

На правах рукописи



АСКИНАЗИ ВЛАДИМИР ЮРЬЕВИЧ

**ПРОСТРАНСТВЕННАЯ УСТОЙЧИВОСТЬ ЭЛЕМЕНТОВ
СТАЛЬНЫХ РАМНЫХ КОНСТРУКЦИЙ
ПЕРЕМЕННОЙ ЖЕСТКОСТИ**

Специальность 05.23.01 – Строительные конструкции, здания и сооружения

ДИССЕРТАЦИЯ

на соискание ученой степени
кандидата технических наук

Научный руководитель:
доктор технических наук, профессор
Белый Григорий Иванович

ОГЛАВЛЕНИЕ

ВВЕДЕНИЕ.....	5
ГЛАВА 1. АНАЛИЗ ИССЛЕДОВАНИЙ УСТОЙЧИВОСТИ СТЕРЖНЕВЫХ ЭЛЕМЕНТОВ РАМ ПЕРЕМЕННОЙ ЖЕСТКОСТИ.....	15
1.1. Применение стержневых элементов и рам переменной жесткости в несущих каркасах зданий и сооружений.....	15
1.2. Анализ решений бифуркационных задач устойчивости стержней переменной жесткости.....	23
1.3. Анализ исследований, посвященных расчету тонкостенных стержней по пространственно-деформированной схеме.....	32
1.3.1. Стержни постоянной жесткости.....	32
1.3.2. Стержни переменной жесткости.....	35
1.4. Анализ экспериментальных исследований пространственной устойчивости рам переменной жесткости и их элементов.....	42
Выводы по первой главе.....	45
ГЛАВА 2. БИФУРКАЦИОННЫЕ ЗАДАЧИ УСТОЙЧИВОСТИ СТЕРЖНЕЙ ПЕРЕМЕННОЙ ЖЕСТКОСТИ.....	47
2.1. Решение бифуркационных задач устойчивости.....	47
2.1.1. Устойчивость центрально-сжатого стержня по изгибной форме.....	50
2.1.2. Устойчивость внецентренно-сжатого стержня по изгибно-крутильной форме.....	57
2.2. Результаты решения задачи об устойчивости по изгибно-крутильной форме при различных схемах загрузки.....	62
2.2.1. Результаты определения критических параметров φ_{cr}	62
2.2.2. Результаты определения форм потери устойчивости.....	66
2.2.3. Сравнение результатов с численным решением методом конечных элементов.....	74
Выводы по второй главе.....	80

ГЛАВА 3. ПРОСТРАНСТВЕННЫЕ ДЕФОРМАЦИИ И УСТОЙЧИВОСТЬ СТЕРЖНЕЙ ПЕРЕМЕННОЙ ЖЕСТКОСТИ.....	82
3.1. Постановка задачи о пространственных деформациях и устойчивости стержней переменной жесткости.....	82
3.1.2. Особенности работы двутавровых стержней переменной жесткости.....	84
3.2. Определение НДС за пределом упругости. Алгоритм «Сечение».....	94
3.3. Определение упругих пространственных деформаций сечений тонкостенного стержня переменной жесткости. Алгоритм «Стержень».....	101
3.4. Определение пространственных деформаций в упруго-пластической стадии. Совместная работа алгоритмов «Стержень» и «Сечение».....	108
3.5. Пространственные деформации и устойчивость стержней переменной жесткости при различных геометрических параметрах и схемах нагружения.....	113
3.5.1. Пространственная устойчивость при различной гибкости.....	115
3.5.2. Пространственные деформации и устойчивость при различных углах наклона поясов.....	117
3.5.3. Пространственные деформации и устойчивость при различных углах наклона и сужения поясов.....	123
3.5.4. Пространственные деформации и устойчивость при стеснении депланации торцевых сечений.....	126
3.6. Сравнительное исследование пространственных деформаций и устойчивости стержней постоянного и переменного сечения равной массы.....	128
3.6.1. Сравнительное исследование стержней с переменной и постоянной высотой равной массы.....	128
3.6.2. Сравнительное исследование стержней с переменной шириной и высотой равной массы.....	133
3.7. Инженерная методика расчета.....	135
Выводы по третьей главе.....	141

ГЛАВА 4. СРАВНИТЕЛЬНЫЙ АНАЛИЗ ТЕОРЕТИЧЕСКИХ ИССЛЕДОВАНИЙ С ДАННЫМИ НАТУРНЫХ ИСПЫТАНИЙ ЗАРУБЕЖНЫХ АВТОРОВ.....	143
4.1. Испытания зарубежных авторов.....	143
4.1.1. Испытания J.B. Salter, D. Anderson, I.M. May.....	143
4.1.2. Испытания H. Shiomi, S. Nishikawa, M. Kurata.....	149
4.1.3. Испытания I.M. Cristutiu, D.L. Nunes, A.I. Dogariu.....	156
4.2. Численное исследование методом конечных элементов.....	162
Выводы по четвертой главе.....	174
ЗАКЛЮЧЕНИЕ.....	175
СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ.....	178
ПРИЛОЖЕНИЕ 1.....	198
ПРИЛОЖЕНИЕ 2.....	199

ВВЕДЕНИЕ

Актуальность темы исследования. На пути к снижению материалоемкости в рамных сварных сплошностенчатых несущих каркасах зданий и сооружений стало закономерным появление нескольких принципиально отличающихся способов экономии стали. Один из таких способов, часто встречающийся в современной практике строительства – применение в рамных конструкциях элементов с переменной жесткостью. В строительной отрасли под термином «элемент с переменной жесткостью», как правило, следует понимать сварные двутавровые стержни моно- или бисимметричного сечения с линейно-изменяющейся высотой стенки и постоянной шириной поясов. Данную особенность необходимо уточнить, поскольку в практике судо- и авиастроения стержни с переменной жесткостью могут иметь самые разнообразные поперечные сечения и иногда даже с переменной толщиной составляющих их листовых элементов [70, 99-102].

Таким образом, идея снизить расход стали в несущих каркасах была продиктована распределением усилий в поперечной раме, что позволило уменьшить высоту сечения там, где интенсивность изгибающего момента в плоскости рамы меньше и сделать его максимальным в тех местах, где это необходимо по расчету. Данная особенность стержней переменного сечения позволяет минимизировать вес рамной конструкции при обеспечении требуемых прочности, жесткости и устойчивости. По сравнению с рамами постоянного сечения из прокатных профилей сварные конструкции под эквивалентные нагрузки аналогичных габаритов, но с переменной высотой сечения, дают экономию массы металла 25-44% [3, 58, 91, 98, 107].

Помимо экономии стали, сварные рамные конструкции из элементов переменного сечения обладают следующими преимуществами: технологичность изготовления и монтажа; снижение капитальных затрат на строительство;

уменьшение (по сравнению с решетчатыми конструкциями) эксплуатационных расходов за счет небольшого строительного объема зданий с такими каркасами.

Основным нагружением любых стержневых элементов порталных рам, как известно, является сжатие с изгибом в плоскости рамы и из этой плоскости при необходимости учета случайных эксцентриситетов. В отечественных Нормах проектирования СП 16.13330.2011 «Стальные конструкции. Актуализированная редакция СНиП II-23-81*» отсутствуют какие-либо указания и положения по их расчету и проектированию, что сдерживает широкое применение таких конструкций на территории Российской Федерации. В настоящее время большинство встречающихся в России зданий с каркасами из рам переменной жесткости являются результатом проектирования зарубежных фирм, использующих собственный многолетний опыт расчета и проектирования таких конструкций по действующим нормам своих стран.

Существующий в литературе объем известных исследований пространственной устойчивости стержней с переменной жесткостью крайне ограничен и не позволяет создать практическую методику расчета в соответствии с отечественными Нормами.

В связи с изложенным, в настоящее время исследование пространственной устойчивости стержневых элементов рам переменной жесткости является актуальной задачей, решение которой позволит создать практическую методику их расчета, соответствующую отечественным Нормах проектирования.

Степень разработанности темы исследования. Вопрос устойчивости по пространственно-деформированной схеме тонкостенных стержней открытого профиля с постоянным сечением изучен достаточно подробно. Основы расчета таких элементов были заложены еще в прошлом веке в технической и деформационной теориях В.З. Власова, дополненные и расширенные такими учеными, как Б.М. Броуде, Л.Н. Воробьев, С.П. Вязьменский и др. Ключевые дифференциальные уравнения деформационной теории расчета тонкостенных призматических стержней были обобщены Е.А. Бейлиным. Следует отметить, что система дифференциальных уравнений равновесия тонкостенного стержня,

как правило, не имеет замкнутого решения даже при упругой стадии работы материала, поэтому рядом исследователей были предложены различные методы ее решения. Среди них следует выделить аналитически-численный метод Г.И. Белого, который позволяет относительно быстро и с высокой точностью получать решения задачи о пространственной устойчивости не только в упругой, но и в упруго-пластической стадиях работы материала. Данный метод для различных исследований стержней постоянной жесткости был применен многократно широким кругом авторов, среди которых И.В. Астахов, А.Ю. Кузнецов, В.Б. Мазур, В.В. Михаськин, Н.Г. Сотников, С.Н. Пичугин, П.А. Пяткин, Н.Н. Родиков и др.

Среди отечественных авторов, которые в настоящее время активно занимаются вопросами развития теории устойчивости и исследованиями тонкостенных стержней, также следует выделить работы Э.Л. Айрумяна, Л.М. Каган-Розенцвейга, И.И. Ведякова, М.И. Гуковой, В.Н. Симбиркина, В.В. Зверева, А.Р. Туснина, А.И. Данилова, О.А. Тусниной, Н.И. Ватина, В.В. Лалина, В.В. Улитина, И.Л. Кузнецова, А.У. Богдановича, В.В. Катюшина и др.

На постсоветском пространстве имеется крайне ограниченное число исследований, посвященных расчету стержневых элементов рам переменной жесткости на устойчивость по пространственно-деформированной схеме. К таким работам следует отнести исследования С.И. Билыка, А.У. Богдановича, А.У. Богдановича и И.Л. Кузнецова, а также А.И. Колесова в соавторстве с А.А. Лапшиным и А.В. Валовым. В работах С.И. Билыка исследуется «пространственная устойчивость» элементов рам переменной жесткости, однако сам термин «пространственная устойчивость» используется неправомерно, т.к. фактически автор рассматривает устойчивость по изгибно-крутильной форме. При этом в этих работах не учитываются особенности кручения стержней переменной высоты. В работах А.У. Богдановича и др. рассмотрены лишь стержни, которые используются в фермах, поэтому результаты исследований не могут быть распространены на элементы рам переменной жесткости. В работах А.И. Колесова и др. сделана попытка разработать инженерную методику расчета

несущей способности элементов рам переменной жесткости, однако данная попытка сделана на основании расчета всего 18 конечно-элементных моделей рам и не может быть использована в практике.

Из зарубежных исследований пространственной устойчивости двутавровых стержней переменной жесткости следует выделить работы следующих авторов: I.M. Aghoury и др., A. Andrade и др., N. Boissonnade и R. Maquoi, G.A. Jimenez, G.A. Jimenez и T.V. Galambos, B. Khaleghi, M.C. Kim и др., Y.D. Kim, Y.D. Kim и D.W. White, L.R.S. Marques, S. Rajasekaran, H.R. Ronagh и др., A.H. Salem и др., Y.-B. Yang и J.-D. Yau и др.

Большинство зарубежных исследований можно разделить на две группы. Первая группа исследований направлена на создание и совершенствование стержневого конечного элемента переменной жесткости, и в таких исследованиях, в основном, приведены только результаты базовых расчетов для проверки разработанных конечных элементов. Вторая группа исследований направлена на создание инженерных методик расчета элементов рам переменной жесткости для зарубежных норм, при этом исследования построены на результатах расчетов оболочечных моделей методом конечных элементов (МКЭ) в общеизвестных расчетных комплексах.

