] вычисляются в виде:  $\varepsilon = (R_1 - R_0) / kR_0$ , где  $R_0, R_1$  - омическое сопротивление датчиков деформации соответственно до и после воздействия экспериментальной нагрузкой,  $k$  - показатель тензочувствительности датчиков деформации.

После вычислений значений относительных деформаций  $\varepsilon_s$  и  $\varepsilon_b$  от всех ступеней экспериментальной нагрузки  $F_i$  вычисляются средние арифметические значения  $\bar{\varepsilon}_j$  и стандартные отклонения  $S_j$  деформаций на каждой ступени экспериментальной нагрузки  $F_i$ . На основе правила трех сигм [15, 92] вычисляют максимальные значения относительных деформаций  $\varepsilon_{j,\max} = \bar{\varepsilon}_j + 3S_\varepsilon$  с обеспеченностью 0,997 при каждой ступени экспериментального воздействия  $F_i$ . Используя метод аппроксимации, например, наименьшими квадратами [13 и др.], при описании случайных (контролируемых) величин  $\tilde{\varepsilon}_s$  и  $\tilde{\varepsilon}_b$  [14] нормальным распределением, находят с помощью MathCAD (или аналога) функции зависимости вида  $F^e = f_1(\bar{\varepsilon})$  и  $F^u = f_2(\bar{\varepsilon} + 3S_\varepsilon)$ . На рисунке 2.1 представлены функциональные зависимости относительных деформации от экспериментальной нагрузки в виде условных кривых и условно графически представлены плотности

распределения вероятностей  $p_i(\varepsilon_i)$  и интервал значений относительных деформаций с обеспеченностью 0,997 ( $6S_\varepsilon$ ).

Функциональная зависимость между относительными деформациями арматуры и экспериментальной нагрузкой на рисунке 2.1 представлена нелинейной, т.к. при в растянутой зоне железобетонных элементов нарушается линейная зависимость между напряжениями  $\sigma$  и относительными деформациями  $\varepsilon$ . Также на рисунке 2.1 учитывается возрастание стандартного отклонения  $S_\varepsilon$  относительной деформации арматуры с ростом среднего арифметического значения относительной деформации арматуры [18].

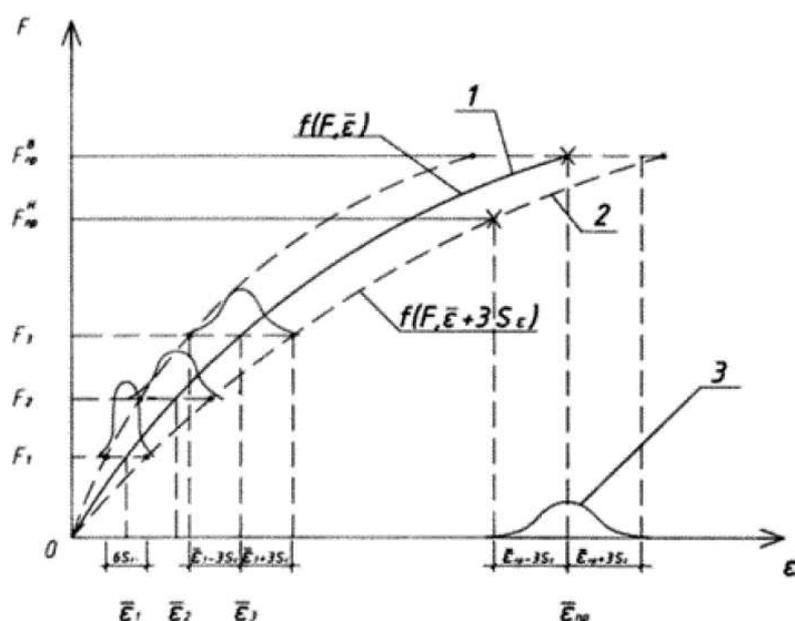


Рисунок 2.1 – Графическое изображение функциональной зависимости относительных деформаций и нагрузки  $F$  в виде  $F_1^g(\bar{\varepsilon}_s)$ ,  $F_2^g(\bar{\varepsilon}_s + 3S_\varepsilon)$ , а также условные графики плотностей относительных деформаций  $p(\varepsilon_i)$

Предельные относительные деформации  $\varepsilon_{s,np}$ ,  $\varepsilon_{b,np}$  по критерию прочности рабочей арматуры и сжатого бетона элемента можно определить на основе априорной информации. В соответствии с СП 63.13330.2012 «Бетонные и железобетонные конструкции» при двухлинейной диаграмме  $\sigma - \varepsilon_s$  для стали предельное значение относительной деформации можно принять  $\bar{\varepsilon}_{s,np} = 0,025$ .

Такому значению (0,025) относительной деформации стали на рисунке 2.1 соответствует верхнее значение (нижняя граница) значения максимальной нагрузки  $F_{np}^e$ . Его можно определить графически или аналитически из условия  $F_{np}^e = f_1(\bar{\varepsilon}_s = \bar{\varepsilon}_{s,np})$ . Известно, что предельная относительная деформация стали вычисляется с заданной обеспеченностью по результатам статистического анализа испытаний образцов стальной арматуры и ее приходится характеризовать средним арифметическим значением и доверительным интервалом. Наименьшее значение предельной относительной деформации стали (наименее благоприятный вариант) вычисляется по формуле:  $(\bar{\varepsilon}_{np} - 3S_{\varepsilon_{np}})$ . Тогда нижнее значение интервала предельной нагрузки можно вычислить из условия  $F_{np}^H = f_2(\bar{\varepsilon}_{s,np} - 3S_{\varepsilon_{np}})$ , см. рисунок 2.1, т.е. что будет соответствовать наихудшему случаю. Г. Шпете отмечает [94], что коэффициент вариации  $\nu_\sigma$  для значения предела текучести стальной арматуры при одинаковом изготовителе равен и для единого сечения можно принять в интервале  $\nu_\sigma = 0,01 \div 0,04$ . Для примера используем значение  $\nu_\sigma = 0,025$ . Тогда среднее квадратическое (стандартное) отклонение для предела текучести стали арматуры можно вычислить как  $S_\sigma = \nu_\sigma \cdot \bar{\sigma}_T$ . Значение коэффициент вариации  $\nu$  для модуля упругости  $E_s$  стальной арматуры, согласно Г. Шпете [94], находится в интервале 0,02 - 0,06. Согласно Своду Правил 63.13330.2012 можно использовать следующее значение  $\bar{E}_s = 2 \cdot 10^5$  МПа.

Для примера воспользуемся коэффициентом вариации  $\nu = 0,04$  для модуля упругости стальной арматуры  $E_s$ , согласно [99]. Вычислим стандартное отклонение модуля упругости стали  $S_E = \bar{E}_s \nu = 2 \cdot 10^5 \cdot 0,04 = 8 \cdot 10^3$  МПа. При использовании гипотезы о линейной зависимости для относительных деформаций  $\varepsilon_s$  и напряжений  $\sigma_s$  можно записать:  $\varepsilon_s = \sigma_s / E_s$ . На основе метода линеаризации

[94] можно вычислить:  $S_{\varepsilon_s} = \sqrt{\left(\frac{1}{\bar{E}_s}\right)^2 S_\sigma^2 + \left(\frac{\bar{\sigma}_s}{\bar{E}_s^2}\right) S_E^2}$ . Тогда при  $\bar{\sigma}_s = R_{s,n} = 400$  МПа

получим  $S_\sigma = \nu_\sigma \sigma_s = 0,025 \cdot 400 = 10$  МПа и, следовательно,

$$S_{\varepsilon_s} = \sqrt{\left(\frac{1}{2 \cdot 10^5}\right)^2 \cdot 10^2 + \left[\frac{400}{(2 \cdot 10^5)^2}\right]^2 (8 \cdot 10^3)^2} = 0,5 \cdot 10^{-3}, \quad 3S_{\varepsilon_s} = 1,5 \cdot 10^{-3}. \text{ Нижняя граница}$$

интервала может быть записана как:  $\bar{\varepsilon}_{np} - 3S_{\varepsilon} = 0,025 - 0,0015 = 0,0235$  и такая относительная деформация соответствует нижнему значению интервала, характеризующего предельную нагрузки  $F_{np}^H$  по графику на рисунке 2.1. Также нижнее значение интервала предельной нагрузки может быть получено в аналитическом виде как:  $F_{np}^H = f_2(\bar{\varepsilon}_s - 3S_{\varepsilon})$ . Верхнее же значение интервала, характеризующего предельную нагрузку  $F_{np}^G$ , также можно определить графически (см. рисунок 2.1) или аналитически как значение функции:  $F_{np}^G = f_1(\bar{\varepsilon}_s)$ .

В отдельных случаях и при условии, когда это возможно, для вычисления физико-механических параметров бетона и арматуры следует использовать апостериорную информацию на основе испытаний образцов бетона и арматуры балки различными методами [7].

Частично в разработанном способе определения способности изгибаемых железобетонных элементов учитывается работа бетона в растянутой зоне, в отличие от нормативного подхода, где изгибаемый железобетонный элемент рассчитывается без учета бетона в растянутой зоне. Таким образом можно выявить резерв несущей способности железобетонных элементов, например, балок, при изгибе.

Если рассматривать  $F_{np}$  в интервале  $F_{np}^H \leq F_{np} \leq F_{np}^G$  как случайную величину  $\tilde{F}_{np}$ , то ее стохастическое описание можно представить в виде равномерного распределения (при обозначении  $\tilde{F} = X$ ) [92] с аналитическим видом функции плотности:

$$f(x) = \begin{cases} 1, & \text{если } x \leq F_{np}^H \\ 1/(F_{np}^6 - F_{np}^H), & \text{если } F_{np}^H < x < F_{np}^6 \\ 0, & \text{если } x \geq F_{np}^6 \end{cases} \quad (2.1)$$

Принимая значения нагрузок  $F_{np}^H$  и  $F_{np}^6$  как установленные граничные значения нагрузки  $\tilde{F}_{np}$ , а среднее арифметическое как  $\bar{F}_{np} = 0,5(F_{np}^H + F_{np}^6)$ , то для стохастического описания  $\tilde{F}_{np}$  можно использовать усеченный подход [76] с использованием функций, графически изображенных на рисунке 2.2 с аналитическим видом функций распределения (нижней и верхней):

$$\underline{P}(x) = \begin{cases} 0, & \text{если } x \leq m_x \\ \frac{x - m_x}{x - a}, & \text{если } m_x < x < b \\ 1, & \text{если } x \geq b \end{cases} \quad (2.2)$$

$$\bar{P}(x) = \begin{cases} 0, & \text{если } x \leq a \\ \frac{b - m_x}{b - x}, & \text{если } a < x < m_x \\ 1, & \text{если } x \geq m_x \end{cases}$$

где  $a$  и  $b$  - граничные значения параметра  $X$ ,  $m_x$  - оценка ожидаемого значения  $X$ .

Значение  $F_{np}$ , принимаемое из соответствующего интервала  $[a, b]$ , или в обозначениях  $[F_{np}^H, F_{np}^6]$ , можно представить значениями нижней и верхней границы вероятностей безотказной работы из соответствующего интервала:  $[\underline{P}, \bar{P}]$ .

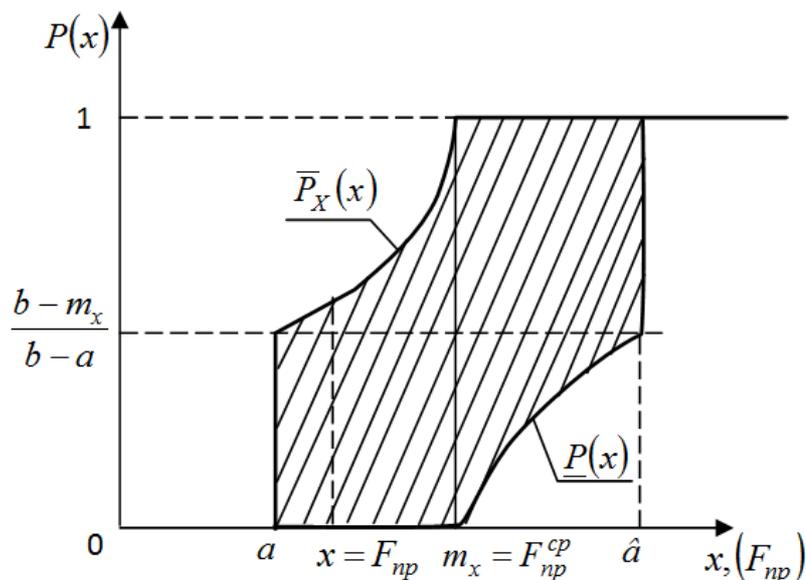


Рисунок 2.2 – Графическое изображение функциональной зависимости  $\underline{P}(x), \bar{P}(x)$

для  $X$  при усеченном подходе при обозначении  $a = F_{np}^H, b = F_{np}^B$

Аналогичным способом устанавливается интервал, характеризующий предельную нагрузку на железобетонную элемент при изгибе по критерию прочности сжатого бетона. Для этого измеряются относительные деформации в сжатой зоне бетона элемента (балки) при выполнении рекомендаций, приведенных в [47]. Аналогично, после испытаний элемента, как описано выше, методом наименьших квадратов [15] (например, в MathCAD) устанавливают функциональные зависимости  $F_1 = f_1(\bar{\varepsilon}_b)$  и  $F_2 = f_2(\bar{\varepsilon}_b + 3S_{\varepsilon_b})$ , графически аналогичные функциональным зависимостям, приведенным на рисунке 2.1. Значения предельных относительных деформаций бетона можно определить также на основе априорной информации или по результатам непосредственных испытаний образцов. По Своду Правил 63.13330.2012 значение предельной относительной деформации бетона при сжатии можно принять как  $\varepsilon_{b0} = 0,002$ . Согласно исследованиям Г. Шпете [94], коэффициент вариации прочности сжимаемого бетона в среднем принимается  $v=0,05$ . Модуль упругости сжимаемого бетона по Своду Правил 63.13330.2012 устанавливается в зависимости от класса бетона В. При классе бетона, например, В30, имеем

значение модуля упругости при сжатии  $E_b = 34,5 \cdot 10^3$  МПа. Расчет средней арифметической прочности бетона при сжатии  $R_m = \sum_{i=1}^n R_i / n$  и стандартного отклонения прочности бетона при сжатии определяется как  $S = \sqrt{\sum_{i=1}^n (R_i - R_m)^2 / (n-1)}$  или по размаху [15], в зависимости от количества испытаний и статистической информации.

Перспективным направлением применительно к эксплуатируемым железобетонным конструкциям является метод динамического индентирования [40] для определения модуля упругости бетона при сжатии. На основе эмпирической зависимости для расчета модуля упругости бетона при сжатии в таком подходе можно определить его статистические параметры: среднее арифметическое значение и стандартное отклонение  $S_E$  для последующего анализа данных. Так при среднем арифметическом значении предельной относительной деформации бетона при сжатии  $\bar{\varepsilon}_{b,np} = \bar{R}_m / \bar{E}_b$  и на основе метода линеаризации можно вычислить его стандартное отклонение по формуле:

$$S_{\varepsilon_{np}} = \sqrt{\left(\frac{1}{\bar{E}_b}\right)^2 S_R^2 + \left(\frac{\bar{R}_m}{\bar{E}_b^2}\right)^2 S_E^2}.$$

По результатам экспериментально-теоретических испытаний, будем иметь два интервала предельной нагрузки (по рабочей арматуре и сжатому бетону), которые характеризуют несущую способность изгибаемого железобетонного элемента. Из них за расчетный следует принимать интервал наименьшей нижней границей:  $F_{np \min} = F_{np}^H$ . Истинная (дискретная) же предельная нагрузка располагается внутри интервала и является неизвестной. В дальнейшем задача переходит в область задач расчетов на заданный риск [100, 101 и др.] и нагрузка принимается  $F_{np} > F_{np}^H$  в зависимости от конкретного объекта эксплуатации.

Для классов сооружений КС-2, КС-3 требуется проведение нескольких испытаний по выявлению интервала предельной нагрузки для статистического анализа, по итогам которых получим совокупность интервалов некоторого множества интервалов  $[F_{npi}^H, F_{npi}^B]$ . Для анализа данных в таком случае может быть использован подход на основе теории случайных множеств [109, 130], где формируются соответствующие функции доверия ( $Bel(F_{np})$ ) и функции правдоподобия ( $Pl(F_{np})$ ) [90]. При известных эксплуатационных нагрузках в детерминированной форме или интервальном виде можно рассчитать вероятность отказа элемента по [90].

Предельная нагрузка в сосредоточенном виде  $F_{np}$  зачастую не имеет практической значимости, поэтому требуется ее аналог в распределенном по длине элемента виде. К тому же, по ГОСТ 31937-2011 требуется выявлять реальную расчетную схему отдельных частей сооружения для поверочных расчетов на них предельной нагрузки.

Рассмотрим задачу установления уточненной расчетной схемы эксплуатируемого изгибаемого элемента и переход от предельной нагрузки вида  $F_{np}$  к предельной эксплуатационной нагрузке.

**Пример 2.1.** Свободно-опертая балка по рис. 2.3.

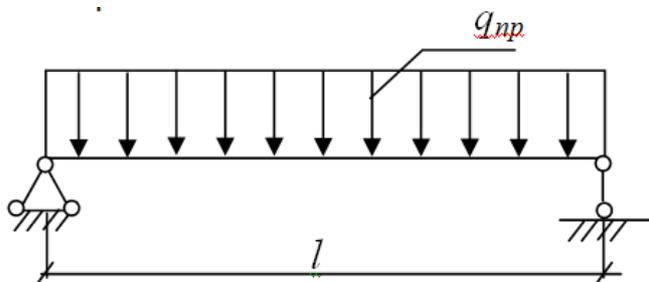


Рисунок 2.3 – Расчетная схема балки

В данном случае предельную распределенную нагрузку  $q_{np}$  можно определить из условия  $M_{q_{np}} = M_{F_{np}}$ , где  $M_{F_{np}}$  - максимальный изгибающий момент

от сосредоточенного усилия  $F_{np}$ , определенной по предлагаемому способу;  $M_{q_{np}}$  - изгибающий момент от комбинации загрузений вида  $q_{np} + q_{c.в.}$ , где  $q_{c.в.}$  - собственный равномерно-распределенный вес элемента.

На основании схемы по рис. 2.3 вычислим:  $M_{q_{np}} = (q_{np} + q_{c.в.})l^2 / 8$  и  $M_{F_{np}} = \frac{F_{np}l}{4}$ .

Тогда  $q_{np}^H + q_{c.в.} = \frac{2F_{np}^H}{l}$  и  $q_{np}^H = \frac{2F_{np}^H}{l} - q_{c.в.}$ .

Верхнее значение интервала предельной нагрузки можно записать в виде  $q_{np}^e = \frac{2F_{np}^e}{l} - q_{c.в.}$ . Несущая способность элемента в целом можно записать интервалом предельной равномерно-распределенной нагрузки на элемент  $[q_{np}^H, q_{np}^e]$ . Эксплуатационная нагрузка на элемент должна соответствовать  $q \leq q_{np}^H$  при наиболее аккуратном подходе к оценке предельной нагрузки.

Если рассматривать  $q_{np}$  как стохастический параметра  $\tilde{q}_{np}$  (в определенном интервале), то при среднем арифметическом значении  $q_{np} = 0,5(q_{np}^H + q_{np}^e)$  можно использовать подход с усеченным интервальным распределением, как показано на рисунке 2.2 и отмечено выше.

**Пример 2.2.** На рис. 2.4 показана уточненная расчетная схема балки с учетом угловой жесткости опорных закреплений.

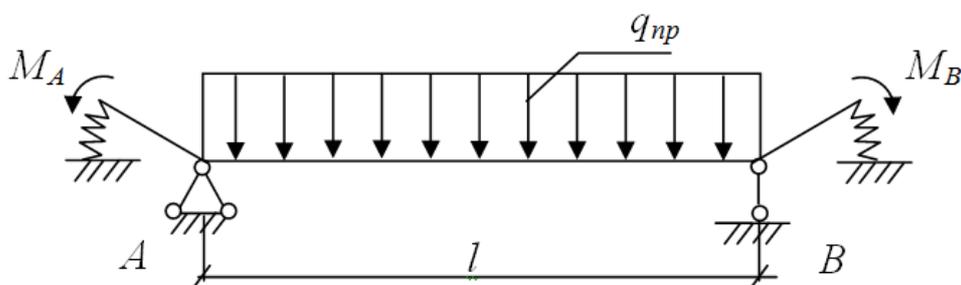


Рисунок 2.4 – Схема балки с угловой жесткостью опор

При данной расчетной схеме неизвестно расположение максимального изгибающего момента по длине балки. Оно зависит от жесткости опорных закреплений. Предварительно требуется определить угловую жесткость опор, и после этого рассматривать задачу как статически неопределимую систему с выявленным положением максимального изгибающего момента  $M_{\max}$ . В таком сечении прикладывается экспериментальная нагрузка, а основной алгоритм определения несущей способности не отличается от вышеописанного способа. Экспериментально-теоретический способ определения угловой жесткости опорных закреплений можно найти в работе [75], где также приведен расчет такой системы.

## **1.2. Определение несущей способности изгибаемого железобетонного элемента по критерию прогиба**

Основные результаты раздела опубликованы автором диссертации в работе [87]. Предельные вертикальные перемещения (прогиб) изгибаемых железобетонных элементов ограничиваются различными критериями [4]. Например, такие как: эстетико-психологические требования, функционально-технологические требования, требование отсутствия остаточных относительных деформаций и другие. В отдельных ситуациях предельный прогиб может ограничиваться по нескольким критериям.

Подход к определению интервала предельной нагрузки на изгибаемый железобетонный элемент по прочности его рабочей арматуры и сжатого бетона рассмотрен выше и в работе [77]. В работе [9] рассматривается подход к определению перемещений для железобетонных балочных конструкций с учетом нормальных трещин. Влиянию воздействия нормальных трещин на дальнейшие вертикальные перемещения балок также посвящена работа [28]. В статье [5] анализируется жесткость изгибаемых железобетонных элементов со смешанным армированием в условиях повторяющихся динамических нагружений. В статье [106] исследуется изменение жесткости железобетонных изгибаемых элементов

после циклов замораживания-оттаивания. В работе [114] анализируется изменение жесткости железобетонного элемента после его усиления и степень изменения вертикальных перемещений после. В статье [118] на основе экспериментальных данных построены графики зависимости нагрузки от вертикальных перемещений для изгибаемых железобетонных элементов после наращивания их сечения углепластиком. В работе [125] проводится обследование изгибаемой железобетонной конструкции имеющей вненормативный прогиб с анализом причин его возникновения. В статье [113] для составных железобетонных элементов проводится анализ жесткости и вертикальных перемещений. В статье [123] исследуется изменение жесткости железобетонной балки после пожара и соответствующие изменения ее прогиба. В работе [105] приводятся подходы для вычислений и измерений вертикальных перемещений железобетонных конструкций. В Патенте на изобретение [46] разработан инновационный подход для определения дискретного значения предельной нагрузки на изгибаемый элемент по условию прогиба при установлении функциональной зависимости испытательной нагрузки от прогиба (рис. 2.5).

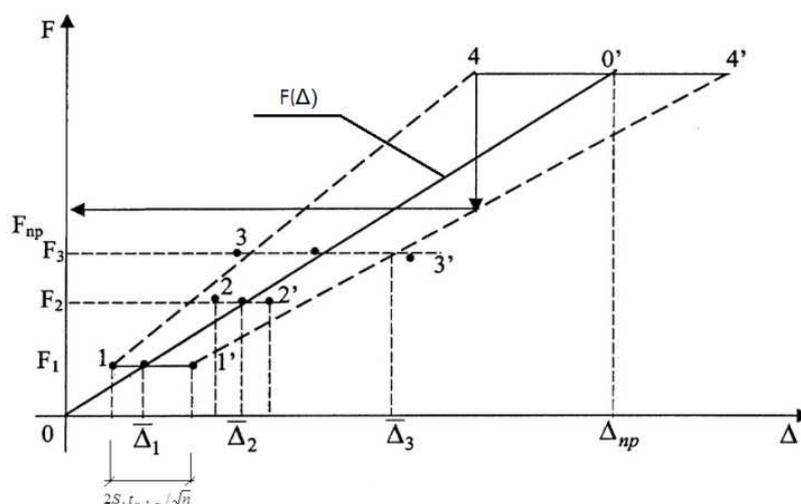


Рисунок 2.5 – Диаграмма выявления дискретного значения предельной нагрузки по [46]

Данный подход заключается в следующем: элемент загружается экспериментальным нагружением в усилия  $F_i$  с фиксированием максимального вертикального перемещения элемента и по выявленным значениям

устанавливают графическую зависимость между значениями экспериментальных нагрузений и вертикальных перемещений элемента  $F(\Delta)$ , в которую подставляют значение максимального возможного прогиба для данного элемента при эксплуатации  $\Delta_{np}$ , значение которого определяется по нормативным или технологическим документам. Условный вид такой функциональной зависимости и определение нагрузки в дискретном виде приведено на рис. 2.5. Минусом рассмотренного подхода может служить необоснованно заниженная мера несущей способности. Негативной чертой к тому же служить влияние аддитивного воздействия на элемент экспериментальным значением нагрузки  $F_i$ , что может привести к появлению повреждений в элементе и выходу его из строя (при неграмотном расчете испытательной нагрузки или испытаниях). К тому же, в рассмотренном подходе не указывается взаимосвязь между несущей способностью в виде сосредоточенной силы  $F_{np}$  и приближенным к реальному эксплуатационному воздействию на элемент, например – равномерно распределенная по длине нагрузка. К тому же в данном подходе присутствует наличие субъективности при определении границ интервала при анализе в виде  $2S_{\Delta}t_{n-1,\alpha}/\sqrt{n}$ , где  $t_{n-1,\alpha}$  - квантиль Стьюдента;  $S_{\Delta}$  - стандартное отклонение;  $n$  – количество испытаний при фиксировании  $\Delta_i$  и экспериментальном воздействии  $F_i$ . В Патенте на изобретение [45] предлагается схожий подход с таким же недостатками.

Проанализировав приведенные работы можно прийти к выводу, что главной количественной мерой несущей способности служит значение (дискретное или интервальное) предельной нагрузки, при котором элемент не переходит в запредельное состояние по принятому критерию предельного состояния. В большинстве рассмотренных подходов не приведено количественное влияние вертикальных перемещений на показатели надежности и несущей способности относительно безопасности его эксплуатации. В данном разделе разработан

способ выявления интервала предельной нагрузки на изгибаемый железобетонный элемент с целью устранения приведенных недостатков.

Разработанный подход реализуется следующим образом: определяется сечение изгибаемого элемента с максимальным вертикальным перемещением от эксплуатационного воздействия, что можно рассчитать по правилам строительной механики или определить при помощи современных геодезических измерительных приборов [22]. В выявленном сечении следует поставить несколько измерителей вертикальных перемещений (прогибов) с целью последующих измерений перемещений элемента в этом сечении от экспериментального сосредоточенного воздействия  $F_i$ . Максимальное значение экспериментальной нагрузки на изгибаемый железобетонный элемент следует устанавливать при выполнении неравенства  $M_F \leq M_{F,экс}$ , где  $M_{F,экс}$  - максимальный момент в сечении от воздействий существующих нагрузок, который можно вычислить теоретически;  $M_F$  - возникающий момент от экспериментального сосредоточенного воздействия  $F$  в аналогичном сечении балки с  $M_{F,экс}$ . Экспериментальные воздействия назначают в виде нескольких ступеней значений экспериментальных воздействий при выполнении условия  $F_i < F_{max}$ . После чего железобетонный элемент нагружают экспериментальным воздействием  $F_i$ , направленным противоположно эксплуатационным воздействиям. Такого рода нагружение создается при использовании домкрата (например, гидравлического), с направлением в обратную сторону от эксплуатационного воздействия и нагрузки от массы элемента, тем самым обеспечивая безопасное проведение эксперимента и отсутствие возникновения повреждения в исследуемом элементе (например, железобетонной балке). Затем, после воздействия экспериментальным усилием  $F_i$ , данное усилие не снимается с элемента до момента стабилизации значений прогиба. После стабилизации значений, фиксируют вертикальное перемещение элемента по прогибомерам на основе известных подходов [22, 51 и др.]. Экспериментальное воздействие

каждым принятым значением экспериментальной ступени нагрузки  $F_i$  следует выполнить более десяти подходов [92] для возможности проведения дальнейшего статистического анализа. Значения зафиксированных вертикальных перемещений на каждой ступени нагружения анализируются с применением классического статистического аппарата с установлением нормальности распределений. Количественной характеристикой границ изменения случайной величины при нормальном законе для вертикальных перемещений (прогибов)  $f_i$  можно использовать интервал на основе правила  $3\sigma$  [92]. По результатам проведения экспериментальных исследований (количество которых должно быть  $n \geq 10$ ) с несколькими степенями значений экспериментальных воздействия  $F_i$  и соответствующих фиксаций вертикальных перемещений  $f_i$  изгибаемого железобетонного элемента, вычисляют среднеарифметические прогибы элемента

$\bar{f}_i$  при всех ступенях экспериментальных воздействий  $F_i$  в виде:  $\bar{f}_i = \frac{\sum_{j=1}^n f_{i,j}}{n}$  и

стандартное отклонение по формуле:  $S_{f_i} = \sqrt{\frac{\sum_{j=1}^n (f_{j,i} - \bar{f}_i)^2}{n-1}}$ . По экспериментальным

сосредоточенным воздействиям на каждой ступени  $F_i$  и среднеарифметическим значениям вертикальных перемещений (прогибов)  $\bar{f}_i$ , используя, например, метод наименьших квадратов, выявляется функциональная зависимость  $\Phi_1(F; \bar{f})$  экспериментальной сосредоточенной нагрузки  $F$  от среднего значения прогибов  $\bar{f}$ . Условный график такой зависимости изображен на рис. 2.6. Аналогично для вероятных максимальных вертикальных перемещений по доверительным интервалам значений  $\tilde{f}_i$  с учетом среднеарифметических значений и СКО на каждой ступени экспериментального воздействия вычисляют:  $(\bar{f}_i + 3S_{f_i})$ , полученных по правилу  $3\sigma$ , и устанавливают другую функциональную зависимость вида:  $\Phi_2(F; \bar{f} + 3S_{f_i})$ . Для железобетонных элементов уровня ответственности КС-1 интервал для вертикальных перемещений  $\tilde{f}_i$  можно

принять со значениями  $2S_{f_i}$  с доверительной вероятностью 0,954, тем самым повышая нижнюю границу  $F_{np}^H$ .

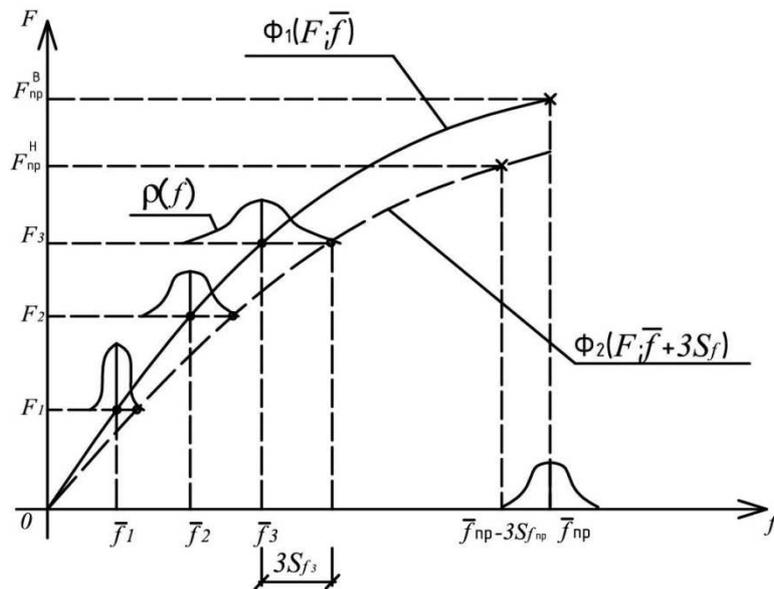


Рисунок 2.6 – Условная графическая зависимость  $\Phi_1(F; \bar{f})$  и  $\Phi_2(F; \bar{f} + 3S_f)$

Графический вид зависимостей  $\Phi_1(F; \bar{f})$  и  $\Phi_2(F; \bar{f} + 3S_f)$  лимитируется максимально допустимыми значениями вертикальных перемещений  $f_{np}$  и  $(\bar{f}_{np} - 3S_{f_{np}})$ , т.е. среднеарифметическим и минимальным возможным предельным вертикальным перемещением с доверительной обеспеченностью 0,9973.

Рассмотрим вариант ограничения значения вертикального перемещения (прогиба) по принципу недопущения остаточных относительных деформаций в рабочей арматуре балки. Такое требование, например, вызывается технологическими требованиями при крановой нагрузке. Не возникает существенных остаточных относительных деформаций при напряжениях в стали арматуры, не превышающих значения предела упругости  $\sigma_y$ . В [56] отмечается, что предел упругости  $\sigma_y$  - есть наибольшее напряжение, выдерживаемое сталью, без признаков возникновения остаточной деформации после снятия нагрузки. В ГОСТ 1497-84 введен термин условного предела упругости, под которым понимается значение напряжения, когда среднеарифметическая отн. деформация

стали  $\bar{\varepsilon}_{ocm} = \bar{\varepsilon}_{np}$  достигает значения 0,0005. Согласно [56], для высоколегированной стали дифференцируют значения условного  $\sigma_{0,02}$  и предела упругости  $\sigma_{sc} = 0,8\sigma_{0,02}$ . Согласно исследованиям [94], вариацию для предела текучести стали допускается характеризовать коэффициентов вариации равным  $\nu=0,05-0,08$ . Используя аналогичную вариацию для предела упругости стали, определяется среднеарифметическое значение напряжения, которое соответствует пределу упругости  $\bar{\sigma}_{np}$  и стандартное отклонение  $S_{\sigma_{np}}$ . Рекомендуется испытывать контрольные образцы арматуры, вырезанные из малонапряженных участков железобетонного элемента по методике, приведенной в [7].

Для изгибаемого железобетонного элемента при сосредоточенном нагружении в центре пролета справедлива зависимость [4]:

$$f = s \frac{Ml^2}{B}, \quad (2.3)$$

обозначения параметров приведены в [4]. Приведенная характеристика жесткости определяется как:  $B = 0,85E_b I_{red}$ , где  $I_{red}$  допускается вычислять для элемента с прямоугольным поперечным сечения без учета арматуры как  $I_{red} = bh^3 / 12$ ;  $s$  – для шарнирного изгибаемого элемента при заданном нагружении назначается как  $s=1/12$ .

Функциональное выражение для изгибающего момента можно записать при стохастических параметрах (промаркированных волнистой линией) при упругой деформации бетона в виде:

$$\tilde{M} = \tilde{\sigma}_s A_s (h_0 - \tilde{x} / 3), \quad (2.4)$$

где  $x$  – высота сжатой зоны бетона, которая в условиях упругой работы элемента может быть вычислена экспериментально по измерениям относительных деформаций по высоте сечения балки в исследуемом сечении [97].

Среднеарифметическое значение максимально допустимого вертикального перемещения при (2.3) и (2.4) можно записать в виде:

$$\bar{f}_{np} = \frac{1}{12} \frac{A_s \bar{\sigma}_{np} l^2 (h_0 - \bar{x}/3)}{0,85 \bar{E}_b I_{red}}, \quad (2.5)$$

а СКО вычислить по выражению:

$$S_{f_{np}} = \frac{1}{12} \frac{A_s l^2}{0,85 I_{red}} \sqrt{\left(\frac{(h_0 - \bar{x})}{\bar{E}_b}\right)^2 S_{\sigma_{np}}^2 + \left(\frac{(h_0 - \bar{x}) \cdot \bar{\sigma}_{np}}{\bar{E}_b^2}\right)^2 S_{E_b}^2 + \left(\frac{\frac{1}{3} \bar{\sigma}_{np}}{\bar{E}_b}\right)^2 S_x^2}, \quad (2.6)$$

где  $\bar{E}_b$  и  $S_{E_b}$  – среднеарифметическое значение и стандартное отклонение модуля упругости бетона;  $\bar{\sigma}_{np}$  и  $S_{\sigma_{np}}$  – аналогичные статистические параметры для максимального напряжения стали арматуры;  $\bar{x}$  и  $S_x$  – аналогичные статистические параметры для высоты сжатой зоны бетона.

Подход к расчету  $\bar{\sigma}_{np}$  и  $S_{\sigma_{np}}$  был приведен в тексте выше. С помощью метода динамического индентирования можно определять на стадии эксплуатации железобетонного элемента его модуль упругости [38, 40 и др.].

Используя среднеарифметическое значение максимально допустимого прогиба  $\bar{f}_{np}$  в функциональной зависимости вида  $\Phi_1(F; \bar{f})$ , вместо параметра  $\bar{f}$ , можно вычислить верхнюю границу интервала несущей способности  $F_{np}^B$  (см. рис. 2.6). Используя значение минимального вероятного предельного прогиба в виде  $(\bar{f}_{np} - 3S_{f_{np}})$  в функциональной зависимости вида  $\Phi_2(F; \bar{f} + 3S_f)$  вместо  $(\bar{f} + 3S_f)$  вычисляют верхнюю границу интервала несущей способности  $F_{np}^H$  (см. рис. 2.6). Полученные значения  $[F_{np}^H; F_{np}^B]$  являются оценкой предельной нагрузки на изгибаемый железобетонный элемент по его прогибу в данном случае при требовании недопущения остаточных относительных деформаций рабочей арматуры элемента. Дополнительно на рис. 2.6 приведены графические отображения плотностей вероятности  $\rho(f)$  для прогиба как случайной величины  $\tilde{f}_i$ .

Как было отмечено выше, несущая способность в данном случае может быть охарактеризована нижним и верхним граничными значениями  $F_{np}^H$  и  $F_{np}^B$ . Максимальную нагрузку больше среднеарифметического значения вертикальных перемещений элемента назначать не рекомендуется, а нижнее значение интервала несущей способности  $F_{np}^H$  приводится с соответствующей обеспеченностью 0,997. В изгибаемых железобетонных элементах уровня ответственности КС-1, как было отмечено выше, также можно воспользоваться правилом  $2\sigma$  и получить вероятностью наступления предельного состояния  $f_{\max} \leq f_{np}$  при значении 0,954.

Рассмотрим подход к определению интервала предельной нагрузки на изгибаемый железобетонный элемент, при котором значение максимально допустимого прогиба  $f_{np}$  устанавливается по СП 20.13330.2016 по доле длины пролета изгибаемого элемента. Например, для железобетонной балки перекрытия при ее длине 6 м, предельный допустимый прогиб принимается как 1/200 от длины пролета балки, что устанавливается исходя из условия обеспечения эстетико-психологических требований эксплуатации элемента. По аналогии с вышеизложенным алгоритмом следует установить функциональные зависимости вида  $\Phi_1(F; \bar{f})$  и  $\Phi_2(F; \bar{f} + 3S_f)$ , однако ограничение максимально допустимых значений вертикальных перемещений будет представлено в дискретном виде  $f_{np}$ . Используя однозначный максимально допустимый прогиб  $f_{np}$  в функциональной зависимости вида  $\Phi_1(F; \bar{f})$  вместо среднеарифметического значения  $\bar{f}$ , можно вычислить верхнюю границу интервала несущей способности изгибаемого железобетонного элемента  $F_{np}^B$ . Графическое решение такой задачи представлено на рис. 2.7. Используя максимально допустимый прогиб  $f_{np}$  в функциональной зависимости вида  $\Phi_2(F; \bar{f} + 3S_f)$  вместо значения  $(\bar{f} + 3S_f)$ , можно вычислить нижнюю границу интервала несущей способности  $F_{np}^H$  (рис. 2.7).

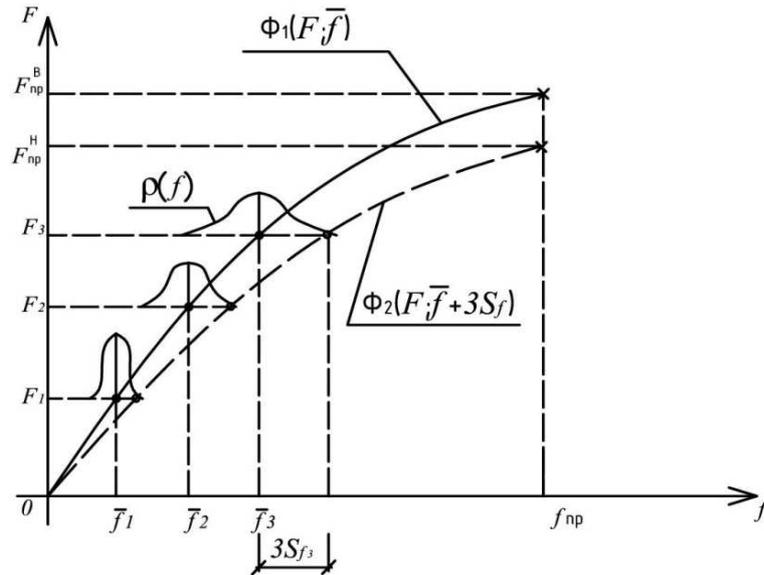


Рисунок 2.7 – Условные функциональные зависимости  $\Phi_1(F; \bar{f})$  и  $\Phi_2(F; \bar{f} + 3S_f)$

Интервал несущей способности  $[F_{np}^H; F_{np}^B]$  служит отдельным значением множества интервалов предельной нагрузки  $\{[F_{np}^H; F_{np}^B]\}$ . Проведение нескольких испытаний даст статистическое подмножество интервалов. Такое подмножество интервалов статистически анализируется по теории случайных множеств [90, 109, 130 и др.] в результате чего вычисляются, например, матожидания для границы несущей способности в виде  $[F_{np}^H; F_{np}^B]$ . Приведем алгоритм такого расчета.