Следует отметить, что разработать инженерную методику расчета на пространственную устойчивость таких стержней, которая соответствовала бы действующему своду правил СП 16.13330.2011, на базе выполненных зарубежных исследований не представляется возможным по ряду причин. Во-первых, применение метода конечных элементов для получения широкого диапазона результатов, необходимых для разработки инженерной методики, представляется нерациональным ввиду значительного количества затрачиваемого времени. Во-вторых, существующий объем доступных результатов зарубежных исследований недостаточен для создания отечественной инженерной методики расчета. В-третьих, заимствование или адаптация зарубежных норм расчета таких элементов на устойчивость невозможны ввиду разности исторически сложившихся подходов в расчетах конструкций.

В свете сказанного, в настоящей диссертации для исследования пространственной устойчивости стержней переменной жесткости используется аналитически-численный метод Г.И. Белого, позволяющий получать результаты расчета на несколько порядков быстрее, чем при использовании МКЭ расчетных комплексов. Данное обстоятельство позволяет в короткие сроки получить широкий диапазон результатов для создания инженерной методики расчета таких стержней на устойчивость. Следует отметить, что при реализации указанного метода следует учитывать особенности стесненного кручения тонкостенных стержней переменной жесткости.

Цель исследования – разработка метода расчета на пространственную устойчивость стержневых элементов рамных конструкций переменной жесткости, обладающего быстродействием и достаточной точностью для построения инженерной методики.

В соответствии с поставленной целью решались следующие задачи:

1. Решение бифуркационных задач устойчивости центрально- и внецентренно-сжатых двутавровых стержней переменной жесткости с получением значений критических сил и соответствующих им изгибных и изгибно-крутильных форм потери устойчивости.

2. Разработка метода и программы определения напряженно-деформированного состояния, пространственной работы и устойчивости двутавровых стержней переменной жесткости.

3. Анализ пространственной устойчивости двутавровых стержней переменной жесткости при различных геометрических параметрах (гибкость, угол наклона и сужения поясов, и др.) и схемах загрузки.

4. Верификация достоверности результатов, получаемых с помощью разработанного метода, путем сравнения их с данными натурных экспериментов зарубежных авторов, а также с результатами численного исследования методом конечных элементов.

5. Разработка инженерной методики расчета на пространственную устойчивость стержневых элементов рамных конструкций переменной жесткости

при внецентренном сжатии с различными концевыми двухосными эксцентриситетами, соответствующей отечественным Нормам проектирования стальных конструкций СП 16.13330.2011.

Объект исследования – тонкостенный стержневой двутавровый элемент бисимметричного поперечного сечения, жесткость которого переменна по длине за счет линейно-изменяющейся высоты стенки и ширины поясов.

Предмет исследования – пространственная работа и устойчивость.

Научная новизна исследования.

1. Выполнено решение бифуркационных задач устойчивости центрально- и внецентренно-сжатых двутавровых стержней переменной жесткости. Получены и проанализированы новые результаты по критическим силам и соответствующим им изгибным и изгибно-крутильным формам потери устойчивости. Достоверность полученных результатов верифицирована путем их сравнения с результатами численного исследования методом конечных элементов.

2. Разработан метод и программа определения напряженно-деформированного состояния, пространственной работы и устойчивости двутавровых стержней переменной жесткости.

3. Получены новые результаты исследований о влиянии различных геометрических параметров (гибкость, угол наклона и сужения поясов, и др.) и схем загрузки двутавровых стержней переменной жесткости на их пространственную устойчивость.

4. Верифицирована достоверность получаемых с помощью разработанного метода результатов путем сравнения с данными натурных экспериментов зарубежных авторов, а также с результатами численного исследования методом конечных элементов.

5. Разработана инженерная методика расчета на пространственную устойчивость элементов рам переменной жесткости с введением новых коэффициентов устойчивости, соответствующих действующим Нормам проектирования стальных конструкций СП 16.13330.2011.

Методология и методы исследования. Методологической основой диссертационного исследования являются положения технической теории расчета тонкостенных упругих стержневых элементов открытого профиля, деформационные теории расчета таких стержней, труды отечественных и зарубежных авторов в области исследования работы и устойчивости стержней переменной жесткости за пределом упругости, а также аналитические и численные методы решения дифференциальных уравнений.

Теоретическая и практическая значимость работы. Разработанный метод и программа расчета позволяют на несколько порядков быстрее и без потери точности найти предельную силу для пространственно-деформируемых двутавровых элементов переменной жесткости, чем при использовании расчетных комплексов, реализующих расчет на основе метода конечных элементов.

Отмеченное преимущество позволило с наименьшей затратой времени разработать инженерную методику расчета на общую устойчивость двутавровых стержневых элементов переменной жесткости в форме действующих Норм проектирования стальных конструкций СП 16.13330.2011.

Разработанная инженерная методика расчета на пространственную устойчивость элементов рам переменной жесткости была принята ЦНИИСК им. В.А. Кучеренко для включения в СП «Конструкции стальные. Правила проектирования». Полученные результаты исследования используются при проектировании стальных рам переменной жесткости в ООО «ЦНИИПСК им. Мельникова».

Теоретические положения и полученные результаты исследований используются в учебном процессе ФГБОУ ВО «СПбГАСУ» при подготовке специалистов по уникальным зданиям и сооружениям и магистров по направлению 270800.68 «Строительство», а также при выполнении выпускных квалификационных работ, дипломных проектов и магистерских диссертаций.

Результаты диссертационной работы также могут быть применены при разработке иной нормативно-технической или справочной литературы по рамам

переменной жесткости и в практической работе инженеров-конструкторов при проектировании таких рам.

Личный вклад автора диссертации. Личное участие автора заключается в постановке цели и задач данного исследования, выборе предмета, объекта и методов исследования, разработке основных положений, определяющих научную новизну и практическую значимость работы, разработке метода и программы расчета стержней переменной жесткости на пространственную устойчивость, исследовании результатов при различных параметрах, создании инженерной методики расчета на устойчивость выделенных из конструкции элементов, верификации разработанного метода расчета на пространственную устойчивость. Все результаты диссертации получены лично автором.

Достоверность полученных результатов обеспечивается:

- использованием при постановке задач гипотез и допущений технической и деформационной теорий расчета тонкостенных стержней открытого профиля, с учетом особенностей их кручения в случае переменной высоты;
- сравнением результатов, полученных посредством разработанного метода, с данными натурных экспериментов зарубежных авторов;
- сравнением теоретических результатов решения бифуркационных задач устойчивости и задач пространственной устойчивости с результатами численных исследований методом конечных элементов в расчетном комплексе ANSYS.

Апробация результатов исследования. Основные положения диссертационной работы докладывались и обсуждались на 10 научно-практических конференциях:

- 67-я, 68-я научная конференция профессоров, преподавателей, научных работников, инженеров и аспирантов университета (СПбГАСУ, 2010, 2011 гг.);
- I, II, III Международный конгресс студентов и молодых ученых (аспирантов, докторантов) «Актуальные проблемы современного строительства» (СПбГАСУ, 2012, 2013, 2014 гг.);

– Международный конгресс, посвященный 180-летию СПбГАСУ, «Наука и инновации в современном строительстве – 2012» (СПбГАСУ, 2012 г.);

– Научно-практическая конференция, посвященная 100-летию со дня рождения профессора Е.И. Белени «Расчет и проектирование металлических конструкций» (НИУ МГСУ, 2013 г.);

– III Международная практическая конференция «Здания и сооружения из ЛМК: современные стандарты, конструктивные решения и технологии» (Минск, 2015 г.);

– XXVI Международная конференция «Математическое и компьютерное моделирование в механике деформируемых сред и конструкций» (Санкт-Петербург, 2015 г.);

– Международная научная конференция «Интеграция, партнерство и инновации в строительной науке и образовании» (НИУ МГСУ, 2016 г.).

Публикации. Материалы диссертации опубликованы в 7 печатных работах, в том числе 3 статьи опубликованы в изданиях, входящих в Перечень российских рецензируемых научных журналов, в которых должны быть опубликованы основные научные результаты диссертаций на соискание ученых степеней кандидата и доктора наук.

Положения, выносимые на защиту:

– алгоритм решения бифуркационных задач устойчивости центрально- и внецентренно-сжатых стержней переменной жесткости и результаты исследования полученных значений критических сил и соответствующих им изгибных и изгибно-крутильных форм потери устойчивости;

– аналитически-численный метод решения задачи о пространственной устойчивости стержней переменной жесткости;

– результаты исследования пространственной устойчивости стержней переменной жесткости в зависимости от различных параметров (гибкости, угла наклона и сужения поясов, стеснении деформации торцевых сечений);

– инженерная методика расчета на пространственную устойчивость выделенных из конструкции рамы двутавровых элементов переменной высоты;

– сравнение результатов исследований по разработанному аналитически-численному методу с данными натурных экспериментов зарубежных авторов, а также с результатами численного исследования методом конечных элементов.

Структура и объем работы. Диссертация состоит из введения, четырех глав, заключения, списка использованной литературы (196 наименований) и двух приложений. Диссертация содержит 197 страниц машинописного текста без приложений, 22 таблицы, 63 рисунка, 110 формул.

Соответствие диссертации Паспорту научной специальности. Область исследования соответствует требованиям Паспорта научной специальности ВАК – 05.23.01 «Строительные конструкции, здания и сооружения», пункт 3 «создание и развитие эффективных методов расчета и экспериментальных исследований вновь возводимых, восстанавливаемых и усиливаемых строительных конструкций наиболее полно учитывающих специфику воздействий на них, свойства материалов, специфику конструктивных решений и другие особенности».

ГЛАВА 1. АНАЛИЗ ИССЛЕДОВАНИЙ УСТОЙЧИВОСТИ СТЕРЖНЕВЫХ ЭЛЕМЕНТОВ РАМ ПЕРЕМЕННОЙ ЖЕСТКОСТИ

1.1. Применение стержневых элементов и рам переменной жесткости в несущих каркасах зданий и сооружений

В настоящее время основным требованием строительного производства является минимизация затрат на капитальное строительство зданий и сооружений. Значительный вклад в снижении таких затрат вносит применение типов несущих конструкций, отвечающих современным принципам экономичности, технологичности и энергоэффективности, что и определяет повышенный спрос на легкие рамные металлические конструкции.

К одному из основных типов легких рамных конструкций относятся порталные рамы переменной жесткости, которые позволяют достичь значительной экономии стали (до 44% [58]) по сравнению с такими же конструкциями постоянного сечения. Каркасы из таких рам в настоящее время используются в зданиях самого разнообразного назначения: производственные цеха, общественные и торговые центры, самолетные ангары, спортивные комплексы и многие другие.

Несмотря на то, что стержни переменной жесткости были известны и ранее, появление сплошностенчатых рам переменной жесткости как строительных конструкций относится только к периоду после 1952 г., когда вышла статья А. Amirikian [109], в которой впервые была предложена идея распределения материала в рамах в соответствии с эпюрой изгибающих моментов и представлен анализ таких рам простейшего очертания.

С 1960-х годов начинается активное развитие методов расчета и исследования таких рам и их элементов, а также активное применение их на

практике. В настоящее время имеется большое число зарубежных компаний, специализирующихся на проектировании, изготовлении и монтаже рам переменной жесткости. Наиболее известные из них – Butler Manufacturing (США), Robertson Building Systems (Канада), Astron (Люксембург), Ruukki (Финляндия) и другие.

В СССР активное исследование рам переменного сечения начинается с 80-х годов, с началом технико-экономических проработок экспериментальных прототипов несущих конструкций [3, 98]. Несколько серийных конструкций появились в результате теоретических и экспериментальных исследований, проводившихся в то время. Однако потом, в 90-е годы, эти исследования так и не получили своего развития, поэтому в отечественной строительной практике рамы переменной жесткости долгое время практически не использовались. Появление (с начала 2000-х годов) в Российской Федерации зданий с каркасами из рам переменной жесткости в большинстве случаев связано с активной экспансией тех зарубежных фирм, которые занимаются такими конструкциями. Из российских компаний, занимающихся проектированием, исследованием и строительством зданий с каркасами из рам переменной жесткости можно отметить лишь некоторые фирмы, например, «Уникон» [63].