**Пример 2.3.** Пусть по экспериментально-теоретическим испытаниям железобетонного элемента были определено подмножество интервалов несущей способности в виде –  $[9831; 11252]$ ,  $[9556; 10999]$ ,  $[9715; 11350]$ ,  $[9555; 10832]$ ,  $[9631; 11100]$  кН. Суммарное количество интервалов в подмножестве равно  $n=5$ . Статистическое матожидание значения несущей способности по данным подмножества интервалов в соответствии [45] можно определить в виде:

$$\underline{EY} = \sum_{i=1}^n m(A_i) \cdot \inf(A_i); \quad \bar{EY} = \sum_{i=1}^n m(A_i) \cdot \sup(A_i), \quad (2.7)$$

где  $m(A_i) = C_i / N$ , где  $C_i$  – число имеющихся подмножеств вида  $A_i$ ;  $N$  – количество интервалов в подмножестве;  $A_i$  – подмножество множества  $\Omega$ .

По результатам испытаний определено  $n=5$ . Тогда по (2.7) можно вычислить:

$$\underline{EY} = \left(\frac{1}{5}9556 + \frac{1}{5}9831 + \frac{1}{5}9715 + \frac{1}{5}9631 + \frac{1}{5}9555\right) = 9567 \text{ кН}$$

$$\bar{EY} = \left(\frac{1}{5}10999 + \frac{1}{5}11252 + \frac{1}{5}11100 + \frac{1}{5}10832 + \frac{1}{5}11350\right) = 11106 \text{ кН}$$

Тогда матожидание несущей способности элемента можно записать в виде [9567; 11106] кН. Такой интервал отличается от всех результатов в подмножестве интервалов несущей способности элемента

Подход к оценке несущей способности изгибаемого железобетонного элемента в виде сосредоточенной силы  $F_{np}$  не имеет должного практического применения, если его вид не совпадает с видом эксплуатационного воздействия на элемент, например, равномерно-распределенного по всей длине элемента вида  $q_{np}$ . Такое согласование можно провести на основе классических подходов механики.

**Пример 2.4.** Сводобно опертая балка с расчетной схемой в соответствии с рис. 2.3.

При несущей способности в виде воздействия  $F_{np}$  в центре длины пролета элемента, то по условию равенства моментов  $M_{F,np} = M_{q,np}$  можно записать

$$F_{np} \cdot \frac{l}{4} = \frac{q_{np} l^2}{8} \text{ и выразит предельную нагрузку в виде } q_{np} = \frac{2 \cdot F_{np}}{l}.$$

**Пример 2.5.** Элемент с некоторой угловой жесткостью опор и расчетной схемой, приведенной на рис. 2.4.

Элемент имеет некоторую статическую неопределимость, подход к решению такой задачи рассмотрен в [85]. Экспериментальные воздействия  $F_i$  прикладываются аналогично в месте с максимальным моментом  $M_{\max(q)}$  и также

определяется значение нагрузки  $F_{np}$ . Из условия  $M_{F,np} = M_{q,np}$  определяется  $q_{np}$ , значение которого является предельной эксплуатационной нагрузкой на балку. При условии если  $M_A$  или  $M_B$  превысят значение  $M_{\max(q)}$  в некотором месте по длине элемента, например, при максимальной жесткости опор  $M_A = \frac{ql^2}{8}$  и  $M_{\max(q)} = \frac{ql^2}{24}$ , тогда ступенчатые экспериментальные воздействия  $F_u$  прикладываются по вышеописанному алгоритму, значение нагрузки  $q$  вычисляется из условия  $M_{F,np} = M_{q,np}$ , а после чего его следует занизить в  $n = \frac{M_{\max(A \text{ или } B)}}{M_{\max(q)}}$  раз, если момент  $M_{\max(A)}$  или  $M_{\max(B)}$  элемента в опорных сечениях по рис. 2.4 превысит  $M_{\max} = \frac{ql^2}{24}$ .

**Пример 2.6.** Консоль (см. рис. 2.8).

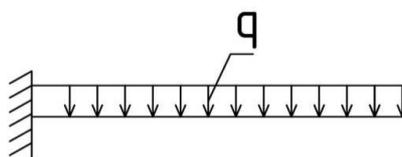


Рисунок 2.8 – Расчетная схема консоли

Если несущая способность  $F_{np}$  была определена для элемента с воздействием нагрузкой на крайней точке самой консоли, тогда из условия  $M_{F,np} = M_{q,np}$  и  $F_{np} \cdot l = \frac{q_{np}l^2}{2}$  вычисляется значение предельной равномерно-распределенной эксплуатационной нагрузки как  $q_{np} = \frac{2 \cdot F_{np}}{l}$ .

Аналогично проводится согласование для других расчетных схем.

### **2.3. Определение несущей способности изгибаемого железобетонного элемента по критерию ширины раскрытия трещины и длины трещины**

Подробно содержание раздела опубликовано автором работы в статье [77]. В статье [13] приводится тезис о том, что ширина нормальных трещин является одним из главных индикаторов предаварийного технического состояния железобетонных элементов. В работе [129] отмечено, что зарождение первых трещин на макро-уровне в железобетонных элементах должно сопровождаться установлением причины их появления, а также последующей оценкой влияния трещин на степень безопасности эксплуатации при установлении возможности последующей работы элемента, исходя из соображений безопасности, т.к. нормальные трещины оказывают влияние на несущую способность элемента: уменьшается жесткость их поперечных сечений, снижается долговечность по причине возможного возникновения коррозии арматуры и т.д. Отмечается, что на протяжении комплексного срока эксплуатации, нормальные трещины являются в некоторой степени условным сигналом о снижении безопасности дальнейшей эксплуатации сооружения. Ширину раскрытия нормальных трещин ограничивают в соответствии с нормативными документами: сводами Правил 63.13330 и 28.13330, либо в соответствии с научно-техническими исследованиями [13] с учетом длины между нормальными трещинами. Ширина раскрытия трещины устанавливается дискретным значением (в мм) и в стохастических расчетах может быть принята детерминированной. Очевидно, что нормальная трещина в бетоне изгибаемого элемента может быть описана не только шириной, но и протяженностью (длиной) вдоль сечения элемента. Длина трещины также может оказывать существенное влияние на предельную нагрузку на элемент. Тем не менее, в настоящих нормативах по расчету ЖБК ограничение длины трещины не приводится, а прочность бетона на растяжение при расчете по 1 группе предельных состояний не рассматривается. На этом момент заостряет внимание профессор Пирадов К.А. в работе [55], где он постулирует, что на данный момент теоретически обоснованного расчета для проектирования железобетонных

элементов конструкций с трещинами (а железобетонные элементы, особенно без предварительного напряжения арматуры, как правило, содержат трещины при проектных нагрузках [55]) не разработано, а настоящий метод расчета на основе предельных состояний (от 1955 г.) строится на ряде теоретически необоснованных эмпирических коэффициентов. Дальнейшее решение такого вопроса видится авторам в [55] в использовании положений механики разрушения при проектировании железобетонных элементов конструкций.

В работе Зайцева Ю.В. [21], на основании исследований, отмечено, что при глубине трещины в железобетонных балках равной  $l_{crс} = 0,3 \cdot h_0$ , возникают необходимые условия для дальнейшей смены ориентации трещины в продольное направление. Такое явление при дальнейшем развитии может привести к выколам частей растянутого бетона между нормальными трещинами, что категорически повлияет на несущую способность железобетонной балки и может быть причиной ее аварии.

В данном разделе разработан новый способ определения несущей способности изгибаемых железобетонных элементов по условию ширины раскрытия и длины нормальной трещины в отдельности и при их совокупном воздействии на деградацию предельной нагрузки на элемент. Для реализации предлагаемого способа, предварительно следует определить значение максимально допустимой нагрузки  $F_{пр,0}$  на изгибаемый элемент без нормальных трещин. Это можно осуществить экспериментально-теоретическими исследованиями железобетонного элемента на первой стадии эксплуатации или теоретическим расчетом. При теоретическом расчете получим дискретное значение предельной нагрузки  $F_{пр,0}$  как детерминированной величины в вероятностных терминах. Способ оценки несущей способности эксплуатируемого изгибаемого железобетонного элемента по критерию прочности рабочей арматуры и сжатого бетона был предложен в диссертации выше. В таком случае будем иметь интервал несущей способности элемента в виде  $[F_{пр}^H; F_{пр}^B]$ , где  $F_{пр}^H$  –

нижняя граница нагрузки по прочности,  $F_{np}^B$  - аналогичная верхняя граница интервала.

Рассмотрим способ определения несущей способности по критерию ширины раскрытия нормальных трещин. Так, при ширине нормальной трещины при превышении предельной величины  $a_{crc,ult}$ , дальнейшая эксплуатация элемента по условию эксплуатационной пригодности недопустима. Такому виду предельного состояния элемента будет соответствовать предельная нагрузка  $F_{np}=0$ . Графический вид зависимости максимального значения допустимой нагрузки  $F_{np,t}$  в момент времени эксплуатации равный  $t$  от ширины нормальной трещины  $a_{crc,t}$  может быть представлен в виде выпуклой линии (рис. 2.9). Исследуем две возможности установления предельной нагрузки на эксплуатируемый изгибаемый железобетонный элемент по критерию ширины раскрытия нормальной трещины. В одном случае значение предельной нагрузки  $F_{np,0}$  дискретное, выявленное на основании теоретического расчета, а несущая способность изгибаемого железобетонного элемента изменяется по графической функциональной зависимости (пунктирные линии), отображенной на рис. 2.9 (а). В другом случае, предельная нагрузка  $F_{np,0}$  выявляется экспериментально-теоретическим способом, который был описан в диссертационной работе выше, и описывается граничными значениями  $[F_{np,0}^H; F_{np,0}^B]$ , что аналогично отображено на рис. 2.9 (б).

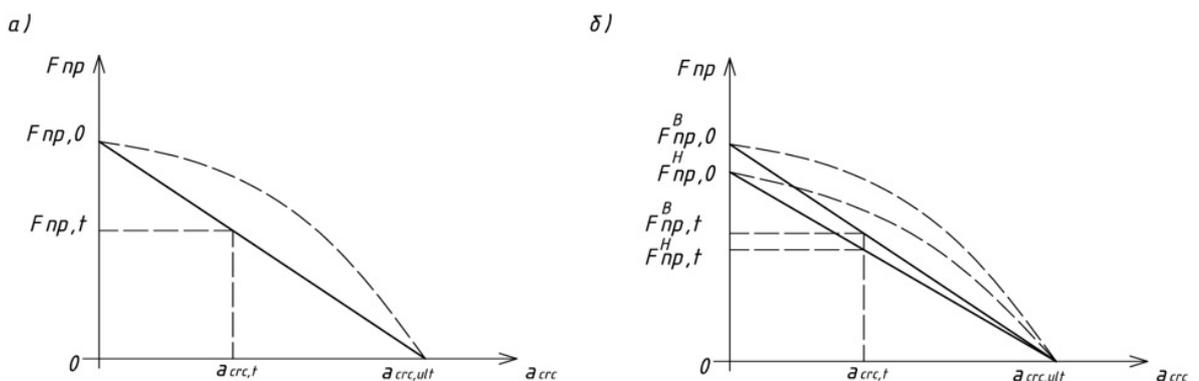


Рисунок 2.9 – Графический вид функциональной зависимости предельной нагрузки  $F_{np}$  от ширины трещины  $a_{crc}$  при  $F_{np,0}$  и  $[F_{np,0}^H; F_{np,0}^B]$

Для реализации запаса несущей способности, что видно из анализа рис. 2.9., нелинейные функции вида  $F_{пр,t} - a_{crc,t}$  по рис. 2.9 заменим линейными функциями с выражением прямых в отрезках для параметров  $a_{crc,ult}$  и  $F_{пр,0}$  в виде:

$$\frac{F_{пр,t}}{F_{пр,0}} + \frac{a_{crc,t}}{a_{crc,ult}} = 1; \text{ или } \frac{F_{пр,t}^H}{F_{пр,0}^H} + \frac{a_{crc,t}}{a_{crc,ult}} = 1; \frac{F_{пр,t}^B}{F_{пр,0}^B} + \frac{a_{crc,t}}{a_{crc,ult}} = 1, \quad (2.8)$$

при соответствующей заданной максимально допустимой ширине трещины  $a_{crc,ult}$ .

Из выражения (2.8) по результатам измерения  $a_{crc,t}$  в железобетонном элементе можно найти остаточную предельную нагрузку на элемент в виде  $F_{пр,t}$ . Измерения ширины трещины проводятся известными методами [67]. Так, например, в соответствии со стандартом ГОСТ 8829-94 для определения ширины нормальной или другой трещин необходимо использовать приборы измерения с ценой деления не превышающей 0,05 мм. Это можно осуществить, например, микроскопом типа МПБ-2 (или аналогом), имеющего погрешность измерения 0,002 см. Из выражения (2.8) можно выразить уравнения для вычисления предельной нагрузки в виде:

$$F_{пр,t} = F_{пр,0} \left(1 - \frac{a_{crc,t}}{a_{crc,ult}}\right) \text{ или } F_{пр,t}^H = F_{пр,0}^H \left(1 - \frac{a_{crc,t}}{a_{crc,ult}}\right); F_{пр,t}^B = F_{пр,0}^B \left(1 - \frac{a_{crc,t}}{a_{crc,ult}}\right), \quad (2.9)$$

Возможен вариант назначения предельной нагрузки в виде  $F_{пр,0}$  из соответствующего интервала предельных значений  $[F_{пр,0}^H; F_{пр,0}^B]$ , но такой подход должен осуществляться расчетом с заданным уровнем риска, который может быть назначен, например, по методам в [90].

**Пример 2.7.** Используем первый подход для оценки несущей способности изгибаемого железобетонного элемента в период эксплуатации  $t$ . Пусть по результатам испытаний получены значения:  $a_{crc,t}=0,15$  мм;  $a_{crc,ult}=0,30$  мм,  $F_{пр,0} = 15$

кН. По выражению (2.8) вычислим:  $F_{пр,t} = 15 \cdot (1 - \frac{0,15}{0,30}) = 7,5$  кН. Следовательно, предельную нагрузку на элемент можно оценить значением  $F_{пр,t} = 7,5$  кН.

**Пример 2.8.** Используем второй подход для оценки несущей способности изгибаемого железобетонного элемента в период эксплуатации  $t$ . Пусть по результатам испытаний получены значения:  $a_{crc,t}=0,20$  мм;  $a_{crc,ult}=0,30$  мм;  $F_{пр,0}^H = 10$  кН;  $F_{пр,0}^B = 12$  кН. Вычислим по выражению (2.9) значения:  $F_{пр,t}^H = 10 \cdot (1 - \frac{0,20}{0,30}) = 3,34$  кН;  $F_{пр,t}^B = 12 \cdot (1 - \frac{0,20}{0,30}) = 4,00$  кН. Предельную нагрузку на элемент можно представить в виде:  $[3,34; 3,99]$  кН. При наиболее осторожном варианте можно принять:  $F_{пр}(t) = 3,34$  кН.

Аналогичный подход может быть использован в зависимости от длины трещины в элементе. В нем необходимо установить значение предельной длины трещины  $l_{crc,ult}$  или критической длины, при использовании терминов механики разрушения [21]. Аналогичная рисунку 2.9 зависимость между предельной нагрузкой и глубиной трещины (до ожидаемой максимальной рабочей нагрузки) приведена в исследованиях [43].

По положениям такой науки как механики разрушения, при достижении длины трещины критического значения  $l_{crc} = l_{crc,ult}$  происходит мгновенный ее рост и возможное разрушение элемент, что может быть обозначено условием  $F_{пр}=0$ . При установлении  $l_{crc,ult}$  в рамках механики разрушения следует использовать критический коэффициент интенсивности напряжений (ККИН)  $K_{IC}$ . Он может быть определен на стадии эксплуатации по градуировочной зависимости методом скалывания ребра, как описано в [32]. По исследованиям Ю.В. Зайцева [21], как было отмечено выше, можно ограничить длину трещины выражением  $l_{crc} = 0,3 \cdot h_0$ . В этом случае несущую способность изгибаемого железобетонного элемента можно записать по аналогии с (2.9):

$$F_{\text{пр},t} = F_{\text{пр},0} \left(1 - \frac{l_{\text{crc},t}}{0,3h_0}\right) \text{ или } F_{\text{пр},t}^{\text{H}} = F_{\text{пр},0}^{\text{H}} \left(1 - \frac{l_{\text{crc},t}}{0,3h_0}\right); F_{\text{пр},t}^{\text{B}} = F_{\text{пр},0}^{\text{B}} \left(1 - \frac{l_{\text{crc},t}}{0,3h_0}\right), \quad (2.10)$$

где  $l_{\text{crc},t}$  - длина трещины по результатам измерений в период эксплуатации  $t$ .

**Пример 2.9.** Используем первый подход для оценки несущей способности изгибаемого железобетонного элемента в период эксплуатации  $t$ . Пусть по результатам испытаний получены значения:  $h_0=0,30$  м;  $l_{\text{crc},t}=0,04$  м,  $F_{\text{пр},0} = 20$  кН. Вычислим  $l_{\text{crc},\text{ult}} = 0,3 \cdot h_0 = 0,3 \cdot 0,36 = 0,12$  м. По выражению (2.10) рассчитаем значение предельной нагрузки в виде:  $F_{\text{пр},t} = 20 \cdot \left(1 - \frac{0,04}{0,3 \cdot 0,30}\right) = 11,11$  кН. Предельную нагрузку можно записать в виде дискретного значения:  $F_{\text{пр},t} = 11,11$  кН.

**Пример 2.10.** Используем второй подход для оценки несущей способности изгибаемого железобетонного элемента в период эксплуатации  $t$ . Пусть по результатам испытаний получены значения:  $h_0=0,36$  м;  $l_{\text{crc},t}=0,05$  м;  $F_{\text{пр},0}^{\text{H}} = 18$  кН;  $F_{\text{пр},0}^{\text{B}} = 24$  кН. Вычислим значение предельной длины трещины  $l_{\text{crc},\text{ult}} = 0,3 \cdot h_0 = 0,3 \cdot 0,36 = 0,12$  м, используя выражение (2.10) рассчитаем значения предельной нагрузки:  $F_{\text{пр},t}^{\text{B}} = 24 \cdot \left(1 - \frac{0,05}{0,3 \cdot 0,36}\right) = 12,89$  кН и  $F_{\text{пр},t}^{\text{H}} = 18 \cdot \left(1 - \frac{0,05}{0,3 \cdot 0,36}\right) = 9,67$  кН. Получим ответ: [9,67; 12,89] кН.

Нормальная трещина может быть описана и шириной  $a_{\text{crc}}$  и длиной  $l_{\text{crc}}$ , которые непосредственно влияют на значение предельной нагрузки на железобетонный элемент. Предлагается рассмотреть способ оценки предельной нагрузки (с учетом совокупного воздействия ширины раскрытия  $a_{\text{crc},t}$  и длины  $l_{\text{crc},t}$  трещины, с гипотезой (в запас несущей способности) об независимости их влияния на снижение предельной нагрузки. Используем вместо выпуклой поверхности – плоскость (рис. 2.10). Аналитически выражение для расчета  $F_{\text{пр},t}$  при детерминированном выражении предельной нагрузки  $F_{\text{пр},0}$  можно записать как:

$$F_{np,t} = F_{np,0} \left( 1 - \frac{l_{crc,t}}{l_{crc,ult}} - \frac{a_{crc,t}}{a_{crc,ult}} \right), \quad (2.11)$$

При интервальной оценке несущей способности на железобетонный элемент в виде  $[F_{np,0}^H; F_{np,0}^B]$ , получим два выражения (рис. 2.10 (б)) для расчета предельной нагрузки:

$$F_{np,t}^H = F_{np,0}^H \left( 1 - \frac{l_{crc,t}}{l_{crc,ult}} - \frac{a_{crc,t}}{a_{crc,ult}} \right); \quad F_{np,t}^B = F_{np,0}^B \left( 1 - \frac{l_{crc,t}}{l_{crc,ult}} - \frac{a_{crc,t}}{a_{crc,ult}} \right), \quad (2.12)$$

по которым предельная нагрузка на изгибаемый железобетонный элемент представляется в виде  $[F_{np,t}^H; F_{np,t}^B]$  в момент эксплуатации  $t$  в соответствии с измеренными значениями  $a_{crc,t}$  и  $l_{crc,t}$  методами обследований и испытаний [54].

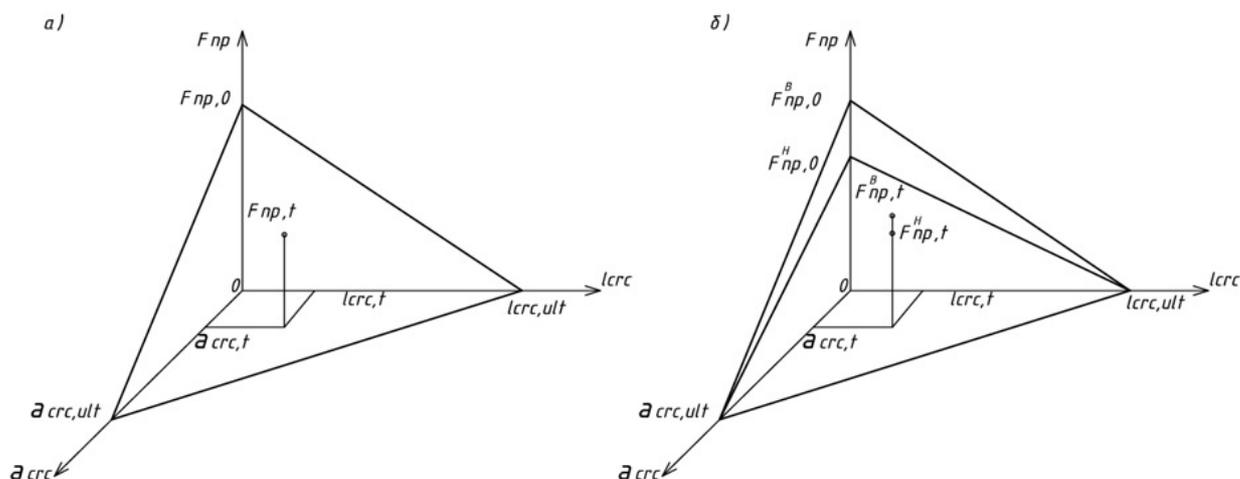


Рисунок 2.10 – Графическая зависимость между предельной нагрузкой  $F_{np}$  и длиной  $l_{crc}$  и шириной  $a_{crc}$  нормальной трещины

**Пример 2.11.** Используем первый подход для оценки несущей способности изгибаемого железобетонного элемента в период эксплуатации  $t$ . Пусть по результатам испытаний получены значения:  $h_0=360$  мм;  $a_{crc,t}=0,15$  мм;  $a_{crc,ult}=0,30$  мм;  $l_{crc,t}=20$  мм;  $F_{np,0}=40$  кН;  $F_{экс}=10$  кН. В соответствии с выражением (2.11),

вычислим значение:  $F_{пр,t} = 40 \left( 1 - \frac{0,15}{0,30} - \frac{20}{120} \right) = 13,32$  кН. Также можно вычислить характеристику резерва несущей способности в виде:  $k = \frac{13,32}{10} = 1,33$ .

**Пример 2.12.** Используем второй подход для оценки несущей способности изгибаемого железобетонного элемента в период эксплуатации  $t$ . Пусть по результатам испытаний получены значения:  $l_{crc,t} = 0,06$  м;  $a_{crc,t} = 0,10$  мм;  $F_{пр,0}^B = 35$  кН;  $h_0 = 0,42$ ;  $a_{crc,ult} = 0,3$  мм  $F_{пр,0}^H = 30$  кН. Рассчитаем предельное значение длины для трещины:  $l_{crc,ult} = 0,3 \cdot h_0 = 0,3 \cdot 0,42 = 0,14$  м, в соответствии с выражением (2.12) вычислим:  $F_{пр,t}^H = 30 \cdot \left( 1 - \frac{0,06}{0,3 \cdot 0,42} - \frac{0,10}{0,3} \right) = 5,70$  кН;  $F_{пр,t}^B = 35 \cdot \left( 1 - \frac{0,06}{0,3 \cdot 0,42} - \frac{0,10}{0,3} \right) = 6,65$  кН. Предельная нагрузка может быть представлена следующим интервалом с границами:  $[5,70; 6,65]$  кН.

При проведении нескольких испытаний или же при нескольких экспертных оценках несущей способности или характеристик нормальных трещин, полученные интервалы можно проанализировать на основе положений теории случайных множеств, как будет отмечено ниже.

## 2.4 Уточненный метод расчета несущей способности железобетонной балки при изгибе

Железобетонные балки являются распространенными несущими элементами строительных конструкций. В процессе их эксплуатации накапливаются повреждения в виде образования микро- и макротрещин в бетоне, развитие их до критических размеров; накопление остаточных деформаций, в т.ч. деформаций ползучести бетона; коррозия арматуры и т.д. Предвидеть весь процесс возникновения и развития событий, направленных на снижение несущей способности на стадии проектирования балки невозможно, тем более, что он связан с видом нагрузок (статические и динамические, распределенные и сосредоточенные, равномерные и неравномерные и т.д.), с видом окружающей

среды, включая температурные воздействия и т.п. Следовательно, невозможно дать количественную оценку качества продукции (например, долговечности и надежности) на определенный срок эксплуатации.

В связи с этим, все существующие методы расчетов железобетонных балок являются попыткой предвидения и учета развития событий на всех этапах эксплуатации балки. Для этого приходится вводить различные коэффициенты, значения которых чаще не обоснованы теоретически. На первом этапе эксплуатации балки с проверкой ее по первому предельному состоянию (по прочности) выявляется ее несущая способность, мерой которой принимается значение предельного изгибающего момента, ограничивающего изгибающий момент в железобетонной балке от действия внешних сил. Т.е. необходимо выполнение условия прочности изгибающего элемента в опасном сечении по условию:  $M \leq M_{np}$ . Хотя по п. 5.4.1 СП 63 и требуется учитывать влияние окружающей среды и других воздействий, но предвидеть эти воздействия и их результаты на стадии проектирования железобетонной балки затруднительно. В связи с этим предлагается учитывать некоторые изменения работы железобетонной балки на первых этапах ее работы с внесением уточнений в расчетах по прочности сжатой зоны бетона балки.

По СП 63.13330.2012 «Бетонные и железобетонные конструкции» и литературным источникам [4] условие прочности железобетонной балки без предварительного напряжения выражается неравенством:

$$M \leq M_{np} = R_b A_b z_b + R_{sc} A_s' (h_0 - a'), \quad (2.13)$$

где  $R_b$  – расчетное сопротивление бетона балки;  $R_{sc}$  – расчетное сопротивление стали арматуры в сжатой зоне бетона балки.

В условии (2.13) использовано допущение (принцип) о том, что напряжение в арматуре и бетоне достигают предельных значений одновременно. С таким допущением можно было бы согласиться, если бы оно шло в запас надежности

балки. Однако с его применением несущая способность в некоторых случаях завышается и тем более на неопределенное значение. В ответственных конструкциях по безопасности, а также в расчетах надежности железобетонных балок принятое допущение требует уточнения. Для этого предлагается исходить из ранее использованной в расчетах железобетонных балок по допускаемым напряжениям гипотезы плоских сечений [4] и соответственно из условия равенства деформаций бетона и арматуры  $\varepsilon_b = \varepsilon_s$  в расчетном сечении балки. Для этого в математической модели (2.13) в условии прочности балки используется наименьшее значение из двух предельных деформаций  $\varepsilon_{b,np}$  в бетоне и  $\varepsilon_{s,np}$  в арматуре. Тогда (2.13) можно записать в виде:  $M \leq M_{np} = \varepsilon_{s,np} E_s A_b z_b + R_{sc} A'_s (h_0 - a')$ , при  $\varepsilon_{s,np} < \varepsilon_{b,np}$ .

Соответственно высоту сжатой зоны бетона  $x$  балки определим из уравнения  $\varepsilon_{s,np} E_s b x = R_s A_s - R_{sc} A'_s$  при соблюдении известного условия [4]:  $x \leq \xi_R h_0$ , где  $R_s A_s$  – усилие в рабочей арматуре балки.

При  $\varepsilon_{b,np} < \varepsilon_{s,np}$  условие (2.13) примет вид:  $M \leq M_{np} = R_b A_b z_b + E_s \varepsilon_{b,np} A'_s (h_0 - a')$ . Высота сжатой зоны бетона балки определяется из условия  $R_b b x = R_s A_s - \varepsilon_{b,np} E_s A'_s$ .

Если для железобетонной балки исходить из начального периода ее работы (при непродолжительном действии эксплуатационной нагрузки), то предельная деформация сжатия по СП при двухлинейной диаграмме деформирования предельная деформация для стали равна  $\varepsilon_{s,\dot{i}\dot{o}} = 0,002$ , а для бетона  $\varepsilon_{b,\dot{i}\dot{o}} = 0,0015$ . По гипотезе плоских сечений в бетоне и арматуре, значение деформации в расчетах балки по (2.13) следует принимать одинаковым и равным в пределе  $\varepsilon_{b,red} = 0,0015$ . Тогда вместо  $R_{sc}$  при модуле упругости стали  $E = 2 \cdot 10^{11}$  МПа, вместо  $R_{sc}$  в (2.13) примем  $E_s \varepsilon_{b,red} = 2 \cdot 10^{11} \cdot 0,0015 = 300$  МПа. Учитывая, что по СП 63.13330.2012 для арматуры класса А240 принято  $R_{sc} = 210$  МПа, тогда по (2.13) имеем занижение несущей способности балки по условию прочности ее сжатой части на начальной

стадии ее работы. По условию безопасности это допустимо, т.к. идет в запас надежности балки. Для арматуры класса А400 имеем  $R_{sc} = 350$  МПа, и тогда по (2.13) получаем завышение значения предельного момента, и соответственно завышение надежности балки, что недопустимо. Для более высокого класса арматуры завышение надежности возрастает. Учитывая, что высокий класс арматуры чаще применяется для ответственных конструкций, то для начальной стадии работы балки, расчет следует проводить по формуле (2.13) при замене  $R_{sc}$  на  $E_s \varepsilon_{b,red}$ , чтобы не вносить повреждений в железобетонную балку уже на ранней стадии ее работы в результате возможного завышения значения  $M_{np}$ , а формулу (2.13) следует представить в виде:

$$M \leq M_{np} = R_b A_b z_b + E_s \varepsilon_{b,red} A_s' (h_0 - a'). \quad (2.14)$$

Для балки прямоугольного поперечного сечения шириной  $b$  имеем:

$$M \leq M_{np} = R_b b x (h_0 - 0,5x) + E_s \varepsilon_{b,red} A_s' (h_0 - a'). \quad (2.15)$$

Высота сжатой зоны бетона балки определяется из условия  $R_b b x = R_s A_s - \varepsilon_{b,red} E_s A_s'$ , при соблюдении известного условия  $x \leq \xi_R h_0$ .

При продолжительном действии нагрузки на железобетонную балку относительная деформация бетона по СП 63.13330.2012 принимается равной  $\varepsilon_{b1,red} = 0,0024$  при относительной влажности воздуха 40-75% и  $\varepsilon_{b1,red} = 0,0034$  при влажности ниже 40%. Для стали значение  $\varepsilon_{s,np} = 0,002$  сохраняется. На этой стадии в (2.13) сохраняется  $R_{sc}$ , но вместо  $R_b$  используется значение  $\varepsilon_{s,np} E_b$ , где  $E_b$  – модуль упругости бетона. По двухлинейной диаграмме деформирования бетона он может быть вычислен как  $E_{b,red} = R_b / \varepsilon_{b1,red}$ . В этом случае условие (2.13) примет вид:

$$M \leq M_{np} = E_{b,red} \varepsilon_{s,np} A_b z_b + R_{sc} A_s' (h_0 - a'). \quad (2.16)$$

Для балки прямоугольного сечения имеем:

$$M \leq M_{np} = E_{b,red} \varepsilon_{s,np} b x (h_0 - 0,5x) + R_{sc} A_s' (h_0 - a'). \quad (2.17)$$

Соответственно высоту  $x$  можно вычислить из условия:  
 $b x E_b \varepsilon_{s,np} = R_s A_s - R_{sc} A_s'$ .

**Пример 2.13.** Определить несущую способность железобетонной балки прямоугольного сечения по значения предельного изгибающего момента при:

Начальная стадия эксплуатации балки и непродолжительного действия нагрузки:

Пусть известно:  $b = 0,2$  м,  $h_0 = 0,4$  м,  $a' = 0,05$  м,  $\varepsilon_{b,red} = 0,0015$ ,  $R_s = 350 \cdot 10^6$  Па,  $A_s = 4 \frac{\pi d^2}{4} = 4 \frac{3,14 \cdot 0,018^2}{4} = 10,17 \cdot 10^{-4}$  м<sup>2</sup>,  $A_s' = 2 \frac{\pi d^2}{4} = 2 \frac{3,14 \cdot 0,014^2}{4} = 3,08 \cdot 10^{-4}$  м<sup>2</sup>,  $R_b = 11,5$  МПа. Балка армирована в нижней зоне 4 стержнями 18 диаметра, в верхней зоне 2 стержнями 14 диаметра. Растянутая арматура класса А400, сжатая арматура класса А400.

Подставляя исходную информацию в формулу расчета балки:

$$x = \frac{R_s A_s - \varepsilon_{b,red} E_s A_s'}{R_b b} = \frac{350 \cdot 10^6 \cdot 10,17 \cdot 10^{-4} - 2 \cdot 10^{11} \cdot 0,0015 \cdot 3,08 \cdot 10^{-4}}{11,5 \cdot 10^6 \cdot 0,2} = 0,115 \text{ м,}$$

$$\text{при } x = 0,115 \leq \xi_R h_0 = \frac{0,8}{1 + \frac{R_s}{E_s \varepsilon_{b2}}} = \frac{0,8}{1 + \frac{350 \cdot 10^6}{2 \cdot 10^{11} \cdot 0,0035}} \cdot 0,5 = 0,267 \text{ м.}$$

Вычислим по (2.17) несущую способность в виде предельного изгибающего момента:

$$\begin{aligned} M_{np} &= R_b b x (h_0 - 0,5x) + E_s \varepsilon_{b,red} A_s' (h_0 - a') = \\ &= 11,5 \cdot 10^6 \cdot 0,5 \cdot 0,115 (0,4 - 0,5 \cdot 0,115) + 2 \cdot 10^{11} \cdot 0,0015 \cdot 3,08 \cdot 10^{-4} (0,4 - 0,05) = \\ &= 90,59 + 32,31 = 122,90 \text{ кН} \cdot \text{м}; \end{aligned}$$

При нормативной методике расчета ( $R_{sc} = 350$  МПа):

$$x = \frac{R_s A_s - R_{sc} A'_s}{R_b b} = \frac{350 \cdot 10^6 \cdot 10,17 \cdot 10^{-4} - 350 \cdot 10^6 \cdot 3,08 \cdot 10^{-4}}{11,5 \cdot 10^6 \cdot 0,2} = 0,108 \text{ м,}$$

$$\begin{aligned} M_{np} &= R_b b x (h_0 - 0,5x) + R_{sc} A'_s (h_0 - a') = \\ &= 11,5 \cdot 10^6 \cdot 0,2 \cdot 0,108 (0,4 - 0,5 \cdot 0,108) + 350 \cdot 10^6 \cdot 3,08 \cdot 10^{-4} (0,4 - 0,05) = \\ &= 85,95 + 37,73 = 123,6 \text{ кН} \cdot \text{м}; \end{aligned}$$

Имеем завышение изгибающего момента по существующей методике расчета на 0,6%. Даже такое незначительное завышение несущей способности на первых стадиях эксплуатации балки в ответственных конструкциях можно считать недопустимым.

Вторая стадия эксплуатации балки (эксплуатационное состояние, текущий надзор):

Пусть  $\varepsilon_{b1,red} = 0,0034$ , тогда  $E_{b,red} = R_b / \varepsilon_{b1,red} = 3,38 \cdot 10^9 \text{ Па}$ .  $R_{sc} = 350 \text{ МПа}$ . Тогда

$$x = \frac{R_s A_s - R_{sc} A'_s}{E_{b,red} \varepsilon_{s,np} b} = 0,184 \text{ м.}$$

$$\begin{aligned} M_{np} &= E_{b,red} \varepsilon_{s,np} b x (h_0 - 0,5x) + R_{sc} A'_s (h_0 - a') = \\ &= 3,38 \cdot 10^9 \cdot 0,002 \cdot 0,2 \cdot 0,184 (0,4 - 0,5 \cdot 0,184) + 350 \cdot 10^6 \cdot 3,08 \cdot 10^{-4} (0,4 - 0,05) = \\ &= 76,62 + 37,69 = 114,3 \text{ кН} \cdot \text{м} \end{aligned}$$

Имеем завышение изгибающего момента по существующей методике расчета на 8%, что недопустимо по безопасности и требованиям Закона РФ №384-ФЗ.

Более объективным показателем механической безопасности железобетонных балок является их надежность [59, 62, 78 и др.]. Этому вопросу будет посвящено дальнейшее исследование проблемы.

Выводы по второй главе:

1. Разработаны способы расчета несущей способности эксплуатируемых изгибаемых железобетонных элементов (например, железобетонных балочных

плит и балок) для оценки безопасности эксплуатации и категории технического состояния в соответствии с ГОСТ 31937-2011;

2. Предложен уточненный подход для расчета несущей способности железобетонной балки при изгибе, основанный на равенстве деформаций сжатого бетона и арматуры в предельном состоянии;

3. Значения предельной нагрузки по всем критериям работоспособности не позволяет комплексно оценить безопасность эксплуатации железобетонной балки как механической системы, поэтому более объективным показателем механической безопасности служит надежность (вероятность безотказной работы) железобетонной балки.

### ГЛАВА 3. РАСЧЕТ НАДЕЖНОСТИ ИЗГИБАЕМЫХ ЖЕЛЕЗОБЕТОННЫХ ЭЛЕМЕНТОВ НА ОСНОВЕ ТЕОРИИ НЕЧЕТКИХ МНОЖЕСТВ И ТЕОРИИ ВОЗМОЖНОСТЕЙ

#### 3.1. Основные сведения из теории возможностей и теории нечетких множеств

Нечеткие множества были предложены американским математиком Лотфи Заде [140] в 1965 г. для возможности математического моделирования неточности, нечеткости и неопределенности лингвистических выражений обычного языка, которые постоянно используются экспертами в качестве оценок или суждений. В качестве развития своих теорий нечетких множеств и нечеткой логики, Л. Заде в 1978 г. впервые ввел теорию возможностей [141], а в дальнейшем ее развили Д. Дюбуа и Г. Прад [110].

Нечеткое множество (fuzzy set)  $F$  на универсальном множестве  $\Omega$  определяется функцией принадлежности  $\mu_F : \Omega \rightarrow [0; 1]$ . Функция принадлежности  $\mu_F(\omega)$  есть степень того, насколько элемент  $\omega$  множества  $\Omega$  принадлежит множеству  $F$ . Универсальное множество  $\Omega$  в теории нечетких множеств называется носителем нечеткого множества и само не является нечетким.

Нечеткое множество  $F$  называется нормальным, если  $\sup_{\omega} \mu_F(\omega) = 1$ . Множеством  $\alpha$ -уровня нечеткого множества  $F$  называется обычное множество, определяемое как:

$$F_{\alpha} = \{\omega \in \Omega, \mu_F(\omega) \geq \alpha\}.$$

Тогда для любого  $\omega \in \Omega$  можно записать условие

$$\mu_F(\omega) = \sup_{0 \leq \alpha \leq 1} \min(\alpha, \mu_{F_{\alpha}}(\omega))$$

Пусть нечеткие множества  $F_1, \dots, F_r$  определены на множествах  $\Omega_1, \dots, \Omega_r$  и характеризуются функциями принадлежности  $\mu_{F_1}(\omega_1), \dots, \mu_{F_r}(\omega_r)$  соответственно. Пусть также  $f$  – отображение из  $\Omega_1 \times \dots \times \Omega_r$  во множестве  $\Omega$ , т.е.  $g: \Omega_1 \times \dots \times \Omega_r \rightarrow 1$ . В этом случае нечеткое множество  $F$  функции  $f$ , т.е. его функции принадлежности  $\mu_F(\omega)$ ,  $\omega \in \Omega$ , определяется на основе принципа обобщения Л. Заде [19] как:

$$\mu_F(\omega) = \begin{cases} \sup_{(\omega_1, \dots, \omega_r) \in f^{-1}(\omega)} \min_{i=1, \dots, r} \mu_{F_i}(\omega_i), & f^{-1}(\omega) \neq \emptyset \\ 0, & f^{-1}(\omega) = \emptyset \end{cases},$$

где  $f^{-1}(\omega)$  – обратная функция.

Из приведенного выражения видно, что для вычисления функции принадлежности  $\mu_F$  требуется решить задачу оптимизации. При этом сложность задачи определяется количеством переменных функции  $f$  и множествами  $\Omega_1, \dots, \Omega_r$ . Следовательно, практическое использование принципа обобщения в его стандартном виде зачастую является довольно сложной вычислительной задачей. Однако если функция  $f(\omega_1, \dots, \omega_r)$  является монотонной и непрерывной по всем переменным, то задача оптимизации упрощается и вычисление  $\mu_F(\omega)$  сводится к вычислению значений функции  $f$  на границах  $\alpha$  – уровневого среза.

Пусть  $\omega_i^-(\alpha)$  – левая граница и  $\omega_i^+(\alpha)$  – правая граница  $\alpha$  – уровневого среза нечеткого множества  $F_i$ , определяемые как обратные функции для  $\mu_{F_i}(\omega_i)$ . Без потери общности будем считать, что функция  $f(\omega_1, \dots, \omega_r)$  возрастает по  $\omega_1, \dots, \omega_j$  и убывает по  $\omega_{j+1}, \dots, \omega_r$ . Тогда левая  $\omega^-(\alpha)$  и правая  $\omega^+(\alpha)$  границы  $\alpha$  – уровневого среза результирующего нечеткого множества  $F$  определяются как:

$$\omega^-(\alpha) = f(\omega_1^-(\alpha), \dots, \omega_j^-(\alpha), \omega_{j+1}^+(\alpha), \dots, \omega_r^+(\alpha)),$$

$$\omega^+(\alpha) = f(\omega_1^+(\alpha), \dots, \omega_j^+(\alpha), \omega_{j+1}^-(\alpha), \dots, \omega_r^-(\alpha)).$$

Таким образом, в случае монотонности функции  $f$  по всем аргументам сложная задача оптимизации сводится к простейшим интервальным вычислениям [1].