В применяемых в настоящее время рамах переменной жесткости изготовление составляющих их элементов происходит двумя способами:

- продольный роспуск стенки прокатного двутавра по наклонной линии и последующая соответствующая сборка и сварка полученных половин (практически не используется);
- сварка двутавров из листового проката (основной способ).

Рамные конструкции из элементов, изготовленных по второму варианту, более экономичны, т.к. позволяют в полной мере перераспределить жесткости элементов в соответствии с эпюрой изгибающих моментов, чего невозможно достичь, используя ограниченный сортамент прокатных профилей. Однако в связи с тем, что на момент начала исследований рам переменной жесткости отечественные заводы металлоконструкций не обладали

высокопроизводительным специализированным оборудованием по обработке листов и сборке полученных деталей в профиль переменной жесткости, первый способ изготовления был основным, т. к. обладал в 2 раза меньшим объемом резки и сварки [91].

Начиная с 1999 г. [98], на отечественных заводах металлоконструкций стало появляться необходимое оборудование, позволяющее изготавливать сварные двутавровые элементы переменной жесткости, практически полностью искоренив первый вариант.

На Рисунке 1.1 представлен типичный каркас здания складского назначения из сварных рам переменной жесткости, в котором применены двутавровые стойки и ригели переменной высоты.



Рисунок 1.1. Каркас из рам переменной жесткости здания складского назначения

Портальные рамы переменной жесткости, как уже отмечалось, используются в несущих каркасах зданий самого различного назначения. Это

достигается за счет многообразия различных параметров, варьированием которых можно решить любые проблемы и задачи, возникающие при проектировании. Применяемые порталные рамы переменной жесткости в зависимости от основных варьируемых параметров можно классифицировать следующим образом:

1. По величине пролета: от 18 до 120 м.
2. По количеству пролетов: однопролетные (Рисунок 1.2а) и многопролетные (Рисунок 1.2б). В многопролетных схемах ригели могут как шарнирно опираться на промежуточные стойки, так и иметь жесткие соединения между собой.
3. По типу конфигурации: П-образные (Рисунок 1.2а), рамы с уклоном стоек и ригелей (Рисунок 1.2в), полигональные рамы (Рисунок 1.2г).
4. По статической схеме работы: 2-х шарнирные рамы (Рисунок 1.2д), 3-х шарнирные рамы (Рисунок 1.2е).

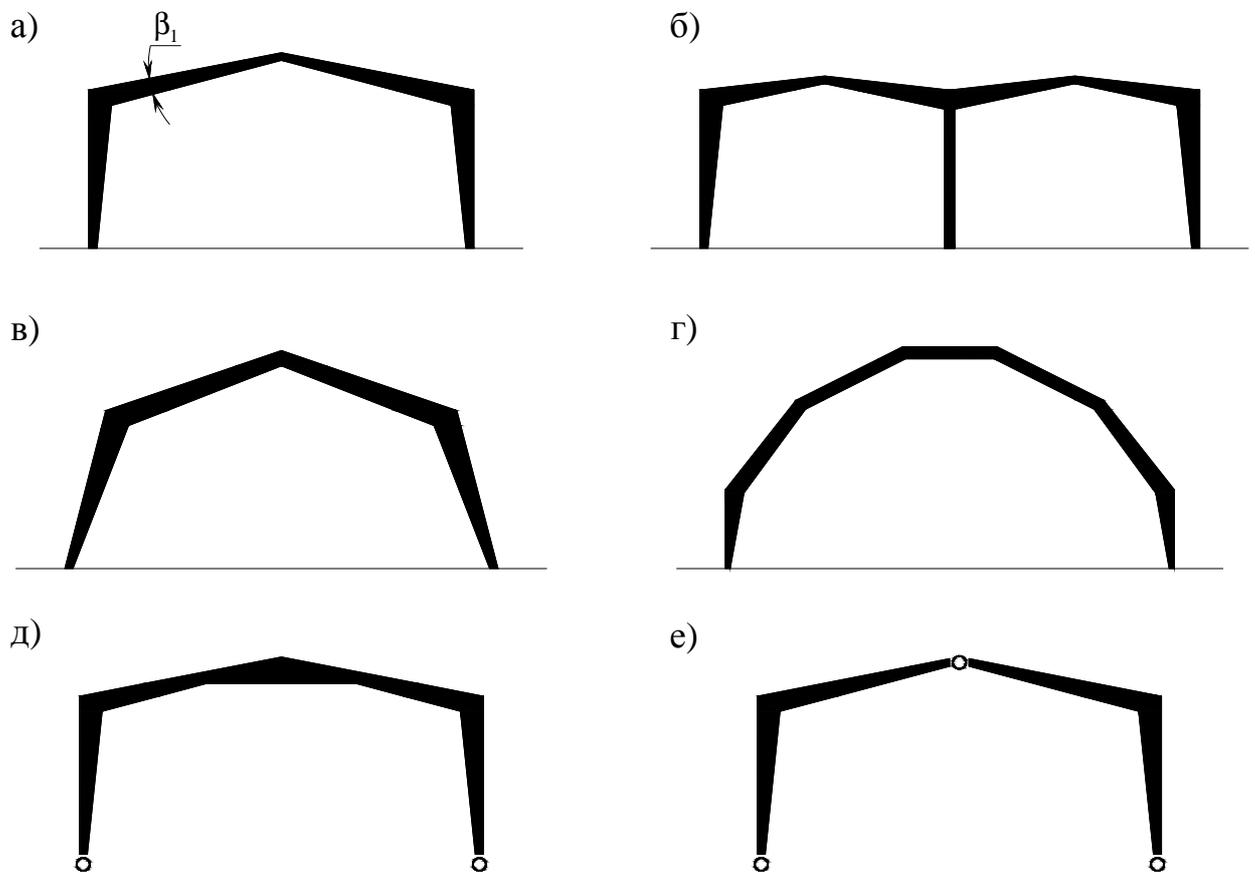


Рисунок 1.2. Типы порталных рам переменной жесткости

Угол взаимного наклона поясов β_1 (Рисунок 1.2а) в элементах таких рам подбирается по расчету, исходя из действующих в раме усилий. Максимальный наклон β_1 для конструкций, применяемых на практике, принимается равным 15° [107, 158, 164, 168]. Этот предел стал приниматься на основании исследования В. Вoley [121], в котором было показано, что применение классической теории Бернулли-Эйлера для клиновидных прямоугольных балок с углом наклона сторон 15° дает ошибку в несколько процентов по сравнению с точным решением (к примеру, если $\beta_1=10^\circ$, то ошибка составила 1.8%, если $\beta_1=20^\circ$, то 7.5%). Диапазон наиболее часто встречающихся углов наклона β_1 можно привести на основе данных, представленных в доступных источниках. Так, к примеру, для более чем 7500 расчетных случаев из пособия [164], наклон более 60% стержней составил от 2 до 7° (при разбросе от 0 до 15°). Для 37 поперечных рам зданий различного назначения, выполненных фирмой «Уникон» [63], наклон в 65% случаев составил от 3 до 6° (при разбросе от 1.6 до 15°). Для всех поперечных рам, представленных в серии «УНИМАК-Р1» [90], средний наклон поясов составляет $\beta_1=4.1^\circ$ (при разбросе от 2 до 6.8°). Для рам по серии «Шифр 828КМ» [103] средний наклон составляет $\beta_1=4.3^\circ$ (при разбросе от 3.5 до 5.1°). Средний наклон поясов в экспериментальных исследованиях пространственной устойчивости стержней переменной жесткости [128-129, 164, 180, 183-184] равен $\beta_1=3.4^\circ$ (при разбросе от 0.8 до 5.9°). Средний наклон поясов элементов полноразмерных рам в натурных экспериментах [107, 136, 170, 176] составил 5.3° (при разбросе от 1.3° до 10.8°). Таким образом, по представленным цифрам можно сделать вывод, что наиболее часто встречаемые на практике элементы переменной жесткости имеют наклон поясов, в среднем, $2...7^\circ$, хотя необходимо напомнить, что в каждом конкретном случае угол наклона каждого элемента подбирается индивидуально и может находиться в диапазоне $0...15^\circ$.

На Рисунке 1.3 представлена самая распространенная на практике рама переменной жесткости (на примере рамы пролетом 46 м для здания производственного назначения) – однопролетная, двухшарнирная. Опорный узел сопряжения стоек с фундаментами здесь решен по шарнирному типу

(Узел 1), при этом все стыки отпавочных марок выполнены жесткими с применением фланцев с высокопрочными болтами с предварительным натяжением (Узлы 2...4). Разделение ригеля на отпавочные марки выполнено в середине пролета и в местах, наиболее близких к точкам на эпюре, где изгибающий момент меняет свой знак. Все элементы рамы выполнены из стали С345.

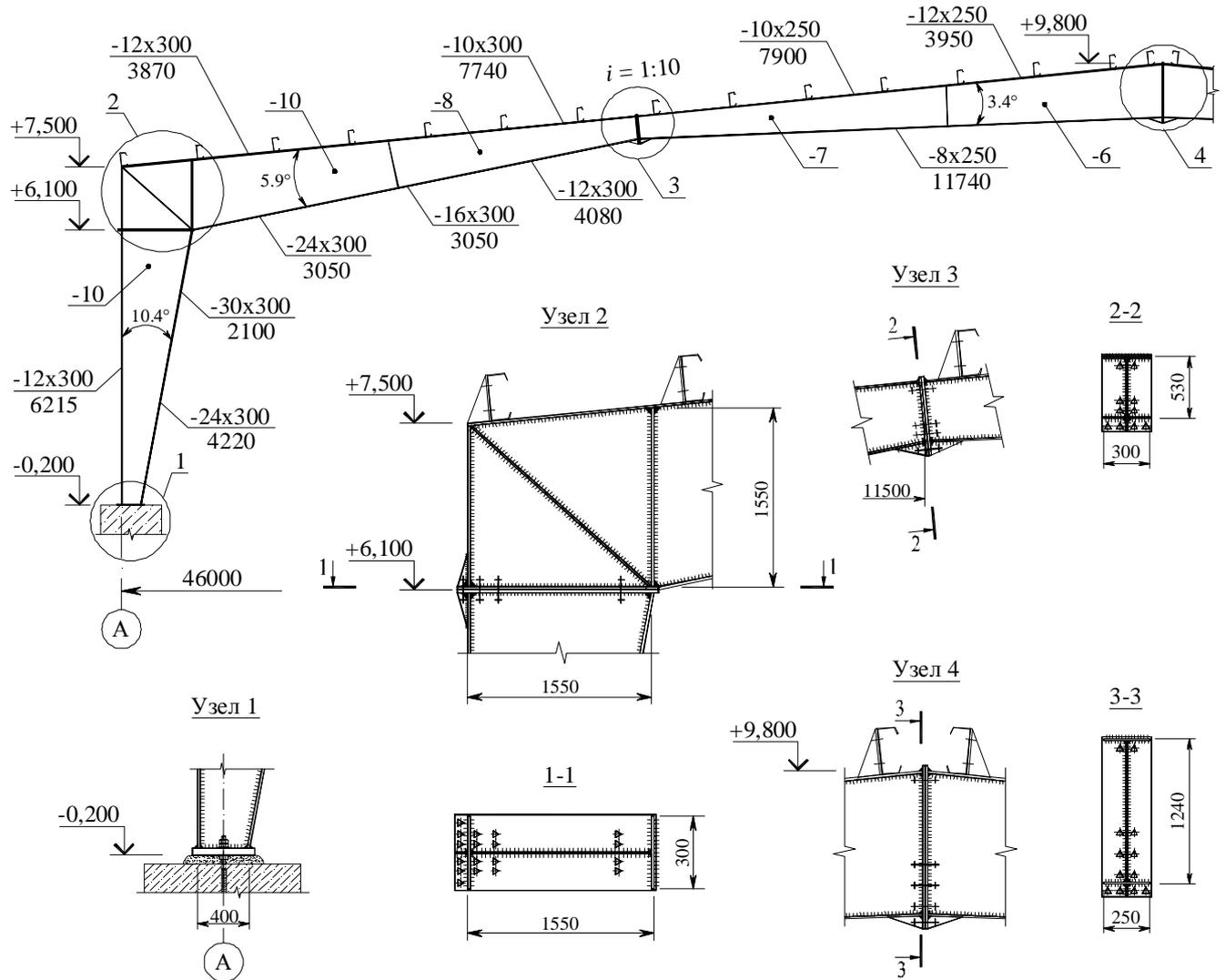


Рисунок 1.3. Схема поперечной рамы переменной жесткости пролетом 46 м

Жесткость каркаса из поперечных рам, представленных на Рисунке 1.3, в продольном направлении, как правило, обеспечивается за счет связевого блока из гибких крестовых связей в средней части здания. При этом стойки остальных рам раскрепляются за счет продольных распорок или стеновых прогонов, а ригели – за счет кровельных прогонов. Дополнительно, для раскрепления

ригелей от потери устойчивости по изгибно-крутильной форме, применяются подкосы под углом 45° от прогонов к нижнему поясу (Рисунок 1.4).

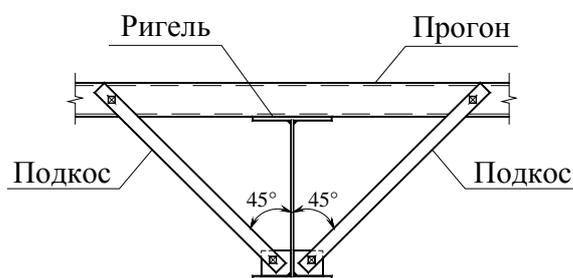


Рисунок 1.4. Раскрепление ригели рамы от кручения

Как видно их схемы рамы, приведенной на Рисунке 1.3, сечения всех опорных марок имеют постоянную ширину, но и пояса, и стенка в пределах каждой марки состоят из листов разной толщины. Такое ступенчатое изменение толщин элементов применяется с целью снижения массы рамы, но не в полной мере соответствует изменению внутренних усилий по длине.

Можно предположить, что при использовании элементов, у которых изменяется как высота стенки, так и ширина поясов, возможно достичь еще большей экономии за счет лучшего соответствия с эпюрами внутренних усилий. Однако такое решение на практике в настоящий момент ограничено ввиду сложности подбора и расчета таких элементов, хотя многие исследования двутавровых стержней переменной жесткости [43-44, 114, 122, 124-125, 130, 131-135, 160, 161-162] направлены на возможность расчета и изучение работы при изменении в таких стержнях как высоты стенки, так и ширины поясов.

Ввиду актуальности данного вопроса, одной из задач настоящего исследования также являлся расчет и изучение работы двутавровых элементов с переменной высотой стенки и шириной поясов.

Особенности работы и расчета элементов и рам переменной жесткости

Несмотря на определенные преимущества рам переменной жесткости, их использование на территории Российской Федерации связано лишь с теми каркасами, которые были спроектированы и поставлены компаниями, которые специализируются в таких конструкциях. При этом подбор сечений и расчет рам

производится с помощью расчетных программ, разработанных внутри компании и недоступных рядовому инженеру.

Ситуация с ограниченным применением рам переменной жесткости сложилась из-за того, что отечественные Нормы [89] до сих пор не имеют положений и указаний по их расчету. Главным препятствием для этого является отсутствие методики расчета на устойчивость элементов переменной жесткости, которые, находясь в составе порталных рам, подвергаются сжатию с изгибом. При этом вопросы расчета рам переменной жесткости в настоящее время крайне актуальны для отечественных инженеров. Расчеты таких конструкций могут производиться только численно, методом конечных элементов (МКЭ), что подтверждается рядом статей [23, 42, 54, 61, 92].

Следует также заметить, что расчет рам и их элементов с помощью расчетных комплексов в их плоскости не показывает реальной несущей способности и устойчивости таких конструкций. Это объясняется двумя фактами. Во-первых, рамы переменной жесткости и их элементы всегда испытывают сложное нагружение с целым рядом усилий как в плоскости рамы, так и из нее [64]. Во-вторых, в элементах рам в процессе изготовления, транспортировки и монтажа неизбежно возникают различного рода несовершенства. Указанные обстоятельства приводят к тому, что элементы рам переменной жесткости всегда работают по пространственной схеме. Поэтому выявить их реальную устойчивость можно лишь в случае пространственной постановки задачи.

Отметим также, что существующие способы расчета таких рам МКЭ основываются либо на дискретном разбиении стержневых элементов переменной жесткости на конечные элементы с постоянным сечением, либо (в более современных расчетных комплексах) на использовании готовых стержневых конечных элементов переменной жесткости. Однако в обоих случаях, при рассмотрении задачи в пространственной постановке (с 7-ю степенями свободы), получаемые углы закручивания сечений будут неверными, т. к. при этом не учитываются особенности стержней при кручении, связанные с

наклоном поясов (более подробно вопрос стесненного кручения стержней переменной жесткости освещен в Главе 3).

Учитывая изложенное, можно сделать вывод о том, что для определения реальной пространственной устойчивости рам переменной жесткости и их элементов с помощью МКЭ, их необходимо моделировать не стержневыми элементами, а оболочечными, с учетом всех возможных несовершенств и раскреплений по длине. Очевидно, что такой подход с расчетом детальных «тяжелых» МКЭ моделей мало подходит для применения в каждодневной инженерной практике и для построения на его основе инженерной методики расчета на устойчивость, когда необходимо получать большой массив выходных данных (десятки тысяч вариантов) при наименьших затратах машинного времени.

Таким образом, разработка эффективного метода расчета элементов рам переменной жесткости на пространственную устойчивость является крайне актуальной задачей в настоящее время. Подобный эффективный метод позволил бы получать результаты расчетов без потери в точности и на несколько порядков быстрее, чем при расчетах «тяжелых» МКЭ моделей, и сделал бы возможным построение инженерной методики расчета таких элементов на устойчивость.

1.2. Анализ решений бифуркационных задач устойчивости стержней переменной жесткости

Задачи расчета на устойчивость стержневых элементов по изгибной, изгибно-крутильной и пространственной форме, как известно, связаны с бифуркационными задачами устойчивости по изгибной или изгибно-крутильной форме. Решение последних позволяет определить как критические параметры сил, так и соответствующие им формы потери устойчивости, которые, следуя эффективному аналитически-численному методу [18], используются в более сложных решениях задач общей устойчивости.

Главной проблемой при решении бифуркационных задач устойчивости стержней переменной жесткости является тот факт, что получить решения в замкнутом виде возможно лишь только для центрально-сжатого стержня (по изгибной форме), изгибная жесткость которого изменяется по определенному закону.

При этом следует заметить, что такие решения в замкнутом виде, могут лишь условно называться точными, т.к. получаемое аналитическое трансцендентное уравнение решается в конечном итоге лишь с определенной степенью точности.

Устойчивость центрально-сжатого стержня

Первые решения практических задач об устойчивости стержней переменной жесткости были сделаны академиком А.Н. Динником, который предложил интегрировать дифференциальное уравнение продольного изгиба стержней, у которых жесткость изменяется по степенному закону, в функциях Бесселя. Впоследствии им также рассмотрены задачи устойчивости при изменении жесткости по гиперболическому, показательному, ступенчатому закону, а также для синусоидальной, косинусоидальной, эллиптической и других типов форм стоек; приведены примеры расчета с определением коэффициентов устойчивости для различных практических случаев при различных закреплениях стержней [56]. Кроме того, следует отметить, что академик Динник один из первых рассмотрел задачу об устойчивости стержней переменного сечения при напряжениях, больших предела пропорциональности [56].

С.П. Тимошенко [97] продемонстрировал графическое применение метода последовательных приближений для центрально-сжатой шарнирно опертой колонны со ступенчатым изменением жесткости.

Огромный вклад в развитие решений бифуркационных задач устойчивости стержней переменной жесткости был произведен А.Р. Ржаницыным [87]. Следуя А.Н. Диннику, он исследовал центрально-сжатые стержни, жесткость которых изменяется по степенному закону, однако результаты его исследования

охватывают большее количество практически значимых частных случаев. В его монографии [87] впервые в отечественной литературе представлен обзор приближенных методов расчета упругих стержней переменной жесткости на устойчивость. Все методы выделены в две большие группы: методы последовательных приближений и методы сведения к системе алгебраических уравнений (метод конечных разностей; метод упругих грузов; метод Бубнова-Галеркина; метод смягчения граничных условий и обобщенный метод; энергетические методы Ритца и Тимошенко). Представленные приближенные методы позволяют с любой степенью точности (в зависимости от числа разбиения стержней по длине, количества последовательных приближений и др.) решать бифуркационные задачи устойчивости. Для расчета на устойчивость центрально-сжатого стержня со ступенчато-переменным сечением А.Р. Ржаницыным также предложен метод начальных параметров в матричной форме и представлена его графическая интерпретация [87].

Из отечественных работ также следует отметить исследования С.Д. Лейтеса [74], который рассмотрел устойчивость стержня переменной жесткости на упругих опорах, и Н.К. Снитко [94], который предложил интегрировать дифференциальное уравнение устойчивости по методу начальных параметров, что позволяет решать бифуркационную задачу устойчивости для стержня при любом изменении жесткости.

Среди численных подходов к решению задач об устойчивости стержней переменной жесткости также необходимо выделить методы следующих авторов: N.M. Newmark [173] и M.G. Salvadori [181]. Оба этих подхода практически не представлены в отечественной литературе, хотя обладают рядом преимуществ по сравнению с уже известными численными методами.

N.M. Newmark [173] предложил метод, основанный на последовательных приближениях, посредством которого можно решать бифуркационные задачи устойчивости для стержней с любым изменением жесткости по длине. Данный метод состоит в том, что на каждом последовательном приближении сначала вычисляются изгибающие моменты в стержне от сжимающей силы на основании

формы его оси (изначально, на первом приближении, форма должна быть задана). Далее, зная изгибающие моменты, определяются перемещения точек оси стержня (например, графоаналитическим методом или методом последовательного интегрирования). Впоследствии критическую силу можно получить из уравнения, в которое входят изначально заданная форма и форма, полученная на данном приближении. Процесс последовательных приближений продолжается до тех пор, пока разница между формами не будет находиться в пределах заданной точности расчета. Таким образом, изначально заданная форма потери устойчивости в процессе последовательных приближений приобретает своё истинное очертание. Следует отметить, что этот метод позволяет решать не только бифуркационные задачи устойчивости, но также задачи недеформационного расчета стержней переменной жесткости при любых нагрузках и способах закрепления торцов. В работе [173] показано, что возможно разбивать стержень всего на 5 участков по длине для достижения достаточной для практических расчетов точности. Одним из основных недостатков этого метода является трудоемкость расчетов, которая обнаруживается при переходе от изгибающих моментов к перемещениям точек оси стержня при каждом последовательном приближении.

M.G. Salvadori [181] предложил эффективный численный метод решения бифуркационных задач, основанный на методе конечных разностей. Предложенный им метод, посредством последовательных приближений позволяет быстро определять критические силы для сжатых стержней постоянной и переменной жесткости, а также для сжатых пластин и оболочек различной формы. Им также показано, что использование схем экстраполяции Ричардсона увеличивают точность последовательных приближений, что значительно уменьшает время расчета. Основным недостатком предложенного метода является то, что, как и во многих других методах, для получения точного решения необходимо изначально задаться правильной формой потери устойчивости, что невозможно сделать для стержней с произвольным изменением жесткости по длине.

Ф. Блейх [27] получил аналитические решения в трансцендентных функциях для центрально-сжатых решетчатых стержней с линейным и параболическим очертанием и привел коэффициенты для получения критических сил в зависимости от соотношения высот сечений.

W.O. Carter и J.M. Gere [126] исследовали устойчивость центрально-сжатого стержня переменной жесткости путем решения соответствующего дифференциального уравнения, используя функции Бесселя, а также численный метод, предложенный N.M. Newmark [173]. Авторами были получены таблицы и формулы для определения критических сил при следующих типах поперечных сечений конических стержней: двутавровое, коробчатое, прямоугольное, круглое, решетчатое (из 4-х уголков) и двухполочное (двутавр без стенки). В исследовании авторами были учтены различные закрепления концов (шарнирное, жесткое, свободное) рассматриваемых стержней, а также и их комбинации.