Строго говоря, принцип обобщения Л. Заде в рассмотренном виде предполагает, что нет сведений о независимости нечетких множеств.

Рассмотрим интерпретацию нечеткого множества при анализе нечеткой вероятности некоторого события  $A$ , характеризующую неизвестную вероятность  $P(A)$ . В этом случае  $\Omega = [0; 1]$ . Пусть  $\mu_F(p)$  – функция принадлежности нечеткой вероятности  $F$ . Покажем, что нечеткое число  $F$  генерирует нижнюю и верхнюю вероятности события  $A$ . Пусть  $Z(p)$  – вероятность события  $A$  при условии того, что  $P(A)=p$ . Тогда функция  $Z$  запишется как  $Z(p)=p$ . Отсюда нижняя вероятность события  $A$  определяется как нижняя граница математического ожидания функции  $Z$ , которая вычисляется как [137]:

$$\underline{P}(A) = 1 - \int_0^1 \sup\{\mu_F(p) : p \leq y\} dy.$$

Аналогично определяется верхняя вероятность:

$$\overline{P}(A) = \int_0^1 \sup\{\mu_F(p) : p \leq y\} dy.$$

Если функция  $\mu_F(p)$  является унимодальной с вершиной в точке  $p_0 = p$ , то приведенные выражения существенно упрощаются и имеют вид:

$$\begin{cases} \underline{P}(A) = p_0 - \int_0^{p_0} \mu_F(y) dy, \\ \overline{P}(A) = p_0 + \int_{p_0}^1 \mu_F(y) dy. \end{cases}$$

Таким образом, нечеткую вероятность события можно интерпретировать при помощи границ возможного множества вероятностей этого события.

Используя основные идеи нечетких множеств, для моделирования неопределенности были предложены меры или функции возможности [140].

Мера возможности  $\Pi: P_0(\Omega) \rightarrow [0, 1]$  на множестве мощности  $P_0(\Omega)$  универсального множества  $\Omega$  - это такая функция, которая содержит в себе исключительные свойства, такие как:

1)  $\Pi(\emptyset) = 0$  (мера возможности для пустого множества принимается равной нулю);

2)  $\Pi(\Omega) = 1$  (мера возможности для целого множества принимается равной единице);

3. Для отдельного количества подмножеств  $A_i \in P_0(\Omega)$  и любого множества индексов  $J$  выполняется условие:

$$\Pi\left(\bigcup_{i \in J} A_i\right) = \sup_{i \in J} \Pi(A_i).$$

Мера возможности  $\Pi$  может быть представлена функцией распределения возможностей или просто распределением возможностей  $\pi: \Omega \rightarrow [0; 1]$  так, что для любого  $A \in P_0(\Omega)$  выполняется равенство:

$$\Pi(A) = \sup_{\omega \in A} \pi(\omega).$$

Обычно предполагается условие нормализации, в соответствии с которым  $\sup\{\pi(\omega): \omega \in \Omega\} = 1$ . Необходимость этого условия вытекает из требования выполнения свойства 2) меры возможности.

Мера возможности выявлена для событий из пространства событий (при рассмотрении множества как пространства этих событий). В таком контексте для определенного события отмечают, что для такого события присутствует возможность появления. Распределение возможностей  $\pi_1$  является более

информативным по сравнению с распределением  $\pi_2$ , если для всех значений  $\omega \in \Omega$  выполняется неравенство  $\pi_1(\omega) \leq \pi_2(\omega)$ . Термин «возможность» отражает тот факт, что событие может быть мало возможным или абсолютно возможным и т.д.

Мера необходимости  $N: P_0(\Omega) \rightarrow [0; 1]$  на множестве мощности  $P_0(\Omega)$  универсального множества  $\Omega$  - это функция, которая для любого  $A \in P_0(\Omega)$  определяется как  $N(A) = 1 - \Pi(A^c)$ , где  $A^c$  - дополнительные подмножества  $A$  до множества  $\Omega$ , т.е.  $A^c \cup A = \Omega$ .

Если известно распределение возможностей  $\pi(\omega)$ , то необходимость  $A \in P_0(\Omega)$  определяется как:

$$N(A) = 1 - \sup_{\omega \notin A} \Pi(\omega) = 1 - \sup_{\omega \notin A} \pi(\omega).$$

Возможность отказа же можно записать в виде

$$Q(A) = 1 - N(A)$$

Пусть  $P$  - мера вероятности и дано  $P(A), P(B), A, B \in P_0(\Omega)$ . О вероятности  $P(A \cup B)$  можно сказать только то, что она меньше  $\max(P(A), P(B))$  и больше  $\min(P(A) + P(B), 1)$ . Эти границы фактически являются наилучшими для  $P(A \cup B)$  в терминах вероятностей  $P(A)$  и  $P(B)$ . С другой стороны, возможность  $\Pi(A \cup B)$  точно определяется через возможности  $\Pi(A)$  и  $\Pi(B)$  как  $\max[\Pi(A), \Pi(B)]$ . В то же время нельзя в рамках теории возможностей утверждать, что  $\Pi(A \cap B) = \min[\Pi(A), \Pi(B)]$ . Справедливо только неравенство  $\Pi(A \cap B) \leq \min[\Pi(A), \Pi(B)]$ .

Если нет никакой информации о событии  $A$ , то можно записать  $\Pi(A) = \Pi(A^c) = 1$  и  $N(A) = N(A^c) = 0$ , и справедливы соотношения  $\max[\Pi(A), \Pi(A^c)] = 1$  и  $\min[N(A), N(A^c)] = 0$ . Способность моделировать полное отсутствие информации

является важным преимуществом теории возможностей над теорией вероятностей.

По аналогии с теорией вероятностей, выделим нечеткую переменную, обозначенную  $X$ . Отметим, что она принимает свои значения из некоторого множества  $\Omega$ , образующего пространство событий. Нечеткая величина  $X$  характеризуется функцией распределения возможностей  $\pi$  так, что  $\pi(\omega) = \Pi(\gamma: X(\gamma) = \omega)$  для всех  $\omega \in \Omega$ .

Функции распределения возможностей  $\pi(\omega)$  присущи свойства функции принадлежности  $\mu_F(\omega)$  для отдельного нечеткого множества  $F$ , где  $\omega \in \Omega$ . При выполнении равенства  $\pi(\omega) = \mu_F(\omega)$ , нечеткая переменная  $X$  может образовывать некоторое нечеткое множество  $F = \{\omega, \pi(\omega)\}$ ,  $\omega \in \Omega$ . Следует заметить, что определения функции принадлежности и распределения возможностей не синонимичны. Условие  $\pi(\omega) = \mu_F(\omega)$  аналогично равенству теории вероятностей: между условной функцией плотности и функцией правдоподобия. Функция  $\pi(\omega)$  представляет собой сокращенный вид для  $\pi(X = \omega | F)$ , из-за того, что такая функция дает оценку возможности того, что некоторая переменная  $X$  равна  $\omega$  в рамках информации, когда известен лишь размытый тезис, что « $X$  есть  $F$ ». Сама функция принадлежности  $\mu_F(\omega)$  определяет уровень сопоставления определенной информации  $X = \omega$  с некоторым размытым тезисом « $X$  есть  $F$ ». Или, перефразируя, нечеткая переменная и функция распределения возможностей характеризуют событие, а нечеткое множество – нечетко определенное понятие, связанное с событием.

В теории возможностей поведение нечеткой переменной  $X$  описывается различными функциями распределения возможностей (ФРВоз)  $\pi_X(x)$ . ФРВоз отражает возможность принимать отдельные значения  $x$  нечеткой переменной  $X$  в виде  $\pi_X(x) = \sigma(X = x)$  для  $x \in R$ , где  $R$  – множество вещественных чисел, при этом  $\pi_X(x) \in [0; 1]$ .

Приведем некоторые ФРВоз  $\pi_X(x)$  нечеткой переменной  $X$ , которые применяются для оценки надежности несущих элементов строительных конструкций:

1. Экспоненциальное распределение (рис. 3.1):

$$\pi_X(x) = \exp\left\{-\left[\frac{(x - a_x)}{b_x}\right]^2\right\}, \quad (3.1)$$

где  $a_x = 0,5 \cdot (X_{\max} + X_{\min})$  - условное среднее;  $b_x = 0,5(X_{\max} - X_{\min}) / \sqrt{-\ln \alpha}$  - мера «рассеяния», где  $X_{\max}$  и  $X_{\min}$  - соответственно максимальное и минимальное значения во  $\{x\}$  размытого параметра  $X$  на основании испытаний;  $\alpha \in [0;1]$  - установленный уровень среза или уровень риска.

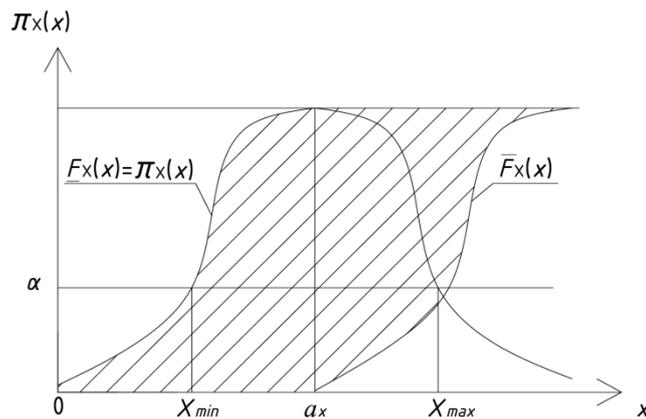


Рисунок 3.1 – Экспоненциальная ФРВоз  $\pi_X(x)$ .  $\sup_{x \in [0, \infty]} \pi_X(x) = 1$ .  $N(x) = 1 - Q(x)$

2. Треугольная ФРВоз  $\pi_X(x)$  (рис. 3.2). На интервале  $x \in [X_{\min}; a_x]$  имеем:

$$\pi_X(x) = \frac{x(1 - \alpha) + a_x \alpha - X_{\min}}{a_x - X_{\min}}. \text{ На интервале } x \in [a_x; X_{\max}]: \pi_X(x) = \frac{X_{\max} - x(1 - \alpha) - a_x \alpha}{X_{\max} - a_x}.$$

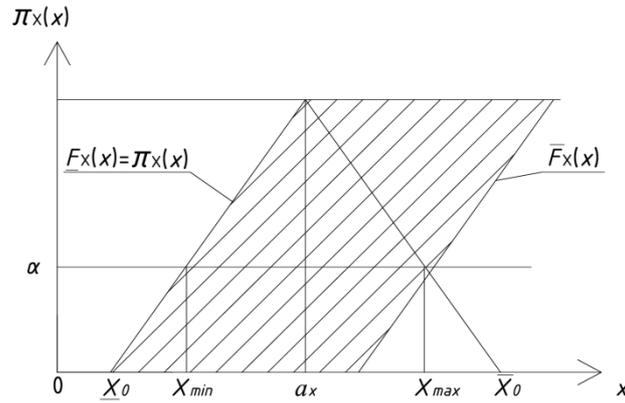


Рисунок 3.2 – Треугольная ФРВоз  $\pi_X(x)$ .

3. Трапецевидная ФРВоз  $\pi_X(x)$  (рис. 3.3). На интервале  $x \in [X_{\min}; a_1]$ :

$$\pi_X(x) = \frac{x(1-\alpha) + a_1\alpha - X_{\min}}{a_1 - X_{\min}}. \text{ На интервале } x \in [a_2; X_{\max}]: \pi_X(x) = \frac{X_{\max} - x(1-\alpha) - a_2\alpha}{X_{\max} - a_2}.$$

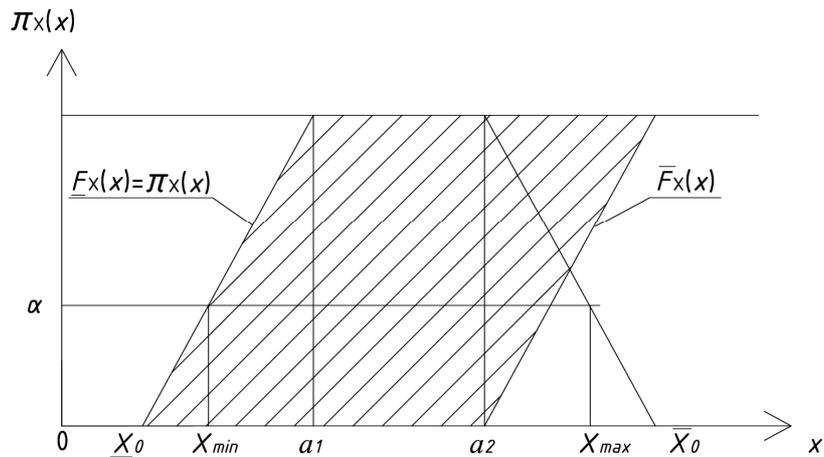


Рисунок 3.3 – Трапецевидная ФРВоз  $\pi_X(x)$ .

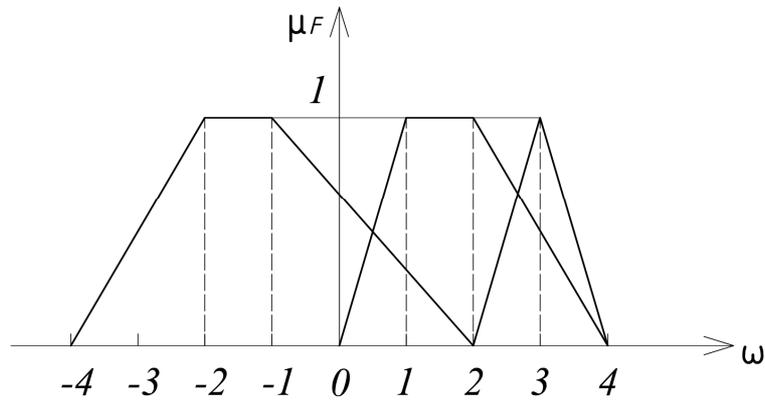
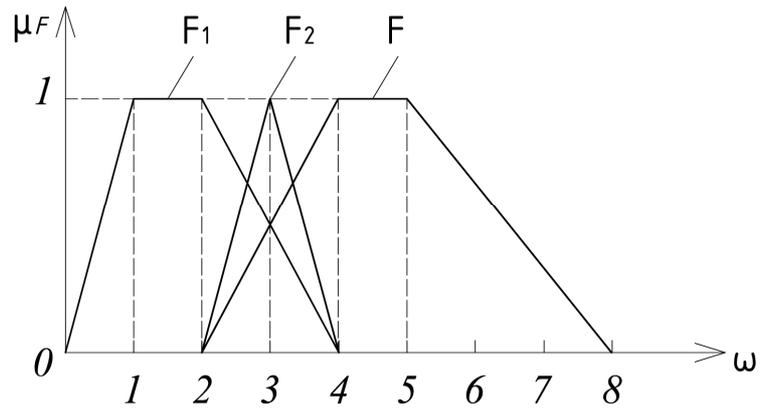


Рисунок 3.4 – Иллюстрация суммы и разности нечетких множеств

### 3.2. Способ определения значения уровня среза (риска)

Проанализировать влияние различных параметров для функции (2.1)  $\alpha_2 > \alpha_1$  можно по рис. 3.4.1.

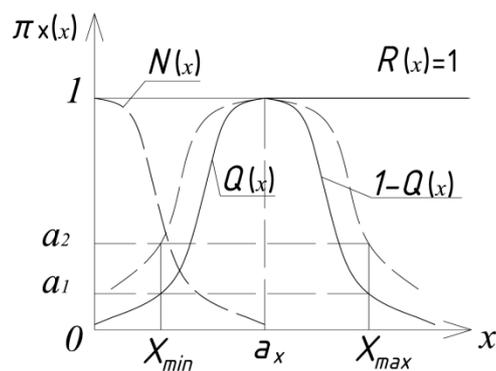


Рисунок 3.4.1 – График функции распределения возможностей  $\pi_X(x)$  при различных уровнях среза (риска)

Рассмотрим подход к расчету надежности строительного элемента, например, по критерию его прочности по математической модели вида:

$$X \leq Y, \quad (3.2)$$

где  $X$  - обобщенная нагрузка на элемент;  $Y$  - обобщенная прочность несущего конструктивного элемента.  $X$  и  $Y$  – случайные величины. В терминах возможного подхода случайные величины именуется нечеткими переменными.

Случайные величин  $X$  и  $Y$  будем описывать распределением по (3.1). Возможностная функция вида  $\pi_Y(y)$  имеет аналогичное (3.1) выражение. Для распределения возможностей  $X$  и  $Y$  приняты параметры:  $a_x, b_x, a_y, b_y$  при одинаковом уровне среза  $\alpha$ , который устанавливают в зависимости от уровня ответственности.

Рассмотрим расчет надежности по модели (3.2) при двух значениях уровня среза  $\alpha_1 < \alpha_2$ . Если  $a_x \leq a_y$ , то принимают значение возможности безотказной работы  $R=1$ , а значение отказа  $Q$  находят как значение функций  $\pi_X(x)$  или  $\pi_Y(y)$  при  $x = x^*$ , где  $x^*$  находят из равенства  $\pi_X(x) = \pi_Y(y)$  при  $x = y$  и условии  $a_x \leq x^* \leq a_y$ . На рис. 3.5 приведено графическое решения условия (3.2) при  $\alpha_1$  и  $\alpha_2 > \alpha_1$ . Решение имеет вид  $[N_1; R=1]$  и  $[N_2; R=1]$ .

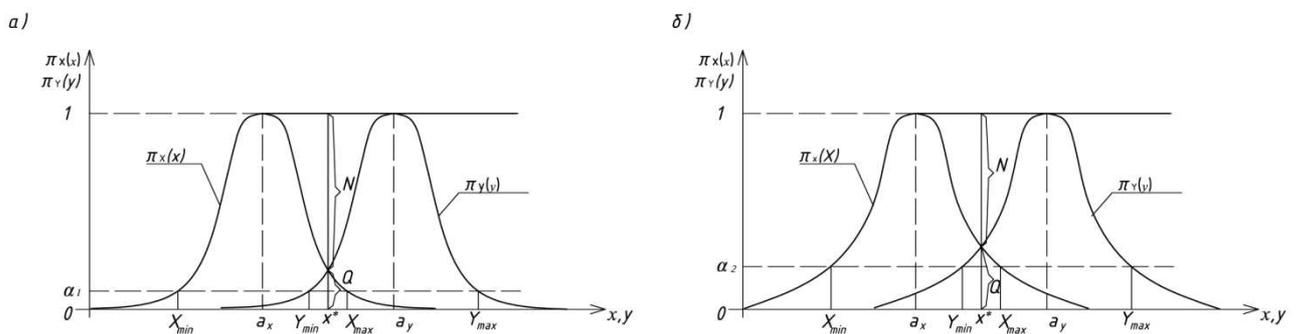


Рисунок 3.5 (а и б) – Графический вид распределения возможностей  $\pi_X(x)$  и  $\pi_Y(y)$ ,

$$\alpha_2 > \alpha_1.$$

Пусть по результатам испытаний имеем (условно, без единиц измерения):  $X_{\max}=18$ ,  $X_{\min}=15$ ,  $Y_{\max}=24$ ,  $Y_{\min}=20$ . Тогда  $a_x=16,5$ ,  $a_y=22$ . Так как  $a_x < a_y$ , то возможность безотказной работы  $R=1$ . Подставляя в (3.2) вместо  $X$  и  $Y$  их функции распределения вида (3.1), вычислим  $Q_X(x^*)$  и  $N_X(x^*)=1-Q_X(x^*)$ . Надежность по [75] будет характеризоваться интервалом  $[N_X(x^*)=1-Q_X(x^*); R_X(x^*)=1]$ . Представим результаты расчета в виде значений, В таблицу 3.1 сведены решения условия (3.2) при определенных выше параметрах и различных значениях параметра  $\alpha$ .

Таблица 3.1. Решения условия (3.2.) при различных  $\alpha$ 

Уровень риска, $\alpha$	$b_y$	$b_x$	$N = 1 - Q$
0,05	0,461	0,579	0,9932
0,1	0,560	0,659	0,9793
0,2	0,629	0,788	0,9334

Очевидно, что субъективное назначения параметра  $\alpha$  может оказать существенное влияние на итоговые результаты интервала надежности. В данном разделе представлены рекомендации по установлению уровня среза  $\alpha$  при оперативном обследовании типовых элементов конструкции сооружения на надежность.

В статье [74] разработаны рекомендации по назначению  $\alpha$  в определенных проблемах при оценке качества. Данный подход [74] по назначению параметра  $\alpha$  не может быть использован при расчетах надежности элементов сооружений.

Полные рекомендации опубликованы автором диссертации в работе [88]. В разделе предлагаются рекомендации по установлению значения уровня среза (риска) при расчете вероятности безотказной работы для типовых элементов конструкций сооружений, например, подкрановых балок, столбчатых фундаментов при использовании возможностного подхода к расчету надежности. Предварительно необходимо выполнить расчет вероятности безотказной работы для индивидуального типового элемента сооружения на основе вероятностных

методов при исчерпывающей статистической информацией о параметрах элемента сооружения в его модели. Для выявления такого рода статистических данных следует выполнить необходимое количество испытаний для последующего вероятностного представления случайных параметров в моделях  $X_i$ . На основе испытаний устанавливают среднеарифметическое (математическое ожидание) значение для каждой случайной величины  $\bar{X}_i$  и стандартные отклонения  $S_{x,i}$  и подбираются соответствующие вероятностные распределения  $F_i(x_i)$ . В работе [65] отмечается, что если случайная величина  $X$  имеет нормальное распределение, то при некоторой доверительной вероятности  $\gamma$  можно покрыть математическое ожидание  $m_x$  интервальной характеристикой вида:

$$\left(\bar{x} - \frac{S_x}{\sqrt{n}} t_\gamma; \bar{x} + \frac{S_x}{\sqrt{n}} t_\gamma\right), \quad (3.3)$$

где  $t_\gamma$  - обратная функция Стьюдента;  $n$  - число испытаний.

Параметр  $t_\gamma$  устанавливается по определенной вероятности  $\gamma$  и количеству испытаний в виде  $k=n-1$  по соответствующим табличным значениям, приведенным в [65].

А интервал, который описывает стандартное отклонение при определенной вероятности  $\gamma$  по [65] можно записать в виде:

$$[S_x(1-q); S_x(1+q)], \quad (3.4)$$

где  $q$  - параметр разброса, значение которого можно определить по соответствующим правилам [65].

Доверительную вероятность  $\gamma$  назначают по требованиям стандартов в прикладных отраслях или по определенному уровню безопасности. В соответствии со Сводом Правил 22.13330.2016, значение  $\gamma$  для расчетных

характеристик грунтов основания принимают: по первой группе предельных состояний:  $\gamma = 0,95$ , по второй группе ПС:  $\gamma = 0,85$ .

Для показателей несущей способности элементов сооружений назначают нижнюю границу интервала, характеризующего математическое ожидание (2.3), а для показателей эксплуатационных воздействий принимают верхнюю границу интервала по (2.3). Стандартное отклонение в соответствии с (3.4) следует назначать как наибольшее значение интервала (в запас надежности).

После чего, на основе методов теории вероятностей [62] вычисляют значение надежности индивидуального типового элемента сооружения. По полученной статистической информации в виде  $\bar{X}$  и  $S_X$  и ограниченным количеством значений нечеткой переменной  $X$  для следующих элементов, генерируются значения случайной величины  $x_i$ . Затем проводится расчет возможности отказа и необходимости безотказной работы для исследуемого типового элемента вероятностным методом, как приведено выше. Интервал надежности  $[N; R]$  в обозначениях, принятых в теории вероятностей, можно записать как  $[\underline{P}; \bar{P}]$ . Значение параметра  $\alpha$  назначают исходя из нескольких вариантов расчета при выполнении приблизительного равенства  $\frac{P + \bar{P}}{2} = P$ , где  $P$  – вероятность безотказной работы по известным методам [62], а принимается  $\bar{P} = 1$ . Последующий расчет необходимости безотказной работы типовых элементов сооружений следует проводить вероятностным методом при установленном значении уровня  $\alpha$ . Рассмотренные рекомендации могут служить обоснованием уровня  $\alpha$  и в значительной степени могут сэкономить время на проведение испытаний для других несущих элементов сооружений при последующем расчете надежности на основе вероятностного подхода.

Проиллюстрируем алгоритм установления значения параметра «альфа» по модели (3.2) для условной совокупности типовых элементов сооружения. Условно примем по результатам  $n=20$  измерений каждой случайной величины ( $X$

и  $Y$ ) статистические параметры для одного типового как: среднее значение:  $\bar{x}=8$ ; СКО:  $S_x=0,5$  для эксплуатационного воздействия; и среднеарифметическое  $\bar{y}=11$ ; и СКО:  $S_y=1$  для несущей способности. Установим вероятность  $\gamma = 0,95$  и по выражениям (3.3), (3.4) вычислим:

$$\left(\bar{x} - \frac{S_x}{\sqrt{n}}t_\gamma; \bar{x} + \frac{S_x}{\sqrt{n}}t_\gamma\right) = (7,91; 8,09); \left(\bar{y} - \frac{S_y}{\sqrt{n}}t_\gamma; \bar{y} + \frac{S_y}{\sqrt{n}}t_\gamma\right) = (10,53; 11,47);$$

$$[S_x(1-q); S_x(1+q)] = [0,13; 0,68]; [S_y(1-q); S_y(1+q)] = [0,63; 1,37].$$

Примем для  $X$  и  $Y$  нормальное распределение. По расчетной формуле из [62], надежность при условно независимых параметрах  $X$  и  $Y$  можно вычислить по формуле:

$$P = 0,5 + \Phi\left(\frac{\bar{y} - \bar{x}}{\sqrt{S_x^2 + S_y^2}}\right), \quad (3.5)$$

где  $\Phi\left(\frac{\bar{y} - \bar{x}}{\sqrt{S_x^2 + S_y^2}}\right)$  - табличный параметр функций Лапласа.

По выражению (3.5) для конкретного случая получим:

$$P = 0,5 + \Phi\left(\frac{10,53 - 8,09}{\sqrt{1,37^2 + 0,68^2}}\right) = 0,5 + 0,95.$$

Сгенерируем псевдослучайные числа  $X$  и  $Y$  в количестве равном  $n=4$ :

$$X_1=7,781; X_2=7,660; X_3=7,763; X_4=7,524; Y_1=8,314; Y_2=10,044; Y_3=9,879; \\ Y_4=10,556. \text{ Тогда } X_{\max}=7,781; X_{\min}=7,524; Y_{\max}=10,556; Y_{\min}=8,314.$$

Далее проводим статистический анализ для возможностного метода. Пусть известны  $X_{\max}$ ,  $X_{\min}$ ,  $Y_{\max}$ ,  $Y_{\min}$ . Найдем  $a_x = 7,653$ ,  $a_y = 9,435$ . Так как для работающего несущего элемента, как правило,  $a_x < a_y$ , то возможность безотказной работы  $R=1$ . С учетом  $P = 0,95$  и  $\bar{P} = 1$  из условия  $\frac{P + \bar{P}}{2} = P$  находим  $\underline{P} = 0,90$ . По результатам нескольких примеров расчета при разных значениях  $\alpha$

выбираем такое значение  $\alpha$ , которое наиболее точно удовлетворяет условию  $\underline{P} = 2 \cdot P - \overline{P}$ . В данном числовом примере этой зависимости соответствует значение параметра  $\alpha = 0,21$ .

Последующий расчет необходимости безотказной работы остальных типовых элементов сооружения будем проводить на основе принятого значения параметра  $\alpha = 0,21$ . Благодаря такому подходу, в возможностном подходе достигается достоверность результата расчета безотказности элементов сооружения при дефиците статистических данных в математических моделях.

### **3.3. Метод расчета надежности изгибаемых железобетонных на основе теории нечетких множеств и теории возможностей**

#### **3.3.1. Расчет надежности изгибаемых железобетонных элементов по критерию прочности бетона**

В данном разделе рассмотрим методику расчета вероятности безотказной работы эксплуатируемых изгибаемых железобетонных элементов по прочности сжатого бетона элемента в условиях дефицита статистических данных.

В работе [16] предложена формула для определения расчетных напряжений в бетоне в зависимости от деформаций сжимаемого бетона. Также отмечается, что предлагаемая зависимость хорошо коррелирует с экспериментальными исследованиями изгибаемых элементов, проводимых профессором Карпенко Н.И. [24]

$$\sigma(\varepsilon) = \frac{E_b \varepsilon}{\left(\varepsilon / \varepsilon_{b,ult}\right)^2 + \left(\left[E_b R_b / \varepsilon_{b,ult}\right] - 2\right)\left(\varepsilon / \varepsilon_{b,ult}\right) + 1}, \quad (3.6)$$

где  $\varepsilon_{b,ult}$  - максимально допустимая деформация сжимаемого бетона продолжительном нагружении;

Исследованиями выявления такого рода зависимости занимались многие исследователи [26, 44 и др.]. Тем не менее, практическое использование зависимости (3.6) требует значительного объема экспериментальных данных для

расчета вероятности безотказной работы балки в стохастическом представлении, трудность в определении предельной относительной деформации  $\varepsilon_{b,ult}$ , и практической сложности определения  $R_b$  для бетона балки на момент эксплуатации.

В данной работе будем придерживаться нормативного (Свод Правил 63.13330.2012 «Бетонные и железобетонные конструкции») функционального выражения напряженно-деформированного состояния сжатого бетона элемента при его изгибе (рис. 3.6).

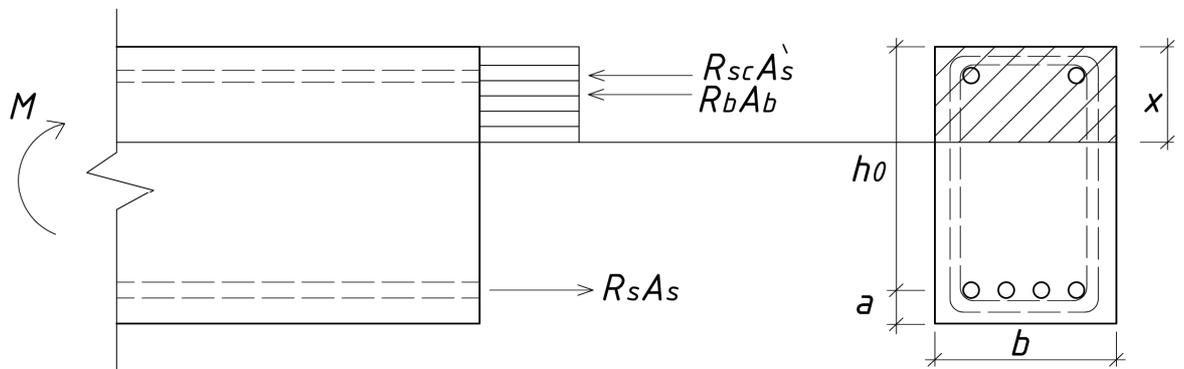


Рисунок 3.6 – Эпюра напряжений в сечении железобетонной балки по СП 63.13330.2012

Расчет вероятности безотказной работы эксплуатируемого изгибаемого железобетонного элемента по прочности сжатого бетона будет проводить по модели вида:

$$\tilde{\sigma}_b \leq \tilde{\sigma}_{b,np}, \quad (3.7)$$

где  $\tilde{\sigma}_b$  - максимальное напряжение в сжатом бетоне изгибаемого железобетонного элемента сооружения от соответствующей расчетной нагрузки на него;  $\tilde{\sigma}_{b,np}$  - предельное значение напряжение в сжатом бетоне, котором в эксплуатируемых изгибаемых элементах может быть выявлено различным методами, например, методом отрыва со скалыванием в соответствии со стандартом ГОСТ 22690-2015.

Сжимающие напряжения в изгибаемом железобетонном элементе в соответствии со Сводом Правил 63 (не учитывая сжатую арматуру) могут быть выражены в следующем виде:

$$\tilde{\sigma}_b = \frac{\tilde{M}}{b\tilde{x}(h_o - 0.5\tilde{x})}. \quad (3.8)$$

Высота  $\tilde{x}$  может быть выявлена путем : на основании вычислений относительных деформаций бетона элемента по высоте сечения с использованием тензорезисторов при некоторой частичной разгрузке элемента [15]. В данном случае высота будет представлять собой случайный параметр. Значение момента от расчетного воздействия  $\tilde{M}$  можно вычислить экспериментально-теоретическим путем [16] и также принять случайным параметров.

По выражению (3.8) модель для расчета вероятности безотказной работы вида (3.7) можно записать как:

$$\frac{\tilde{M}}{b\tilde{x}(h_o - 0.5\tilde{x})\tilde{\sigma}_{b,np}} \leq 1. \quad (3.9)$$

По методике, приведенной в [2], введем обозначения нечетких (размытых) параметров в виде:  $\tilde{\sigma}_{b,np} = T$ ,  $\tilde{M} = X$ ,  $\tilde{\sigma}_{b,np} = T$ ,  $b\tilde{x} = Y$ ,  $(h_o - 0.5\tilde{x}) = Z$ . После преобразований, выражение вида (3.9) запишется как:

$$\frac{X}{Y \cdot Z \cdot T} \leq 1. \quad (3.10)$$

Методику расчета вероятности безотказной работы эксплуатируемого изгибаемого железобетонного элемента по (3.10) построим с применением положений теории возможностей [2, 3, 8 и др.] и на базе принципа Л. Заде по [140]. Нечеткие (размытые) параметры  $X, Y, Z, T$  характеризуем распределением возможностей по (3.1). Реверсивная функция от (3.1) запишется как:  $x = a_x \pm b_x \sqrt{-\ln \alpha}$  или  $x = a_x \pm b_x \beta$ , где,  $\beta = \sqrt{-\ln \alpha}$ .

По принципу Л.Заде из [140], образуем по выражению (3.10) размытую функцию  $J$  от  $X, Y, Z, T$  с аналитическим выражением:

$$J = \frac{X}{Y \cdot Z \cdot T} \leq 1. \quad (3.11)$$

Выражение для  $J$  по (3.11) опишем распределением возможностей (3.1) с параметрами: среднее  $a_j = a_x / a_y a_z a_t$ , и ветвями: лев.:  $j \leq \alpha_j$  и прав.:  $j > \alpha_j$ . Реверсивная функция  $j$  от  $J$  строится через реверсивные функции переменных  $x, y, z, t$  от  $X, Y, Z, T$ , по аналогии с  $x$  от  $\pi_X(x)$  как отмечено выше. Для соответствующих ветвей  $\pi_J(j)$  можно записать выражения:

$$j_{лев} = (a_x - b_x \beta) / (a_z + b_z \beta)(a_t + b_t \beta)(a_y + b_y \beta), \quad (3.12)$$

$$j_{пр} = (a_x + b_x \beta) / (a_z - b_z \beta)(a_t - b_t \beta)(a_y - b_y \beta), \quad (3.13)$$

где введено обозначение  $\beta = \sqrt{-\ln \pi_J(j)} = \sqrt{-\ln \alpha_*}$ . Перед параметром  $b$  в (3.12) вводится «-» в верхней части, а в знаменателе «+», при условии, если от данного параметра значение всей ветви в выражении (3.12) увеличивается, а в выражении (3.13) уменьшается. Введем обозначение  $\alpha_* = \pi_J(j)$ . Если  $j = a_j = a_x / a_y a_z a_t$ , то можно записать  $\beta = 0$ . По выражению (3.13) при выполнении условия  $a_j \leq 1$  значение возможности безотказной работы  $R$  эксплуатируемого изгибаемого железобетонного элемента принимается равным единице. Тогда возможность отказа  $Q$  вычислим по значению  $\beta$ , на основе выражения (3.13) при параметре  $j_{пр} = 1$ , что соответствует случаю минимизации вероятности безотказной работы. На основе расчета выражения (3.13) при значении параметра  $j_{пр} = 1$ , вычисляется минимальное значение параметра  $\beta_{\min}$  в абсолютном представлении, и возможность отказа  $Q$  по следующей формуле:  $Q = \exp(-\beta_{\min}^2)$ . Тогда вероятность безотказной работы изгибаемого железобетонного элемента в заданном сечении по прочности бетона запишется как  $[N; R=1]$  или в классическом виде  $[\underline{P}; \bar{P}]$ .

**Пример 3.1.** По результатам измерений получены значения:  $h_0 = 0,6$  м,  $\tilde{M} = \{92; 88; 90\} \cdot 10^3$  Н·м,  $\tilde{x} = \{0,18; 0,22; 0,20\}$  м,  $\tilde{\sigma}_{np} = \{5,6,7\} \cdot 10^6$  Па,  $b = 0,2$  м. Вычислим значения:  $a_x = 90 \cdot 10^3$  Н·м,  $a_y = 0,2 \cdot 0,2 = 0,4$  м<sup>2</sup>,  $a_z = (0,6 - 0,5 \cdot 0,2) = 0,5$  м,  $a_t = 6 \cdot 10^6$  Па. При заданном параметре  $\alpha = 0,05$  получим:  $b_y = 2,311 \cdot 10^{-3}$  м<sup>2</sup>,  $b_z = 5,778 \cdot 10^{-3}$  м,  $b_t = 0,578 \cdot 10^6$  Па,  $b_x = 1,156 \cdot 10^3$  Н·м. Следующие условие выполняется:  $a_g = 0,750 < 1$ , следовательно, параметру  $R$  присваивается значение 1. Из выражения (3.13) при  $j_{np} = 1$  вычислим  $\beta_{\min} = 1,52$ . Тогда  $Q = \exp[-(1,51)^2] = 0,098$  и  $N = 1 - 0,098 = 0,902$ . Надежность эксплуатируемого изгибаемого железобетонного элемента по сжатию бетону  $[0,902; 1]$ .

По [90] для условной последовательной механической системы в возможностном методе надежность можно определить в виде:

$$\begin{cases} \underline{P} = \max\left(0, \sum_{i=1}^n \underline{P}_i - (n-1)\right) \\ \overline{P} = \min(\overline{P}_i) \end{cases}$$

Возможен другой подход к вычислению вероятности безотказной работы изгибаемых железобетонных элементов по прочности сжатого бетона. Если высота  $\tilde{x}$  определена на основании большого количества измерений по высоте элемента при небольшой вариации (коэф-т вариации  $v < 0,04$ ). Тогда данную высоту можно принять как детерминированную (постоянную) по значению величину. Следовательно, модель вида (3.9) поменяет свой вид на следующий:

$$\frac{X}{k \cdot T} \leq 1, \quad (3.14)$$

где с учетом (3.8) введено обозначение  $k = bx(h_0 - 0,5x)$ .

Сформируем нечеткую функцию  $J$  от нечетких переменных  $X$  и  $T$ :  $J = \frac{X}{k \cdot T}$ .

Примем для нее распределение (3.1). Тогда получим:

$$j_{np} = (a_x + b_x \beta) / k(a_t - b_t \beta). \quad (3.15)$$

Расчет надежности выполняется аналогично описанному выше алгоритму.

**Пример 3.2.** Воспользуемся данными примера 1. Определим параметры функции:  $a_x = 90 \cdot 10^3$  Н·м,  $a_t = 6 \cdot 10^6$  Па. При уровне среза  $\alpha = 0,05$  имеем:  $b_x = 1,156 \cdot 10^3$  Н·м,  $b_t = 0,578 \cdot 10^6$  Па. Т.к. выполняется условие  $a_g = 0,75 < 1$ , то значение  $R$  принимается в виде  $R=1$ . Из (3.15) при значении  $j_{np} = 1$  вычислим минимальное относительное значение параметра  $\beta_{\min} = 2,36$ . Следовательно, можно определить  $Q = \exp[-(2,36)^2] = 0,004$  и  $N = 0,996$ . Надежность эксплуатируемого изгибаемого железобетонного элемента по сжато-бетону  $[0,996; 1]$ .

По результатам решения задачи 3.2 можно отметить, что со снижением количества нечетких параметров в моделях размах интервала надежности элемента снижается. Это утверждение справедливо по представлениям о росте необходимости безотказной работы со снижением кол-ва нечетких параметров в математических моделях, а также может служить обоснованием достоверности вычисления интервала надежности по примеру №3.1.

Возможен подход к вычислению вероятности безотказной работы, при котором удалось выявить статистический массив данных о предельном напряжении в сжатом бетоне  $\tilde{\sigma}_{b,np} = T$ , т.е. удалось установить функцию распределения случайной величины и достаточно точно оценить ее параметры на базе теории вероятностей. Но данные об эксплуатационной нагрузке (моменте) до сих пор являются неполными, а высота  $x$  по предыдущему примеру принята постоянной. Тогда математическую модель вида (3.14) можно записать следующим образом:

$$X \leq U,$$

где введено обозначение  $U = k \cdot T$ .

Для предельного напряжения в сжатом бетоне сжатию зачастую использует гауссовское распределения [94] с классическими параметрами математического ожидания  $m_u$  и стандартной вариации  $S_u$ . Тогда вычисление вероятности безотказной работы будет проводиться по формулам комбинированного подхода к расчету надежности [76]. В этом случае, границы интервала надежности можно рассчитать как:

$$\left\{ \begin{array}{l} \underline{P} = \int_{a_x}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi}S_u} \exp\left[-\frac{(x-m_u)^2}{2S_u^2}\right] \left(1 - \exp\left[-\left(\frac{x-a_x}{b_x}\right)^2\right]\right) dx \\ \bar{P} = \int_0^{a_x} \frac{1}{\sqrt{2\pi}S_u} \exp\left[-\frac{(x-m_u)^2}{2S_u^2}\right] \left(\exp\left[-\left(\frac{x-a_x}{b_x}\right)^2\right]\right) dx + \int_{a_x}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi}S_u} \exp\left[-\frac{(x-m_u)^2}{2S_u^2}\right] dx \end{array} \right. . \quad (3.15^*)$$

**Пример 3.2.1.** Пусть по исходным данным примера №3.2 известны значения:  $a_x = 90 \cdot 10^3$  Н·м,  $b_x = 1,156 \cdot 10^3$  Н·м,  $k = 0,02$  м<sup>3</sup>. Также были получены следующие значения параметров нормального распределения  $m_u = 120 \cdot 10^3$  Н·м,  $S_u = 8 \cdot 10^3$  Н·м. Тогда, по выражениям (3.15\*), вычислим следующие значения вероятностей  $\underline{P} = 0,99989$  и  $\bar{P} = 0,99994$ . Надежность изгибаемого железобетонного элемента составит интервал  $[0,99989; 0,99994]$ .