F.J. Appl и J.O. Smith [115] исследовали устойчивость шарнирно-опертых конических алюминиевых стержней прямоугольного сечения. Дифференциальное уравнение в задаче об устойчивости центрально-сжатого стержня авторами решено с помощью степенных рядов. Помимо упругой стадии, в [115] также исследуется потеря устойчивости в неупругой стадии работы материала. В дополнение авторами проведено экспериментальное исследование 44-х образцов, которое показало хорошее соответствие с теорией.

M.J. Iremonger [149] предложил эффективный численный алгоритм решения бифуркационных задач об устойчивости центрально-сжатых стержней переменной жесткости, базирующийся на методе конечных разностей (МКР). Данный алгоритм построен на итерации матриц, т.к. в математическом смысле бифуркационные задачи устойчивости представляют собой задачи о собственных значениях матриц. Предложенный в [149] алгоритм основывается на последовательных приближениях, однако, в отличие от метода, предложенного N.M. Newmark [173], менее трудоемок.

J.C. Ermopoulos [139] привел решение в замкнутом виде для центрально-сжатых стержней переменного сечения в случае приложения сил в произвольных сечениях стержней. Им также были рассмотрены стержни со степенным законом изменения жесткости: двутавровое и решетчатое из 4-х уголков. При решении задачи закрепление стержней принималось шарнирным, жестким или консольным.

F.W. Williams и G. Aston [190] привели решение бифуркационных задач об устойчивости центрально-сжатых стержней переменной жесткости в случае приложения силы в произвольном сечении. Авторами были рассмотрены 15 типов поперечных сечений, удовлетворяющих изменению жесткости по степенному закону. Решение задачи осуществлялось посредством разработанной авторами программы, реализующей решения такого рода задач через функции Бесселя. В [190] авторы привели графики для определения критических сил в зависимости от типа сечения, места приложения сжимающей силы, соотношения конечных моментов инерции и условий закрепления торцов.

Среди зарубежных авторов, занимающихся решением бифуркационных задач устойчивости центрально-сжатых стержней переменной жесткости, также следует отметить работы Н.К. Vaumeister и R.A. Sebrosky [119], M. Eisenberger [138], J.E. Goldberg и др. [144], W.G. Smith [187].

Таким образом, решение бифуркационных задач об устойчивости центрально-сжатых стержней с произвольным законом изменения жесткости (к каким относятся большинство применяемых на практике стержневых элементов рам переменной жесткости) возможно только с применением приближенных способов, поэтому в настоящей работе для решения такого рода задач будет использоваться численный алгоритм, базирующийся на методе конечных разностей (МКР), который был предложен M.J. Iremonger [149].

Устойчивость по изгибно-крутильной форме

Решения бифуркационных задач устойчивости тонкостенных двутавровых стержней переменной жесткости по изгибно-крутильной форме (устойчивость

плоской формы изгиба) имеют важное практическое значение, но при этом они на порядок сложнее, чем задачи устойчивости центрально-сжатого стержня.

При решении такого рода задач необходимо, во-первых, рассматривать систему из двух дифференциальных уравнений устойчивости, во-вторых, эти уравнения содержат несколько геометрических характеристик сечения, которые не зависят друг от друга и изменяются по длине стержня. Решить такие задачи возможно только численными методами, среди которых следует отметить следующие: метод конечных разностей (МКР), энергетический метод, метод конечных элементов (МКЭ) и др.

C.G. Culver и S.M. Pegg [130] одними из первых решили бифуркационную задачу об устойчивости сжато-изогнутого стержня переменной жесткости. В своём исследовании они рассмотрели двутавр с линейно-изменяющейся высотой стенки и шириной поясов, нагруженный центрально сжимающей силой и изгибающими моментами с различными соотношениями концевых эксцентриситетов. Закрепление концов стержней принималось шарнирным, жестким, а также в виде их комбинаций, при этом торцевые сечения были закреплены от деформации и кручения. Дифференциальные уравнения были приняты авторами в безразмерной форме, что позволяло им решать их в предположении постоянства одного из внешних силовых факторов (сила или момент). Решение дифференциальных уравнений производилось МКР. В качестве практической рекомендации для проверки упругой устойчивости по изгибно-крутильной форме авторами предложено уравнение критической комбинации, в которое входят критическая сила при потере устойчивости по изгибной форме, критическая сила при потере устойчивости по крутильной форме и критический момент при потере устойчивости по изгибно-крутильной форме. Таким образом, оценить устойчивость по методике, предложенной авторами [130], возможно только по одному силовому фактору (сила или момент), т.к. второй должен быть изначально задан (момент или сила, соответственно).

G.C. Lee, M.L. Morrell и R.L. Ketter [164] исследовали устойчивость двутавровых стержней по изгибно-крутильной форме. Авторами рассматривались двутавровые стержни постоянной ширины с линейно-изменяющейся высотой, нагруженные продольной сжимающей силой и изгибающими моментами, максимальное соотношение для которых принималось на основании равенства фибровых напряжений в концевых сечениях при изгибе. Закрепление стержней в двух плоскостях принималось шарнирным, со свободной депланацией и отсутствием кручения торцевых сечений. Для решения задачи авторы использовали энергетический метод Рэлея-Ритца, при этом формы потери устойчивости принимались в виде степенных рядов. Авторами были исследованы стержни при различном соотношении моментов инерции меньшего сечения, различной гибкости, наклоне, соотношении концевых эксцентриситетов. Всего более 7500 расчетных случаев. Для практических расчетов авторами представлена формула кривых взаимодействия для рассмотренных элементов.

S. Kitipornchai и N.S. Trahair [160] исследовали изгибно-крутильную потерю устойчивости балок, нагруженных поперечной силой в середине пролета. Для решения дифференциальных уравнений они использовали метод конечных интегралов. Авторы также провели экспериментальное исследование, результаты которого показали хорошее соответствие с теорией.

Y.-B. Yang и J.-D. Yau [194] разработали матрицы жесткости и представили решение МКЭ бифуркационных задач устойчивости стержней переменной жесткости. Авторами были рассмотрены только двутавры моно- и бисимметричного поперечного сечения постоянной ширины.

Практически в одно время с работой [194] появилось исследование M.A. Bradford и P.E. Cuk [122], в котором также был представлен МКЭ вариант решения бифуркационной задачи об устойчивости по изгибно-крутильной форме стержней переменной жесткости. Авторами были разработаны матрицы жесткости и устойчивости для балок, а также для сжато-изогнутых двутавровых стержней с линейно-изменяющейся высотой и шириной.

Последующее развитие решений бифуркационных задач устойчивости стержней переменной жесткости по изгибно-крутильной форме было связано с исследованиями, направленными, в основном, на совершенствование стержневых конечных элементов. Среди таких исследований следует отметить работы N. Boissonnade и R. Maquoi [120], Z. Lei и T.G. Shu [168], S. Rajasekaran [175], H.R. Ronagh и др. [177-178] и др.

Среди последних масштабных исследований следует отметить работы A. Andrade и др. [111-114], в которых решение задачи об устойчивости двутавровых тонкостенных стержней переменной жесткости производится МКЭ на основе разработанной авторами стержневой конечно-элементной модели. Для решения задачи авторами применяется метод Рэлея-Ритца с применением тригонометрических функций для аппроксимирования форм потери устойчивости. Авторами рассмотрены изгибаемые [111] и сжато-изогнутые [112] двутавровые стержни с линейно-изменяющейся высотой постоянной ширины, а также проведено сравнение [113] с результатами расчетов оболочечной модели, которое показало хорошее соответствие между двумя моделями. Максимальные различия в результатах наблюдались в стержнях небольшой гибкости, что объясняется снижением величин критической силы для оболочечных моделей из-за эффектов потери местной устойчивости.

Таким образом, решение бифуркационных задач об устойчивости двутавровых стержней по изгибно-крутильной форме возможно лишь с применением приближенных численных методов. В настоящей работе для решения обозначенного класса задач, как и для решения бифуркационных задач устойчивости центрально-сжатых стержней, будет применяться численный алгоритм, базирующийся на МКР, который был предложен M.J. Iremonger [149].

1.3. Анализ исследований, посвященных расчету тонкостенных стержней по пространственно-деформированной схеме

В основу исследований с использованием пространственно-деформированной схемы всех тонкостенных стержней открытого профиля положена техническая теория В.З. Власова [45].

Вопрос расчета тонкостенных стержней постоянной жесткости по пространственно-деформированной схеме в настоящее время достаточно хорошо проработан и подробный анализ исследований на эту тему может быть найден в работах [5, 18, 72, 78, 84, 88]. Далее приведена краткая информация только о тех исследованиях, результаты которых использованы в настоящей диссертации.

В основе расчета тонкостенных стержней открытого профиля переменной жесткости по пространственно-деформированной схеме также лежит теория В.З. Власова [45], но с дополнениями, связанными с особенностями стесненного кручения таких стержней, анализ исследований которых будет приведен ниже.

1.3.1. Стержни постоянной жесткости

Техническая теория В.З. Власова [45], которая лежит в основе расчета тонкостенных стержней, позволяет их рассчитывать как оболочки. Это достигается за счет двух кинематических гипотез (гипотеза об отсутствии сдвигов срединной поверхности и гипотеза о неизменяемости контура поперечного сечения), за счет которых В.З. Власову удалось упростить общие уравнения цилиндрических оболочек.

Уравнения равновесия пространственно-деформируемого тонкостенного стержня с учетом различных предположений получены в работах Б.М. Броуде [38-40], Л.Н. Воробьева [47], С.П. Вязьменского [48-50], Е.А. Бейлина [7-11].

Основываясь на классической деформационной теории тонких стержней Кирхгофа-Клебша, Б.М. Броуде [38] получил уравнения равновесия, учитывающие различия в кривизнах отдельных волокон. Развитием положений

этих исследований является работа Е.А. Бейлина [10], в которой при выводе деформационных уравнений равновесия тонкостенных стержней учитываются различия не только кривизн отдельных волокон, но и различие их наклонов, связанные с кручением.

При рассмотрении внецентренно-сжатого стержня с двухосными эксцентриситетами Б.М. Броуде [39] показал, что линеаризация системы уравнений равновесия стержня приводит к некоторой ошибке в определении предельной нагрузки. Он отмечает, что «игнорирование квадратичных членов в дифференциальных уравнениях равновесия может при некоторых условиях привести к ошибочному заключению, что плоская форма изгиба сохраняется вплоть до момента потери устойчивости и лишь после этого появляются деформации кручения. В действительности кручение всегда наблюдается с самого начала нагружения, что непосредственно вытекает из рассмотрения нелинейных уравнений равновесия. Постепенное нарастание всех компонентов деформаций приводит к исчерпанию несущей способности стержня (потере устойчивости второго рода), что хорошо подтверждается экспериментом» [39].

А.З. Зарифьян [60] обобщил уравнения равновесия для деформированного состояния тонкостенного стержня открытого профиля на неупругую работу материала. Учет упруго-пластических деформаций осуществляется с помощью метода упругих решения А.А. Ильюшина [62].

Необходимо отметить алгоритм В.П. Коломийца [70], который позволяет учитывать упруго-пластические деформации (при известной зависимости « σ - ϵ ») и получать полную картину напряженно-деформированного состояния в поперечных сечениях при любых соотношениях внешних усилий, в том числе с учетом истории нагружения. Р.А. Скрипниковой [93] и, независимо от нее, Г.И. Белым [17, 21], данный алгоритм был расширен на случай бимоментных усилий. Однако стоит отметить, что алгоритм В.П. Коломийца [70] построен на предположении о том, что касательные напряжения малы и не влияют на развитие пластических деформаций.

Дальнейшее развитие алгоритма получило в работах Г.И. Белого [13-21], в которых было учтено также влияние касательных напряжений на развитие пластических деформаций. Алгоритм определения напряженно-деформированных и предельных состояний в сечениях тонкостенных стержней с учетом силовых факторов, вызывающих как нормальные, так и касательные напряжения, позволяющие использовать любую модель упруго-пластического материала, а также учитывать историю загрузки получил название «Сечение» [18].

Таким образом, теория расчета тонкостенных стержневых элементов стальных конструкций достаточно хорошо проработана. Однако уравнения равновесия, составленные для пространственно-деформированной схемы, являются весьма громоздкими и практически не допускают решения в замкнутом виде даже при упругой стадии работы материала. Об этом свидетельствуют работы А.А. Пиковского [82], А.З. Зарифьяна [60], А.З. Зарифьяна и А.Н. Дудченко [59], Р.А. Скрипниковой [93] и других авторов, посвященные исследованию напряженно-деформированного состояния и несущей способности сжатых с двухосными эксцентриситетами стержней с учетом всех трех компонент пространственных деформаций: перемещений в двух главных плоскостях и угла закручивания сечений.

Г.И. Белый в своих работах [13-21] предложил приближенный аналитически-численный метод расчета тонкостенных стержней по пространственно-деформированной схеме, который основан на аппроксимации пространственных форм деформирования в виде линейной комбинации частных форм: форм, полученных из решения недеформационных задач, и форм, вытекающих из решения бифуркационных задач устойчивости (так называемый алгоритм «Стержень»). При этом неупругая работа материала учитывается введением дополнительных пространственных перемещений сечений стержня, которые определяются в процессе установления равновесных состояний при пошаговом увеличении нагрузки. Для определения значений «пластических» составляющих кривизн используется специально-разработанный алгоритм «Сечение».

Как показано в экспериментально-теоретических исследованиях [5, 72, 78, 84, 88], приближенный аналитически-численный метод [18] позволил решить ряд новых практических задач. И.В. Астаховым [5] была исследована пространственная работа и устойчивость сжатых с двухосными эксцентриситетами холодногнутых стержневых элементов швеллерного сечения толщиной не более 4 мм. Пространственная устойчивость тонкостенных холодногнутых стержневых элементов составного сечения с учетом влияния потери местной устойчивости и устойчивости формы сечения была исследована А.Ю. Кузнецовым [72]. Задачи пространственной устойчивости стержневых элементов при их усилении под нагрузкой была исследована П.А. Пяткиным [84] и В.В. Михаськиным [78]. При этом в работе [84] рассматривалось усиление, выполняемое с помощью болтов, а в [78] рассмотрена задача усиления с помощью сварки и ее термического влияния на напряженно-деформированное состояние. Н.Н. Родиковым [88] исследована пространственная устойчивость сжатых с различными двухосными эксцентриситетами двутавровых стержней постоянной жесткости. В [88] также исследовано влияние конструктивного оформления торцов элементов, начальных несовершенств и остаточных напряжений на пространственные деформации и устойчивость.

Указанный эффективный аналитически-численный метод будет использован в настоящем исследовании для определения пространственных деформаций и устойчивости стержневых элементов рамных конструкций переменной жесткости.

1.3.2. Стержни переменной жесткости

Как уже было отмечено, рассмотрение работы тонкостенных стержней открытого профиля переменной высоты по пространственной схеме с учетом всех трех компонент деформаций неразрывно связано с особенностями их стесненного кручения, возникающими из-за наклона поясов. В связи с данным обстоятельством, сначала будет приведен краткий анализ работ, посвященных

исследованию кручения таких стержней, а затем – исследованию пространственной устойчивости.

Анализ исследований стесненного кручения

L.H.N. Lee [167] одним из первых исследовал кручение бисимметричного двутаврового стержня с линейно-изменяющейся высотой. Однако автором был рассмотрен один частный случай: консольный стержень, нагруженный на конце крутящим моментом. Всё исследование было построено на выводе и решении дифференциального уравнения крутящего момента, исходя из рассмотрения предполагаемого напряженно-деформированного состояния в одном конкретном случае, при этом крутящий момент в сечениях принимался как сумма трех составляющих: момент чистого кручения, проекция изгибающего момента в поясах на продольную ось стержня и кручение за счет касательных напряжений в поясах.

Исследование стесненного кручения двутавровых стержней переменной высоты по принципу рассмотрения предполагаемого напряженно-деформированного состояния в сечениях и нахождения полного крутящего момента как сумму трех составляющих также произведено в работах F. Namayoshi [147], G.C. Lee и В.А. Szabo [166]. В указанных работах было рассмотрено изменение высоты стержня по линейному и параболическому законам. В [147] дифференциальное уравнение крутящего момента было решено в аналитическом виде с помощью функций Бесселя, однако охватывает только случай консольного стержня, нагруженного на конце крутящим моментом. В работе [166] дифференциальное уравнение крутящего момента было решено для более широкого ряда задач (при различных граничных условиях, при равномерном распределении крутящего момента по длине и проч.), приведены результаты определения нормальных и касательных напряжений в поясах при кручении и сделано сравнение решений, полученных в аналитическом виде и численно методом конечных разностей.

Общим недостатком работ [147, 166, 167] является то, что в них исследовалось кручение тонкостенных стержней переменного сечения в предположении заранее известного характера деформирования (принцип Тимошенко) и их результаты могут быть использованы только для ряда частных случаев.

Техническая теория В.З. Власова в случае кручения тонкостенных конических стержней открытого профиля получила своё развитие в работах ряда отечественных авторов.

Так, работа Б.Л. Николаи [79], посвященная расчету напряжений в конических незамкнутых стержнях, сечение которых состоит из плоских полос постоянной толщины, положила начало исследованию стесненного кручения таких стержней.

Развитием работы [79] стало исследование В.И. Климова [66], в котором для конических стержней произвольного профиля получены дифференциальные уравнения равновесия в перемещениях, а также формула для относительного удлинения точек поперечного сечения. При выводе формул предполагалось, что толщина стенки является переменной величиной. Также в [66] представлено уравнение стесненного кручения, его аналитическое решение в функциях Бесселя и некоторые практические результаты определения силовых факторов, геометрических характеристик и напряжений на примере одного стержня. При рассмотрении практического случая (ввиду сложности аналитического решения) принималось, что толщина стенки конического стержня очень мала по сравнению с габаритом сечения, поэтому в уравнении стесненного кручения пренебрегалось жесткостью свободного кручения.

Исследования М.Ш. Хигера [99-102] были направлены на изучение напряженно-деформированного состояния при стесненном кручении открытых конических стержней переменного сечения. М.Ш. Хигером получено дифференциальное уравнение равновесия при стесненном кручении для конических и цилиндрических стержней переменной толщины, где основным неизвестным является относительная депланация. Для цилиндрических стержней

в работах [101, 102] представлены аналитические решения в случаях, когда толщина выражается степенной, гиперболической, экспоненциальной или тригонометрической функцией. В работах [99, 100] приведены аналитические решения полученных уравнений для конического стержня в случае степенного или линейного закона изменения толщины.

Стесненное кручение двутавра переменного сечения (постоянной толщины) исследовано Л.П. Винокуровым и В.А. Овчаренко [43-44]. В работе [44] для одного частного случая загрузки бисимметричного двутавра авторами представлено точное решение в функциях Бесселя, а также приближенное – путем разбиения стержня на ряд конических участков и дальнейшей увязкой усилий на стыках полученных конусов (по способу, предложенному А.Р. Ржаницыным [86]). При этом, как указано авторами, приближенное решение при увеличении конических участков приближается к точному, однако в месте стыка участков в эпюрах крутящих моментов и касательных напряжений имеются скачки, пропорциональные моментам инерции при кручении.

Из указанных работ отечественных авторов видно, что исследования, в основном, были направлены на решение уравнений стесненного кручения в замкнутом виде, что на практике представляет собой очень трудоемкую задачу и осуществимо только в частных случаях, а при произвольном изменении геометрии или при общем нагружении стержней, практически невозможно.

Среди зарубежных авторов, распространение технической теории В.З. Власова на случай кручения произвольно нагруженного тонкостенного конического стержня открытого профиля появилось в работе Р. Wilde [189]. Следуя допущениям и гипотезам теории В.З.Власова, в [189] выведены дифференциальные уравнения равновесия и зависимости для внутренних усилий (крутящий момент, бимомент) в случае общего нагружения таких стержней.

Наиболее полные среди зарубежных авторов исследования кручения тонкостенных стержней открытого профиля при произвольном изменении сечения с обобщением полученных результатов произведены Z. Cywinski [131-135]. В своих исследованиях, основываясь на классических

принципах теории В.З. Власова о кручении тонкостенных призматических стержней, Z. Cywinski вывел уравнение стесненного кручения для стержней двутаврового и швеллерного поперечного сечения при любом законе изменения жесткости; получил дифференциальные выражения для внутренних усилий (крутящего и изгибно-крутящего момента, бимоента), а также формулы для определения нормальных и касательных напряжений. Сравнение результатов проведенного экспериментального исследования стесненного кручения двутаврового стержня с параболическим законом изменения высоты показало хорошее соответствие с численным решением методом конечных разностей дифференциальных уравнений кручения, полученных Z. Cywinski.

Следует отметить, что результаты, полученные в работах Z. Cywinski [131-135], наиболее полным образом приближены к инженерному применению и будут использованы в настоящей работе при разработке аналитически-численного метода расчета двутавровых стержней переменной жесткости для учета стесненного кручения.

Анализ исследований пространственной устойчивости

Большинство исследований пространственной устойчивости и работы стержневых элементов переменной жесткости проведено зарубежными авторами. Как уже было отмечено, в основном эти исследования связаны с использованием метода конечных элементов (МКЭ) и могут быть разделены на 2 группы. Первая группа исследований связана с развитием и совершенствованием стержневого конечного элемента и в большинстве своем содержит лишь результаты верификационных расчетов. К этой группе исследований можно отнести работы A. Andrade и др. [111-114], N. Boissonnade и R. Maquoï [120], M.C. Kim и др. [157], S. Rajasekaran [175], H.R. Ronagh и др. [177-178], Y.-B. Yang и J.-D. Yau [194].

Вторая группа работ связана с исследованиями пространственной работы и устойчивости оболочечных моделей стержней переменной жесткости с использованием МКЭ для развития и совершенствования нормативных инженерных методик расчета таких стержней. Пространственная работа

оболочечных моделей в таких исследованиях обеспечивается за счет введения в расчетную модель начальных геометрических несовершенств. К этой группе можно отнести исследования I.M. Aghoury и др. [108], Y.D. Kim [158], Y.D. Kim и D.W. White [159], L.R.S Marques [172], A.H. Salem и др. [179]. Следует отметить, что результаты исследований [158-159] легли в основу американского пособия [155] по расчету и проектированию элементов и рам переменной жесткости, а результаты диссертации [172] направлены на развитие европейских норм [140] расчета и проектирования стальных конструкций.

Среди зарубежных работ, в которых не использовался МКЭ, можно отметить диссертации В. Khaleghi [156] и G.A. Jimenez [151]. В обеих работах применялся похожий численный подход, базирующийся на методе конечных разностей (МКР). Суть метода заключалась в определении жесткостных характеристик сечения в каждой точке разбиения МКР в процессе нагружения элемента. Изменение жесткостных характеристик при неупругой работе материала вычислялось на основании изначально заданных эпюр развития пластических деформаций в двутавровом сечении. Так, в работе [156] учитывалось 11 таких эпюр, в работе [151] – 4. Таким образом, на каждом шаге нагружения в зависимости от определенной эпюры развития пластических деформаций вычислялись жесткостные характеристики, а затем определялся детерминант матрицы системы линейных уравнений МКР. Предельное состояние фиксировалось, когда детерминант матрицы обращался в ноль. Однако, в обоих исследованиях авторами решалась система из двух дифференциальных уравнений, описывающих потерю устойчивости по изгибно-крутильной форме, а в последних также не были учтены особенности кручения таких стержней.

Среди работ на постсоветском пространстве имеется крайне ограниченное число исследований, посвященных расчетам стержней переменного сечения на устойчивость по пространственно-деформированной схеме. К таким исследованиям можно отнести работы С.И. Билыка [24-26], А.У. Богдановича [28, 31], А.У. Богдановича и И.Л. Кузнецова [29-30, 32-35], А.И. Колесова и др. [67-69].