Можно сделать следующий вывод: с увеличением количества статистических данных (в данном случае про величину  $T$ ), повышается точность интервала, характеризующего вероятность безотказной работы.

### 3.3.2. Расчет надежности изгибаемых железобетонных элементов по критерию прочности рабочей арматуры

Вычисление надежности эксплуатируемых изгибаемых железобетонных элементов по критерию прочности рабочей арматуры базируется на математической модели вида:

$$\tilde{\sigma}_s \leq \tilde{\sigma}_{s,np}, \quad (3.16)$$

где  $\tilde{\sigma}_s$  - напряжение в стержнях арматуры элемента от расчетных воздействий;  $\tilde{\sigma}_{s,np}$  - предельное значение напряжения стали арматуры при растяжении.

Напряжение в стержнях стальной арматуры изгибаемого железобетонного элемента прямоугольного поперечного сечения по нормативному подходу можно выразить в виде:

$$\tilde{\sigma}_s = \frac{\tilde{M}}{A_s(h_o - 0.5\tilde{x})}. \quad (3.17)$$

Высота  $\tilde{x}$  можно установить экспериментально-теоретическим путем для эксплуатируемых изгибаемых элементов на основе определения относительных деформаций бетона по высоте сечения элемента при частичной разгрузке [80]. Значение момента от расчетных воздействий  $\tilde{M}$  устанавливается также экспериментально-теоретическими способами [48]. Оба параметра представляют собой стохастические величины.

При использовании выражения вида (3.17), математическую модель вида (3.16) можно преобразовать к следующему выражению:

$$\frac{\tilde{M}}{A_s(h_o - 0.5\tilde{x})\tilde{\sigma}_{s,np}} \leq 1. \quad (3.18)$$

По правилам теории возможностей [110], введем обозначения нечетких параметров в виде:  $\tilde{M} = X$ ,  $(h_o - 0.5\tilde{x})A_s = Y$ ,  $\tilde{\sigma}_{s,np} = Z$ . Следовательно, выражение (3.18) можно переписать как:

$$\frac{X}{Y \cdot Z} \leq 1. \quad (3.19)$$

Для моделирования размытых параметров:  $X$ ,  $Y$ ,  $Z$  примем распределение по (3.1).

На базе принципа Л.Заде для нечетких множеств [140], создадим на основе выражения (3.19) нечеткую функцию  $J$  с аналитическим выражением:

$$J = \frac{X}{Y \cdot Z} \leq 1. \quad (3.20)$$

Примем для  $J$  ФРВоз вида (3.1)  $\pi_J(j)$  с параметром  $a_j = a_x / a_y a_z$  и с ветвями при:  $j \leq \alpha_j$  и  $j > \alpha_j$ . Для ветвей (левой и правой)  $\pi_J(j)$  можно записать следующие выражения:

$$j_{лев} = (a_x - b_x \beta) / (a_z + b_z \beta)(a_y + b_y \beta), \quad (3.21)$$

$$j_{пр} = (a_x + b_x \beta) / (a_z - b_z \beta)(a_y - b_y \beta), \quad (3.22)$$

где введено обозначение  $\beta = \sqrt{-\ln \pi_J(j)} = \sqrt{-\ln \alpha_*}$ . Аналогичный полный алгоритм вычислений вероятности безотказной работы в виде значений необходимости и возможности безотказной работы приведен в предыдущем разделе. Для сокращения текста, рассмотрим его еще раз на примере.

**Пример 3.3.** По результатам обследования и испытания выявлены значения:  $\tilde{M} = \{92; 88; 90\} \cdot 10^3$  Н·м,  $\tilde{x} = \{0,18; 0,22; 0,20\}$  м,  $\tilde{\sigma}_{s,пр} = \{240; 245; 250\} \cdot 10^6$  Па,  $h_0 = 0,6$  м,  $A_s = 4 \frac{\pi \cdot 0,016^2}{4} = 8 \cdot 10^{-4}$  м<sup>2</sup>. Вычислим характеристики:  $a_x = 90 \cdot 10^3$  Н·м,  $a_y = 4,02 \cdot 10^{-4}$  м<sup>2</sup>,  $a_z = 245 \cdot 10^6$  Па. При заданном параметре  $\alpha = 0,05$  получим следующие значения рассеяния:  $b_x = 1,156 \cdot 10^3$  Н·м,  $b_y = 4,64 \cdot 10^{-6}$  м<sup>2</sup>,  $b_z = 2,89 \cdot 10^6$  Па. При выполнении условия  $a_g = 0,914 < 1$ , получим  $R=1$ . По выражению (3.22) при  $j_{пр} = 1$  определим минимальное значение параметра  $\beta_{\min} = 2,48$ . Тогда  $Q = \exp[-(2,48)^2] = 0,002$  и  $N = 1 - 0,002 = 0,998$ . Надежность эксплуатируемого изгибаемого железобетонного элемента по условию прочности рабочей арматуры составляет интервал:  $[0,998; 1]$ .

### 2.3.3. Расчет надежности изгибаемых железобетонных элементов по критерию прогиба

Условие предельного состояния при расчете вероятности безотказной работы для изгибаемых железобетонных элементов по критерию их прогиба имеет следующий вид:

$$\tilde{f} \leq f_{ult}, \quad (3.23)$$

где  $\tilde{f}$  - прогиб железобетонной балки от эксплуатационной нагрузки – случайная величина (отмечено волнистой линией над символом);  $f_{ult}$  - предельный прогиб, определяемый по СП 20.13330.2016 «Нагрузки и воздействия» или по технологическим требованиям.

Для измерения прогибов железобетонных балок широко используются различные геодезические методы. Так в [34] предлагается усовершенствованный геодезический способ определения прогибов строительных конструкций при проведении экспертизы промышленной безопасности с использованием лазерного дальномера, геодезической рейки и нивелира. В [50] представителями кафедры ПГС Вологодского государственного университета приведен запатентованный метод контроля прогибов металлических балок с возможностью дальнейшего мониторинга прогиба, который может найти применение и в железобетонных балках. Для обеспечения нормальной эксплуатации также необходима информация о предельной нагрузке на балку. Способ определения предельной нагрузки на изгибаемый железобетонный элемент при контроле вертикальных перемещений рассмотрен во второй главе настоящей диссертации.

Важной задачей при контроле обеспеченности нормального технологического процесса в здании является мониторинг технического состояния несущих элементов конструкций, в частности прогиб балки.

В данной работе предлагается способ контроля обеспеченности нормальной эксплуатации железобетонных балок по критерию прогиба.

Предварительно выявляется место наибольшего прогиба в балке от эксплуатационной нагрузки существующими геодезическими методами. Затем на нижней или верхней грани балки (в зависимости от доступности) наклеиваются три латунные полоски, на каждую из которых устанавливается тензорезистор. Далее балка разгружается испытательной нагрузкой в виде сосредоточенной силы  $F_{ucn}$ , значение которой теоретически рассчитывается исходя из недопущения выгиба балки. После выдержки нагрузки до стабилизации омического сопротивления  $R_{0,i}$  тензорезистора записывают значение его сопротивления  $R_{0,i}$  и измеряют прогиб балки. Затем испытательную нагрузку снимают на значение  $F_{ucn} / 3$  и также после стабилизации омического сопротивления  $R_{1,i}$  тензорезистора записывают значение его сопротивления  $R_{1,i}$  и измеряют прогиб балки. Такие операции повторяют до полного снятия испытательной нагрузки  $F_{ucn}$ .

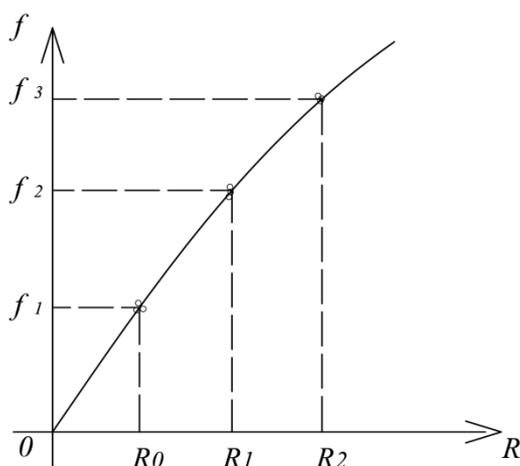


Рисунок 3.7 – Условная экспериментальная зависимость прогиба балки от омического сопротивления

Полученные данные откладывают на графике в осях  $f - R$  (рис. 3.7) и аппроксимируют их методом наименьших квадратов в программе MathCAD. По найденной функции можно дистанционно контролировать прогиб балки. Также по полученной зависимости между прогибом балки и омическим сопротивлением тензорезисторов можно проводить мониторинг обеспеченности нормальной эксплуатации балки.

Будем производить расчет обеспеченности на основе возможностного подхода при неполной информации о случайной величине  $\tilde{f}(R)$ . Размытый (нечеткий) параметр  $\tilde{f}(R) = X$  опишем распределением вида (3.1).

Возможность отказа  $Q$  рассчитывается по формуле:

$$Q = \exp \left[ - \left( \frac{f_{ult} - a_x}{b_x} \right)^2 \right]. \quad (3.24)$$

**Пример 3.4.** При проведении обследования условно выявлены значения параметров в виде:  $\tilde{f} = X = \{25; 29; 26\}$  мм,  $f_{ult} = 30$  мм. Вычисляем параметры  $a_x = 0,5 \cdot (X_{\max} + X_{\min}) = 0,5 \cdot (29 + 25) = 27$  мм,  $b_x = 0,5(29 - 25) / \sqrt{-\ln 0,05} = 1,156$  мм при  $\alpha = 0,05$ . Т.к. выполняется условие  $a_x \leq f_{ult}$ , то  $R=1$ . Возможность отказа

$Q = \exp \left[ - \left( \frac{30 - 27}{1,156} \right)^2 \right] = 0,0012$ . Необходимость безотказной работы  $N = 1 - 0,0012 = 0,9988$ . Надежность характеризуется интервалом  $[0,9988; 1]$ .

За расчетное значение надежности можно необходимость безотказной работы  $N$ , как наиболее осторожное решение. Тогда по установленным датчикам деформаций можно выполнять расчеты надежности в течение некоторых периодов времени (рис. 3.8). Отмечая точки в осях координат, можно аппроксимировать полученную зависимость методом наименьших квадратов, используя программу MathCAD. По найденной зависимости и предельному значению надежности  $P_{ult}$  можно определить остаточный временной ресурс  $T$  до усиления железобетонной балки или снижения технологических нагрузок.

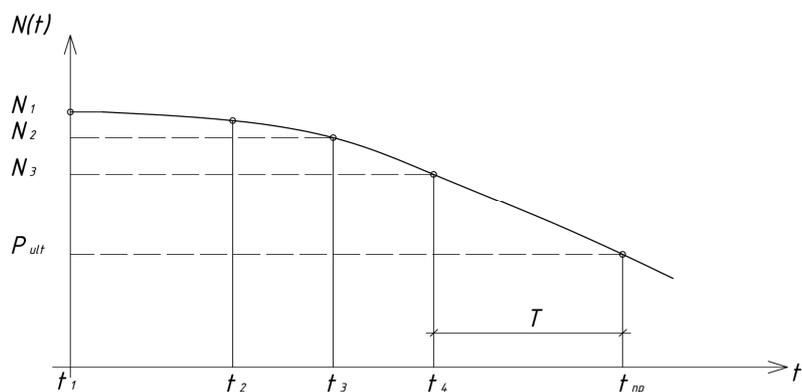


Рисунок 3.8 – Определение остаточного временного ресурса  $T$

### 3.4. Расчет надежности изгибаемых железобетонных элементов по критерию ширины раскрытия нормальных трещин

При использовании железобетонных конструкций, в том числе балок, образуются микротрещины, естественным образом присутствующие в бетоне под воздействием различных факторов, в том числе нагрузки, которые могут перейти в макротрещины. Под воздействием распределенной нагрузки в балках зачастую образуется серия нормальных трещин (особенно в случаях без предварительного напряжения арматуры) [4]. Предельно допустимое раскрытие нормальных трещин  $a_{crc,ult}$  регулируется нормативными документами в зависимости от условий эксплуатации. С возникновением серии нормальных трещин происходят скачки напряжений в стержнях арматуры  $\sigma_s$  в сечениях с трещиной, условно представленные на рис. 3.9.

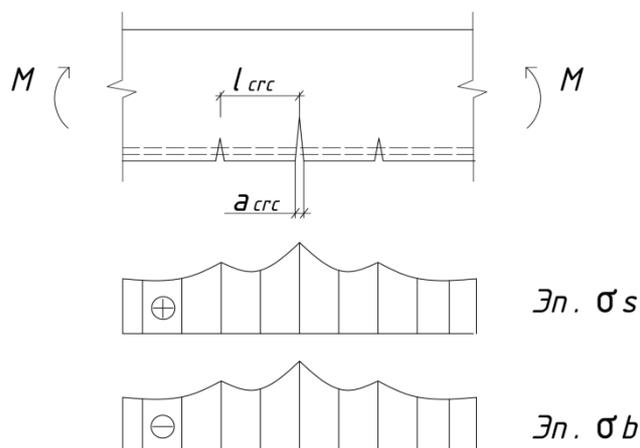


Рисунок 3.9 – Фрагменты балки с трещинами и эпюры  $\sigma_s$  и  $\sigma_b$

Образование и раскрытие трещин приводит к снижению несущей способности и надежности (безопасности эксплуатации) железобетонных балок, даже при  $a_{crc} \leq a_{crc,ult}$ . Индикатором, отражающим возможность аварии изгибаемого железобетонного элемента, может служить ширина трещины шириной от 5 мм [30], а ширина нормальных трещин от 2 мм может служить показателем наступления аварийного состояния конструкции [17]. В соответствии с работой [17], ширина нормальных трещин менее 0,2 мм неопасна. Поэтому в дальнейшем будем рассматривать расчет надежности балки при  $a_{crc} \geq 0,2$  мм. Ширина раскрытия трещин в растянутой зоне бетона балки менее предельного значения  $a_{crc,ult}$ , установленного нормативными документами, не означает, что по прочности рабочей арматуры безопасность конструкции обеспечена, как и условие  $a_{crc} > a_{crc,ult}$  не означает, что балку нельзя эксплуатировать по условию прочности рабочей арматуры в сечении с трещиной даже при ширине раскрытия ее до 1 мм. Так по ВСН 53-86 (р) при ширине трещин в железобетонных балках до 1 мм рекомендуется лишь инъектирование в трещину цементного раствора и покрытие балки цементным раствором, а в последнее время участок с трещиной покрывают эпоксидной смолой. Это же относится к железобетонным лестницам и другим несущим элементам. Нередко требования по проверке расчетом несущей способности и надежности несущих элементов в соответствии с Законом №384-

ФЗ не выполняется, что недопустимо в определенных (ответственных) условиях эксплуатации. При ширине раскрытия трещин до 2 мм, во всех рекомендациях предусматривается усиление, а при  $a_{crc} > 2$  мм замена несущих элементов, и нигде не стоит вопрос об оценке уровня безопасности, мерой которой является надежность. Однако следует учитывать то, что надежность (безопасность эксплуатации) несущего элемента определяется по всем критериям работоспособности балки.

В данном разделе рассмотрен новый подход к расчету вероятности безотказной работы изгибаемого несущего элемента с нормальными трещинами по условию недопущения предельных напряжений в стержнях рабочей арматуры.

Проблеме образования трещин в несущих железобетонных конструкциях, их влиянию на несущую способность и надежность (безопасность эксплуатации) и на другие критерии работоспособности в последнее время обращено особое внимание в связи с новыми нормативными документами в Российской Федерации (ГОСТ 27751-2014) и за рубежом (ISO 2394:2015). В печати появляются работы, посвященные проблеме влияния трещин на работоспособность железобетонных конструкций. Так в работе [61] по значениям математического ожидания и дисперсии случайной величины  $\tilde{a}_{crc}$  и при детерминированных величинах нормированного предельного раскрытия трещины  $a_{crc,ult}$  и напряжения  $\sigma_s$  в растянутой рабочей арматуре определяют вероятностно-статистическими методами допустимую нагрузку  $q$  с использованием метода линеаризации и расчета вероятности отказа  $P = \Phi(-\beta_0)$ , где  $\Phi(-\beta_0)$  – интеграл вероятности Гаусса, где  $\beta_0 = m/s$  -  $m$  – математическое ожидание;  $s$  – среднее квадратическое отклонение. Однако в работе не учитывается расстояние между трещинами  $l_s$ , которое предусмотрено СП 63.13330.2012. При распределенной нагрузке  $q$  образуются серии трещин, как показано на рис. 3.9, что оказывает влияние на надежность балки. Кроме этого, собрать статистическую информацию о  $\tilde{a}_{crc}$  для выявления нормального, как принято в [61], или другого закона распределения в

индивидуальной балке зачастую не представляется возможным. Значения  $\tilde{a}_{crc}$  при некоторых нагрузках отличаются большим разбросом. Не случайно в [38] указывают на измерение  $a_{crc}$  в трех местах наибольшего раскрытия на уровне арматуры железобетонного элемента.

В [25] предлагается новый подход к определению значения  $a_{crc}$  в железобетонных балках с использованием нелинейной деформационной модели на всем интервале нагружения изгибаемого элемента, но без количественной оценки влияния  $a_{crc}$  на надежность балки. Подход к расчету характеристики безопасности  $\beta$  для изгибаемых железобетонных элементов при различных сечениях по длине предлагается в статье [98]. Вопросы расчета надежности железобетонных элементов, усиленных углепластиковыми полосами (CFRP), обсуждаются в работе [122]. Статистический анализ для контроля трещинообразования в железобетонных конструкциях на основе правила трех сигм рассмотрен в работе [111]. Оценка риска образования коррозии в арматуре железобетонных конструкций, а также оценка их надежности и долговечности вероятностно-статистическими методами рассмотрена в работе [108]. Измерение и мониторинг ширины раскрытия трещин с использованием пьезо-керамических датчиков рассмотрено в работе [115]. Исследование долговечности железобетонных балок с трещинами при воздействии агрессивных сред, а также влияние ширины раскрытия трещин на коррозию арматуры рассмотрено в работе [134]. Расчеты надежности железобетонных балок с применением различных вероятностно-статистических методов также рассмотрены в работах зарубежных исследователей [103, 131, 132, 138 и др.].

Приведенные российские и зарубежные литературные источники свидетельствуют о возможности измерения ширины раскрытия трещины в бетоне балки и об ее влиянии на несущую способность и надежность (безопасность эксплуатации) железобетонных элементов. Однако в них отсутствуют методики расчета безотказности изгибаемых железобетонных элементов по прочности

стержней арматуры в сечениях с трещиной несущих элементов, в частности применительно к железобетонным балкам.

В направлении этих исследований в данном разделе предлагается метод расчета вероятности безотказной работы изгибаемых железобетонных элементов по условию прочности стержней арматуры в сечениях с нормальными трещинами в растянутой зоне бетона балки при продолжительном действии нагрузки на стадии эксплуатации при любых конструктивных видах опорных закреплений. Условие предельного состояния можно записать как:

$$\tilde{\sigma}_s \leq \tilde{\sigma}_{np,s}, \quad (3.25)$$

где  $\tilde{\sigma}_s$  – напряжение в стержнях арматуры в сечении изгибаемого элемента с нормальной трещиной;  $\tilde{\sigma}_{np,s}$  – значение предельного напряжения арматурной стали при растяжении.

На данный момент нет распространенных методов определения (измерения) напряжения арматуры непосредственно в железобетонных конструкциях на стадии эксплуатации. По СП 63.13330.2012 напряжение  $\sigma_s$  теоретически определяется по формуле:  $\sigma_s = M / z_s A_s$ , где  $M$  – изгибающий момент в сечении с трещиной;  $z_s$  – расстояние от ц.т. арматуры до равнодействующей силы в сжатом бетоне балки, определяемое как  $z_s = h_0 - x/3$ . Однако определение значения  $z_s$  в заданном сечении балки с трещиной с использованием треугольной эпюры напряжений бетона  $\sigma_b$  в сжатой зоне, как отмечено в [56], не соответствует действительному упругопластическому деформированию  $\sigma_b$  в бетоне в сечении балки с трещиной и не поддается экспериментальному методу выявления его значения. Это вносит неконтролируемые ошибки в значения  $z_s$ . Значение изгибающего момента  $M$ , напрямую связанное с напряжением  $\sigma_s$ , также в ряде случаев трудно поддается определению из-за изменчивости (снижения) жесткости опорных закреплений балки в процессе эксплуатации, изменчивости нагрузки и других причин, влияющих на значение  $M$ .

В СП 63.13330.2012. ширина раскрытия трещин рассчитывается как:  $a_{crc} = \sigma_s \varphi_1 \varphi_2 \varphi_3 \psi_s l_s / E_s$  - такую зависимость можно использовать для контроля напряжений  $\sigma_s$  в арматуре в сечении с трещиной по данным о ширине раскрытия  $a_{crc}$  трещины. При таком подходе, параметр  $\sigma_s$  является стохастической переменной, которая будет выражаться как:

$$\tilde{\sigma}_s = \tilde{a}_{crc} E_s / \varphi_1 \varphi_2 \varphi_3 \tilde{\psi}_s \tilde{l}_s, \quad (3.26)$$

где  $l_s$  – расстояние между нормальными трещинами в растянутой зоне бетона балки;  $E_s$  - модуль упругости стали арматуры.

По СП 63.13330.2012  $\varphi_1 = 1,4$  при продолжительных нагрузках,  $\varphi_2 = 0,5$  и  $\varphi_3 = 0,8$  для принимается в зависимости от вида арматуры;  $\varphi_3 = 1$  для изгибаемых элементов;  $\psi_s = 1$ , если  $a_{crc} \leq a_{crc,ult}$ ;  $\psi_s < 1$  при  $a_{crc} > a_{crc,ult}$ . По СП (при  $a_{crc} > a_{crc,ult}$ )  $\psi_s = 1 - 0,8 \frac{M_{crc}}{M}$ , где  $M_{crc} = R_{bt,ser} W_{pl}$  или  $M_{crc} = \sigma_{bt} W_{pl}$ ;  $R_{bt,ser}$  - расчетное сопротивление бетона при растяжении;  $\sigma_{bt}$  - предельное сопротивление бетона растяжению;  $W_{pl}$  - упругопластический момент сопротивления;  $M$  – изгибающий момент в сечении балки с трещиной. Для прямоугольного поперечного сечения балки с размерами  $b \times h$  по СП  $W_{pl} = 1,3 W_{red}$ ,  $W_{red} = bh^2 / 6$  и определяется без учета арматуры. Предлагается при определении  $\psi_s$ , вместо  $R_{bt,ser}$  принимать  $\sigma_{bt}$ , которое можно определить по известной эмпирической формуле Фере  $\sigma_{bt} = 0,233 \sqrt[3]{R_b}$  или по формуле  $\sigma_{bt} = 5R_b / (445 + R_b)$  по [56], где оперативную прочность бетона балки  $R_b$  при сжатии можно определить неразрушающими методами, например прибором ОНИКС-2.3 [22]. Таким образом, параметр  $\psi_s$  при выполнении условия  $a_{crc} > a_{crc,ult}$  следует рассматривать в качестве стохастической переменной, а в условиях неполных статистических данных о параметре  $R_b$  (и  $\sigma_{bt}$ ) принимать  $\psi_s$  в качестве размытой переменной в соответствии с [140]. В формуле  $\tilde{\psi}_s = 1 - 0,8 \tilde{M}_{crc} / M$  можно принять  $\tilde{M}_{crc} = \tilde{\sigma}_{bt} W_{pl}$

[4]. Изгибающий момент  $M$  предлагается вычислять теоретически и считать детерминированной величиной.

При распределенной нагрузке на балку образуется серия нормальных трещин и расстояние между ними  $l_s$  по [4] «приблизительно равномерное». В расчетах надежности такими понятиями не пользуются, поэтому будем рассматривать  $l_s$  случайной величиной. Тем более что  $l_s$  при некоторых нагрузках может отклоняться от среднего значения в большую или меньшую сторону до 1,5 раз [4].

Условие (3.25) с учетом (3.26) при  $\psi_s = 1$ , если  $a_{crc} \leq a_{crc,ult}$ , можно представить в виде:

$$\tilde{a}_{crc} E_s / \varphi_1 \varphi_2 \varphi_3 \tilde{l}_s \leq \tilde{\sigma}_{np,s}, \quad (3.27)$$

а при  $a_{crc} > a_{crc,ult}$ , в виде:

$$\tilde{a}_{crc} E_s / \varphi_1 \varphi_2 \varphi_3 \tilde{\psi}_s \tilde{l}_s \leq \tilde{\sigma}_{np,s}, \quad (3.28)$$

В работе [25] предлагается внести коррективы в выражение (2.26). Нами поддерживается это уточнение. Оно в [25] достигается изменением модуля упругости  $E_s$  секущим значением  $E_s^{sec}$ , а также заменой  $\sigma_s$  в (3.28) значением  $\sigma_s'$  в сечении трещины. Значение  $E_s^{sec}$  при обследовании определяется по диаграмме напряжений  $\sigma - \varepsilon$  при средних значениях  $\bar{\varepsilon}_s$  и  $\bar{\sigma}'_s$ , полученных при испытаниях не менее двух образцов арматуры балки [7].

Значение  $\sigma_s'$  предлагается определять по (3.26) как  $\sigma_s' = a_{crc} E_s^{sec} / \varphi_1 \varphi_2 \varphi_3 \psi_s l_s$  по результатам измерений  $a_{crc}$  и  $l_s$  при  $a_{crc} > a_{crc,ult}$ , но не более 0,5 мм, т.к. по [17]  $a_{crc} > 0,5$  мм свидетельствует о перегрузке конструкции, а при  $a_{crc} \leq a_{crc,ult}$  по  $\sigma_s' = a_{crc} E_s^{sec} / \varphi_1 \varphi_2 \varphi_3 l_s$ .

Рассмотрим расчет вероятности безотказной работы изгибаемого железобетонного элемента по (3.25) наибольшей ширины раскрытия, в котором

при  $a_{crc} \leq a_{crc,ult}$  по СП  $\psi_s = 1$ . Введем обозначения  $\tilde{a}_{crc} = X$ ,  $\tilde{l}_s = Y$ ,  $\tilde{\sigma}_{np,s} = Z$ ,  $\psi_s = 1$ ,  $\varphi_1 \varphi_2 \varphi_3 / E_s^{sec} = k$ . Представим (3.27) в виде:

$$X / Y \cdot Z \leq k, \quad (3.29)$$

где  $k$  – детерминированная величина;  $X$ ,  $Y$ ,  $Z$  примем нечеткими переменными в силу ограниченности объема статистической информации о них из одной балки.

Рассмотрим вычисление вероятности безотказной работы эксплуатируемого железобетонного элемента по модели (3.29) на базе принципа Л.Заде по [140]. Размытые параметры в модели (3.29) опишем распределением возможностей по выражению (3.1).

В соответствии с принципом обобщения Л. Заде [141] в теории нечетких множеств, формируем из (3.29) нечеткую функцию  $G$  от нечетких аргументов  $X$ ,  $Y$ ,  $Z$  в виде:

$$G = X / Y \cdot Z \leq k. \quad (3.30)$$

Для функции с выражением (3.30) на основе аналогичных расчетов с использованием принципа Лотфи Заде можно записать выражение для левой ветви функции (3.30) в виде:

$$g_{лев} = (a_x - b_x \beta) / (a_y + b_y \beta)(a_z + b_z \beta), \quad (3.31)$$

а для правой ветви как:

$$g_{np} = (a_x + b_x \beta) / (a_y - b_y \beta)(a_z - b_z \beta), \quad (2.32)$$

Алгоритм расчета необходимости безотказной работы будет аналогичен рассмотренным выше другим критериям предельного состояния для изгибаемого железобетонного элемента. Для настоящего случая рассмотрим лишь пример расчета.

**Пример 3.5.** Пусть по результатам обследования изгибаемого железобетонного элемента были получены следующие значения параметров в модели:  $E_s^{\text{sec}} = 2 \cdot 10^{10}$  Па;  $\varphi_1 = 1,4$ ;  $\varphi_2 = 0,5$ ; Ширина раскрытия наиболее опасной трещины характеризуется значениями:  $\tilde{a}_{crc} = \{0,24; 0,26; 0,28\}$  мм; а расстояние между нормальными трещинами:  $\tilde{l}_s = \{0,17; 0,14; 0,11\}$  м;  $a_{crc,ult} = 0,30$  мм;  $\varphi_3 = 1$ ;  $\tilde{\sigma}_{np,s} = \{240; 265; 215\}$  МПа. Вычислим параметры:  $a_x = 0,26$  мм;  $b_x = 0,023$  мм;  $a_y = 0,14$  м;  $b_y = 0,035$  м;  $a_z = 270$  МПа,  $b_z = 28,9$  МПа при заданном значении уровня риска  $\alpha = 0,05$ ;  $k = \varphi_1 \varphi_2 \varphi_3 / E_s^{\text{sec}} = 3,5 \cdot 10^{-11}$  м<sup>2</sup>/Н. Т.к.  $a_g = a_x / a_y a_z a_t = 0,77 \cdot 10^{-11} \leq k = 3,50 \cdot 10^{-11}$  м<sup>2</sup>/Н, то можно принять значение параметра  $R$  равным единице. Из выражения вида (2.32) для соответствующей правой ветви функции  $\pi_G(g)$  при параметра  $g_{np} = k$ , как самое осторожное решение. Найдем  $\beta = \{2,46; 10,48\}$ ,  $\beta_{\min} = 2,46$ . Возможность отказа  $Q = \exp[-(2,46)^2] = 0,0024$  и  $N = 1 - Q = 0,998$ . Эти значения характеризуют надежность изгибаемого железобетонного элемента по прочности стержней арматуре в месте трещины.

Рассмотрим вариант с условием  $a_{crc} > a_{crc,ult}$ , но не более 0,5 мм. Коэффициент Мурашева  $\psi_s$  [4] определяется из  $\psi_s = 1 - 0,8 \frac{M_{crc}}{M}$ . Если рассматривать  $\psi_s$  как детерминированную величину, то при  $\psi_s < 1$  расчет надежности не будет отличаться от приведенного выше алгоритма расчета надежности балки. Рассмотрим более сложный вариант с параметром  $\tilde{\psi}_s$  в виде случайной величины, определяемой по результатам измерений  $M_{crc}$  и  $M$ . Введем обозначения  $\tilde{a}_{crc} = X$ ,  $\tilde{l}_s = Y$ ,  $\tilde{\sigma}_{np,s} = Z$ ,  $\tilde{\psi}_s = T$ ,  $\varphi_1 \varphi_2 \varphi_3 / E_s^{\text{sec}} = k$ . Представим (3.26) в виде:

$$X / Y \cdot Z \cdot T \leq k, \quad (3.33)$$

где  $k$  – детерминированная величина;  $X$ ,  $Y$ ,  $Z$ ,  $T$  примем нечеткими переменными.

Размытые параметры в функциональном выражении вида (3.33) замоделируем по распределению выражения (3.1). По аналогичному выше подходу, можно записать уравнения для соответствующих ветвей введенной функции  $\pi_j(j)$ :

$$j_{лев} = (a_x - b_x\beta)/(a_y + b_y\beta)(a_t + b_t\beta)(a_z + b_z\beta), \quad (3.34)$$

$$j_{пр} = (a_x + b_x\beta)/(a_y - b_y\beta)(a_t - b_t\beta)(a_z - b_z\beta), \quad (3.35)$$

Алгоритм расчета необходимости безотказной работы будет аналогичен рассмотренным выше другим критериям предельного состояния для изгибаемого железобетонного элемента. Для настоящего случая рассмотрим лишь пример расчета.

**Пример 2.6.** По результатам испытания изгибаемого железобетонного элемента получены следующие значения параметров:  $a_{crc,ult} = 0,30$  мм;  $\varphi_1 = 1,4$ ;  $\varphi_2 = 0,5$ ;  $\varphi_3 = 1$ ;  $\tilde{a}_{crc} = \{0,38; 0,36; 0,37\}$  мм;  $\tilde{l}_s = \{0,15; 0,13; 0,14\}$  м;  $E_s^{sec} = 2 \cdot 10^{10}$  Па;  $\tilde{\sigma}_{0,2} = \{240; 215; 265\}$  МПа;  $\tilde{\psi}_s = \{0,69; 0,71; 0,70\}$ . Вычислим значения:  $a_x = 0,37$  мм;  $b_x = 0,012$  мм;  $a_y = 0,14$  м;  $b_y = 0,012$  м;  $a_z = 270$  МПа;  $a_t = 0,70$ ,  $b_t = 0,012$ ,  $b_z = 28,9$  МПа; при  $\alpha = 0,05$ . Рассчитаем параметр  $k = \varphi_1\varphi_2\varphi_3 / E_s = 3,5 \cdot 10^{-11}$  м<sup>2</sup>/Н, т.к.  $a_j = a_x / a_y a_z a_t = 1,57 \cdot 10^{-11} \leq k = 3,5 \cdot 10^{-11}$  м<sup>2</sup>/Н, тогда можно записать  $R=1$ . Вычислим по (3.35) для наиболее осторожного значения:  $\beta_{min} = 2,74$ . Вычислим  $Q = \exp[-(2,74)^2] = 4 \cdot 10^{-4}$  и  $N = 1 - 0,0004 = 0,9996$ . Эти параметры характеризуют вероятность безотказной работы в возможностной постановке решения задачи.

В некоторых случаях, например трещины над промежуточными опорами в неразрезных балках, в балках на упругом основании с опиранием колонн, в консольных балках и плитах, при перегрузке балки и т.д., необходимо производить расчет надежности балки или балочной конструкции по критерию ширины раскрытия трещин исходя из условия прочности стержней арматуры железобетонного элемента. Можно использовать формулу уточненного расчета

ширины раскрытия трещин из [4] для определения предельной ширины раскрытия нормальной трещины  $a_{crc,ult}$  из условия прочности арматуры балки. На основе формулы для расчета ширины раскрытия нормальных трещин в [4], при замене напряжения в рабочей арматуре от эксплуатационной нагрузки  $\sigma$  на предел текучести  $\sigma_{0,2}$ , получим математическую модель предельного состояния с учетом случайных величин:

$$\tilde{a}_{crc} \leq 3\varphi_l \eta \left( 1 + \frac{\Delta y}{h_0 - \tilde{x}} \right) \left( \frac{A_{bo} - b\tilde{x}}{A_{bo} - b\tilde{x} + 2,2 \frac{E_s}{\tilde{E}_b} (A_{sp} + A_s)} \right) \frac{\tilde{\sigma}_{0,2} (A_s + A_{sp})}{u_s \varphi_g \tilde{E}_b}, \quad (3.36)$$

Значения параметров в (3.36) можно найти в [4].

Рассмотрим подход к расчету возможности отказа изгибаемых железобетонных элементов без преднапряжения однорядной арматуры, в таком случае можно принять  $\Delta y = 0$ , по ширине нормальной трещины. Реализацию алгоритма осуществим на базе возможностного подхода [140] и теории нечетких множеств. Преобразуем математическую модель (3.36) к виду:

$$\frac{\tilde{a}_{crc}}{\tilde{\sigma}_{0,2}} \left( \frac{\tilde{E}_b}{A_{sp} + A_s} - \frac{2,2E_s}{b\tilde{x} - A_{bo}} \right) \leq \frac{3\varphi_l \eta}{u_s \varphi_g}. \quad (3.37)$$

Размытые параметры в выражении (3.37) все также описываем по (3.1).

Введем обозначения  $\tilde{a}_{crc} = X$ ,  $\frac{\tilde{E}_b}{A_{sp} + A_s} = Y$ ,  $b\tilde{x} - A_{bo} = Z$ ,  $\tilde{\sigma}_{0,2} = U$ ,  $3\varphi_l \eta \frac{R_s}{u_s \varphi_g} = C$ ,

следовательно, выражение (3.37) приведет к следующему выражению:

$$\frac{X}{U} \left( Y - \frac{2,2E_s}{Z} \right) \leq C. \quad (3.38)$$

Тогда по [140] сформируем нечеткую функцию  $T$  от нечетких аргументов  $X, Y, Z, U$  в виде  $T = \frac{X}{U} \left( Y - \frac{2,2E_s}{Z} \right)$ . Для правой ветви, аналогично вышеизложенному алгоритму, можно записать выражение:

$$t_{np} = \frac{a_x + b_x \beta}{a_u - b_u \beta} \left( (a_y + b_y \beta) - \frac{2,2E_s}{a_z + b_z \beta} \right), \quad (3.39^*)$$

где введено обозначение  $\beta = \sqrt{-\ln \pi_i(t)}$ .

Расчет возможности отказа для данного случая выполняется аналогично приведенным выше алгоритмам.

### 3.3.5. Расчет надежности изгибаемых железобетонных элементов по критерию длины трещины

Подробно результаты раздела опубликованы в работах автора диссертации [77, 83]. В железобетонных балках нередко обнаруживаются трещины в растянутой зоне бетона. Уровень безопасности эксплуатации балок с трещинами в ряде случаев будет зависеть от длины (глубины) трещин. Механика разрушения как наука занимается отдельными вопросами исследования элементов сооружений с трещинами. Анализ надежности эксплуатируемых изгибаемых железобетонных элементов также можно осуществить, используя теорию механики разрушения. Модель при расчете безотказности по длине трещины примет вид:

$$\tilde{l}_{crc} \leq \tilde{l}_{crc,ult}, \quad (3.40)$$

где  $\tilde{l}_{crc}$  - измеряемая длина трещины в бетоне от эксплуатационной нагрузки;  $\tilde{l}_{crc,ult}$  - критическая длина трещины. Волнистая линия над символами указывает на то, что эти параметры являются случайными величинами в понятиях теории вероятностей.

В работе Ю.В. Зайцева [20] отмечено, что при достижении трещины значения  $l_{crc,ult} = 0,3h_0$ , возникает возможность для смены траектории распространения нормальной трещины в продольном направлении с последующей возможностью откола элемента растянутого бетона, располагающегося между нормальными трещинами, что приведет к скачкообразному уменьшению возможной предельной нагрузки на железобетонный элемент. В другом представлении (в работе [12]) критическая глубина нормальной трещины ограничивается значением  $0,5h$ , где  $h$  – высота сечения элемента вдоль трещины. В том и другом подходе предельная длина трещины  $l_{crc,ult}$  является постоянным параметром при низкой вариации показателей параметров для измерения в виде  $h$  и  $h_0$ .

Принимая критическую длину трещины  $l_{crc,ult} = 0,3h_0$ , был рассмотрен подход к стохастической оценке безопасности эксплуатируемого железобетонного элемента [83], а также метод определения остаточной несущей способности балки [77]. Эти методы были ориентированы на их реализацию на практике для оперативной оценки безопасности эксплуатации железобетонных балок.

В работе [58] приводится иная формулировка предельной длины трещины в бетоне  $l_{crc,ult}$  железобетонной балки, полученной на основании результатов испытаний и их анализа, при которой происходит полное выключение из работы растянутого бетона над трещиной и критическую длину трещины предлагается определять по формуле:

$$l_{crc,ult} = h - \frac{\sqrt{(E_s A_s)^2 + 4E_b b h_0 E_s A_s} - E_s A_s}{2E_b b}, \quad (3.41)$$

где  $h$  - высота железобетонной балки;  $b$  - ширина железобетонной балки;  $E_b$  - модуль упругости бетона балки;  $h_0$  - рабочая высота железобетонной балки.

Однако в работе [58] не ставится задача о расчете оперативной надежности изгибаемых железобетонных элементов с учетом предложенной по значению критической длины трещины в растянутой зоне бетона балки. В связи с этим

ниже рассматривается задача на определения вероятности безотказной работы элемента по (3.41).

Выражение (3.40) при стохастической природе отдельных контролируемых параметров в (3.41) можно записать в виде:

$$\tilde{l}_{crc} \leq h - \frac{\sqrt{(E_s A_s)^2 + 4\tilde{E}_b b h_0 E_s A_s} - E_s A_s}{2\tilde{E}_b b}. \quad (3.41)$$

Случайные (измеряемые) параметры в (3.41) обозначены волнистой линией над символами. Остальные параметры в (3.41) принимаются детерминированными в силу малой изменчивости результатов их измерений. Так по [2] коэффициент вариации модуля упругости стали  $E_s$  составляет менее 0,05, что дает основания принять  $E_s$  детерминированной величиной. Геометрические параметры поперечного сечения балки ( $h, b, h_0, A_s$ ) поддаются измерениям с малым коэффициентом вариации, поэтому будем также считать их детерминированными величинами.

Длину трещины  $\tilde{l}_{crc}$  предлагается измерять способом, изложенным в Патенте на изобретение [53], который позволит более точно определить расчетную длину трещины и учесть зону предразрушения и разрыхления бетона в вершине трещины, вид которых представлен на рис. 3.10.