В работах С.И. Билыка [24-26] сделана попытка исследования элементов рам переменной жесткости на «пространственную устойчивость», однако сам термин «пространственная устойчивость» используется неправомерно: при исследовании автор разделяет систему трех дифференциальных уравнений равновесия стержня на уравнение устойчивости в плоскости стенки и систему двух уравнений устойчивости по изгибно-крутильной форме. Таким образом, автор фактически рассматривает устойчивость по изгибно-крутильной, а не по пространственной форме. Также в используемых дифференциальных уравнениях не учтены зависимости, обуславливающие особенности кручения таких стержней.

В работах А.У. Богдановича [28, 31], а также А.У. Богдановича в соавторстве с И.Л. Кузнецовым [29-30, 32-35] исследуется пространственная устойчивость тонкостенных стержней переменного сечения. Однако в данных работах представлены исследования только разработанных авторами профилей переменной жесткости (L- и Z-образного поперечного сечения), являющимися в большинстве случаев элементами решетчатых ферм. Полученные в указанных работах результаты не могут быть распространены на стержни с иным видом поперечного сечения и способом изменения сечения по длине, а теоретическая основа представляется незаконченной ввиду отсутствия оптимальной методики учета неупругой работы материала в процессе нагружения стержней.

В работах А.И. Колесова и др. [67-69] была предложена инженерная методика расчета несущей способности сжато-изогнутых элементов переменного сечения. Однако разработанная методика основывается на расчете МКЭ всего 18 моделей рам и не может быть экстраполирована на иные геометрические размеры и варианты загрузки стержней переменной жесткости. Дальнейшие разработки авторов нам неизвестны, хотя апробация предложенной методики [67] показала хорошее соответствие с результатами численного расчета.

Таким образом, известные исследования пространственной устойчивости стержней переменной жесткости не позволяют создать полноценную инженерную методику расчета таких стержней в форме, предусмотренной отечественными Нормами [89].

1.4. Анализ экспериментальных исследований пространственной устойчивости рам переменной жесткости и их элементов

Экспериментальному исследованию двухшарнирных рам переменной жесткости посвящено достаточное количество работ, причем большинство из которых, было проведено отечественными авторами во времена СССР.

В советские годы внедрение рам переменной жесткости в практику осуществлялось, как правило, через типовые конструкции, что требовало проведения полномасштабных испытаний перед вводом их в серийное производство.

Так, для типовой серии «Шифр 828КМ» [103] были испытаны рамы переменной жесткости, образованные роспуском прокатных двутавров, пролетом 18 и 24 м, причем испытывались как одиночные рамы, так и связевой блок из двух рам [91]. Также были испытаны такие же рамы только из низколегированной стали для регионов с низкой температурой [3].

Теоретической базой для разработки типовой серии «УНИМАК» [90] послужили испытания связевого блока из двух безреберных сварных рам переменной жесткости пролетом 24 м [104]. В [104] приведено также описание экспериментального исследования крупномасштабной 5-ти пролетной (5x18 м) сварной рамы переменной жесткости, которое было проведено в связи с проектированием и строительством в СССР первого здания с такой поперечной рамой.

Помимо предсерийных образцов рам, в СССР также был проведен ряд натуральных испытаний экспериментальных конструкций. Проведены два исследования рам переменной жесткости с гибкой стенкой: пролетом 18 м [76] и 24 м [98].

Среди полномасштабных натуральных испытаний блоков двухшарнирных сварных рам переменной жесткости следует отметить работы P.J. Dowling и др. [107], J.-J. Li и G.-Q. Li [170], G.I.B. Rankin и др. [176]. В первом

исследовании произведено испытание рам пролетом 21 и 30 м, во второй – 9 м, в третьей – 18 м.

В указанных работах, посвященных натурным испытаниям рам, авторами отмечается выраженная пространственная (изгибно-крутильная) форма потери устойчивости элементов рам переменной жесткости (на участках между раскреплениями) после достижения предельных значений нагрузок. Данный факт подчеркивает необходимость рассматривать пространственно-деформированную схему в теоретических исследованиях и расчетах рам переменной жесткости и их элементов.

В отличие от рам, экспериментальные исследования пространственной устойчивости отдельных стержней переменной жесткости отечественными авторами не проводились. Далее приведен анализ исследований, выполненных зарубежными авторами.

D.J. Butler и G.B. Anderson [125] одними из первых провели натурные эксперименты стержней переменной жесткости. Авторами испытаны центрально-сжатые и сжато-изогнутые сварные двутавровые стержни с линейно-изменяющейся высотой стенки и шириной поясов. Закрепление стержней принималось консольным (большее сечение было защемлено), а загрузка продольной и поперечной силами происходила в плоскости стенки на меньшем (свободном) сечении, которое было закреплено от бокового смещения. Особенностью этого исследования было то, что все результаты получены при упругой работе материала: образцы изготавливались из высокопрочной стали с пределом текучести почти 69 кН/см^2 . При этом центрально-сжатые образцы теряли устойчивость в плоскости меньшей жесткости (изгибная форма), а сжато-изогнутые – по изгибно-крутильной форме.

Испытания консольных двутавровых стержней переменной высоты также были проведены G.C. Lee, M.L. Morrell и S.P. Prawel [163]. Однако в данном исследовании сжатие с изгибом достигалось за счет того, что образцы монтировались под углом $10...30^\circ$ к вертикальной поверхности, а нагрузка прикладывалась к меньшему сечению строго вертикально. Большинство образцов

исчерпали несущую способность за счет потери местной устойчивости пояса рядом с местом консольного опирания.

В рамках диссертации В. Khaleghi [156] было проведено экспериментальное исследование шарнирно-опертых двутавровых образцов переменной высоты при различных случаях раскрепления из плоскости (всего 17 испытаний). Загружение продольной силой производилось с односторонними эксцентриситетами на обоих сечениях. Однако, для более половины экспериментальных образцов расхождение в предельных силах составило от 25% до 115%, что свидетельствует об ошибках либо в эксперименте, либо в разработанном авторе численном методе.

J.B. Salter, D. Anderson и I.M. May [180] испытали 8 шарнирно-опертых двутавровых образцов с переменной высотой стенки: 5 шт. без промежуточного раскрепления, 2 шт. с закреплением от бокового смещения растянутого пояса в середине длины и 1 шт. с закреплением сжатого пояса. Загружение стержней осуществлялось в 2 этапа: сначала прикладывалась центрально-сжимающая сила 100 или 200 кН, а затем большее сечение догружалось изгибающим моментом в плоскости стенки до потери элементом потери устойчивости, которая происходила по пространственной схеме.

Большое экспериментальное исследование шарнирно-опертых двутавровых стоек переменной высоты было проведено Н. Shiomi, М. Kurata и S. Nishikawa [184-185]. Всего в рамках данного исследования проведено три серии испытаний: 19 образцов были подвергнуты сжатию с изгибом до потери устойчивости, 5 образцов также были подвергнуты сжатию с изгибом, но перемещения в плоскости меньшей жесткости и закручивание сечений были исключены за счет раскреплений, и 3 образца исследовались на предмет распределения остаточных напряжений в сечениях стержней переменной высоты. В данном эксперименте, в отличие от предыдущего, загружение стержней моментом и продольной силой происходило одновременно, при этом стержни также теряли устойчивость по пространственной схеме.

Аналогично предыдущему исследованию, I.M. Cristutiu, D.L. Nunes и A.I. Dogariu [128-129] произвели экспериментальные испытания 6-ти двутавровых

образцов переменной высоты: 2 шт. без раскрепления, 2 шт. с закреплением от поперечных смещений и 2 шт. с закреплением от кручения. Потеря устойчивости для всех 6-ти образцов в конечном итоге происходила по пространственной схеме.

Таким образом, результаты натурных испытаний сжато-изогнутых двутавровых стержней переменной жесткости показали, что потеря устойчивости всегда происходила по пространственной схеме (с учетом всех трех компонент деформаций оси стержня), что еще раз подчеркивает необходимость рассматривать пространственно-деформированную расчетную схему в теоретических исследованиях и расчетах таких стержней.

Следует отметить, что часть указанных экспериментальных исследований пространственной устойчивости двутавровых стержней переменной высоты позволяют в полной мере верифицировать аналитически-численный метод расчета таких стержней, представленный в Главе 3.

Выводы по первой главе

Проведенный анализ теоретических и экспериментальных исследований устойчивости двутавровых стержневых элементов рамных конструкций переменной жесткости по пространственно-деформированной схеме позволяет сделать следующие выводы:

1. Существующие исследования в этой области связаны, в основном, с расчетами методом конечных элементов (МКЭ). Часть этих исследований направлена на развитие и совершенствование конечно-элементных моделей таких стержней и почти не содержит практически значимых результатов. Вторая их часть связана с практическими расчетами таких стержней МКЭ с целью создания местных норм расчета таких элементов. Как показала практика исследований, применение МКЭ для быстрого получения широкого диапазона результатов, необходимых для разработки инженерной методики расчета таких стержней, не

является самым рациональным выбором. Его безальтернативное использование легко объясняется отсутствием иных разработанных методов расчета, обладающих быстродействием и достаточной точностью.

2. Имеющийся в литературе объем результатов выполненных исследований недостаточен и не позволяет создать инженерную методику расчета стержневых элементов переменной жесткости на пространственную устойчивость.

3. Существующие инженерные методики расчета других стран, ввиду разности исторически сложившихся подходов, не позволяют адаптировать их для применения в отечественных Нормах [89].

4. Большинство исследований не содержат анализа пространственной устойчивости таких стержней в зависимости от различных геометрических параметров: углов наклона и сужения поясов, стеснения деформации торцевых сечений и др. При этом в них рассматривают лишь одну схему загрузки продольной силой с односторонними концевыми эксцентриситетами.

ГЛАВА 2. БИФУРКАЦИОННЫЕ ЗАДАЧИ УСТОЙЧИВОСТИ СТЕРЖНЕЙ ПЕРЕМЕННОЙ ЖЕСТКОСТИ

2.1. Решение бифуркационных задач устойчивости

Для построения аналитически-численного метода расчета [18] стержневых элементов стальных рамных конструкций переменной жесткости на пространственную устойчивость (когда необходимо учитывать влияние всех трех компонентов перемещений на усилия – Рисунок 2.1а) необходимо знать формы потери устойчивости таких элементов, которые вытекают из решения соответствующих бифуркационных задач устойчивости.

Применяемые в практике проектирования стержневые элементы рам переменной жесткости имеют двутавровые сечения с развитой жесткостью в плоскости рамы (стенки) $J_x \gg J_y$, поэтому бифуркационные задачи устойчивости выделенного из рамы элемента можно разделить [18] на задачу о потере устойчивости центрально-сжатого стержня по изгибной форме (Рисунок 2.1б) и на задачу о потере устойчивости внецентренно-сжатого стержня по изгибно-крутильной форме (Рисунок 2.1в).