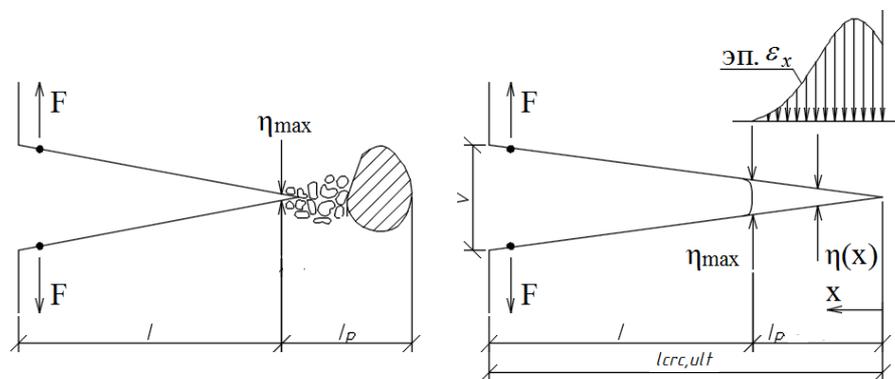


Рисунок 3.10 – Модель трещины в сечении балки с зоной предразрушения

Учитывая малый объем статистической информации о контролируемых параметрах в (3.41) в условиях эксплуатации индивидуальной балки и некорректное использование вероятностно-статистических методов расчета в такой ситуации, в данном разделе алгоритм вычисления вероятности безотказной работы железобетонного изгибаемого элемента по длине трещины основывается на положениях теории возможностей [110]. При обозначении  $\tilde{l}_{crc} = X_1$ ,  $2\tilde{E}_b b = Y$  и для краткости записей примем  $E_s A_s = k$ , которая является детерминированной величиной, условие (3.41) примет вид:

$$X_1 Y - h Y \leq -\sqrt{k^2 + 2Yh_0 k} + k, \text{ или } Z - Y(h - X_1) \leq k, \quad (3.42)$$

где принято  $Z = \sqrt{k^2 + 2Yh_0 k}$ .

Определение вероятности безотказной работы изгибаемого ж/б элемента по (3.40) будем проводить на базе принципа Л.Заде [140], как это было сделано в исследовании выше, а размытые параметры в (3.42) также описывать стохастической моделью (3.1).

Обозначим в (3.42)  $X = h - X_1$  с  $a_x = h - 0,5 \cdot (X_{\max} + X_{\min})$  и  $b_x = 0,5(X_{\max} - X_{\min}) / \sqrt{-\ln \alpha}$ . Введем нечеткую переменную  $T$  от нечетких аргументов  $X, Y, Z$  в (3.42):

$$T = Z - YX \leq k, \quad (3.43)$$

По (3.43) имеем:

$$\max(0, Z - YX) = \begin{cases} 0, & \text{если } Z - YX \leq 0 \\ Z - YX, & \text{если иначе} \end{cases}$$

Методику расчетов надежности в целом и несущих строительных элементов в частности возможным методом с использованием различных математических моделей предельного состояния и с применением принципа обобщения Л.Заде можно найти в исследовании [75].

Необходимо предварительно установить нечеткую функцию  $T$ , как это было сделано в вышеизложенных алгоритмах. Графический вид функции  $\pi_T(t)$  неизвестен, но ее параметры  $a_t$  и  $b_t$  можно определить через параметры  $\pi_X(x)$ ,  $\pi_Y(y)$ ,  $\pi_Z(z)$ . Так  $a_t = a_z - a_y a_x$ ,  $b_t = b_z - b_y b_x$ .

Для определения надежности балки по условию (3.43) найдем наименьшее  $\beta = \sqrt{-\ln \alpha_*} = \sqrt{-\ln \pi_T(t)}$  по условию  $t_{np} = k$  как наиболее осторожное по надежности балки. Определив  $\beta$  из  $t_{np} = (a_z + b_z \beta) - (a_y - b_y \beta)(a_x - b_x \beta) = k$ , найдем значение возможности отказа балки  $Q = e^{-\beta_{\min}^2}$ . При выполнении условия  $a_t \leq k$ , как наиболее реального в условиях эксплуатации балки, тогда  $R=1$ . Необходимость безотказной работы определяют из  $N=1-Q$ . Этими параметрами характеризуется надежность элемента при возможностном подходе к расчету.

**Пример 3.7.** По результатам испытаний железобетонного изгибаемого элемента были получены статистические данные:  $\tilde{l}_{crc} = X_1 = \{0,24; 0,22; 0,23\}$  м;  $h = 0,8$  м;  $E_s = 2 \cdot 10^{11}$  Па;  $A_s = 3,79 \cdot 10^{-3}$  м<sup>2</sup>;  $b = 0,3$  м;  $h_0 = 0,77$  м;  $E_b = \{20,19; 21\}$  МПа, уровень риска  $\alpha = 0,05$  при  $k = E_s A_s = 2 \cdot 10^{11} \cdot 0,00379 = 7,6 \cdot 10^8$ . Определяем параметры нечетких аргументов для нечеткой функции  $T$  по приведенным выше формулам:  $a_x = 0,57$  м;  $b_x = 0,0058$  м;  $a_y = 1,2 \cdot 10^{10}$  Па\*м;  $b_y = 0,346 \cdot 10^{11}$  Па\*м;  $a_z = 3,82 \cdot 10^9$  Н;  $b_z = 9,91 \cdot 10^8$  Н. Вычислим  $a_t = 3,82 \cdot 10^9 - 1 \cdot 10^{10} \cdot 0,57 = -3,02 \cdot 10^8 \leq k = 7,6 \cdot 10^8$  Н, следовательно  $R=1$ . Находим корни уравнения  $(a_z + b_z \beta) - (a_y - b_y \beta)(a_x - b_x \beta) = k$ ,  $\beta = \{-3,624\}$ ,  $\beta_{\min} = -3$ . Найдем значения  $Q = e^{-(-3)^2} = 0,00013$  и  $N = 1 - 0,00013 = 0,99987$ . Они характеризуют надежность железобетонного элемента в возможностной постановке задачи.

Рассмотрим для сравнения расчет возможности отказа изгибаемого железобетонного элемента по длине трещины при  $l_{crc,ult} = 0,3h_0$  [21] по условию (3.40). В этом случае имеем:

$$X_1 \leq 0,3h_0. \quad (3.44)$$

Примем для  $X_1$  функцию распределения вида (3.1). Тогда  $a_{x,1} = 0,5 \cdot (X_{1,\max} + X_{1,\min})$ ;  $b_{x,1} = 0,5(X_{1,\max} - X_{1,\min}) / \sqrt{-\ln \alpha}$ . При  $a_x \leq 0,3h_0$ , имеем  $R=1$ .

Возможность отказа определим как: 
$$Q = \exp\left[-\left(\frac{0,3h_0 - a_{x,1}}{b_{x,1}}\right)^2\right].$$

**Пример 3.8.** По данным примера 1 имеем:  $\tilde{l}_{crc} = X_1 = \{0,24; 0,22; 0,23\}$  м;  $h_0 = 0,77$  м.  $a_{x,1} = 0,5 \cdot (0,24 + 0,22) = 0,23$  м;  $b_{x,1} = 0,5(0,24 - 0,22) / \sqrt{-\ln 0,05} = 5,78 \cdot 10^{-3}$  м;  $\alpha = 0,05$ .

Примем  $l_{crc,ult} = 0,3h_0 = 0,3 \cdot 0,77 = 0,232$ . При  $a_x = 0,230 \leq 0,3h_0 = 0,232$  м, имеем  $R=1$ .

Возможность отказа составит: 
$$Q = \exp\left[-\left(\frac{0,232 - 0,230}{5,78 \cdot 10^{-3}}\right)^2\right] = 0,0008.$$
 Надежность

составит  $[1 - 0,0008 = 0,9992; 1]$ .

**Пример 3.9.** Рассмотрим пример 2 при  $\alpha = 0,1$  и  $b_{x,1} = 0,5(0,24 - 0,22) / \sqrt{-\ln 0,1} = 6,57 \cdot 10^{-3}$  м. При  $a_x = 0,230 \leq 0,3h_0 = 0,232$  м, имеем  $R=1$ .

Возможность отказа составит: 
$$Q = \exp\left[-\left(\frac{0,232 - 0,230}{6,57 \cdot 10^{-3}}\right)^2\right] = 0,0006.$$
 Надежность

характеризуется интервалом  $[0,9994; 1]$ .

Результаты расчетов по моделям (3.43) и (3.44) близки по значению. Следовательно, расчет надежности железобетонной балки по моделям (3.43) и (3.44) подтверждает их применимость и определенную достоверность результатов расчета надежности рассмотренного метода. Расчет надежности по модели (3.43) более трудоемкий, но он позволяет учесть изменчивость большего числа контролируемых параметров, характеризующих надежность железобетонного элемента по критерию длины трещины.

Рассмотрим еще один подход к стохастическому анализу изгибаемого железобетонного элемента на длину трещины. Пусть модель предельного состояния будет задана в классическом виде:

$$F_{\text{экс}} \leq F_{np,crc}, \quad (3.45)$$

где  $F_{\text{экс}}$  - расчетная сосредоточенная нагрузка на изгибаемый железобетонный элемент;  $F_{np,crc}$  - предельно допустимое значение воздействия на элемент из соображения неперевышения глубиной трещины критического значения. Такая нагрузка может быть получена на основании теоретического расчета или путем экспериментальных исследований, как было описано в первой главе исследования.

С целью повышения безопасности, заменим нелинейную функцию  $F_{np,crc}$  -  $l_{crc}$  прямой линией, что отражено на рис. 3.11, с функцией вида:

$$\frac{l_{crc}}{0,3h_0} + \frac{F_{np,crc}}{F_{np,0}} = 1, \quad (3.46)$$

где  $F_{np,crc}$  - значение максимальной нагрузки на железобетонный изгибаемый элемент с нормальной трещиной при ее длине равной  $l_{crc}$ ;  $F_{np,0}$  - несущая способность изгибаемого железобетонного элемента без нормальных трещин;

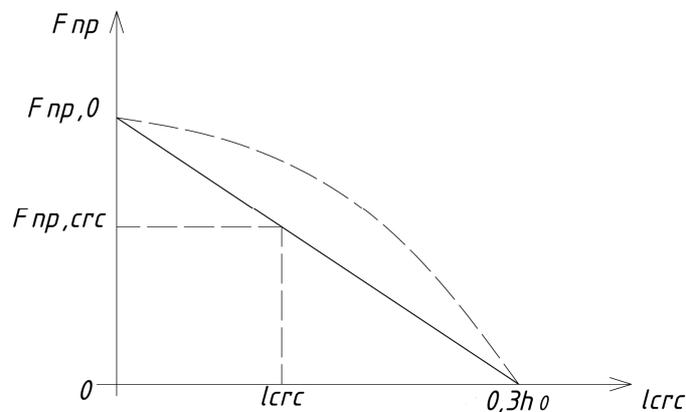


Рисунок 3.11 – Графический вид функциональной зависимости  $F_{np}$  -  $l_{crc}$  при эксплуатации

Из выражение (3.46) можно выразить значение максимально допустимой нагрузки на элемент с трещиной в виде:

$$F_{np,crc} = F_{np,0} \left(1 - \frac{l_{crc}}{0,3h_0}\right), \quad (3.47)$$

а при условии выражения предельной нагрузки в интервальной форме вида:  $[F_{np}^H; F_{np}^B]$ , где  $F_{np}^H$  и  $F_{np}^B$  - нижняя и верхняя граница интервала несущей способности соответственно, то значение  $F_{np,crc}$  также будет представлено в интервальной форме (см. рис. 3.12). При таком подходе будет задано два выражения для установления значений  $F_{np,crc}$ :

$$F_{np,crc}^H = F_{np}^H \left(1 - \frac{l_{crc}}{0,3h_0}\right), \quad F_{np,crc}^B = F_{np}^B \left(1 - \frac{l_{crc}}{0,3h_0}\right), \quad (3.49)$$

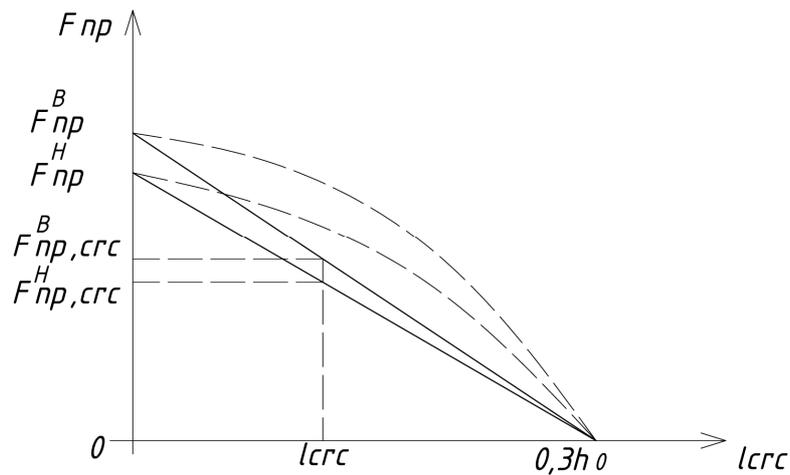


Рисунок 3.12 – Условная графическая зависимость  $F_{np}$  -  $l_{crc}$

Опишем алгоритм стохастической оценки безопасности эксплуатации изгибаемого железобетонного элемента по (3.47). В этом случае выражение (3.47) при стохастической природе отдельных параметров примет вид:

$$\tilde{F}_{экс} \leq F_{np,0} \left(1 - \frac{\tilde{l}_{crc}}{0,3h_0}\right), \quad (3.50)$$

где  $F_{np,0}$  - постоянный параметр при вычислении его значения на основе теоретических расчетов. В другом случае, когда значение  $F_{np,0}$  устанавливают по экспериментальным испытаниям элемента при отсутствии нормальных трещин, то параметр  $\tilde{F}_{np,i}$  станет стохастическим. В полученном интервале максимально допустимой нагрузки вида  $[F_{np}^H; F_{np}^B]$  рекомендуется при для сооружений уровня ответственности КС-2, КС-3 принимать нижнюю границу (наиболее осторожный вариант) в виде  $F_{np}^H = F_{np,0}$ , которые является нижней границей интервала с обеспеченностью 0,9973.

Приведем алгоритм определения надежности, где  $F_{np,0}$  - как дискретное постоянное значение. Параметра  $h_0$  будем считать постоянным по причине низкой степени вариации результатов измерений данного значения. Измеряемую длину трещины  $\tilde{l}_{crc}$  устанавливают различными способами. При исчерпывающих статистических данных для назначения закона распределения случайной величины  $\tilde{l}_{crc}$  и установления параметров в данном законе, то для стохастического моделирования  $\tilde{l}_{crc}$  используются вероятностные подходы. Для случайной величины  $\tilde{l}_{crc}$  на основании испытаний в постоянных условиях единым способом измерения можно принять нормальный закон распределения с функцией плотностью вида:

$$f(l_{crc}) = \frac{1}{\sqrt{2\pi} \cdot S_{l_{crc}}} \cdot e^{-\frac{(l_{crc} - m_{l_{crc}})^2}{2S_{l_{crc}}^2}}, \quad (3.51)$$

где  $m_{l_{crc}}$  - ожидание измеряемого значения  $\tilde{l}_{crc}$ ;  $S_{l_{crc}}^2$  - квадрат среднеквадратического отклонения параметра  $\tilde{l}_{crc}$ .

Если значение  $F_{экс}$  устанавливается теоретическим расчетом, тогда величину  $F_{экс}$  можно считать постоянной. В другом случае, когда  $F_{экс}$  устанавливают по результатам экспериментов, тогда данный параметр принимается стохастическим.

Разберем первый подход к определению вероятности безотказной работы железобетонного элемента, при котором значения нагрузок  $F_{экс}$  и  $F_{np}$  являются постоянными величинами (по рис. 3.11), а измеряемый параметр  $\tilde{l}_{crc}$  - является случайной величиной, с функцией нормальной плотности с аналитическим выражением (3.51). Преобразуем (3.47) к следующему виду:  $\tilde{l}_{crc} \leq 0,3h_0(1 - \frac{F_{экс}}{F_{np}})$

иначе можно записать  $\tilde{l}_{crc} \leq l_{np}$ , где принято  $l_{np} = 0,3h_0(1 - \frac{F_{экс}}{F_{np}})$ . При таком подходе

вероятность (probability of no-failure) вычисляется по следующей формуле:

$$P = \frac{1}{2} + \Phi\left(\frac{\bar{l}_{crc} - l_{np}}{S_{l_{crc}}}\right), \text{ где } \bar{l}_{crc} - \text{среднеарифметическое значение при измерениях } \tilde{l}_{crc},$$

$S_{l_{crc}}$  - стандартное отклонение  $\tilde{l}_{crc}$ .

**Пример 3.10.** По результатам обследования железобетонного элемента установлено:  $\bar{l}_{crc} = 0,1$  м;  $S_{l_{crc}} = 0,05$  м,  $l_{np} = 0,2$  м. По вышеизложенному

алгоритму можно вычислить:  $P = \frac{1}{2} + \Phi\left(\frac{0,1 - 0,2}{0,05}\right) = 0,5 + \Phi(-2) = 0,5 + 0,0540 = 0,4960$ .

Вероятность нереализации события отказа равна 97,72%.

Разберем другой алгоритм, где количество возможных измерений длины трещины ограничено. При таком подходе нельзя описывать длину трещины вероятностным распределением.

Условно по результатам обследования получено:  $l_{crc} = \{0,11; 0,14; 0,17; 0,19\}$  м при  $l_{np} = 0,2$  м. Для выявления возможности отказа следует воспользоваться вероятностным методом анализа надежности. Возможность отказа по [8] в данном случае можно вычислить как:

$$\pi_L(l_{crc}) = e^{-\left(\frac{l_{crc} - a_{l_{crc}}}{b_{l_{crc}}}\right)^2}, \quad (3.52)$$

где  $b_{l_{crc}} = 0,5 \cdot (l_{crc,max} - l_{crc,min}) / \sqrt{-\ln \alpha}$ ,  
 $a_{l_{crc}} = 0,5 \cdot (l_{crc,max} + l_{crc,min}) = 0,5 \cdot (0,11 + 0,19) = 0,15$  м. Пусть установлено следующее значение параметра  $\alpha = 0,1$ , при нем можно вычислить параметр  $b_{l_{crc}} = 0,5 \cdot (0,19 - 0,11) / \sqrt{-\ln 0,1} = 0,0296$  м. Так как выполняется условие вида  $a_{l_{crc}} = 0,1 < l_{crc,ult} = 0,2$  м, то принимается  $R=1$ , а интересующая нас возможность отказа будет определяться из (3.52) в виде  $Q = e^{-\left(\frac{0,2-0,15}{0,0296}\right)^2} = 0,06$ .

Проанализируем еще один подход, согласно которому в выражении (3.50) будет два нечетких (размытых) параметра:  $\tilde{F}_{экс}$  и  $\tilde{l}_{crc}$  при ограниченном количестве возможных измерений. Преобразуем выражение (3.50):

$$\tilde{F}_{экс} + F_{np} \frac{\tilde{l}_{crc}}{0,3h_0} \leq F_{np}, \quad (3.53)$$

Для установления возможности отказа по модели вида (3.53) требуется выполнить сложить двух функций распределения возможностей размытых параметров:  $\tilde{F}_{экс}$  и  $F_{np} \frac{\tilde{l}_{crc}}{0,3h_0}$ . Обозначим размытые (нечеткие) параметры как

$\tilde{F}_{экс} = X$ ,  $F_{np} \frac{\tilde{l}_{crc}}{0,3h_0} = Y$ ,  $Z = X + Y$ . На рис. 3.13 отображена условная операция

суммирования ФРВоз  $\pi_x(x)$  и  $\pi_y(y)$  при одних и тех же параметрах среза  $\alpha$ . В

аналитическом

виде

получим:

$$Z_{\min} = X_{\min} + Y_{\min}; \quad Z_{\max} = X_{\max} + Y_{\max}; \quad a_z = a_x + a_y; \quad b_z = 0,5(Z_{\max} - Z_{\min}) / \sqrt{-\ln \alpha}.$$

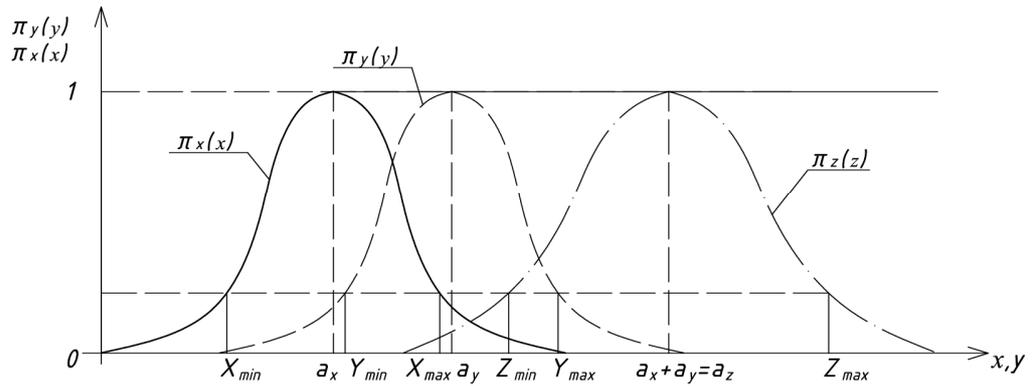


Рисунок 3.13 – Условное суммирование нечетких величин X и Y

Тогда операция расчета вероятности безотказной работы при функции вида

$\pi_z(z) = e^{-\left(\frac{z-a_z}{b_z}\right)^2}$  будет аналогичной, как в последнем алгоритме расчета при одной случайной величине  $\tilde{l}_{crc}$  по (3.1). При случае, когда по выражению (3.53) будет  $(a_x + a_y) \leq F_{np}$ , то следует принять верхнюю границу как  $R=1$ . После чего

высчитывается значение возможности отказа:  $Q = e^{-\left(\frac{z-a_z}{b_z}\right)^2}$ , ..

**Пример 3.11.** При обследовании были получены следующие статистические данные:  $Y=\{0,9; 1,0; 0,8\}$  кН;  $X=\{1,2; 1,3; 1,1\}$  кН;  $F_{np} = 2,3$  кН.  $Z_{max}=1,3+1,0=2,3$  кН;  $Z_{min}=1,1+0,8=1,9$  кН; По заданным значениям вычислим требуемые параметры в ФРВоз в виде:  $a_z=1,2+0,9=2,1$ ;  $b_z = 0,5(2,3-1,9) / \sqrt{-\ln 0,1} = 0,13$ , с учетом  $a=0,1$ . При

выполнении условия  $a_z < F_{np}$  принимаем  $R=1$ .  $Q = e^{-\left(\frac{2,3-2,1}{0,13}\right)^2} = 0,093$  и  $N=1-0,093=0,907$ .

Развивая алгоритмы расчета безотказности можно прийти к случаю, в котором  $\tilde{F}_{экс} = X$  можно считать нечеткой величиной, а измеряемый и определяемый параметр  $F_{np,0} \left(1 - \frac{\tilde{l}_{crc}}{0,3h_0}\right) = Y$  - случайной. Примем, что параметр Y подлежит нормальному распределению с соответствующей принадлежностью

выражения (3.51). На рис. 3.14 отображен графический вид распределений вида  $f_Y(y)$  и  $\pi_X(x)$ .

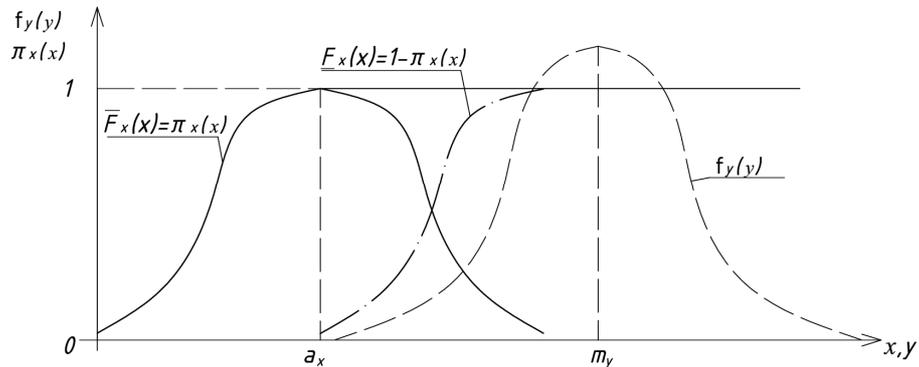


Рисунок 3.14 – Графический вид распределений вида  $f_Y(y)$  и  $\pi_X(x)$  при  $a_x < m_y$

В общем случае по модели  $X \leq Y$ , где нечеткая величина  $X$  может быть описана распределением возможностей (3.1), а  $Y$  описывается нормальным законом распределения можно выразить границы надежности изгибаемых железобетонных элементов по (3.45) в виде формул:

$$\underline{P} = \int_0^{\infty} f_Y(y) \cdot \bar{F}_X(y) dy, \quad \bar{P} = \int_0^{\infty} f_Y(y) \cdot F_X(y) dy, \quad (3.54)$$

где в  $F_X(x)$  промаркировано как  $x=y$ .

Относительно классической модели  $X < Y$  можно записать:

$$\bar{P} = \int_0^{a_x} \frac{1}{\sqrt{2\pi}S_y} \cdot e^{-\left(\frac{(y-m_y)^2}{2S_y^2}\right)} \cdot e^{-\left(\frac{y-a_x}{b_x}\right)^2} dy + \int_{a_x}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi}S_y} \cdot e^{-\left(\frac{(y-m_y)^2}{2S_y^2}\right)} \cdot 1 dy$$

$$\underline{P} = \int_{a_x}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi}S_y} \cdot e^{-\left(\frac{(y-m_y)^2}{2S_y^2}\right)} \cdot e^{-\left(\frac{y-a_x}{b_x}\right)^2} dy$$

**Пример 3.12.** Пусть по результатам обследования выявлены значения параметров  $a_x=1,3$  кН;  $m_y=1,6$  кН;  $b_x=0,15$  кН;  $S_y=0,2$  кН. По приведенным выше формулам можно вычислить границы:

$$\bar{P} = \int_0^{1,3} \frac{1}{\sqrt{2\pi} \cdot 0,2} \cdot e^{-\left(\frac{(y-1,6)^2}{2 \cdot 0,2^2}\right)} \cdot e^{-\left(\frac{(y-1,3)^2}{0,15}\right)} dy + \int_{1,3}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi} \cdot 0,2} \cdot e^{-\left(\frac{(y-1,6)^2}{2 \cdot 0,2^2}\right)} \cdot 1 dy = 0,980$$

$$\underline{P} = \int_{1,3}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi} \cdot 0,2} \cdot e^{-\left(\frac{(y-1,6)^2}{2 \cdot 0,2^2}\right)} \cdot e^{-\left(\frac{(y-1,3)^2}{0,15}\right)} dy = 0,852$$

Ответ: [0,852; 0,980].

Глубину нормальной трещины в изгибаемых эксплуатируемых железобетонных элементах, как условно показано на рис. 3.15, можно определить методами ультразвукового контроля (например, устройствами УКБ-1М, «Бетон-транзистор» и другими) по зависимостям:

$$l_{crс} = \frac{V}{2} \sqrt{t_l^2 - t^2}, \text{ или } l_{crс} = \frac{a}{2} \sqrt{\left(\frac{t_l}{t}\right)^2 - 1}, \quad (3.55)$$

где  $V$  - скорость ультразвука на участке бетона изгибаемого элемента без трещин с функциональной зависимостью вида  $V = \frac{a}{t}$ , где  $a$  - измерительная база (см. рис. 3.15);  $t$  и  $t_l$  - время распространения ультразвука по зонам без неисправности в виде трещины и с нормальной трещинами соответственно;

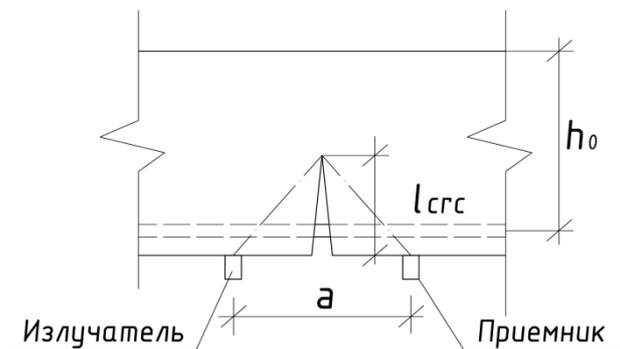


Рисунок 3.15 – Условный вид измерения глубины трещины ультразвуковым контролем

По стандарту ГОСТ 17624-87 установлено минимальное расстояние установки излучателя и приемника (база, см. рис. 3.15), которая не должна быть меньше 0,120 м. При поверхности бетона элемента и установкой ультразвуковых

приемника и излучателя необходимо установить качественный акустический контакт, что может быть реализовано при помощи вязких контактных жидкостей. Для отсутствия влияния стальных стержней на скорость ультразвуковых волн в ЖБК требуется измерять скорость ультразвука в промежутках между арматурой. При необходимости, можно установить расположение арматуры можно детектором стальных включений.

Выражение (3.55), с учетом того, что временная характеристика ультразвуковых волн в бетоне железобетонного элемента -  $\tilde{t}_l$  и  $\tilde{t}$  не может принимать негативные значения, может быть преобразовано как:

$$\frac{a}{0,6h_0} \sqrt{\left(\frac{\tilde{t}_l}{\tilde{t}}\right)^2} - 1 \leq 1, \text{ или } \tilde{t}_l \leq \tilde{t} \sqrt{1 + \frac{0,36 \cdot h_0^2}{a^2}}, \quad (3.56)$$

С точки зрения практической эксплуатации отдельных изгибаемых железобетонных элементов можно отметить факт зачастую неполных статистических данных о параметрах  $\tilde{t}_l$  и  $\tilde{t}$  в (3.56) вследствие, например, ограниченного количества часов на проведение измерений и относительной сложности измерения в стесненных условиях эксплуатируемых элементов, например, при малой ширине балочного элемента и соответствующего влияния измерения  $\tilde{t}_l$  стальных арматурных стержней.

Для решения такого рода научной задачи, при дефиците статистических данных о  $\tilde{t}_l$  и  $\tilde{t}$  оценку вероятности безотказной работы будем базировать на основе положений теории возможностей [75, 110]. Нечеткую (размытую) величину  $\tilde{t}_l$  в обозначениях  $\tilde{t}_l = X$  характеризуем аналитическим распределением вида (3.1), графический вид которого приведен на рис. 3.1.

Обозначим детерминированный (постоянный) параметр  $\sqrt{1 + \frac{0,36 \cdot h_0^2}{a^2}} = C$ , после чего получим следующий нечеткий параметр в обозначении  $Y = C \cdot \tilde{t}$ , для

которого принимаем аналогичное распределение по (3.1). В предложенных выше маркировках, модель предельного состояния может быть записана в виде:

$$X \leq Y. \quad (3.57)$$

Далее необходимо оценить неравенство  $a_x \leq a_y$ , которое может быть трактовано, как среднее значение глубины трещины должно быть не больше средней максимально допустимой глубины трещины. При его выполнении, один из параметров для оценки надежности принимается  $R=1$ . Другой параметр - необходимость безотказной работы  $N$  железобетонного элемента, определяется после установления  $x^*$  (рис. 3.16), по результатам решения условия  $\pi_X(x) = \pi_Y(y)$  с учетом равенства  $x^* = x = y$ :

$$\left| \frac{(x^* - a_x)}{b_x} \right| = \left| \frac{(x^* - a_y)}{b_y} \right|. \quad (3.58)$$

Из найденных корней уравнения  $x^*$  в (3.58) следует принять то, которое находится в интервале  $a_x \leq x^* \leq a_y$  (см. рис. 3.16). Добавив вычисленное значение  $x^*$  в выражение функции (3.1) при ее определенных параметрах, вычисляют  $Q$ .

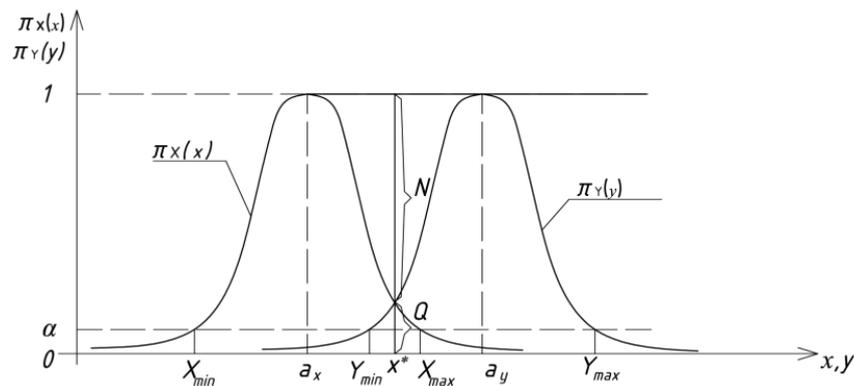


Рисунок 3.16 – Условное графическое представление решения условия (3.57)

**Пример 3.13.** В результате проведения испытаний были получены следующие значения:  $Y_{\max} = 60$ ;  $Y_{\min} = 58$ ;  $X_{\max} = 54$ ;  $X_{\min} = 50$  мкс; Вычислим соответствующие значения параметров функций:  $a_x = 52$  ;  $b_x = 2,31$ ;  $a_y = 59$ ;

$b_y = 1,16$  мкс – при установленном значении уровня среза  $\alpha = 0,05$ . Условие  $a_x = 52 \leq a_y = 58$  мкс выполняется. По выражению (3.58) получим:

$$\left| \frac{(x^* - 52)}{2,31} \right| = \left| \frac{(x^* - 59)}{1,16} \right|, \text{ решением которого является } x^* = 56,7 \text{ мкс. По найденному}$$

значению  $x^*$ , вычислим:  $N = 1 - \exp\left[-\left(\frac{56,7 - 52}{2,31}\right)^2\right] = 1 - 0,016 = 0,984$ . Вероятность

безотказной работы изгибаемого железобетонного элемента по глубине трещины представлена в виде  $[0,984; 1]$ .

Отсутствие дискретной вероятности безотказной работы, как принято в вероятностных подходах оценки безотказности, с одной стороны снижает информативность результата оценки вероятности безотказной работы. Однако в условиях дефицита статистических данных такой подход является более обоснованным, нежели вероятностный подход, который может дать некорректный результат.

По модели (3.56), где нечеткий параметр  $X$  мы описывали выражением (3.1), второй параметр -  $Y = C \cdot \tilde{t}$  - время, представляется возможным вычислить многократно с достаточной точностью, без учета влияния глубины трещины. Это может служить обоснованием для принятия нормального распределения к

параметру  $Y$  с плотностью:  $f_Y(y) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}S_y} \exp\left[-\frac{1}{2}\left(\frac{y - m_y}{S_y}\right)^2\right]$ . На рис. 3.17

проиллюстрирован условный графический вид распределений  $\pi_X(x)$  и  $f_Y(y)$ .

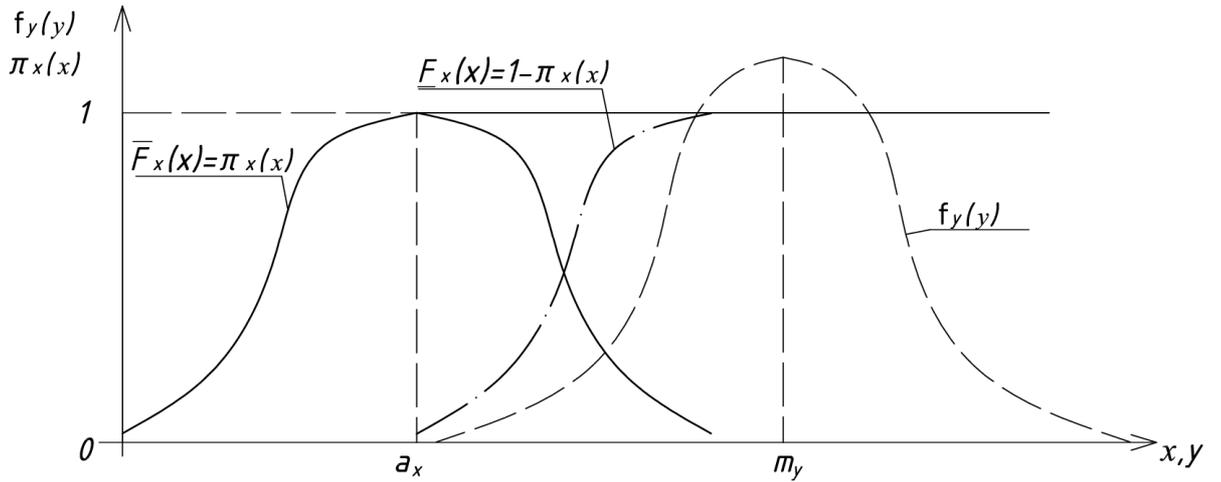


Рисунок 3.17 – Условный графический вид распределения  $f_Y(y)$  и граничные функции нечеткого параметра  $X$  (верхняя  $\bar{F}_X(x)$  и нижняя  $F_X(x)$ ), где  $a_x < m_y$

Можно вычислить границы надежности изгибаемого железобетонного элемента по условию (3.56) в общей постановке как:

$$\underline{P} = \int_0^{\infty} f_Y(y) \cdot \bar{F}_X(y) dy, \quad \bar{P} = \int_0^{\infty} f_Y(y) \cdot F_X(y) dy. \quad (3.59)$$

Или в соответствии с рис. 3.17 в расширенном представлении:

$$\bar{P} = \int_0^{a_x} \frac{1}{\sqrt{2\pi}S_y} \cdot e^{-\left(\frac{(y-m_y)^2}{2S_y^2}\right)} \cdot e^{-\left(\frac{y-a_x}{b_x}\right)^2} dy + \int_{a_x}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi}S_y} \cdot e^{-\left(\frac{(y-m_y)^2}{2S_y^2}\right)} \cdot 1 dy \quad (3.60)$$

$$\underline{P} = 1 - \int_{a_x}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi}S_y} \cdot e^{-\left(\frac{(y-m_y)^2}{2S_y^2}\right)} \cdot e^{-\left(\frac{y-a_x}{b_x}\right)^2} dy \quad (3.61)$$

**Пример 3.14.** Пусть при обследовании железобетонного элемента найдены следующие статистические параметры (в мкс):  $m_y = 59$ ;  $S_y = 1.16$ ;  $X_{\max} = 54$ ;  $X_{\min} = 50$ . Вычислим параметры ФРВоз (в мкс)  $a_x = 52$ ;  $b_x = 2,31$  с учетом установленного уровня риска  $\alpha = 0,05$ . На основании выражений вида (3.61) вычислим:

$$\bar{P} = \int_0^{52} \frac{1}{\sqrt{2\pi} \cdot 1,16} \cdot e^{-\left(\frac{(y-59)^2}{2 \cdot 1,16^2}\right)} \cdot e^{-\left(\frac{(y-52)^2}{2,31}\right)^2} dy + \int_{52}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi} \cdot 1,16} \cdot e^{-\left(\frac{(y-59)^2}{2 \cdot 1,16^2}\right)} \cdot 1 dy = 1,$$

$$\underline{P} = 1 - \int_{52}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi} \cdot 1,16} \cdot e^{-\left(\frac{(y-59)^2}{2 \cdot 1,16^2}\right)} \cdot e^{-\left(\frac{(y-52)^2}{2,31}\right)^2} dy = 0,998$$

Вероятность безотказной работы изгибаемого железобетонного элемента по глубине трещины равна [0,998; 1]. По результатам решения можно отметить, что увеличение количества статистических данных ведет к росту информативности (сужению) интервала вероятности безотказной работы.

Отметим, что на испытания по определению глубины трещины могут оказать влияние отрицательные температуры и влажность. Известно, что при росте влажности железобетонного элемента растет скорость распространения ультразвука в элементе. На основании этих данных, измерение длины трещины в элементе при дефектоскопии вышеуказанным методом должно осуществляется при определенной поправке в выражении (3.56). Размытый (нечеткий) параметр будет  $X$  записан как  $X = \tilde{t}_l C_w$ , где  $C_w = \frac{(1 - 0,00205W^{1,21})^2}{(1 - 0,00205W_l^{1,21})^2}$ ,  $W$  – процент средней влажность материала;  $W_l$  – процент средней влажности материала в зоне трещины в месте установки базы.

### **2.3.6. Расчет надежности изгибаемых железобетонных элементов по критерию ширины раскрытия наклонных трещин**

В данном разделе приведем алгоритм расчета вероятности безотказной работы изгибаемых железобетонных элементов по условию прочности поперечной арматуры при наклонных трещинах. Такого рода повреждения в изгибаемых железобетонных конструкциях образуются по причине недостаточной прочности бетона на растяжение; развития коррозии поперечной арматуры; превышения проектной нагрузки на железобетонный элемент [11],

низкий процент армирование хомутами или вовсе их отсутствие; плохое качество сварки поперечной и продольной арматуры; внепроектное значение поперечного усилия и другим причинам. Условный вид изгибаемого железобетонного элемента с трещинами приведен на рис. 3.18.

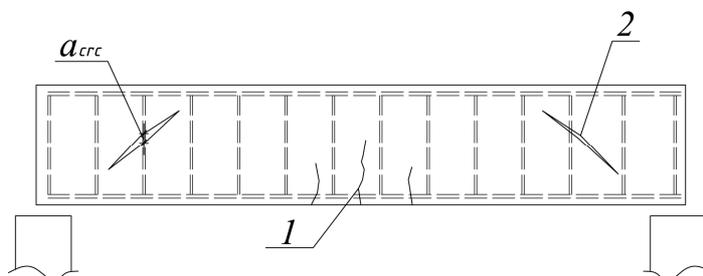


Рисунок 3.18 – Железобетонный элемент с трещинами при изгибе: нормальные (1), наклонные (2) трещины.

В сечениях элемента с наклонными трещинами происходит скачок напряжений в поперечной арматуре  $\sigma_{sw}$ . В работе [13] приводятся информации о предельных размерах раскрытия наклонных трещин, когда в стержнях напряжение вырастает до уровня текучести. Также отмечено, что при небольших расстояниях между трещинами текучесть стальной арматуры может наступить быстрее, чем ширина трещин примет нормативные предельные значения.

Условие прочности хомутов для стохастического расчета можно записать в виде:

$$\tilde{\sigma}_{sw} \leq \tilde{\sigma}_{np,sw}, \quad (3.62)$$

где  $\tilde{\sigma}_{sw}$  – наибольшие напряжения в хомутах в сечении с наклонной трещиной, рассчитанное по измерениям значений элементов функциональной зависимости  $\tilde{\sigma}_{sw}$ , о чем подробно будет сказано далее;  $\tilde{\sigma}_{np,sw}$  – предельно допустимое напряжение в хомутах.

В работе [4] и СНиП 2.03.01-84\* приводится функциональная зависимость между шириной раскрытия наклонных трещин и напряжениями в хомутах:

$$a_{crc} = \varphi_l \frac{0.6\sigma_{sw}d_w\eta}{E_s(d_w/h_0) + 0,15E_b(1 + 2\alpha\mu_w)}, \quad (3.63)$$

где обозначения параметров можно найти в [4].

Испытания по определению относительных деформаций в арматурных стержнях в зоне раскрытия трещины практически осуществить крайне сложно по причине ограниченности ширины  $a_{crc}$ , а также в связи с отсутствием практически используемых способов прямого контроля фактического напряжения в арматурных стержнях  $\sigma_{sw}$ . На этом основании предлагается при расчете вероятности безотказной работы изгибаемых элементов по условию (3.62), для выявления значения напряжения в хомутах  $\sigma_{sw}$  использовать зависимость (3.63). Проводя экспериментальные замеры ширины  $\tilde{a}_{crc}$  наклонной трещины и параметров  $\tilde{E}_s$  и  $\tilde{E}_b$ , учитывая их стохастическую природу и при определении постоянных величин в зависимости (3.63), параметр  $\tilde{\sigma}_{sw}$  будет являться стохастической переменной, и может быть выражен как:

$$\tilde{\sigma}_{sw} = \frac{\tilde{a}_{crc} \cdot [\tilde{E}_s(d_w/h_0 + 0,3\mu_w) + 0,15\tilde{E}_b]}{0.6\varphi_l d_w \eta}. \quad (3.64)$$

Расчетную случайную модель вида (3.62) на основе (3.64) можно привести к виду:

$$\frac{\tilde{a}_{crc} \cdot [\tilde{E}_s(d_w/h_0 + 0,3\mu_w) + 0,15\tilde{E}_b]}{0.6\varphi_l d_w \eta} \leq \tilde{\sigma}_{np,sw}. \quad (3.65)$$

При малом числе измерений случайных параметров в зависимости (3.65), расчет вероятности безотказной работы будет основан на положениях теории нечетких множеств [140]. Обозначим параметры в виде:  $\tilde{a}_{crc} / 0.6\varphi_l d_w \eta = X$ ,  $0,15\tilde{E}_b = Y$ ,  $\tilde{\sigma}_{np,sw} = Z$ ,  $\tilde{E}_s(d_w/h_0 + 0,3\mu_w) = T$ . Стохастическое неравенство (3.65) примет вид:

$$\frac{X(T+Y)}{Z} \leq 1. \quad (3.66)$$

Нечеткие (размытые) величины в неравенстве (3.66) характеризуем ФРВоз с аналитическим видом (3.1).

Рассмотрим подход к анализу возможности отказа по модели (3.66) в случае, когда  $\tilde{E}_s$  обладает небольшой вариацией и по [99] может быть принят постоянным значением  $E_s = 2 \cdot 10^{11}$  Па. Тогда выражение в числителе  $(T + Y)$  является нечеткой (размытой) переменной с обозначением  $Y_T$ . Размытая переменная  $Y_T$  имеет аналогичную  $X$  ФРВоз вида (3.1) со следующими характеристиками:  $a_{y_T} = T + a_t$ ,  $b_{y_T} = 0,5(Y_{\max} - Y_{\min}) / \sqrt{-\ln \alpha}$ , а реверсивная функция имеет вид  $y_T = a_{y_T} \pm b_{y_T} \sqrt{-\ln \alpha}$ . Тогда условие (3.66) может быть представлено как:

$$\frac{XY_T}{Z} \leq 1. \quad (3.67)$$

Расчет возможности отказа для изгибаемых железобетонных элементов по условию (3.67) основываем на принципе обобщения [140]. Выведем из выражения (3.67) размытую переменную  $J$  в виде функции от параметров  $X$ ,  $Y_T$ ,  $Z$  с аналитическим выражением:

$$J = \frac{XY_T}{Z} \leq 1. \quad (3.68)$$

Как было отмечено всюду выше, данная функция будет иметь левую и правую ветвь, с аналитическими выражениями вида:

$$j_{лев} = (a_x - b_x \beta)(a_{y_T} - b_y \beta) / (a_z + b_z \beta), \quad (3.69)$$

$$j_{пр} = (a_x + b_x \beta)(a_{y_T} - b_y \beta) / (a_z - b_z \beta), \quad (3.70)$$

где  $\beta = \sqrt{-\ln \pi_J(j)} = \sqrt{-\ln \alpha^*}$ .

Алгоритм определения возможности отказа для элемента по условию прочности хомутов аналогичен алгоритму для других критериев (например, прочности бетона в разделе 3.1). Для сокращения объема работы, рассмотрим его на примере.

**Пример 3.15.** По результатам испытаний эксплуатируемого ж/б элемента установлены следующие значения параметров:  $\tilde{E}_b = \{25;22;28\} \cdot 10^9$  Па;  $\tilde{\sigma}_{np,sw} = \{240;210;270\}$  Па  $\tilde{a}_{crc} = \{0,15;0,17;0,13\}$  мм;  $h_0 = 0,5$  м;  $\mu_w = 0,01$ ;  $\varphi_l = 1,5$ ;  $\eta = 1$ ;  $E_s = 2 \cdot 10^{11}$  Па;  $d_w = 10$  мм. Вычислим значения параметров ФРВоз:  $a_x = 0,017$ ,  $a_{y_T} = 8,35 \cdot 10^9$  Па,  $a_z = 240$  МПа и  $b_x = 0,0013$ ,  $b_y = 2,60 \cdot 10^8$  Па,  $b_z = 17,34$  МПа при установленном значении альфа = 0,05. Условие выполняется:  $a_g = a_x(a_{y_T})/a_z = 0,58 \leq 1$ , следовательно,  $R=1$ . Из (3.70) для  $\pi_G(g)$  при значении  $g_{np} = 1$  вычислим значения параметра  $\beta = \{59,32;2,92\}$ , откуда принимаем его минимальное значение  $\beta_{\min} = 2,92$ . Тогда  $Q = \exp[-(2,92)^2] = 0,0002$  и  $N = 1 - 0,0002 = 0,9998$ .

Предельно допустимое значение надежности будет зависеть от уровня ответственности изгибаемого железобетонного элемента, от условия и группы предельного состояния и т.д.. В данный момент в РФ этот вопрос находится в стадии обсуждения.

Если модуль упругости стержня арматуры имеет большой статистический разброс, то следует рассматривать его как случайную или нечеткую величину  $\tilde{E}_s$  и вычислять по испытаниям контрольных образцов из хомутов элемента, что в существующем элементе приведет к некоторым сложностям, т.к. демонтируется часть воспринимающего эксплуатационные усилия бетона элемента. При малом количестве контрольных образцов и испытаний, параметр  $\tilde{E}_s$  рационально рассматривать как размытый (нечеткий). Создадим из выражения (3.66) нечеткую переменную  $G$  с аналитическим видом:

$$G = \frac{X(T+Y)}{Z} \leq 1. \quad (3.71)$$

Будем характеризовать полученную функцию  $G$  распределением вида (3.1) с средним значением в соответствии (3.71) как  $a_g = a_x(a_k + a_y)/a_z$  и с соответствующими ветвями:

$$g_{лев} = (a_x - b_x \beta)[(a_t - b_t \beta) + (a_y - b_y \beta)] / (a_z + b_z \beta), \quad (3.72)$$

$$g_{np} = (a_x + b_x \beta)[(a_t + b_t \beta) + (a_y + b_y \beta)] / (a_z - b_z \beta), \quad (3.73)$$

где введено следующее обозначение  $\beta = \sqrt{-\ln \pi_G(g)} = \sqrt{-\ln \alpha_*}$ .

**Пример 3.16.** Примем, что для железобетонного элемента при обследовании получен набор статистических данных в виде:  $d_w = 10$  мм;  $h_0 = 0,5$  м;  $\mu_w = 0,01$ ;  $\varphi_l = 1,5$ ;  $\eta = 1$ ;  $\tilde{E}_b = \{25; 22; 28\} \cdot 10^9$  Па;  $\tilde{a}_{crc} = \{0,15; 0,17; 0,13\}$  мм;  $\tilde{E}_s = \{2,2; 2,0; 1,8\} \cdot 10^{11}$  Па;  $\tilde{\sigma}_{np,sw} = \{240; 210; 270\}$  Па. Вычислим значения составляющих функций в виде:  $a_x = 0,017$ ,  $a_y = 3,75 \cdot 10^9$  Па,  $a_z = 240$  МПа,  $a_t = 4,6 \cdot 10^9$  Паи  $b_x = 0,0013$ ,  $b_y = 2,60 \cdot 10^8$  Па,  $b_z = 17,34$  МПа,  $b_t = 2,66 \cdot 10^8$  Па при заданном уровне среза (риска) 0,05. Условие выполняется :  $a_g = a_x(a_y + a_t) / a_z = 0,58 \leq 1$ , следовательно, принимается  $R=1$ . Из (3.73) при  $g_{np} = 1$  вычислим значения параметра  $\beta = \{57,11; 2,61\}$ , откуда найдем его минимальное абсолютное значение как:  $\beta_{\min} = 2,61$ . Затем вычисляется  $Q = \exp[-(2,61)^2] = 0,0011$  и  $N = 1 - 0,0011 = 0,9989$ .

В качестве расчетного значения вероятности безотказной работы может быть использовано  $N = \underline{P} = 0,9989$ .

При аварийных воздействиях на железобетонную балку с образованием в ней трещин основным вопросом является ее пригодность к дальнейшей безопасной эксплуатации по условию прочности арматуры и балки в целом. На этом основании, предельную ширину раскрытия трещин  $a_{crc,ult}$  предлагается определять из условия прочности арматуры балки. Известно [4], что при затруднительном или невозможном измерении ширины раскрытия нормальных трещин  $a_{crc}$ , ее определяют по формуле:

$$a_{crc} = 3\varphi_l \eta \varphi_1 \varphi_2 \frac{\sigma_s (A_s + A_{sp})}{u_s G_s}, \quad (3.74)$$

а наклонных по формуле:

$$a_{crc} = \varphi_l \frac{0,8\sigma_w d_w \eta}{E_s \frac{d_w}{h_0} + 0,15E_b \left(1 + 2 \frac{E_s}{E_b} \mu_w\right)}, \quad (3.75)$$

о значениях параметров в (3.74), (3.75) можно найти в [4].

Безопасность эксплуатации балки при наличии нормальных и наклонных трещин после аварийных воздействий предлагается определять условием  $\sigma_s \leq R_s$  и  $\sigma_{sw} \leq R_{sw}$  где  $R_s$  и  $R_{sw}$  - расчетные сопротивления арматуры (продольной и поперечной) для первой группы предельных состояний при растяжении;  $\sigma_s$  и  $\sigma_{sw}$  - напряжения в арматуре от эксплуатационной нагрузки.

После измерения ширины раскрытия трещин будем иметь условие прочности железобетонной балки по нормальным трещинам в виде:

$$\tilde{a}_{crc} \leq 3\varphi_l \eta \tilde{\varphi}_1 \tilde{\varphi}_2 \frac{R_s (A_s + A_{sp})}{u_s \tilde{G}_s}, \quad (3.76)$$

и по наклонным трещинам в виде:

$$\tilde{a}_{crc} \leq \frac{0,8R_{sw} d_w \eta \varphi}{E_s \left(\frac{d_w}{h_0} + 0,3\mu_w\right) + 0,15\tilde{E}_b}, \quad (3.77)$$

а после некоторых математических преобразований модель предельного состояния (3.77) примет вид:

$$\tilde{a}_{crc} \cdot \left(E_s \left[\frac{d_w}{h_0} + 0,3\mu_w\right] + 0,15\tilde{E}_b\right) \leq 0,8R_{sw} d_w \eta \varphi. \quad (3.78)$$

Обозначим нечеткие переменные  $\left(E_s \left[\frac{d_w}{h_0} + 0,3\mu_w\right] + 0,15\tilde{E}_b\right) = X$ ,  $\tilde{a}_{crc} = Y$ , тогда условие (3.78) можно записать в виде:

$$XY \leq 0,8R_{sw} d_w \eta \varphi. \quad (3.79)$$

В соответствии с [75] введем в расчет нечеткую функцию  $T$  в виде  $T = XY$ .  $T$  характеризуется функцией распределения  $\pi_T(t)$  с левой  $t \leq \alpha_t$  и правой  $t > \alpha_t$  ветвями, где для соответственно левой ветви:

$$t_{лев} = (a_x - b_x \beta)(a_y - b_y \beta), \quad (3.80)$$

а правой:

$$t_{прав} = (a_x + b_x \beta)(a_y + b_y \beta), \quad (3.81)$$

с аналогичным обозначением  $\beta = \sqrt{-\ln \pi_T(t)}$ .

**Пример 3.17.** По результатам испытаний ж/б балки установлены значения параметров:  $d_w = 0,01$  м;  $s_w = 0,25$  м;  $E_s = 2 \cdot 10^{11}$  МПа;  $h_0 = 0,5$  м;  $b = 0,2$  м;  $\mu_w = \frac{A_s}{b \cdot s_w} = \frac{2\pi d^2}{4b \cdot s_w} = 0,0032$ ; Нечеткие переменные представлены значениями:  $\tilde{a}_{crc} = \{0,74; 0,70; 0,72\}$  мм;  $R_{sw} = 300$  МПа;  $\tilde{E}_b = \{1; 3; 2\} \cdot 10^3$  МПа. Вычислим  $X_{\max} = (2 \cdot 10^{11} (0,01 / 0,5 + 0,3 \cdot 0,0023) + 0,15 \cdot 3 \cdot 10^9) = 4,58 \cdot 10^3$  МПа;  $X_{\min} = (2 \cdot 10^{11} (0,01 / 0,5 + 0,3 \cdot 0,0023) + 0,15 \cdot 1 \cdot 10^9) = 4,28 \cdot 10^3$  МПа;  $Y_{\min} = 0,70$  мм,  $Y_{\max} = 0,74$  мм;  $0,8R_{sw}d_w\phi\eta = 3,60$  МН/м. Тогда  $a_x = 4430$  МПа;  $a_y = 0,72$  мм; при  $\alpha = 0,05$  имеем  $b_x = 173,4$  МПа;  $b_y = 0,058$  мм;  $a_t = 4430 \cdot 0,72 \cdot 10^{-3} = 3,19 < 0,8R_{sw}d_w\phi\eta = 3,60$  МН/м, тогда  $R=1$ . Из (3.81) найдем  $\beta_{\min} = 1,75$ ., следовательно,  $Q = \exp(-(1,75)^2) = 0,18$ .

### 3.3.7. Расчет надежности железобетонных колонн

Подход к определению возможности отказа для внецентренно-сжатой стойки рассматривается в статье [81]. Оценку вероятности безотказной работы для железобетонной стойки с использованием вероятностных методик с учетом влияния внепроектных свойств бетона при изготовлении с применением моделирования по Монте-Карло можно найти в статье [121]. Использование Байесовского подхода к расчету безотказности железобетонных колонн предложено в исследовании [107]. Расчет вероятности безотказной работы железобетонных колонн при их внецентренном сжатии с учетом больших эксцентриситетов анализируется в статье [66]. В работе [10] приводится тезис о том, что наиболее опасным неисправностям (особенно после землетрясений) подвержены участки железобетонных стоек вблизи опор. Влияние снижения

допустимой нагрузки на эксплуатируемые железобетонные колонны представляет практический интерес в целях реализации требований Закона РФ №384-ФЗ.

Абсолютное большинство методов стохастического анализа колонн базируется на теории вероятностей, где используется полная статистическая информация параметрах в расчетных моделях. Как было отмечено выше, выявление такого рода исчерпывающей информации при обследовании для отдельных параметров зачастую невозможно. В данном разделе предлагается рассмотреть подход к расчету возможности отказа железобетонных колонн при дефиците статистических данных о расчетных параметрах при эксплуатации железобетонных колонн. Можно выделить две группы колонн по деформациям в их сечениях: 1) Колонны со сжимающими деформациями вдоль всего сечения, работоспособность которых устанавливается по значениям относительных деформаций сжатия в рабочей арматуре и бетоне; 2) Колонны, работоспособность которых проверяется по значениям сжимающих и растягивающих деформаций. Рассмотрим расчет вероятности безотказной работы как стохастическую оценку безопасности эксплуатации для железобетонных колонн первой группы по критерию прочности материалов колонны при сжатии. Условием предельного состояния железобетонного элемента примем прочность в виде условия непревышения максимальными напряжениями предельных значений, что может быть принято равносильному утверждению о недопущении превышения относительной деформации в материалах колонных предельных значений:

$$\varepsilon_{b,\max} \leq \varepsilon_{np,b} \text{ И } \varepsilon_{s,\max} \leq \varepsilon_{np,s}.$$

Максимальная деформация стали  $\varepsilon_{np,s}$  арматуры устанавливается в зависимости от предельной прочности или текучести  $\sigma_{0,2}$ , эквивалентной относительной деформацией для которого можно принять значение  $\varepsilon_{np,s} = 0,002$ . Предельная относительная деформация сжатого бетона при сжатии

железобетонных колонн больше предельной относительной деформации стали, поэтому для стохастического анализа выбирается модель вида:

$$\tilde{\varepsilon}_{s,\max} \leq \varepsilon_{np,s}, \quad (3.82)$$

где  $\tilde{\varepsilon}_{s,\max}$  - контролируемый (случайный) параметр;  $\varepsilon_{np,s} = 0,002$  принимает постоянное (детерминированное) значение.

Для определения подмножества значений  $\tilde{\varepsilon}_{s,\max}$  на стадии эксплуатации можно использовать метод [52], где определяются значения восстановленной относительной деформации материала. На поверхности железобетонной колонны вдоль ее длины устанавливают тензодатчик (например, тензорезистор) и фиксируют его базовое сопротивление в виде  $R_0$ . После чего, выше и ниже измерителя деформаций в колонне высверливают пару отверстия размером в 3-4 раза превышающими ширину тензорезистора, и глубиной порядка 50 мм на расстоянии от измерителя деформаций в 3-4 значения его ширины, после чего фиксируют измененное сопротивление  $R_1$  тензорезистора. А относительную деформацию вычисляют как:  $\varepsilon_0 = \frac{R_1 - R_0}{k \cdot R_0}$ , где  $k$  – коэф. тензочувствительности датчика.

Для выявления максимального значения  $\tilde{\varepsilon}_{s,\max}$  в соответствии с методом [52] на двух наибольших по размеру противоположных сторонах сечения колонны устанавливают тензодатчики вдоль длины колонны, как показано на рис. 3.19. Относительные деформации вычисляют как описано в работе [52] или выше. По показателям относительных деформаций строят график относительных деформаций сжатого бетона  $\varepsilon_b$ , см. рис. 2.19, на основе гипотезы плоских сечений и соответствующего равенства относительных деформаций бетона и арматурных стержней.

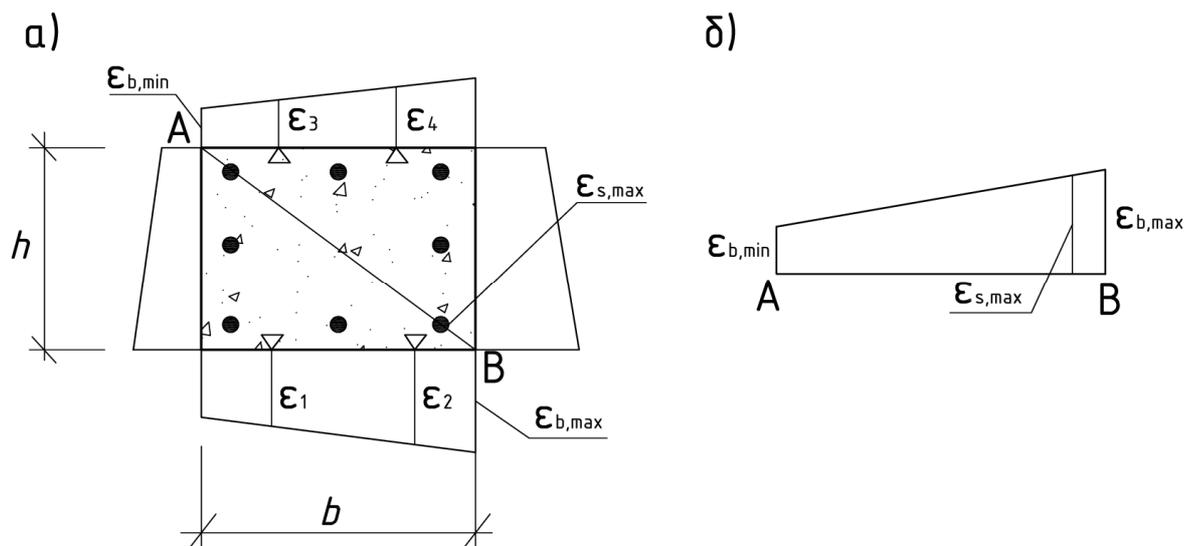


Рисунок 3.19 – Вид железобетонной колонны с эпюрой относительных деформаций сжатого бетона  $\varepsilon_b$  по краям колонны (а) и элемент эпюры  $\varepsilon_b$  с максимально относительной деформацией арматурного стержня  $\varepsilon_{s,max}$  (б).

По графику (эпюре) относительных деформаций сжатого бетона вычисляют значения границ относительной деформаций бетона колонны  $\varepsilon_{b,max}$  и  $\varepsilon_{b,min}$ , см. рис. 3.19, с последующей экстраполяцией значений  $\varepsilon_b$  прямой. Измерение относительных деформаций бетона производят с суммированием относительных деформаций от дополнительных расчетных нагрузок на колонну. Максимальную относительную деформацию стержня  $\tilde{\varepsilon}_{s,max}$  вычисляют по эпюре относительных деформаций сжатого бетона  $\varepsilon_b$ , как проиллюстрировано на рис. 3.19.

Проблема выявления значения относительной деформации сжатого бетона колонны при длительной эксплуатации усложняется наличием деформаций ползучести и перераспределением деформаций при сохранении условия  $\varepsilon_b = \varepsilon_s$  (в рамках гипотезы плоских сечений). Сложность заключается в том, что: во-первых, на данный момент отсутствует определенность в механизме развития относительных деформаций ползучести в принципе [6], а, во-вторых, в связи со множеством теорий ползучести бетона [6]. Рассматривая данный вопрос не только для железобетонных конструкций, но и для металлических (в условиях больших температур), Ю.Н. Работонов отмечает [57], что учитывать в расчетах

деформации ползучести целесообразно, если деформация, накопленная за расчетный период  $t$ , превышает десять процентов от значения упругой деформации. Придерживаясь теории упруговязкого тела, примем относительную деформацию от ползучести бетона для железобетонной колонны полностью обратимой. Тогда выявление относительных деформаций на основе подхода [52] следует проводить при стабилизации показаний на тензодатчиках после высверливания отверстий. Так, например, в [38] рекомендуется удерживать под испытательной нагрузкой исследуемый элемент при выявлении относительных деформаций более четырех часов.

Расчет вероятности безотказной работы по (3.82) проводится на основании подмножества значений относительных деформаций  $\tilde{\varepsilon}_{s,\max}$  и наличии априорной или апостериорной информации о предельной относительной деформации стали арматуры  $\varepsilon_{np,s}$ . При дефиците статистических данных об относительной деформации стальной арматуры  $\tilde{\varepsilon}_{s,\max}$  рационально использовать возможностный подход [110]. Обозначим нечеткую переменную (в возможностных терминах)  $\tilde{\varepsilon}_{s,\max} = X$ ) и присвоим ей распределение вида (3.1).

Испытания по определению относительных деформаций  $\varepsilon_b$  проводят на некотором уровне высоты элемента, то необходимо учесть дополнительных относительных деформаций от массы нижней части колонны  $\Delta\varepsilon_b$ :

$$\Delta\varepsilon_b = \rho_b H_k / E_b, \quad (3.83)$$

где  $H_k$  - высота участка элемента от базы до точки проведения испытаний по определению относительных деформаций бетона;  $\rho_b$  – плотность бетона;

На вычисленное значение  $\Delta\varepsilon_b$  следует увеличить относительную деформацию стали арматуры  $\tilde{\varepsilon}_{s,\max} + \Delta\varepsilon_b$ . Параметр  $\Delta\varepsilon_b$  рассматриваем как величину постоянного значения по причине низкой вариации  $\Delta\varepsilon_b$ . Однако, для улучшения точности испытаний  $\tilde{\varepsilon}_{s,\max} + \Delta\varepsilon_b$ , следует минимизировать значение

параметра  $H_k$ . Аналогичным подходом следует добавить относительные деформации от расчетной нагрузки (не учитываемой при испытаниях, например, снеговая, крановая и т.д.).

Следовательно, и параметр функции  $a_x$  также увеличится на значение  $\Delta\varepsilon_b$ , а параметр функции  $b_x$  останется прежним. Графическое отображение функции  $\pi_X(x)$  передвинется по оси  $x$  при своей исходной форме. Вероятней всего при эксплуатации колонн  $a_x$  будет меньше значения предельной деформации  $\varepsilon_{np,s} = 0,002$ , и следует принять  $R=1$ , а значение возможности отказа  $Q$  вычислить

$$\text{при подстановке } x = \varepsilon_{np,s}: Q = \left[ -\left( \frac{\varepsilon_{np,s} - a_x}{b_x} \right)^2 \right].$$

**Пример 3.18.** По результатам приведенных выше испытаний были выявлены следующие значения параметров относительных деформаций:  $\tilde{\varepsilon}_{s,\max} = \{0,0015; 0,0017; 0,0013\}$  и предельное значение  $\varepsilon_{np,s} = 0,002$ . Вычислим параметры распределения возможностей в виде:  $a_x = 0,0015$ ,  $b_x = 2,3 \cdot 10^{-4}$  с заданным уровнем среза  $\alpha = 0,05$ . Условие  $a_x \leq \varepsilon_{np,s}$  выполняется, и тогда  $R$  принимается равным единице. Рассчитаем  $Q = \exp \left[ -\left( \frac{0,002 - 0,0015}{0,00023} \right)^2 \right] = 0,008$  и  $N=1=0,992$ .

По запатентованному способу контроля относительных деформаций [52] можно установить мониторинг относительных деформаций колонны. Используя такой подход, можно принять во внимание временной фактор при расчетах колонн на безотказность и контролировать вероятность безотказной работы дистанционно на различных временных этапах  $t$ . Фиксируя значения надежности на определенных этапах, можно по этим данным установить функциональную зависимость вида «надежность-время» и прогнозировать вероятность безотказной работы и остаточный ресурс железобетонной колонны.

Для бетонных колонн без арматуры алгоритм расчета вероятности безотказной работы основывается на модели:  $\tilde{\varepsilon}_{b,\max} \leq \varepsilon_{np,b}$ , при полной аналогии с рассмотренным подходом к возможности отказа (как меры надежности) эксплуатируемых железобетонной колонны.

Выводы по третьей главе:

1. Разработан способ назначения уровня среза при оценке возможности отказа элементов сооружений возможностными методами;
2. Разработаны методики расчета вероятности безотказной работы изгибаемых эксплуатируемых железобетонных элементов по отдельным критериям предельных состояний;
3. Приведены числовые примеры с подробным описанием алгоритмов определения надежности изгибаемых железобетонных элементов по отдельным критериям предельных состояний;
4. Приведены расчетные формулы для расчета надежности изгибаемого железобетонного элемента как последовательной механической системы в возможностной постановке при отсутствии информации о зависимости/независимости элементов (критериев работоспособности) системы.

## ГЛАВА 4. РАСЧЕТ НАДЕЖНОСТИ ИЗГИБАЕМЫХ ЖЕЛЕЗОБЕТОННЫХ ЭЛЕМЕНТОВ НА ОСНОВЕ ТЕОРИИ СЛУЧАЙНЫХ МНОЖЕСТВ

### 4.1. Основные положения теории случайных множеств

Важной проблемой строительной механики как науки выступает последующее совершенствование положений теории расчета элементов сооружений на надежность с применением современных методов стохастического анализа данных о расчетных воздействиях, физико-механических характеристиках материалов и поведении дефектов и повреждений. В поддержку такого направления развития дисциплины и реализации требований безопасности по Закон №384-ФЗ для элементов сооружений направлена настоящая глава.

При интервальной оценке предельной нагрузки на элемент, как было отмечено выше, определенный интервал  $[F_{np}^H; F_{np}^G]$  представляется стохастической величиной, и после нового примет другие значения. Для ответственных по уровню безопасности сооружений и их элементов требуется проведение нескольких экспериментов для анализа полученных данных. Как результат, будем иметь некоторое подмножество интервалов, которые невозможно проанализировать по классическому статистическому представлению. Для реализации этих целей может быть использована теория случайных множеств [90].

В соответствии с [90] под случайными множествами будем понимать множества, полученные случайно, т.е. случайная величина, которая принимает в качестве своих значений некоторое множества вместо точек.

В Российской Федерации [96] и за рубежом [104, 133 и др.] теория случайных множеств нашла свое применение в отдельных прикладных отраслях. Так в работе [96] рассматривается алгоритм принятия решений на основе теории случайных множеств. В работе [116] разработан подход к расчету надежности на

основе теории Демпстера-Шефера, с введением безвероятностной меры. В статье [117] рассматривается метод поверхности отклика для расчетов вероятности безотказной работы с использованием положений теории случайных множеств.

Разберем методику анализа данных о несущей способности изгибаемых железобетонных элементов с последующим расчетом надежности при интервальной статистической с использованием положений теории случайных множеств [1, 7, 8].

Пусть нагрузка  $X$  задана интервалами значений  $[X_1, X_2], [X_3, X_4], \dots, [X_{n-1}, X_n]$ , полученных в результате измерений нагрузки. Прочность  $Y$  также задана значениями интервалов  $[Y_1, Y_2], [Y_3, Y_4], \dots, [Y_{m-1}, Y_m]$  предельной нагрузки. При наличии такой информации о значениях  $X$  и  $Y$  можно построить их распределения, показанные условно на рис. 4.1 по правилу [90] в виде нижней  $\underline{F}_x(x)$  и верхней  $\overline{F}_x(x)$  функций распределения нагрузки (рис. 4.1 а) и нижней  $\underline{F}_y(y)$  и верхней  $\overline{F}_y(y)$  функций распределения прочности (рис. 4.1 б).

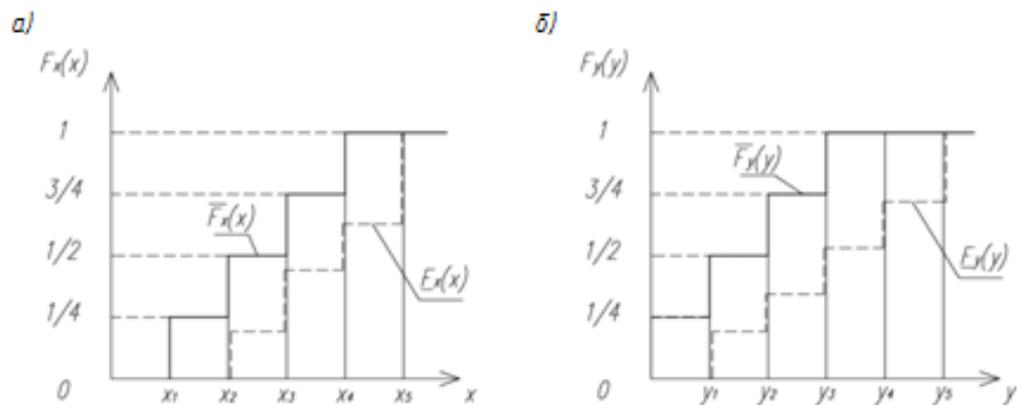


Рисунок 4.1 – Интервальные функции распределения  $F_x(x)$  и  $F_y(y)$  при  $n=5$

Согласно [90, 109, 130] верхняя функция называется функцией доверия (belief function) и обозначается  $Bel(A)$ , а нижняя функция называется функцией правдоподобия (plausible function) и обозначается  $Pl(A)$ , где  $A$  – множество, состоящее из подмножеств  $(A_i)$  значений  $\Omega$ . В нашем случае имеем подмножества

$X_i$  и  $Y_i$  из множеств  $X$  и  $Y$ . Если обозначить  $C_i$  – количество наблюдаемых подмножеств  $A_i$ , то по [90] имеем:

$$Bel(A) = \sum_{A_i: A_i \subseteq A} m(A_i), \quad (4.1)$$

$$Pl(A) = \sum_{A_i: A_i \cap A \neq \emptyset} m(A_i), \quad (4.2)$$

где  $m(A_i) = C_i / N$ , при значениях  $N$  – числа измерений (количество интервалов) и  $C_i$  – количества наблюдаемых подмножеств  $A_i$ .

Соответственно  $Bel(A)$  и  $Pl(A)$  можно рассматривать как нижнюю и верхнюю вероятность события  $A$ , т.е.  $Bel(A) \leq P(A) \leq Pl(A)$ .

Известно [62, 90], что вероятность безотказной работы условия  $X \leq Y$ , определяется в общем виде по формуле:

$$P(X \leq Y) = \int_0^{\infty} f_y(y) F_x(y) dy, \quad (4.3)$$

В расчетах надежности при ограниченной статистической информации [75] имеем граничные значения вероятностей события (4.1), но с учетом граничных функций распределения:

$$\bar{P}(X \leq Y) = \int_0^{\infty} \bar{f}_y(y) \bar{F}_x(y) dy, \quad (4.4)$$

$$\underline{P}(X \leq Y) = \int_0^{\infty} \underline{f}_y(y) \underline{F}_x(y) dy, \quad (4.5)$$

Рассмотрим подход при представлении статистической информации о  $X$  и  $Y$  подмножеством интервалом.

В соответствии с теорией случайных множеств, обозначим  $\overline{F}_x = Pl(X)$  и  $\underline{F}_x = Bel(X)$ , а также  $\overline{F}_y = Pl(Y)$  и  $\underline{F}_y = Bel(Y)$ , которые имеют вид, показанный на рис. 4.2. Покажем на примерах, как находят значения этих функции. Пусть известны результаты измерений (наблюдений)  $Y$ , например, в виде интервалов [2, 3], [3, 5], [2, 4], [3, 6] (условно единицы измерения не указываем). Представим эти значения для наглядности на оси  $y$ , как показано на рис. 4.2. Отметим дугами значения интервалов.

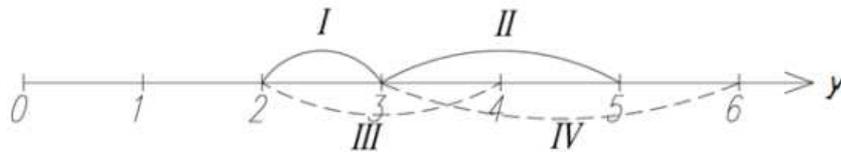


Рисунок 4.2 – Значения интервалов. Число интервалов  $n=4$

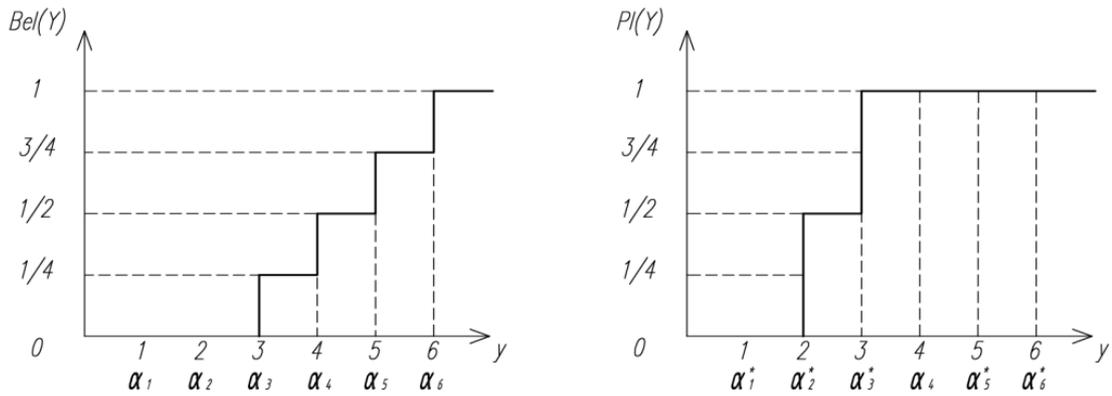
По статистической информации, приведенной выше в виде интервалов, имеем 4 интервала: I, II, III, IV. Для определения значения  $Bel(Y)$  определяют число интервалов (подмножеств)  $C_i$ , полностью попавших на ось  $y$ , считая от нуля до заданной границы интервала, с последующим делением на полное число интервалов  $n$  (в примере  $n=4$ ). Так по рис. 4.2 имеем:

$$Bel([0, 2])=0, Bel([0, 3])=1/4, Bel([0, 4])=2/4, Bel([0, 5])=3/4, Bel([0, 6])=4/4=1.$$

Для определения  $Pl(Y)$  определяют число  $C_j$  полных интервалов или их части, попадающих в интервал на ось  $y$ , считая от нуля до начала следующего интервала, с последующим делением на полное число интервалов  $n$ . Так по рис. 4.3 имеем:

$$Pl([0, 1])=0, Pl([0, 2])=2/4, Pl([0, 3])=4/4=1, Pl([0, 4])=1, Pl([0, 5])=1.$$

На рис. 4.3 показаны графики  $Pl(Y)$  и  $Bel(Y)$ , построенные по информации приведенного примера.

Рисунок 4.3 – Графики функций  $Bel(Y)$  и  $Pl(Y)$ 

Статистическое математическое ожидание, считая, что для каждого интервала  $C_i$  и  $N = \sum C_i = 4$  может быть получено по [90] в виде:

$$\underline{EY} = \frac{2}{4} + \frac{3}{4} + \frac{2}{4} + \frac{3}{4} = \frac{10}{4} = 2,5; \quad \overline{EY} = \frac{3}{4} + \frac{5}{4} + \frac{4}{4} + \frac{6}{4} = \frac{18}{4} = 4,5;$$

Предельная нагрузка (мера несущей способности) характеризуется интервалом  $[2,5; 4,5]$ . По этим значениям предельной нагрузки можно сравнивать, например, балки по несущей способности, оценивать безопасность балки при известной эксплуатационной нагрузке и т.д.

Рассмотрим задачу расчета надежности балки в общем виде по математической модели предельного состояния вида:

$$X \leq Y, \quad (4.6)$$

где  $X$  – обобщенная нагрузка (напряжения, нагрузка, деформация и т.д.);  $Y$  – обобщенная прочность (предельное допустимое напряжение, предельный прогиб и т.д.).

Рассмотрим вариант, в котором предельная нагрузка несущего элемента определяется описанному выше методу. В качестве критерия работоспособности (прочности, деформации предельной длины трещины и т.д.) используем прочность балки. По [90] имеем:

$$\bar{P}(X \leq Y) = \int_0^x \sum_{i=1}^n \rho_x \bar{F}_y(x) dx = \int_0^{\infty} \sum_{i=1}^n [\delta_i(\alpha_i) w_i] \bar{F}_y(x) dx = \sum_{i=1}^n w_i \bar{F}_y(\alpha_i),$$

где  $\delta_i(\alpha_i)$  - функция Дирака.

Если ось ординат в  $Pl(Y)$  и  $Bel(Y)$  делится на одинаковые части высотой  $w_i$ , то:

$$\bar{P}(X \leq Y) = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \bar{F}_y(\alpha_i), \quad (4.7)$$

$$\underline{P}(X \leq Y) = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \underline{F}_y(\alpha_i^*), \quad (4.8)$$

где  $n$  - число интервалов «прочности»  $Y$ ;  $\alpha_i$  - значения абсцисс в точках (скачках) функции  $Bel(Y)$ ;  $\alpha_i^*$  - значения абсцисс в точках (скачках) функции  $Pl(Y)$ .

Сокращенно и символично (4.7), (4.8) можно записать в виде:  $\bar{P} = Bel(Y) \cdot Pl(X)$ ,  $\underline{P} = Bel(X) \cdot Pl(Y)$ . Для расчета надежности по условию  $X \leq Y$  по заданным интервалам исходной статистической информации для наглядности и поиска значений  $Bel$  и  $Pl$  для  $X$  и  $Y$  строят графики  $Bel(X)$ ,  $Bel(Y)$ ,  $Pl(X)$ ,  $Pl(Y)$ , как было описано выше в примере с  $Y_i$ , и по формулам (3.7), (3.8) находят верхнее и нижнее значения вероятностей «безотказной работы».

Приведем расчет вероятности безотказной работы модели (4.6) на примере условного изгибаемого железобетонного элемента, при данных о несущей способности  $Y$  в виде статистического подмножества: [2, 3], [3, 5], [2, 4], [3, 6], а для расчетного воздействия  $X$ : [1, 2], [2, 3], [2, 4]. Для несущей способности графический вид функций  $Bel(Y)$  и  $Pl(Y)$  приведен на рис. 4.3. Построим графики  $Bel(X)$  и  $Pl(X)$  для «нагрузки»  $X$  по аналогии с  $Y$ . Предварительно найдем:

$$Bel([0, 1]) = 0, Bel([0, 2]) = 1/3, Bel([0, 3]) = 2/3, Bel([0, 4]) = 3/3 = 1, Bel([0, 5]) = 1.$$

$$Pl([0, 1])=1/3, Pl([0, 2])=3/3=1, Pl([0, 3])=1, Pl([0, 4])=1,$$

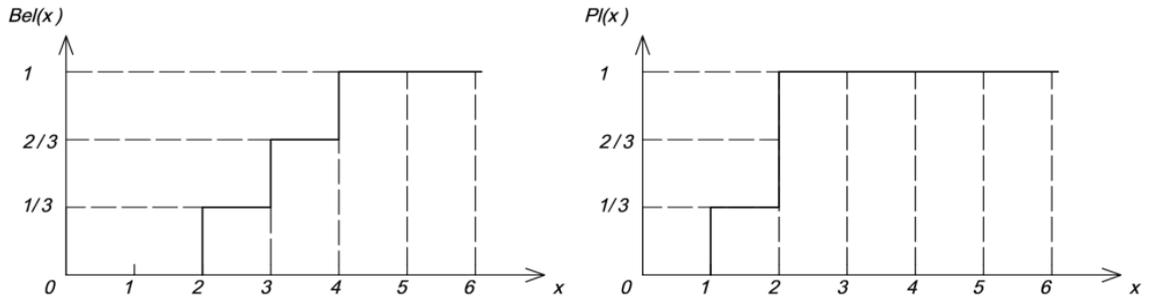


Рисунок 4.4 – Графики функций  $Bel(X)$  и  $Pl(X)$

На рис. 4.4 показаны графики функций  $Bel(X)$  и  $Pl(X)$ . Применительно к исходным данным, по рис. 4.3 и рис. 4.4 и по формулам (3.7), (3.8) или (3.9), (3.10) имеем:

$$\bar{P} = \frac{1}{4}(1+1+1+1) = 1; \quad \underline{P} = \frac{1}{4}\left(\frac{1}{3} + \frac{1}{3} + \frac{2}{3} + \frac{2}{3}\right) = 0,5.$$

Вероятность безотказной работы составляет  $[0,5; 1]$ .

Проанализируем подход, где несущая способность  $Y$  описывается подмножеством интервалов, а расчетное эксплуатационное воздействие задано в виде некоторых отдельных значений. Тогда получим совокупность дискретных условно значений нагрузки  $X=1, 2, 3, 4$  (единицы измерения опускаем) и вероятность их появления (по гистограмме) примем  $P_1 = 0,2; P_2 = 0,4; P_3 = 0,3; P_4 = 0,1$ . Графически такого рода дискретная нагрузка характеризуется функцией распределения по [93] вида, показанного на рис. 4.5.

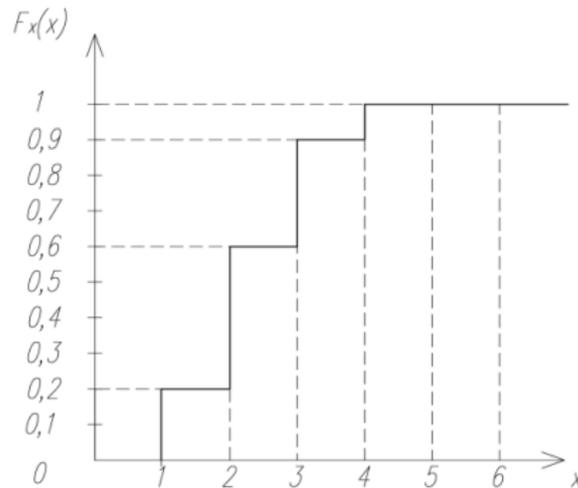


Рисунок 4.5 – Функция распределения дискретной случайной величины  $X$

$$Bel(0, 1) = 0; \quad Bel(0, 2) = 1/3, \quad Bel(0, 3) = 2/3, \quad Bel(0, 4) = 1. \quad Bel(X) = Pl(X)$$

Применяя теорию свидетельств Демпстера-Шефера, по формулам (4.7), (4.8) найдем:

$$\bar{P} = \frac{1}{4}(0,9 + 1 + 1 + 1) = \frac{3,9}{4} = 0,975,$$

$$\underline{P} = \frac{1}{4}(0,6 + 0,6 + 0,9 + 0,9) = \frac{3}{4} = 0,750.$$

Вероятность безотказной работы равна  $[0,750; 0,975]$ .

При расчетах надежности могут встречаться более сложные математические модели предельного состояния, чем  $X \leq Y$ . Например:  $X \cdot Y \leq Z$  или  $\frac{Y}{X} \leq Z$ . Для решения таких задач методами теории случайных множеств необходимо выделить правило умножения и деления подмножества интервалов для создания нового подмножества интервалов. Рассмотрим алгоритм на примерах. Пусть задана математическая модель предельного состояния  $T = X \cdot Y \leq Z$ . Пусть условно для параметров  $X$  и  $Y$  известно:  $Y = \{[1, 2], [2, 3], [2, 4]\}$  и  $Y = \{[3, 5]; [4, 6]; [5, 8]\}$ .

Для перемножения интервалов необходимо начало каждого интервала умножить на конец каждого интервала. Для заданного примера будем иметь новое

подмножество интервалов  $T=\{[1 \cdot 3=3; 2 \cdot 5=10]; [1 \cdot 4=4; 2 \cdot 6=12]; [1 \cdot 5=5; 2 \cdot 8=16]; [2 \cdot 3=6; 3 \cdot 5=15]; [2 \cdot 4=8; 3 \cdot 6=18]; [2 \cdot 5=10; 3 \cdot 8=24]; [2 \cdot 3=6; 4 \cdot 5=20]; [2 \cdot 4=8; 4 \cdot 6=24]; [2 \cdot 5=10; 4 \cdot 8=32]\}$ .

Для деления интервалов (в случае математической модели предельного состояния вида  $\frac{Y}{X} \leq Z$ ) необходимо начало каждого интервала  $Y$  разделить на конец каждого интервала  $X$ , и конец каждого интервала  $Y$  разделить на начало каждого интервала  $X$ . Для заданного примера будем иметь новое подмножество интервалов  $T=\{[3/2=1,5; 5/1=5]; [3/3=1; 5/2=2,5]; [3/4=0,75; 5/2=2,5]; [4/2=2; 6/1=6]; [4/3=1,33; 6/2=3]; [4/4=1; 6/2=3]; [5/2=2,5; 8/1=8]; [5/3=1,66; 8/2=4]; [5/4=1,25; 8/2=4]\}$ .

Рассмотрим еще один пример расчета надежности железобетонной балки с трещинами на основе известной теории случайных множеств (теории свидетельств Демпстера-Шефера) [90, 109 и др.], в котором отсутствуют какие либо параметры, и соответственно их влияние на результат расчета надежности. Расчет надежности изгибаемого ж/б элемента условию длины трещины на базе модели вида  $\tilde{l}_{crc} \leq l_{crc,ult}$ , где  $\tilde{l}_{crc}$  - глубина трещины по результатам измерений;  $l_{crc,ult}$  - критическое значение ее длины, на основе теории случайных множеств с исходной информацией о  $X$  в виде некоторых вложенных интервалов результатов измерений контролируемого параметра  $X$  рассмотрим на примере.

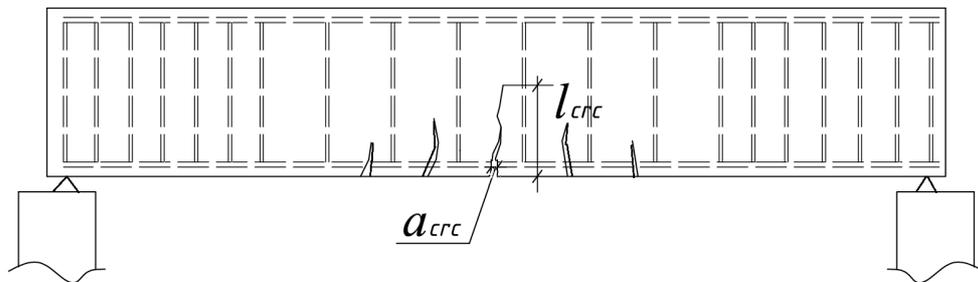


Рисунок 4.6 – Железобетонная балка с нормальными трещинами.  $a_{crc}$  – ширина раскрытия трещины,  $l_{crc}$  - длина трещины.

Пусть известны значения результатов измерений  $X = \tilde{l}_{crc}$  в интервальном виде в различные моменты времени в процессе эксплуатации железобетонной балки в виде:  $X = \{[150; 154], [151; 155], [150; 156], [152; 157], [149; 153]\}$  мм при  $l_{crc,ult} = k = 156$  мм. В соответствии с теорией случайных множеств [90] на рис. 4.7 представлены графики функции доверия  $Bel_x(x)$  и функции правдоподобия  $Pl_x(x)$  для  $X = \tilde{l}_{crc}$ , которые не содержат параметров, которыми пришлось бы задаваться.

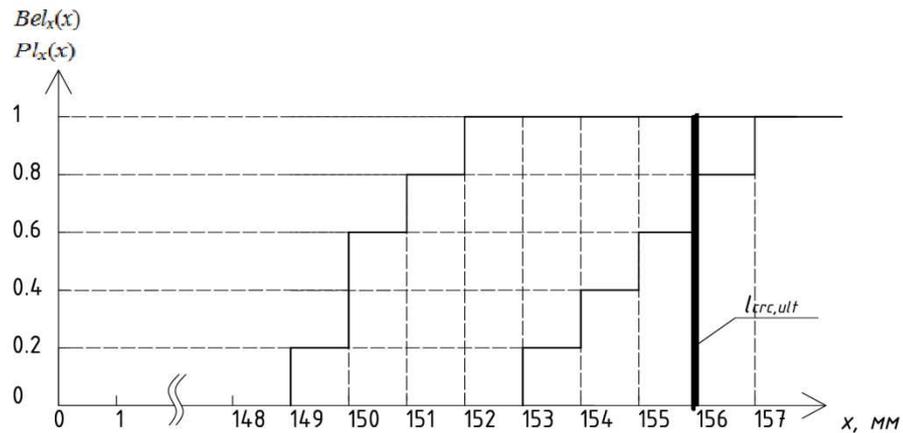


Рисунок 4.7 – Функция доверия  $Bel_x(x)$  и правдоподобия  $Pl_x(x)$  значений  $X = \tilde{l}_{crc}$

Определим верхнюю  $\bar{P}$  и нижнюю  $\underline{P}$  границы интервала надежности элемента при измерениях параметра  $X$  и исходных интервальных данных. Используем известный алгоритм [90] для расчета вероятности безотказной работы эксплуатируемого изгибаемого элемента, реализуемый на основе [109, 130], который содержится в работе [78]. По рис. 4.7 по исходным данным примера надежность балки при  $l_{crc,ult} = k = 156$  мм характеризуется интервалом  $[0,80; 1]$ .

Рассмотрим еще одну особенность расчета надежности по теории случайных множеств. При исходных данных вышеприведенного примера и при  $k = 158$  мм, интервал, характеризующий надежность составит  $[1; 1]$ , т.е. вероятность отказа равна 0, что статистически некорректно.

Следовательно, что расчет надежности элементов сооружения на базе принципов теории случайных множеств) может с успехом применяться на

практике без введения описывающих приблизительно случайные величины функций распределения. Но при дефиците количества данных в подмножестве интервалов и при больших значениях вероятности безотказной работы несущего элемента в ответственных конструкциях по требованиям к их безопасности этот метод может оказаться неубедительным, т.к. вероятность безотказной работы может быть равна единице.

Возможен вариант для расчетов надежности при малом количестве статистических данных в некотором подмножестве значений измеряемых величин. Так в [90] предлагается использовать расширенные функции доверия и правдоподобия на основе использования обобщенной модели Дирихле как одного из видов робастных моделей. В этом случае верхнюю и нижнюю границу вероятности безотказной работы можно записать в виде:

$$\underline{P}(A | c, s) = \frac{N \cdot Bel(A)}{N + s} = \chi Bel(A) \text{ и } \bar{P}(A | c, s) = \frac{N \cdot Pl(A) + s}{N + s} = 1 - \chi [1 - Pl(A)], \quad (3.9)$$

где  $N$  – число испытаний (наблюдений);  $s$  – параметр, характеризующий меру засорения, значением которого задаются, где введено обозначение  $\chi = (1 + s/N)^{-1}$  и  $\chi \in [0; 1]$ . Рассмотрим алгоритм расчета по этому методу на примере.

Воспользуемся исходными данными первого примера, но введем расширенные функции доверия и правдоподобия. Примем  $s=2$ , как наиболее осторожное решение [102]. При  $N=5$  вычислим меру засорения:  $\chi = (1 + s/N)^{-1} = (1 + 2/5)^{-1} = 0,714$ . Тогда  $\underline{P}(A | c, s) = \chi \cdot 0,80 = 0,571$  и  $\bar{P}(A | c, s) = 1 - \chi [1 - 1] = 1$ . Надежность характеризуется интервалом  $[0,571; 1]$ , который стал шире интервала надежности  $[0,800; 1]$  в вышеизложенном примере.

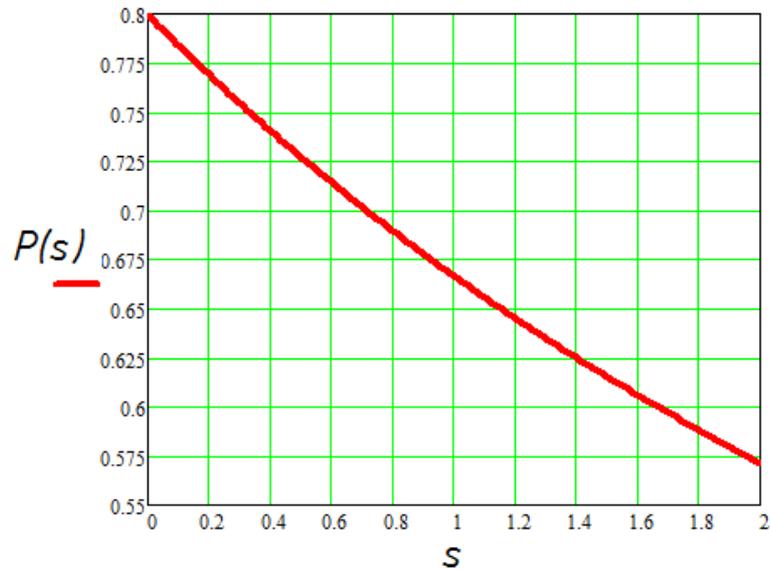


Рисунок 4.8 – График зависимости вероятности безотказной работы  $\underline{P}$  от параметра засоренности  $s$

Из рис. 4.8 видно, что параметр  $s$  изменяет нижнюю границу вероятности безотказной работы в пределах  $[0,571; 0,800]$ , в отличие от параметра  $\alpha$  в возможностном методе, изменение которого приводит возможность отказа  $Q$  в более широком интервале  $[0; 1]$ . Следовательно, волевое решение о назначении параметра  $s$  в меньшей степени влияет на конечный результат расчета надежности и такие результаты расчетов можно считать более достоверными и убедительным.

Используем данные вышеизложенного примера (при  $k=158$  мм), но с использованием расширенных функций доверия и правдоподобия. Примем  $s=1$ , с учетом более высокой уверенности в результатах испытаний и большего доверия к экспертным значениям и, следовательно, более низкой «засоренности» исходных данных. При  $N=5$  вычислим:

$$\chi = (1 + s/N)^{-1} = (1 + 1/5)^{-1} = 0,833.$$

Тогда  $\underline{P}(A|c,s) = \chi \cdot 1 = 0,833$  и  $\bar{P}(A|c,s) = 1 - \chi[1-1] = 1$ .

Надежность характеризуется интервалом  $[0,833; 1]$ , который стал информативнее по сравнению с результатом расчета при  $s=2$  и корректнее интервала надежности  $[1; 1]$  в вышеприведенном примере.

Таким образом, использование расширенных функций доверия и правдоподобия с использованием обобщенной модели Дирихле и теории случайных множеств позволяют получать более убедительные результаты расчетов надежности по одной трещине в бетоне балки. Для серии трещин. Однако расширенные функции становятся параметрическими (включают параметр  $s$ ), значением которого приходится задаваться в зависимости от «засоренности» исходных данных.

В результате использования расширенных функций доверия и правдоподобия получаем расширенные границы математического ожидания случайной величины  $X$  вида:

$$\underline{F}(x | c, s) = \underline{P}(\{w \leq x\} | c, s) = \begin{cases} (N + s)^{-1} \sum_{i: \sup A_i \leq x} c_i, & x < \Omega_* \\ 1, & x = \Omega_* \end{cases},$$

$$\bar{F}(x | c, s) = \bar{P}(\{w \leq x\} | c, s) = \begin{cases} (N + s)^{-1} \left( s + \sum_{i: \sup A_i \leq x} c_i \right), & x > \Omega_* \\ 0, & x = \Omega_* \end{cases},$$

По [90] значения границ математического ожидания случайной величины  $X$ , например вероятностей безотказной работы балки, представленной интервалами, можно найти по формулам:

$$\underline{E}X = \int_{\Omega} \omega d\bar{F}(\omega | c, s) = (N + s)^{-1} \left( s \cdot \Omega_* + \sum_{i=1}^n c_i \inf A_i \right),$$

$$\bar{E}X = \int_{\Omega} \omega d\underline{F}(\omega | c, s) = (N + s)^{-1} \left( s \cdot \Omega_* + \sum_{i=1}^n c_i \sup A_i \right),.$$

Зададимся интервалами, характеризующими надежность железобетонного элемента в виде:  $[0,995; 1]$ ,  $[0,997; 1]$ ,  $[0,994; 1]$ ,  $[0,995; 1]$ . Известно, что надежность изменяется в границах интервала  $[\Omega_*=0; \Omega^*=1]$ . Примем  $s=0,4$ . Тогда:

$$\underline{EX} = (4 + 0,4)^{-1}(0,4 \cdot 0 + 0,995 + 0,997 + 0,994 + 0,995) = 0,905,$$

$$\bar{EX} = (4 + 0,4)^{-1}(0,4 \cdot 1 + 1 + 1 + 1 + 1) = 1.$$

С учетом засоренности  $s=0,4$  исходных данных, математическое ожидание значения интервальной надежности можно принять в виде  $[0,905; 1]$ . При отсутствии «засоренности» (при  $s=0$ ) имеем:

$$\underline{EX} = (4 + 0)^{-1}(0 \cdot 0 + 0,995 + 0,997 + 0,994 + 0,995) = 0,9953,$$

$$\bar{EX} = (4 + 0)^{-1}(0 \cdot 1 + 1 + 1 + 1 + 1) = 1,$$

и математическое ожидание интервальной надежности характеризуется как  $[0,9953; 1]$ .

Таким образом, расширенные функции доверия и правдоподобия могут с успехом применяться на практике расчетов надежности, имея преимущество перед методами на основе теории возможностей в том, что параметр  $s$ , значением которого приходится задаваться, в меньшей степени влияет на результаты расчета надежности, по сравнению с параметром  $\alpha$  (уровнем среза) в возможностном методе.

Возвращаясь к системе трещин в железобетонных балках и расчету их надежности, используя теорию случайных множеств, с учетом условия независимости во взаимодействии между трещинами, расчет надежности железобетонной балки производят по каждой трещине балки по результатам путем произведения всех нижних и верхних значений вероятностей, а надежность балки в целом по критерию длины трещины характеризуется [90] интервалом

$$\left[ \prod_{i=1}^n \underline{P}_i; \prod_{i=1}^n \bar{P}_i \right], \text{ где } n - \text{число трещин в балке.}$$

Возможностный метод расчета надежности может быть рекомендован при крайне малом объеме статистической информации в виде отдельных значений. В этом случае следует внимательно относиться к назначению уровня среза (риска)  $\alpha$ , и принимать его по рекомендациям [88] в интервале [0,01; 0,1] или другим обоснованным методикам в зависимости от уровня ответственности сооружения по безопасности.

Также подлежит дополнительным исследованиям параметр «засоренности»  $s$  в расширенных функциях доверия и правдоподобия, и существует необходимость разработки методов его расчета или назначения при расчетах надежности строительных конструкций в зависимости от качества и количества статистической информации и уровня ответственности конструкции по безопасности, что требует специального оборудования.

### **3.2. Расчет надежности железобетонной балки по критерию прочности бетона и арматуры**

Для анализа надежности, установим математическую модель следующего вида:

для условия реализации прочности бетона:

$$M \leq \sigma_b b x (h_0 - 0.5x), \quad (4.10)$$

для условия реализации прочности арматуры:

$$M \leq \sigma_s A_s (h_0 - 0.5x), \quad (4.11)$$

обозначения параметров приведены в главе 3.

Высоту сжатой зоны бетона  $x$  предлагается определять по результатам испытаний (рис. 4.9), как описано в работе [97].

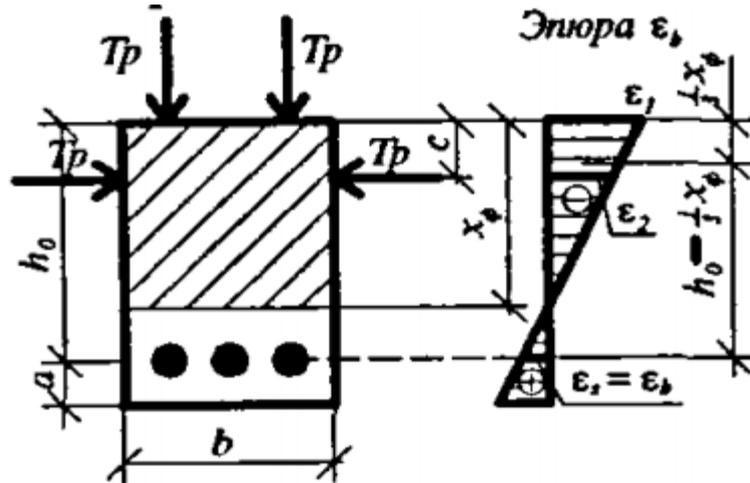


Рисунок 4.9 – Экспериментальный метод определения высоты сжатой зоны  $x$  бетона по [97]

В первом приближении будем рассматривать высоту сжатой зоны бетона  $x$  детерминированной величиной, считая, что она обладает малой изменчивостью и поддается многократным измерениям на стадии эксплуатации железобетонной балки.

Рассмотрим метод расчета надежности железобетонного элемента при изгибе по прочности сжатого бетона на основе математической модели предельного состояния вида (4.10) с учетом изменчивости случайных величин:

$$\frac{M}{bx(h_0 - 0.5x)} \leq \tilde{\sigma}_b, \text{ или } X \leq Y, \quad (4.12)$$

при обозначениях  $\frac{M}{bx(h_0 - 0.5x)} = X$  и  $\tilde{\sigma}_b = Y$ .

Ширина балки и рабочая высота балки поддаются многократным измерениям на стадии эксплуатации балки и приняты в (4.12) детерминированными величинами. Расчетный изгибающий момент  $M$  от эксплуатационной нагрузки определяется сбором нагрузок на стадии проектирования и также принимается детерминированной величиной.

Прочность бетона при сжатии  $\tilde{\sigma}_b$  определяется на стадии эксплуатации методом отрыва со скалыванием (по ГОСТ 22690-2012) или неразрушающими

способами [22]. По результатам испытаний будем иметь некоторое подмножество интервалов значений  $\tilde{\sigma}_b$ .

По значениям полученного подмножества интервалов строятся графики функций доверия  $Bel_Y(y)$  и правдоподобия  $Pl_Y(y)$ , как было описано выше. Затем в функции подставляется значение  $X = \frac{M}{bx(h_0 - 0.5x)}$  и определяется надежность в виде интервала  $[1 - Bel_Y(X); 1 - Pl_Y(X)]$ .

**Пример 4.1.** Железобетонная балка с параметрами:  $b = 200$  мм;  $h_0 = 400$  мм;  $x = 150$  мм;  $M = 30$  кН·м. Отсюда:  $X = 12,5$  МПа. Пусть по результатам испытаний  $\tilde{\sigma}_b = \{[12,3; 13,5]; [13,0; 14,0]; [12,8; 13,6]; [13,2; 14,3]; [12,9; 13,7]; [13,3; 14,0]\}$  МПа.

Построим графики функций доверия  $Bel_Y(y)$  и правдоподобия  $Pl_Y(y)$ .

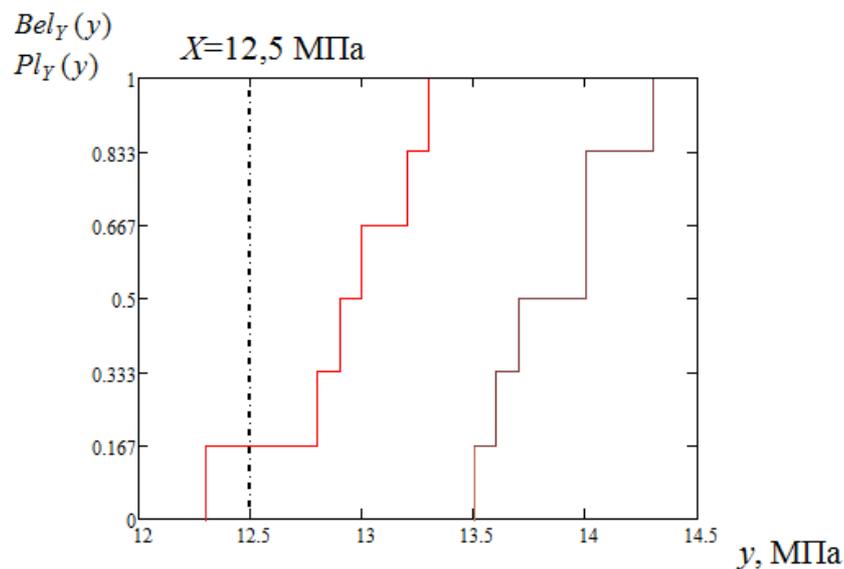


Рисунок 4.10 – Графики функций доверия и правдоподобия для примера 4.1

Вероятность безотказной работы можно определить по графику в виде:  $[1 - 0,167 = 0,833; 1 - 0 = 1]$ . Надежность характеризуется интервалом  $[0,833; 1]$ .

Вероятность безотказной работы железобетонной балки по условию прочности стержней рабочей арматуры рассчитывается по аналогичному

алгоритму, но при обозначениях  $\frac{M}{A_s(h_0 - 0.5x)} = X$  и  $\tilde{\sigma}_s = Y$ , где  $A_s$  - площадь рабочей растянутой арматуры;  $\tilde{\sigma}_s$  - предел прочности арматуры на растяжение.

Предел прочности арматуры на растяжение устанавливается по испытаниям в соответствии с ГОСТ 12004-81 «Сталь арматурная. Методы испытаний на растяжение».

Рассмотрим алгоритм расчета надежности железобетонного элемента при изгибе по прочности сжатого бетона с использованием расширенных функций доверия и правдоподобия. Воспользуемся данными примера 4.1. Примем параметр засоренности  $s=0,5$ . При  $N=6$  вычислим:

$$\chi = (1 + s / N)^{-1} = (1 + 0.5 / 6)^{-1} = 0,923.$$

Тогда  $P(A | c, s) = 0,923 \cdot 0,833 = 0,769$  и  $\bar{P}(A | c, s) = 1 - \chi[1 - 1] = 1$ .

Вероятность безотказной работы железобетонной балки по прочности сжатого бетона характеризуется интервалом  $[0,769; 1]$ . Как видно из примера, информативность интервала надежности уменьшилась (от  $[0,833; 1]$  до  $[0,769; 1]$ ) вследствие учета «засоренности» исходных статистических данных при параметре «засоренности»  $s=0,5$ .

#### 4.3. Расчет надежности железобетонной балки по критерию прогиба

Расчет вероятности безотказной работы эксплуатируемой железобетонной балки по прогибу балки будем проводить на основе математической модели предельного состояния вида:

$$\tilde{f} \leq f_{ult}, \quad (4.13)$$

где  $\tilde{f}$  - измеряемый прогиб балки (случайная величина);  $f_{ult}$  - предельный прогиб балки, установленный по СП 20.13330.2016 «Нагрузки и воздействия» или по технологическим требованиям.

Прогиб железобетонной балки измеряется инструментальными [34] или иными [50] методами.

Прогиб балки измеряется в течение некоторых отрезков времени и может быть представлен статистической информацией в интервальной форме. Тогда для расчета вероятности безотказной работы эксплуатируемой железобетонной балки с применением положений теории случайных множеств строятся графики функций доверия  $Bel_f(f)$  и правдоподобия  $Pl_f(f)$  (алгоритм построения функций приведен выше). Надежность железобетонной балки будет характеризоваться интервалом  $[P = Bel_f(f_{ult}); \bar{P} = Pl_f(f_{ult})]$ .

**Пример 4.2.** Пусть по результатам измерений прогиба балки получено подмножество интервалов  $\tilde{f} = \{[35, 40], [32, 39], [33, 40], [34, 42], [32, 38], [33, 39], [34, 41], [34, 38], [31, 41], [34, 43], [30, 37]\}$  мм. Предельный прогиб равен  $f_{ult} = 42,5$  мм. Построим графики функций доверия  $Bel_f(f)$  и правдоподобия  $Pl_f(f)$ .

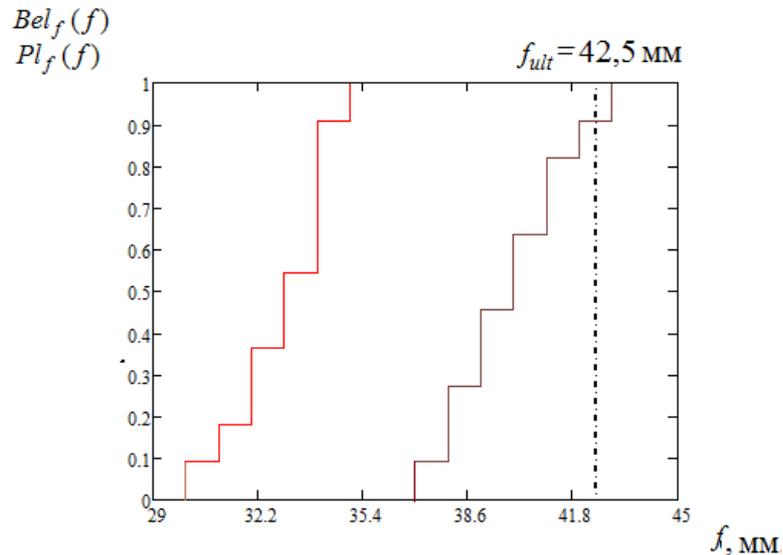


Рисунок 4.11 – Графики функций доверия и правдоподобия для примера 4.2

Надежность железобетонной балки по критерию прогиба характеризуется интервалом  $[0,909; 1]$ .

#### 4.4. Расчет надежности железобетонной балки при наличии серии нормальных трещин

Расчет вероятности безотказной работы для эксплуатируемой железобетонной балки с нормальными трещинами установим на основе стохастического неравенства:

$$\tilde{a}_{crc} \leq a_{crc,ult}, \quad (4.14)$$

где  $\tilde{a}_{crc}$  - ширина раскрытия трещин, подлежащая измерениям (случайная величина);  $a_{crc,ult}$  - предельная ширина раскрытия трещин, установленная по СП 63.13330.2012 «Бетонные и железобетонные конструкции» или по СП 28.13330.2017 «Защита строительных конструкций от коррозии».

Ширина раскрытия трещин на стадии эксплуатации можно измерить микроскопом МПБ-2 с точностью 0,02 мм.

Ширина раскрытия трещин балки измеряется в течение некоторых отрезков времени и может быть представлена статистической информацией в интервальной форме. Тогда для анализа вероятности безотказной работы железобетонной балки с использованием положений теории случайных множеств строятся графики функций доверия  $Bel_{a_{crc}}(a_{crc})$  и правдоподобия  $Pl_{a_{crc}}(a_{crc})$  (алгоритм построения функций приведен выше). Вероятность безотказной работы представлена в виде:  $[ \underline{P} = Bel_{a_{crc}}(a_{crc,ult}); \bar{P} = Pl_{a_{crc}}(a_{crc,ult}) ]$ .

При наличии нескольких нормальных трещин, надежность следует определять для каждой нормальной трещины. В итоге надежность будет вычисляться по формуле:  $\left[ \prod_{i=1}^n \underline{P}_i; \prod_{i=1}^n \bar{P}_i \right]$ , где  $n$  – число нормальных трещин в балке.

**Пример 4.3.** Пусть после обследования железобетонной балки получено подмножество интервалов значений  $\tilde{a}_{crc} = \{ [26, 30], [24, 28], [22, 26], [24, 28], [22,$

28], [20, 26], [22, 26], [26, 28], [20, 30], [22, 24], [24, 26]} мм·10<sup>-2</sup>. Предельная ширина раскрытия трещин  $a_{crc,ult}=30$  мм·10<sup>-2</sup>. Построим графики функций доверия  $Bel_{a_{crc}}(a_{crc})$  и правдоподобия  $Pl_{a_{crc}}(a_{crc})$ .

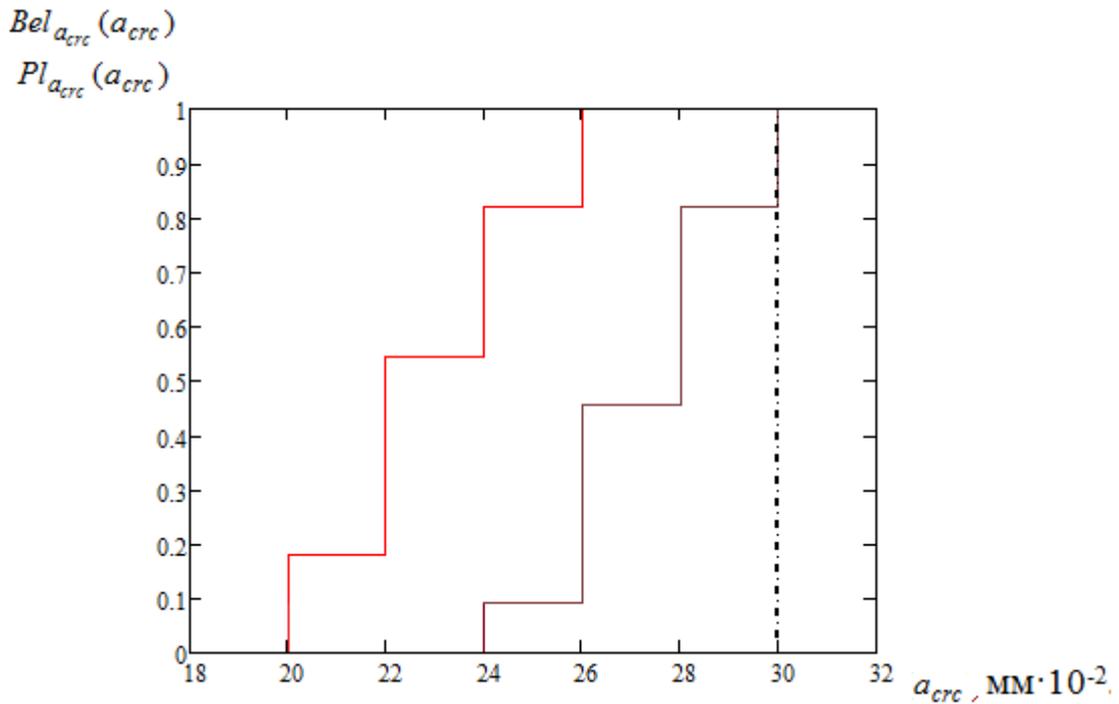


Рисунок 4.12 – Графики функций доверия и правдоподобия для примера 4.3

Надежность составит [0,8; 1].

Если предельную ширину раскрытия трещины принять такой, при которой напряжение в арматуре достигает расчетного сопротивления, математическая модель может быть записана как:

$$\tilde{a}_{crc} \leq \varphi_1 \varphi_2 \varphi_3 \psi \frac{\tilde{\sigma}_{s,ult}}{E_s} l_s, \quad (4.15)$$

где  $\tilde{\sigma}_{s,ult}$  – предел прочности арматуры растяжению, установленный по результатам испытаний образцов арматуры (случайная величина), например по ГОСТ 12004-81 «Сталь арматурная. Методы испытаний на растяжение». Другие обозначения параметров в (4.15) приведены в СП 63.13330.2012.

Расстояние между трещинами  $l_s$  в первом приближении будем считать детерминированной величиной.

Введем обозначения  $\tilde{a}_{crc} = X$ ,  $\varphi_1\varphi_2\varphi_3\psi \frac{\tilde{\sigma}_{s,ult}}{E_s} = Y$ . Тогда (4.15) запишется как:

$$X \leq Y. \quad (4.16)$$

Для вычисления интервала вероятности безотказной работы по условию (4.16) требуется построить графики функций доверия  $Bel_X(x)$ ,  $Bel_Y(y)$  и правдоподобия  $Pl_X(x)$ ,  $Pl_Y(y)$ .

**Пример 4.4.** По результатам обследования балки получены значения:  $X = \{[24,30]; [26, 28]; [24, 28]; [22, 26]; [24, 26]\}$  мм·10<sup>-2</sup> и  $Y = \{[29,32]; [31, 33]; [32, 34]; [31, 33]; [32, 35]\}$  мм·10<sup>-2</sup>.

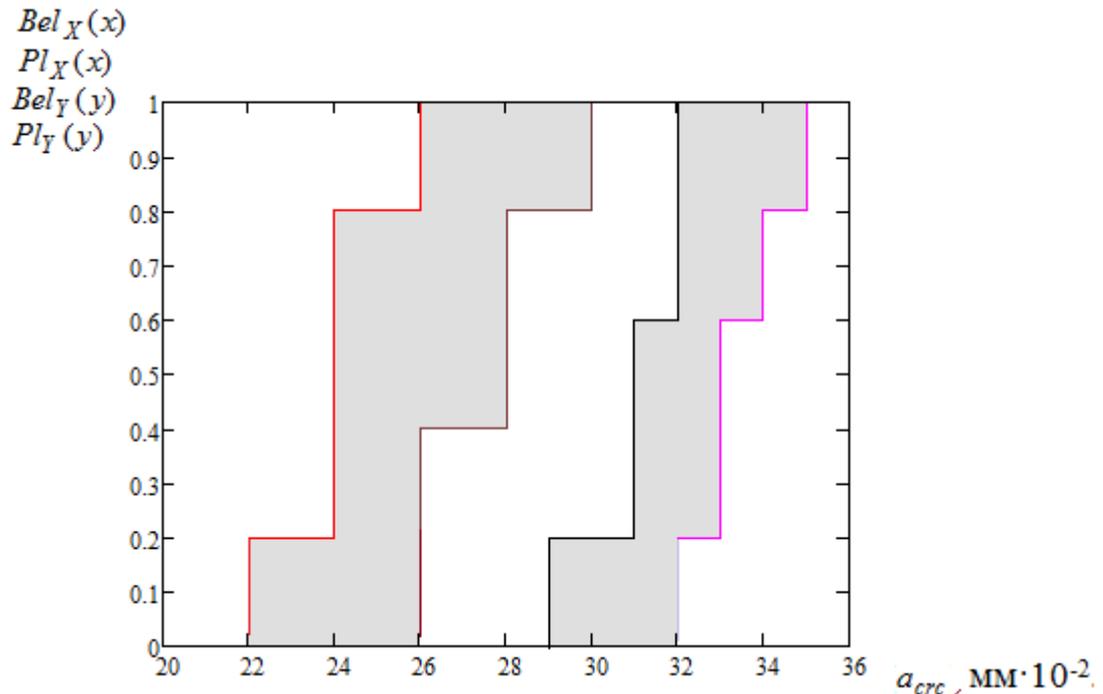


Рисунок 4.13 – Графики функций доверия и правдоподобия для примера 4.4

$$\bar{P} = \frac{1}{5}(1+1+1+1+1) = 1; \quad \underline{P} = \frac{1}{5}(0,8+1+1+1+1) = 0,96.$$

Надежность составит [0,96; 1].

При наличии нескольких трещин, надежность следует определять для каждой отдельной трещины, а полную надежность определять в виде:  $\left[ \prod_{i=1}^n P_i; \prod_{i=1}^n \bar{P}_i \right]$ , как отмечено выше.

#### Выводы по четвертой главе:

1. В главе приведен алгоритм расчета надежности элементов сооружений с использованием положений теории случайных множеств и с использованием расширенных функций доверия и правдоподобия;
2. Разработан метод расчета надежности эксплуатируемых железобетонных балок по отдельным критериям предельных состояний на основе теории случайных множеств для оценки надежности балки как последовательной механической системы из независимых элементов (критериев работоспособности);
3. Продемонстрированы алгоритмы определения вероятности безотказной работы в интервальной форме на основе числовых примеры расчета по различным критериям работоспособности;
4. Продемонстрировано применение расширенных функций доверия и правдоподобия для оценки статистического математического ожидания при интервальных статистических данных.

## ГЛАВА 5. ЭКСПЕРИМЕНТАЛЬНЫЕ ИССЛЕДОВАНИЯ ЖЕЛЕЗОБЕТОННОЙ БАЛКИ

Испытания проводились на железобетонной балке прямоугольного поперечного сечения размерами  $h=215$  мм;  $b=120$  мм. Пролет балки составлял 1000 мм. Схематично балка изображена на рисунке 5.1.

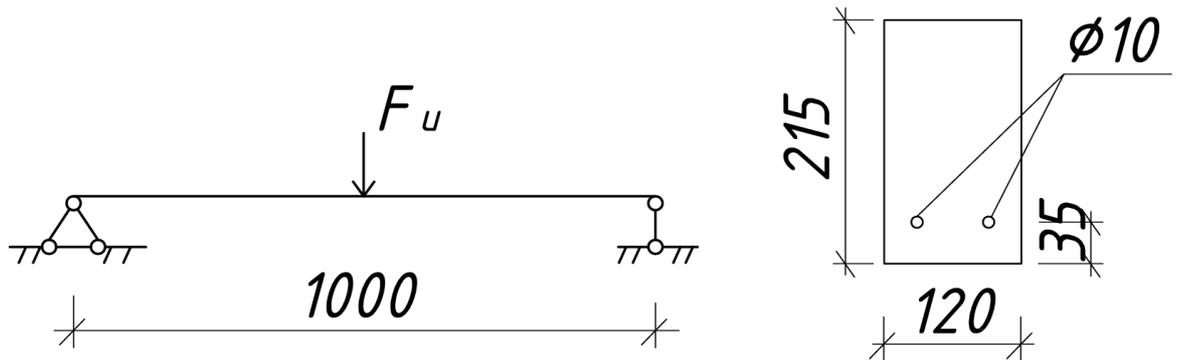


Рисунок 5.1 – Железобетонная балка и ее расчетная схема

Балка нагружалась (разгружалась) испытательной нагрузкой в виде сосредоточенной силы, приложенной в середине пролета. Испытания проводились в лаборатории кафедры ПГС на гидравлическом прессе ЗИМ П-50. В середине пролета балки был установлен индикатор часового типа с ценой деления 0,01 мм.



Рисунок 5.2 – Общий вид испытательной установки с гидравлическим прессом ЗИМ П-50

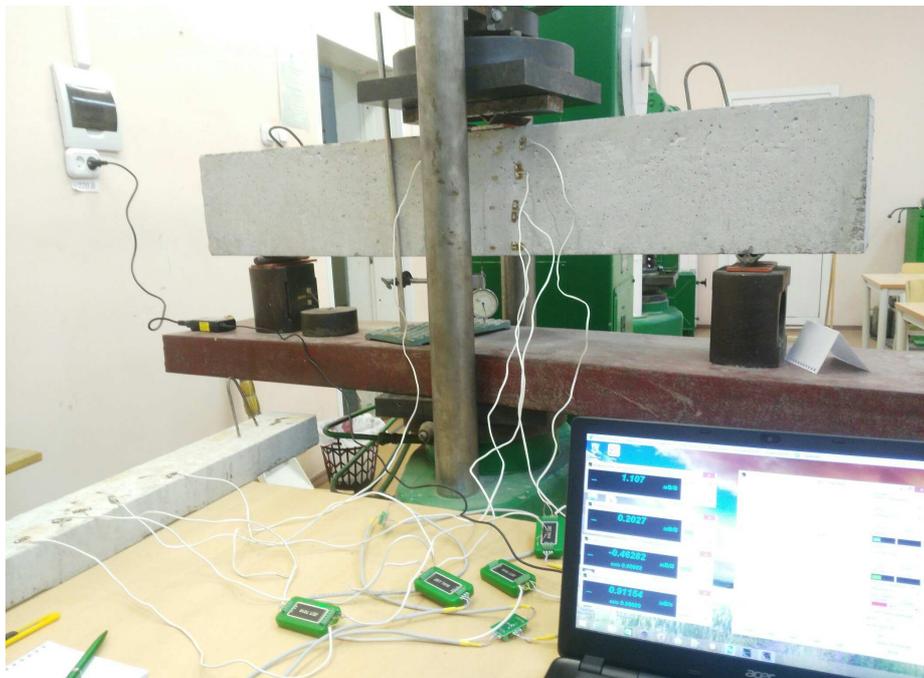


Рисунок 5.3 – Испытательная установка с железобетонной балкой



Рисунок 5.4 – Нормальные трещины в железобетонной балке при испытании

Таблица 5.1 – Данные эксперимента

	Исп. №1	№2	№3	№4	№5	№6	№7	Среднее	СКО
1 т.	0,50	0,68	0,88	0,70	0,70	0,75	0,80	0,72	0,11
2 т.	1,70	1,99	2,35	2,11	1,90	2,06	2,10	2,03	0,19
3 т.	2,85	2,98	3,50	3,45	3,10	3,18	3,23	3,18	0,22
4 т.	3,82	4,05	4,50	4,45	4,10	4,25	4,34	4,22	0,23
5 т.	4,99	5,12	5,50	5,50	5,25	5,45	5,37	5,31	0,19
6 т.	5,54	5,87	6,69	6,75	6,49	6,20	6,32	6,25	0,41

Предельный прогиб по СП 20.13330.2016 «Нагрузки и воздействия» составляет  $l/120=1000/120=8,33$  мм.

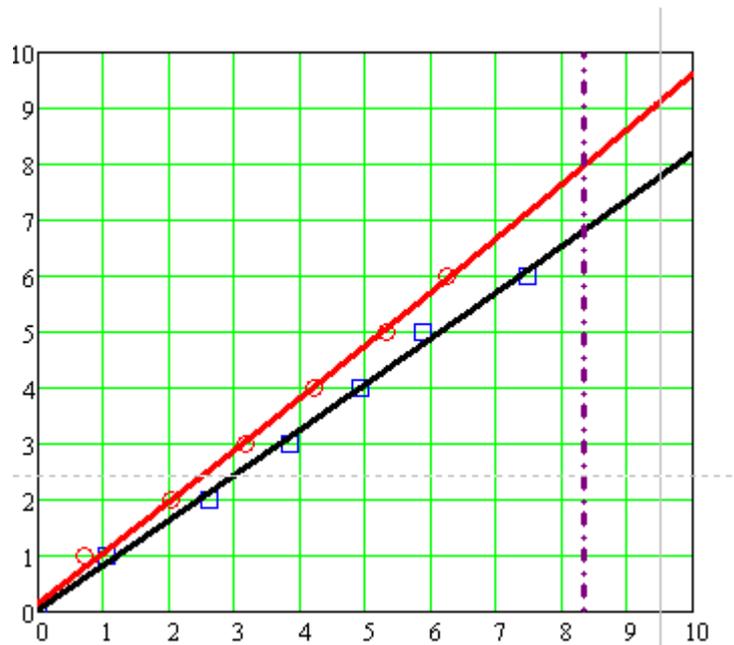


Рисунок 5.5 – Диаграмма «нагрузка-прогиб» и предельный прогиб

По результатам обработки данных путем аппроксимации получены следующие функции

$$F_{\bar{f}}(f) = 5,015 \cdot 10^{-3} f^2 + 0,896 f + 0,149,$$

$$F_{\bar{f}+3S_f}(f) = 2,042 \cdot 10^{-3} f^2 + 0,796 f + 0,032.$$

Несущая способность балки по критерию жесткости (прогиба) характеризуется интервалом  $[F_{\bar{f}}(f_{ult} = 8,33 \text{ т}) = 6,804; F_{\bar{f}+3S_f}(f_{ult} = 8,33 \text{ т}) = 7,961]$  т. Фактически предельный прогиб балки возник при нагрузке 7,3 т, что попадает в интервал  $[6,804; 7,961]$  т.

Также в процессе эксперимента проводились испытания по измерению длины трещины по новому способу. Тензорезисторы подключались по полумостовой схеме на датчики Zet 7010 производителя ZetLab и подключались к датчику Zet 7070 для передачи показаний на ПК.

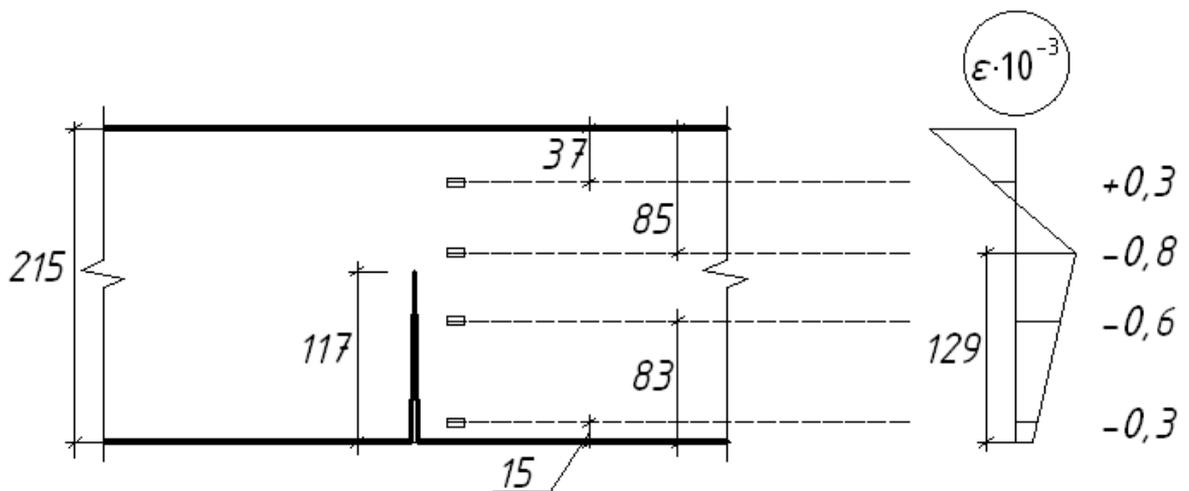


Рисунок 5.6 – Схема наклейки тензорезисторов вдоль длины трещины и эпюра относительных деформаций

При видимой длине трещины равной 117 мм, длина трещины, измеренная по разработанному способу, составляет 129 мм (с учетом зоны предразрушения).

#### Выводы по главе 5:

1. Проведены испытания железобетонной балки с целью выявления ее несущей способности по критерию жесткости (прогиба) и измерению длины нормальной трещины в растянутой зоне бетона разработанными способами;
2. В полученный интервал предельной нагрузки, характеризующий несущую способность железобетонной балки по вертикальным перемещениям, попало фактическое значение предельной нагрузки по результатам испытаний, что свидетельствует о достоверности разработанного способа;
3. Измеренная длина трещины превышает ее видимую длину, что может свидетельствовать об учете зоны предразрушения при измерении длины трещины по разработанному способу.

## ЗАКЛЮЧЕНИЕ

1. Разработаны способы определения остаточной несущей способности эксплуатируемых изгибаемых железобетонных элементов по отдельным критериям работоспособности в качестве необходимого параметра в расчетах надежности любых несущих элементов.

2. Разработан метод для расчета надежности изгибаемых железобетонных элементов с использованием теории возможностей и теории нечетких множеств.

3. Предложены практические рекомендации для назначения уровня среза при расчете типовых элементов сооружений на основе теории нечетких множеств и теории возможностей.

4. Разработан метод и алгоритмы расчетов вероятности безотказной работы для изгибаемых железобетонных элементов на основе теории случайных множеств и на основе расширенных функций доверия и правдоподобия.

5. Проведены экспериментальные испытания железобетонной балки для определения предельной нагрузки по критерию жесткости и измерения полной длины трещины с учетом разрыхления бетона в вершине трещины.

6. Преимуществом разработанных методов расчетов надежности перед вероятностно-статистическими подходами является то, что расчет надежности железобетонных элементов базируется исключительно на статистической информации, которая имеется по результатам испытаний, при отсутствии безосновательных гипотез и предположений.

7. Разработанные методы расчетов надежности изгибаемых железобетонных элементов могут быть использованы на практике специалистами эксплуатирующих служб, могут быть использованы исследователями в области теории надежности, а также могут быть использованы для оперативной оценки остаточной несущей способности и надежности железобетонных элементов после сейсмических воздействий, взрывов и пожаров.

**СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ**

1. Альфред, Г. Введение в интервальные вычисления / Г. Альфред, Ю. Херцбергер. – М.: Мир, 1987. – 360 с.
2. Аугусти, Г., Вероятностные методы в строительном проектировании. Пер. с англ. Ю.Д. Сухова / Г. Аугусти, А. Баратта, Ф. Кашати. – М.: Стройиздат, 1988. – 580 с.
3. Байда, Д.Н. Остаточная несущая способность железобетонных балок после их частичного разрушения: автореф. дис. канд. техн. наук / Д.Н. Байда. – Киев, 2005. – 21 с.
4. Байков, В. Н. Железобетонные конструкции (Общий курс) / В.Н. Байков, Э.Е. Сигалов. – М.: Стройиздат, 1991. – 767 с.
5. Баймаруков, С.Х. Прогибы железобетонных балок со смешанным армированием при многократно повторном нагружении / С.Х. Баймаруков // Бетон и железобетон. – 1999. – №4. – С. 12-14.
6. Барашиков, А.Я. Расчет железобетонных конструкций на действие длительных переменных нагрузок / А.Я. Барашиков. – Киев: Будивельник, 1977. – 156 с.
7. Бедов, А.И. Обследование и реконструкция железобетонных и каменных конструкций эксплуатируемых зданий и сооружений / А.И. Бедов, В.Ф. Сапрыкин. – М.: Изд-во АСВ. 1995. – 192 с.
8. Болотин, В. В. Прогнозирование ресурса машин и конструкций / В.В. Болотин. – М.: Машиностроение, 1984. – 312 с.
9. Верещагин, В.С. Определение прогибов многопролетных железобетонных балок с нормальными трещинами / В.С. Верещагин // Бетон и железобетон. – 2004. – №1. – С. 20-22.

10. Воронов, А.А. Сейсмостойкость одноэтажных каркасных зданий при знакопеременном нелинейном деформировании колонн: автореферат дисс...к.т.н. / А.А. Воронов. – Казань. 2000. – 21 с.
11. Гарбусенко, В.В. Аварии, дефекты и усиление железобетонных и каменных конструкций / В.В. Гарбусенко. – М.: АСВ, 2016. – 104 с.
12. Гвоздев, А.А. Новое в проектировании бетонных и железобетонных конструкций. Под общ. ред. А.А. Гвоздева / А.А. Гвоздев. – М.: Стройиздат, 1978. – 158 с.
13. Гроздов, В.Т. Признаки аварийного состояния несущих конструкций зданий и сооружений / В.Т. Гроздов. – СПб: Издательский Дом KN+, 2000. – 48 с.
14. Гуров, С.В. Надежность систем при неполной информации / С.В. Гуров, Л.В. Уткин. – СПб: Любович, 1999. – 166 с.
15. Джонсон, Н. Статистика и планирование эксперимента в технике и науке. Пер. с англ. Е.Г. Коваленко / Н. Джонсон, Ф. Лион. – М.: Мир, 1980. – 510 с.
16. Дзюба, В. А. Применение составной функции диаграммы сжатого бетона для деформационной оценки конструкций / В.А, Дзюба, Ю.С. Глушакова// «Ученые записки КнАГТУ». – 2014. – № II – 1(18). – С. 109 – 114.
17. Добромыслов, А.Н. Диагностика повреждений зданий и инженерных сооружений / А.Н. Добромыслов. – М.: АСВ, 2007. – 256 с.
18. Ермолаев, Н.Н. Надежность оснований сооружений / Н.Н. Ермолаев, В.В. Михеев. – Л.: Стройиздат, 1976. – 152 с.
19. Заде, Л. Понятие лингвистической переменной и его применение к принятию приближенных решений / Л. Заде. – М.: Мир, 1976. – 165 с.
20. Зайцев, Ю.В. Механика разрушения для строителей / Ю.В. Зайцев. – М.: Высш. шк., 1991. – 287 с.

21. Зайцев, Ю.В. Моделирование деформаций и прочности бетона методами механики разрушения / Ю.В. Зайцев. – М: Стройиздат, 1982. – 196 с.
22. Землянский, А. А. Обследование и испытание зданий и сооружений / А.А. Землянский. – М.: АСВ, 2004. – 245 с.
23. Золина, Т. В. Сводный алгоритм расчета промышленного объекта на действующие нагрузки с оценкой остаточного ресурса / Т.В. Золина // Промышленное и гражданское строительство. – 2014. – № 6. – С. 3-5.
24. Карпенко, Н. И. Исходные и трансформированные диаграммы деформирования бетона и арматуры / Н.И. Карпенко, Т.А. Мухамедиев, А.Н. Петров // Напряженно-деформированное состояние бетонных и железобетонных конструкций. – М.: НИИЖБ, 1986. – С. 7-25.
25. Карпенко, Н.И. К оценке прочности, жесткости, момента образования трещин и их раскрытия в зоне чистого изгиба железобетонных балок с применением нелинейной деформационной модели / Н.И. Карпенко, Б.С. Соколов, О.В. Радайкин // Известия высших учебных заведений. Строительство. – 2016. №3. – С. 5-12.
26. Карпенко, Н.И. К совершенствованию диаграмм деформирования бетона для определения момента трещинообразования и разрушающего момента в изгибаемых железобетонных элементах / Н.И. Карпенко, О.В. Радайкин // Строительство и реконструкция. – 2012. – №3. – С. 10-16.
27. Клевцов, В.А.. Вопросы проектирования конструкций с использованием теории надежности / В.А. Клевцов, Д.В. Кузеванов // Бетон и железобетон. – 2009. – №2. – С. 9-13.
28. Кодыш, Э.Н. Анализ деформативности изгибаемых железобетонных элементов / Э.Н. Кодыш, Н.Н. Трекин, Д.Н. Трекин // Промышленное и гражданское строительство. – 2013. – №6. – С. 59-61.

29. Козачек, В.Г. Обследование и испытание зданий и сооружений / В.Г. Козачек, Н.В. Нечаев, С.Н. Нотенко. – М.: Высшая школа, 2004. – 447 с.
30. Коробейников, О. П. Обследование технического состояния зданий и сооружений (основные правила) / О.П. Коробейников, А.И. Панин, П.Л. Зеленев. – Нижний Новгород: ННГАСУ, 2011. – 56 с.
31. Краснощеков, Ю.В., Заполева М.Ю. Вероятностное проектирование конструкций по заданному уровню надежности / Ю.В. Краснощеков, М.Ю. Заполева // Вестник СибАДИ. – 2015. – Вып. 1 (15). – С. 68-73.
32. Круциляк, М.М. Метод определения критического коэффициента интенсивности напряжения бетона эксплуатируемых железобетонных конструкций: автореферат диссертации на соискание ученой степени к.т.н. / М.М. Круциляк. – Магнитогорск: ГОУ ВПО МГТУ им. Г.И. Носова, 2010. – 19 с.
33. Кудзис, А.П. Оценка надежности железобетонных конструкций / А.П. Кудзис. – Вильнус: Мокслас, 1985. – 156 с.
34. Куранов, Д.В. Совершенствование способа геодезического контроля стропильных конструкций при проведении экспертизы промышленной безопасности / Д. В. Куранов, Д. П. Клочков, Е. Ю. Козловцева // Интернет-вестник ВолгГАСУ. – 2015. – Вып. 2(38). – С. 6. – Режим доступа: <http://www.vestnik.vgasu.ru/>
35. Куранов, Д. В. Особенности диагностирования зданий эксплуатирующихся в сложных гидрогеологических условиях / Д. В. Куранов, А.Е. Стародубцев // Евразийский научный журнал. – 2015. – № 12. – С. 367-369.
36. Лотыш, В.В. Определение несущей способности железобетонных балок при изгибе с учетом трещинообразования. Анализ развития трещин: автореферат дис. канд. техн. наук / В.В. Лотыш. – Львов, 2001. – 23 с.
37. Лужин, О.В. Вероятностные методы расчета сооружений / О.В. Лужин. – М.: МИСИ, 1983. – 123 с.

38. Лужин, О.В. Обследование и испытание сооружений / А.Б. Злочевский, И.А. Горбунов, В.А. Волохов. – М.: Стройиздат, 1987. 269 с.
39. Лычев, А.С. Надежность строительных конструкций: учеб. пособие / А.С. Лычев. – М.: Изд. АСВ, 2008. – 188 с.
40. Мацулевич, О.В. Определение модуля упругости бетона методом динамического индентирования / О.В. Мацулевич, В.А. Рудницкий, Д.А. Литвиновский // Неразрушающий контроль и диагностика. – 2012. – № 4. – С. 46 - 56.
41. Митасов, В.М. Концепция предельных состояний и их проверка по российским нормам и Еврокодам / В.М. Митасов, В.В. Адищев, Н.В. Стаценко // Известия высших учебных заведений. Строительство. – 2017. – №8. – С. 15-23.
42. Моисеенко, Р.П. Начальная надёжность железобетонной балки: методические указания / Сост. Р.П. Моисеенко. – Томск: Изд-во Том. гос. архит.-строит. ун-та, 2014. – 23 с.
43. Николаева, Е.А. Основы механики разрушения / Е.А. Николаева. – Пермь: Пермский Государственный Технический Университет, 2010. – 103 с.
44. Панфилов, Д.А. Обзор существующих диаграмм деформирования бетона при сжатии в отечественных и зарубежных нормативных документах / Д.А. Панфилов, А.А. Пищулев, К.И. Гимадетдинов // Промышленное и гражданское строительство. – 2014. – №3. – С. 80-84.
45. Пат. 2006813 РФ МПКG01N3/00. Способ неразрушающего контроля прочности строительных конструкций / Уткин В.С., патентообладатель: ВоГТУ. опубл. 30.01.1994.
46. Пат. 2161778 РФ МПК G01N3/10. Способ неразрушающего контроля несущей способности строительных конструкций / Уткин В.С., Голикова Л.В., Патентообладатель: ВоГТУ. опубл. 10.01.2001.

47. Пат. 2275613 РФ МПК G01N3/00. Способ неразрушающего контроля несущей способности железобетонных конструкций / В.С. Уткин, Ж.В. Кошелева. Заявитель и патентообладатель: ВоГТУ. опубл. 25.05.2004.

48. Пат. 2302610 МПК G01B7/16. Способ определения напряженно-деформированного состояния конструкций без снятия нагрузок / Бычков Н.Н., Елгаев С.Г., Ершов А.В. и др. Патентообладатель: Военный инженерно-технический университет. опубл. 10.07.2007.

49. Пат. 2460057. Способ неразрушающего определения несущей способности строительных конструкций / В.С. Уткин, А.Н. Редькин. Заявитель и патентообладатель: Вологодский государственный технический университет. опубл. 27.08.2012.

50. Пат. 2533343 МПК G01B7/16. Способ измерения прогибов балок / Уткин В.С., Булычев А.Н. Патентообладатель: Вологодский государственный университет. опубл. 20.11.2014.

51. Пат. 336507 МПК G01B11/16. Способ измерения прогибов конструкций / Упадышев Б.Л., Наумов М.П., Лейбов В.Г., Тимофеев А.И. опубл. 01.01.1972.

52. Пат. 2582495 МПК C01L1/18. Способ измерения и мониторинга давления на бетонные и кирпичные несущие стены и фундаменты зданий и сооружений на заданном уровне на стадии их эксплуатации / Уткин В.С., Тропина Д.В., Горева Н.В. Патентообладатель: Вологодский государственный университет. опубл. 27.04.2016.

53. Пат. 2596694. МПК G01B7/00. Способ измерения длины трещины и скорости ее развития в изгибаемых и растянутых элементах конструкций / Уткин В.С., Соловьев С.А., Каберова А.А., Русанов В.В. Патентообладатель: ФГБОУ ВО «ВоГУ». опубл. 27.07.2015.

54. Перельмутер, А.В. Развитие требований к безотказности сооружений / А.В. Перельмутер // Вестник ТГАСУ. – 2015. – №1. – С. 81-101.

55. Пирадов, К.А. Механика разрушения и теория железобетона / К.А. Пирадов, Н.В. Савицкий // Бетон и железобетон. – 2014. – № 4. – С. 23-25.
56. Попов, Н.Н. Проектирование и расчет железобетонных и каменных конструкций / Н.Н. Попов, А.В. Забегаев. – М.: Высшая школа, 1989. – 400 с.
57. Работонов, Ю.Н. Ползучесть элементов конструкций / Ю.Н. Работонов. – М.: Наука, 1966. – 753 с.
58. Радайкин, О.В. К совершенствованию методики расчета жесткости изгибаемых железобетонных элементов из обычного железобетона / О.В. Радайкин // Известия КГАСУ. – 2012. – №1(19). – С. 59-66.
59. Райзер, В.Д. Очерк развития теории надежности и норм проектирования строительных конструкций // Сейсмостойкое строительство и безопасность. – 2014. – №2. – С. 29-35.
60. Райзер, В.Д. Теория надежности сооружений / В.Д. Райзер. – М.: АСВ, 2010. – 384 с.
61. Расторгуев, Б.С. Расчет железобетонных конструкций с применением вероятностного метода / Б.С. Расторгуев, С.В. Дахи // Промышленное и гражданское строительство. – 2016. – №7. – С. 11-15.
62. Ржаницын, А.Р. Теория расчета строительных конструкций на надежность / А.Р. Ржаницын. – М.: Стройиздат, 1978. – 289 с.
63. Рибицки, Р. Повреждения и дефекты в строительных конструкциях / пер. с нем. К.Ф. Плитта. – М.: Стройиздат, 1982. – 432 с.
64. Ройтман, А. Г. Надежность конструкций эксплуатируемых зданий / А.Г. Ройтман. – М.: Стройиздат, 1985. – 175 с.
65. Рябушко, А.П. Индивидуальные задания по высшей математике. Часть 4 / А.П. Рябушко. – Минск: «Вышэйшая школа», 2006. – 336 с.

66. Савицкий, Н.В. Вероятностные методы определения надежности внецентренно сжатых железобетонных элементов с большими эксцентриситетами / Н.В. Савицкий, Т.Ю. Шевченко, В.В. Гончаренко // Вестник ПДАБА. – 2011. – №8. – С. 28-32.
67. Сазыкин, И.А. Обследование и испытание сооружений / И.А. Сазыкин. – М.: РГОТУПС, 2003. – 94 с.
68. Сафронов, В.С. Расчетная оценка вероятности разрушения железобетонной балки по наклонному сечению при изгибе / В.С. Сафронов, Ж.Д.Д. Ншимиримана // Строительная механика и конструкции. – 2016. – Т. 2. – № 13 (13). – С. 63-70.
69. Соколов, В.А. Оценка технического состояния и надежности строительных конструкций на основе вероятностных методов технической диагностики / В.А. Соколов // Современные проблемы науки и образования. – 2013. – № 6. – С. 167-175.
70. Стрелецкий, Н.С. Основы статистического учета коэффициента запаса прочности сооружений / Н.С. Стрелецкий. – М.: Стройиздат, 1947. – 96 с.
71. Тамразян, А.Г. Бетон и железобетон – проблемы и перспективы / А.Г. Тамразян // Промышленное и гражданское строительство. – 2014. – №8. – С. 30-33.
72. Тамразян, А.Г. Оценка риска и надёжности несущих конструкций и ключевых элементов - необходимое условие безопасности зданий и сооружений / А.Г. Тамразян // Вестник ЦНИИСК. – 2009. – №1. – С. 160 - 171.
73. Уздин, А.М. Применение теории риска к подбору теплозащиты зданий / А.М. Уздин, Т.А. Белаш, А.А. Иглина // Промышленное и гражданское строительство. – 2017. - №12. – С. 97-100.
74. Уткин, В.С. Значение уровня риска в теории возможностей / В.С. Уткин // Строительные материалы. – №8. – 2004. – С. 35.

75. Уткин, В.С. Несущая способность и надежность строительных конструкций / В.С. Уткин, Л.В. Уткин. – Вологда: ВоГУ, 2000. – 152 с.
76. Уткин, В.С. Новые методы расчетов надежности строительных конструкций / В.С. Уткин, Л.В. Уткин. – Вологда: ВоГТУ, 2011. – 98 с.
77. Уткин, В.С. Определение несущей способности железобетонных балок на стадии эксплуатации при наличии трещин в бетоне / В.С. Уткин, С.А. Соловьев // Вестник гражданских инженеров. – 2015. – №6(53). – С. 58-64.
78. Уткин, В.С. Определение несущей способности и надежности стальной балки на стадии эксплуатации с использованием теории свидетельств Демпстера–Шефера / В.С. Уткин, С.А. Соловьев // Деформация и разрушение материалов. – 2015. – № 7. – С. 10-15.
79. Уткин, В.С. Определение остаточной несущей способности железобетонных балок на стадии эксплуатации по критерию прочности арматуры и бетона / В.С. Уткин // Инженерно-строительный журнал. – №1. – 2015. – С. 15-23.
80. Уткин, В.С. Определение остаточной несущей способности и надежности железобетонных балок по критерию ширины раскрытия трещин / В.С. Уткин, С.А. Соловьев // Бетон и железобетон. – 2016. – №1. – С. 20-25.
81. Уткин, В.С. Расчет надежности внецентренно сжатой бетонной колонны с использованием функций распределения, на основе неравенства Чебышева / В.С. Уткин, О.В. Ярыгина // Academia. Архитектура и строительство. – 2010. – №3. – С. 644-647.
82. Уткин, В.С. Расчет надежности грунтовых оснований и фундаментов машин при ограниченной информации на стадии эксплуатации: монография / В.С. Уткин, Л.В. Уткин. – Вологда: ВоГТУ, 2013. – 124 с.

83. Уткин, В.С. Расчет надежности железобетонной балки на стадии эксплуатации по критерию длины трещины в бетоне / В.С. Уткин, С.А. Соловьев // Вестник МГСУ. – 2016. – №1. – С. 68-79.

84. Уткин, В.С. Расчет надежности строительных конструкций при различных способах описания неполноты информации: учебное пособие / В.С. Уткин, Л.В. Уткин. – Вологда: ВоГТУ, 2009. – 126 с.

85. Уткин, В.С. Уточнение расчетных схем балок и рам на стадии эксплуатации и проверочный расчет их по несущей способности / В.С. Уткин // Строительная механика и расчет сооружений. – 2015. – №1. – С. 6-10.

86. Уткин, В.С. Определение надежности железобетонных элементов при наличии в них силовых трещин, нормальных к продольной оси / В.С. Уткин, Л.В. Уткин // Бетон и железобетон. – 1999. – №1. – С. 15-16.

87. Уткин, В.С. Определение остаточной несущей способности железобетонных балок по критерию жесткости (прогиба) / В.С. Уткин, С.А. Соловьев // Инженерно-строительный журнал. – 2015. – №4. – С. 45-53.

88. Уткин, В.С. Значение уровня среза (риска) при расчете надежности несущих элементов вероятностным методом / В.С. Уткин, С.А. Соловьев, А.А. Каберова // Строительная механика и расчет сооружений. – 2015. – № 6. – С. 63-67.

89. Уткин, В.С.. Расчет надежности элементов конструкций по критерию несущей способности с использованием теории свидетельств Демпстера-Шефера / В.С. Уткин, С.А. Соловьев // Строительная механика и расчет сооружений. – 2015. – №5. – С. 38-45.

90. Уткин, Л.В. Анализ риска и принятие решений при неполной информации / Л.В. Уткин. – СПб: Наука, 2007. – 404 с.

91. Чирков, В.П. Прикладные методы теории надежности в расчетах строительных конструкций / В.П. Чирков. – М.: Маршрут, 2006. – 620 с.

92. Шишкин, Н.Ф. Основы метрологии, стандартизации и контроля качества: Учеб. пособие / Н.Ф. Шишкин. – М.: Изд-во стандартов, 1987. – 320 с.
93. Шор, Я. Б. Статистические методы анализа и контроля качества и надежности / Я.Б Шор. – М: Советское Радио, 1962. – 553 с.
94. Шпете, Г. Надежность несущих строительных конструкций. Пер. с нем. О.О. Андреева / Г. Шпете. – М.: Стройиздат, 1994. – 288 с.
95. Юделевич, А.М. О неопределенности исходной информации при оценке надежности бетонных плотин (в рамках структурной теории) / А.М.Юделевич // Гидротехническое строительство. – 2017. - №8. – С. 122-129.
96. Яковлев, О.В. Системный анализ безопасности функционирования перспективных космических аппаратов: автореферат на соискание степени доктора технических наук / О.В Яковлев. – М: 2012. – 37 с.
97. Ярыгина, О.В. Методы расчета надежности железобетонных конструкций в составе зданий и сооружений при ограниченной статистической информации: автореферат на соискание ученой степени кандидата технических наук / О.В. Ярыгина. – Санкт-Петербург. 2013. – 24 с.
98. Al-Ansari, M. Reliability and flexural behavior of triangular and T-reinforced concrete beams / M. Al-Ansari // International journal of advanced structural engineering. – 2015. – Vol. 7. – Issue 10. – pp. 377-386.
99. Augusti, G., Baratta A., Casciati F. Probabilistic methods in structural engineering / G. Augusti., A. Baratta, F. Casciati. – London, New York: Chapman and Hall, 1984. – 556 p.
100. Aven, T. Interpretations of alternative uncertainty representations in a reliability and risk analysis context / T. Aven // Reliability Engineering & System Safety. 2011. – Vol.96. – Issue 3. – pp. 353-360.
101. Aven, T. Some considerations on the treatment of uncertainties in risk assessment for practical decision making / T. Aven, E. Zio // Reliability Engineering & System Safety. – 2011. – Vol. 96. – Issue 1. – pp. 64-74.

102. Bernard, J.M. Analysis of Local or Asymmetric Dependencies in Contingency Tables using the Imprecise Dirichlet Model / J.M. Bernard // International Symposium on Imprecise Probabilities and Their Applications. – 2003. – pp. 46-62.
103. Bigaud, D. Time-variant flexural reliability of RC beams with externally bonded CFRP under combined fatigue-corrosion actions / D.Bigaud, O. Ali // Reliability Engineering & System Safety. – 2014. – Vol. 131. – pp. 257–270.
104. Bin Suo. An Evidence Theory-based algorithm for System Reliability Evaluation under Mixed Aleatory and Epistemic Uncertainties / Bin Suo // International Journal of Nonlinear Sciences and Numerical Simulation. – 2014. – Vol. 1. – pp. 3-4.
105. Bischoff, P. H. Rational Model for Calculating Deflection of Reinforced Concrete Beams and Slabs / P.H. Bischoff // Canadian Journal of Civil Engineering. 2007. – Vol. 34. – No. 8. – pp. 992-1002.
106. Cao, D.F. Study on the flexural behaviors of RC beams after freeze-thaw cycles / D.F. Cao, W.J. Ge, B.Y. Wang, Y.M. Tu // International Journal of Civil Engineering. – 2015. – Vol. 13. – No. 1. – pp. 92-101.
107. Caspeelee, R. Influence of quality control of concrete on structural reliability: assessment using a Bayesian approach / R. Caspeelee, R.Taerwe, M. Sykora // Materials and Structures. – 2014. – Vol. 47. – №1. – pp. 105-116.
108. Chien-Kuo Chiu. Risk assessment of environmental corrosion for reinforcing steel bars embedded in concrete in Taiwan / Chien-Kuo Chiu, Fung-Chung Tu, Cheng-Yu Fan // Natural Hazards. – 2015. – Vol. 75. – Issue 1. – pp. 581–611.
109. Dempster, A.P. Upper and lower probabilities induced by multivalued mapping / A.P. Dempster // Annals of Mathematical Statistic. – 1967. – Vol. 38. – No. 2. – pp. 325-329.
110. Dubois, D. Possibility theory / D. Dubois, H. Prade. – New York: Plenum Press. 1988. – 411 p.

111. Eom, S.J. Managing concrete crack information through correction of the slab rebar arrangement based on Six Sigma / Eom S.J., Won-Suk Jang, Sang-chul Kim // *KSCE Journal of Civil Engineering*. – 2015. – Vol. 19. – Issue 7. – pp. 1973–1981.
112. Guimaraes H., Matos J.C., Henriques A.A. An innovative adaptive sparse response surface method for structural reliability analysis // *Structural Safety*. 2018. Vol. 73. 2018. pp. 12-28.
113. Hassane, Ousalem. Seismic Performance and Flexural Stiffness Variation of Assembled Precast High-Strength Concrete Beam Jointed at Mid-Span Using Transverse Bolts / Hassane Ousalem // *Journal of advanced concrete technology*. – 2009. – Vol. 7. No. 2. – pp. 205-216.
114. Hojatkashani, A. Experimental examination of CFRP strengthened RC beams under high cycle fatigue loading / A. Hojatkashani, M. Z. Kabir // *International Journal of Civil Engineering*. – 2012. – Vol. 10. – No. 4. – pp. 291-300.
115. Hughli, D., Marzouk H. Crack width monitoring system for reinforced concrete beams using piezo-ceramic sensors / D. Hughli, H. Marzouk // *Journal of Civil Structural Health Monitoring*. – 2015. – Vol. 5. – Issue 1. – pp. 57–66.
116. Jiang, C. A response surface approach for structural reliability analysis using evidence theory / C. Jiang // *Advances in Engineering Software*. – 2014. – No. 69. – pp. 37-45.
117. Jiang, C. An evidence-based reliability analysis method for uncertain structures / C. Jiang, Z. Zhang, X. Han // *Chinese Journal of Theory Applied Mechanics*. – 2013. – No. 45(1). – pp. 103 – 118.
118. Kang, Seok Lee. Experimental study of sprayed FRP system for strengthening reinforced concrete beams / Kang Seok Lee // *Journal of advanced concrete technology*. – 2012. – Vol. 10. – No. 6. – . pp. 219-230.
119. Krejca M., Janas P., Krejca V. Structural reliability analysis using DOProC method // *Procedia Engineering*. 2016. No. 142. pp. 34 – 41.

120. Li H., Nie X. Structural reliability analysis with fuzzy random variables using error principle // *Engineering Applications of Artificial Intelligence*. 2018. Vol. 67. pp. 91-99.
121. Magalhaes, F.M. The problem of non-compliant concrete and its influence on the reliability of reinforced concrete columns / F.M. Magalhaes etc. // *Materials and Structures*. – 2016. – Vol. 49. – №4. – pp. 1485-1497.
122. Mohammad, H.D. Probabilistic assessment of torsion in concrete beams externally strengthened with CFRP composites / H.D. Mohammad, J. Fadaee // *Materials and Structures*. – 2014. – Vol. 47. – Issue 5. – pp. 885–894.
123. Mohammed Mansour Kadhum. Fire resistance of reinforced concrete rigid beams / Mohammed Mansour Kadhum // *Journal of civil engineering and construction technology*. 2014. – Vol. 5. – No. 5. – pp. 35-48.
124. Mohebimoghaddan, B. Evolution of the corrosion and strength of concrete exposed to sulfate solution / B. Mohebimoghaddan, S.H. Dianat // *International Journal of Civil Engineering and Technology*. – 2012. – Vol. 3. – Issue 2. – pp. 158-206.
125. Motohiro, Ohno. An investigation into the long-term excessive deflection of PC Viaducts by using 3d multi-scale integrated analysis / Motohiro Ohno, Nobuhiro Chijiwa, Benny Suryanto, Koichi Maekawa // *Journal of advanced concrete technology*. 2012. – Vol. 10. – No. 2. – pp. 47-58.
126. Ning-Cong Xiao. Non-probabilistic reliability sensitivity analysis of the model of structural systems with s interval variables whose state of dependence is determined by constrains / Ning-Cong Xiao, Hong-Zhong Huang, Yan-Feng Li, Zhonglai Wang, Xiao-Ling Zhang // *Proceedings of the Institution of Mechanical Engineers. Part 06. Journal of Risk and Reliability*. – 2013. – Vol. 227. – Issue 5. – pp. 491-498.
127. Pugsley A. The safety of structures. – Arnold. London, 1966. 156 p.

128. Rüsçh, H., Sell R., Rackwity R. Statistische Analise der Betonfestigkeit / H. Rüsçh, R. Sell, R. Rackwity. – Berlin: Dentschee Ausschup fü Stanleton. 1969. – 206 p.
129. Saeed, A. Control of flexural cracks in a simply supported beam by epoxy injection technique / A. Saeed, E. Ayub, E. M Yaqoob // 35th Conference on Our world in concrete & structures, 2010. Vol. 1. Pp. 1-10.
130. Shafer, G.A. Mathematical Theory of Evidence / G.A. Shafer. – Princeton University Press. 1976. – 297 p.
131. Shahnewaz, M. Optimized shear design equation for slender concrete beams reinforced with FRP bars and stirrups using Genetic Algorithm and reliability analysis / M. Shahnewaz, R. Machial, A. Shahria // Engineering Structures. – 2016. – Vol. 107. – pp. 151-165.
132. Sharvil, A.F., Nikil N., Shiddhartha G. Reliability of a corroded RC beam based on Bayesian updating of the corrosion model / A.F. Sharvil, N. Nikil, G. Shiddhartha // Engineering Structures. – 2016. – Vol. 126. – pp. 457-468.
133. Tonon, F. Determination of parameters range in rock engineering by means of random set theory / F. Tonon, A. Bernardini, A. Mammino // Reliability Engineering and Systems Safety. – 2000. – No. 70. – P. 61.
134. Torres, J. Influence of Crack Width on Long Term Degradation of Concrete Structures / J. Torres, C. Andrade // Durability of Reinforced Concrete from Composition to Protection. – 2013. – pp 87-98.
135. Utkin L.V. On new cautious structural reliability models in the framework of imprecise probabilities / L.V. Utkin, I. Kozine // Structural Safety. – 2010. – Vol. 32. – Issue 6.– pp. 411-416.
136. Utkin, V.S. Safety analysis of the soil beds of foundations based on bearing-capacity criterion. Soil Mechanics and Foundation Engineering, Vol. 51, No. 1, March, 2014 (Russian Original No. 1, January-February, 2014). pp. 9-16.

137. Walley, P. Measures of uncertainty in expert systems / P. Walley // *Artificial Intelligence*. – 1996. – Vol. 83. – pp. 1-58.
138. Xiea, H. Reliability analysis of RC T-beam highway bridges in China based on a virtual bridge dataset / H. Xiea, Y. Wanga, R. Zoub // *Engineering Structures*. – 2015. – Vol. 104. – pp. 133-140.
139. Yan Wang. Imprecise probabilities based on generalized intervals for system reliability assessment / Yan Wang // *International Journal of Reliability and Safety*. – 2010. – Vol. 4. – No. 4. – pp. 319-342.
140. Zadeh, L. A. Fuzzy sets / L.A. Zadeh // *Information and Control*. – 1965. – Vol. 8. – No. 3. – pp. 338-353.
141. Zadeh, L. Fuzzy Sets as the Basis for a Theory of Possibility / L.A. Zadeh // *Fuzzy Sets and Systems*. – 1978. – No. 1. – pp. 3-28.
142. Zhang, Z. A response surface approach for Structure reliability analysis using evidence theory / Z. Zhang, C. Jiang, X. Han, H. Dean, S. Yu // *Advanced in Engineering Software*. – 2014. – pp. 37-45.

## ПРИЛОЖЕНИЕ 1. Справка о внедрении

ООО «Вологодский центр комплексного  
проектирования и обследования»  
ОГРН 1133525015909; ИНН 3525308200;  
КПП 352501001  
160000, Вологодская область, город  
Вологда, проспект Победы, 67, 1  
Телефон: (8-8172) 21-10-32  
E-mail: [yckpo@mail.ru](mailto:yckpo@mail.ru)

**СПРАВКА**

о внедрении результатов диссертационной работы

Настоящая справка подтверждает, что положения диссертационной работы «Методы расчетов надежности изгибаемых железобетонных элементов при ограниченной статистической информации» аспиранта ФГБОУ ВО «Вологодский государственный университет» Соловьева Сергея Александровича приняты для использования их при обследовании и испытании железобетонных балок и плит в составе зданий и сооружений.

Справка выдана для предоставления в диссертационный совет Д 212.223.03 при ФГБОУ ВО «Санкт-Петербургский государственный архитектурно-строительный университет».

Директор ООО «Вологодский центр  
комплексного проектирования и обследования»

\_\_\_\_\_ к.т.н. Кабанов Е.А.