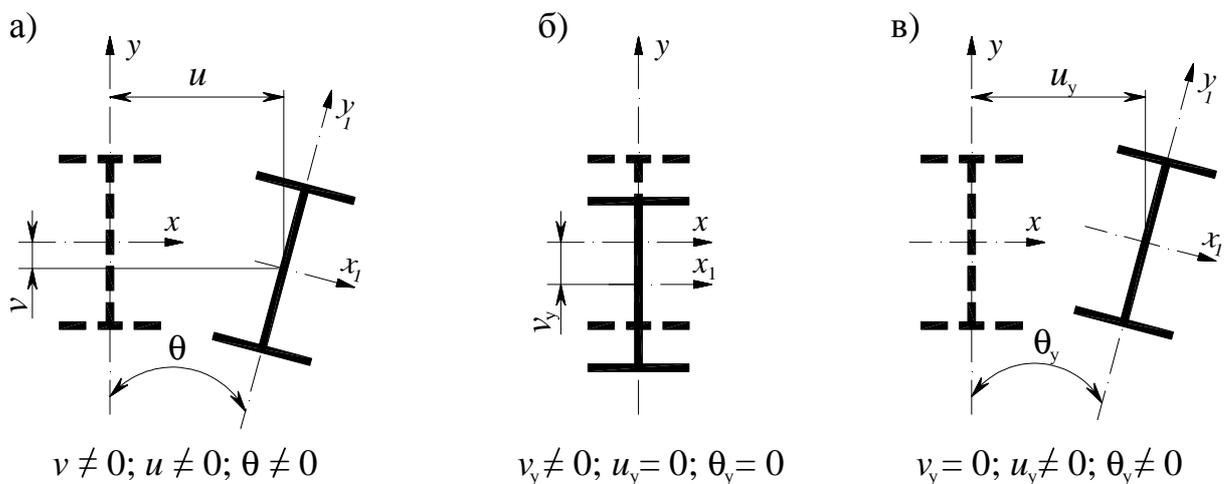


Рисунок 2.1. Перемещения сечений элемента: при пространственном деформировании (а), при потере устойчивости центрально-сжатого стержня по изгибной форме (б), при потере устойчивости по изгибно-крутильной форме (в)

Следуя [18], функции потери устойчивости упомянутых задач представим в следующем виде:

$$v_y = V_y \psi_y(z); u_y = U_y \varphi_y(z); \theta_y = \Theta_y v_y(z), \quad (2.1)$$

где V_y, U_y, Θ_y – константы, с точностью до которых решаются бифуркационные задачи устойчивости, и имеющие размерности, соответствующие перемещениям v, u, θ ; $\psi_y(z), \varphi_y(z), v_y(z)$ – формы потери устойчивости. Отметим, что константы V_y, U_y, Θ_y могут быть определены только при решении деформационных задач.

Рассматривая бифуркационные задачи об устойчивости стержней с переменным по длине сечением, следует отметить, что для такого рода стержней получить решения в замкнутом виде возможно только для задачи об устойчивости при центральном сжатии (Рисунок 2.1б) и только, если жесткость изменяется по определенному закону.

В практике проектирования сечения двутавровых элементов рам переменной жесткости подбираются индивидуально: изменение изгибных жесткостей назначается в соответствии с действующими усилиями и поэтому не подчиняется какому-либо закону. Следовательно, решения таких задач в аналитическом виде не представляется возможным.

В настоящей работе для решения бифуркационных задач устойчивости стержней переменной жесткости был применен численный алгоритм, предложенный М.Ж. Iremonger [149], который, базируясь на методе конечных разностей, предполагает численное решение с помощью последовательных приближений. Указанный алгоритм позволяет решать такого рода задачи для центрально-сжатых или внецентренно-сжатых стержней переменной жесткости при произвольном изменении поперечного сечения по длине с получением значений первых критических сил и соответствующих им изгибных или изгибно-крутильных форм потери устойчивости.

Метод конечных разностей (МКР), используемый в указанном алгоритме, представляет собой численный способ решения краевых задач, которые удовлетворяют определенным граничным (краевым) условиям интервала $[0, L]$.

Решение краевой задачи МКР, состоит в том, что весь интервал $[0, L]$, на котором исследуется решение $v(z)$ краевой задачи, разбивается на равные интервалы a (Рисунок 2.2), а производные функции $v(z)$ заменяются приближенными выражениями через разности значений ординат функции v_i в узловых точках i .

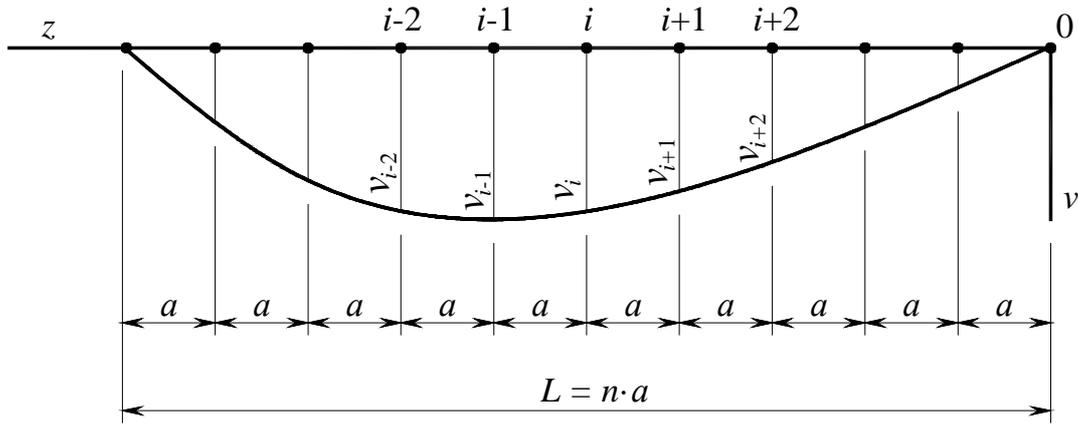


Рисунок 2.2. Схема разбиения интервала $[0, L]$ и значения v_i функции $v(z)$ в i -х узлах

В данной работе для решения дифференциальных уравнений до 4-го порядка включительно, используются центральные разности, в соответствии с которыми, приближенные выражения для производных имеют вид:

$$\begin{aligned}
 v'_i &= \frac{1}{2a} (v_{i+1} - v_{i-1}) \\
 v''_i &= \frac{1}{a^2} (v_{i+1} - 2v_i + v_{i-1}) \\
 v'''_i &= \frac{1}{2a^3} (v_{i+2} - 2v_{i+1} + 2v_{i-1} - v_{i-2}) \\
 v^{iv}_i &= \frac{1}{a^4} (v_{i+2} - 4v_{i+1} + 6v_i - 5v_{i-1} + v_{i-2}).
 \end{aligned}
 \tag{2.2}$$

Далее составляются разностные выражения для производных (2.1) во всех внутренних точках интервала $[0, L]$. При этом значения искомой функции $v(z)$ вне интервала $[0, L]$ определяются из граничных условий задачи, которые также записываются в конечно-разностной форме. В результате приходят к системе алгебраических уравнений относительно неизвестных v_i . Порядок этой системы равен числу внутренних узлов на интервале $[0, L]$.

Численный алгоритм решения бифуркационных задач устойчивости описан в Параграфе 2.1.1 на примере задачи об устойчивости центрально-сжатого стержня. Решение построено в матричной форме ввиду удобства проведения расчетов в таком виде на ЭВМ, потому что в математическом смысле, бифуркационные задачи устойчивости представляются собой задачи о собственных значениях и собственных векторах матриц.

2.1.1. Устойчивость центрально-сжатого стержня по изгибной форме

Дифференциальное уравнение задачи об устойчивости центрально-сжатого стержня переменной жесткости (Рисунок 2.3а) имеет вид:

$$\left(EJ_x^* v_y''\right)'' + N v_y'' = 0, \quad (2.3)$$

где E – модуль линейной деформации; J_x^* – главный осевой момент инерции относительно оси x ; N – продольная сжимающая сила; $v_y = v_y(z)$ – функция потери устойчивости.

В формуле (2.3) и далее все характеристики, отмеченные «*», являются переменными по длине элемента и зависят от координаты z . Геометрические характеристики вычислены с учетом редуцированной толщины поясов, которая возникает в связи с наклоном полок к продольной оси (Параграф 3.1.2).

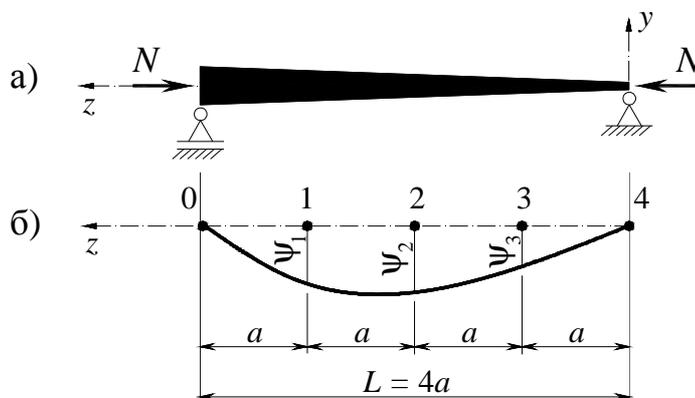


Рисунок 2.3. Расчетная схема центрально-сжатого стержня (а) и схема разбиения стержня для примера расчета МКР (б)

В связи с тем, что в бифуркационных задачах определяют точку, в которой возможны два равновесных состояния («точка бифуркации»), то в (2.3) функция заменяется на форму потери устойчивости:

$$(EJ_x^* \psi_y'')'' + N\psi_y'' = 0. \quad (2.4)$$

В дальнейшем индекс «у» («устойчивости») опущен.

В работе [149] указано, что использование дифференциального уравнения 4-го порядка для решения данной задачи не имеет преимуществ по сравнению с классическим уравнением 2-го порядка. И, как показали исследования, для двутавровых элементов рам, применяемых в строительстве, учет производных J_x^* в (2.3) дает ничтожную поправку в результаты. Поэтому в данной работе для решения задачи об устойчивости центрально-сжатого стержня используется дифференциальное уравнение для призматических стержней:

$$EJ_x^* \psi'' + N\psi = 0. \quad (2.5)$$

Как было указано ранее, решение (2.4) будем проводить в матричной форме согласно алгоритму [149].

В форме МКР уравнение (2.2), записанное для i -й точки, предстанет в виде:

$$\frac{EJ_x^*(z_i)}{a^2} (\psi_{i+1} - 2\psi_i + \psi_{i-1}) = -N\psi_i. \quad (2.6)$$

Перенесем множитель $\frac{EJ_x^*(z_i)}{a^2}$ в правую часть (2.5), предварительно выразив $J_x^*(z_i)$ через жесткость среднего по длине сечения J_x^{mid} :

$$\psi_{i+1} - 2\psi_i + \psi_{i-1} = -\frac{Na^2}{EJ_x^{mid}} \frac{\psi_i}{k_i^J}, \quad (2.7)$$

где $k_i^J = \frac{J_x^*(z_i)}{J_x^{mid}}$ – коэффициент перехода от J_x^{mid} к моментам инерции стержня в точках разбиения.

Введем обозначение $\Lambda = \frac{Na^2}{EJ_x^{mid}}$, тогда (2.7) примет вид:

$$\psi_{i+1} - 2\psi_i + \psi_{i-1} = \Lambda \left(-\frac{\psi_i}{k_i^J} \right). \quad (2.8)$$

Далее рассмотрим составление матричной формы задачи в случае, если стержень разделен на 4 равные части (Рисунок 2.3б).

Принимая во внимание граничные условия (шарнирное опирание) $\psi(z=0)=0 \rightarrow \psi_0=0$ и $\psi(z=L)=0 \rightarrow \psi_4=0$, составим систему уравнений в форме (2.8) для точек 1-3:

$$\begin{cases} -2\psi_1 + \psi_2 = \Lambda \left(-\frac{1}{k_1^J} \right) \psi_1 \\ \psi_1 - 2\psi_2 + \psi_3 = \Lambda \left(-\frac{1}{k_2^J} \right) \psi_2 \\ \psi_2 - 2\psi_3 = \Lambda \left(-\frac{1}{k_3^J} \right) \psi_3 \end{cases} \quad (2.9)$$

Представим систему линейных уравнений (2.9) в матричной форме:

$$\begin{bmatrix} -2 & 1 & 0 \\ 1 & -2 & 1 \\ 0 & 1 & -2 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \psi_1 \\ \psi_2 \\ \psi_3 \end{Bmatrix} = \Lambda \begin{bmatrix} -\frac{1}{k_1^J} & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{1}{k_2^J} & 0 \\ 0 & 0 & -\frac{1}{k_3^J} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \psi_1 \\ \psi_2 \\ \psi_3 \end{Bmatrix} \rightarrow [A]\{\psi\} = \Lambda [B]\{\psi\}, \quad (2.10)$$

где $\{\psi\}$ – векторы узловых значений функции изогнутой формы оси стержня; $[A]$ и $[B]$ – матрицы, содержащие коэффициенты перед значениями $\{\psi\}$; Λ – собственное значение матрицы.

Перепишем (2.10) в следующем виде:

$$\{\psi^j\} = \Lambda [A]^{-1} [B] \{\psi^{j-1}\} = \Lambda [R] \{\psi^{j-1}\}, \quad (2.11)$$

где $[R] = [A]^{-1} [B]$, $\{\psi^{j-1}\}$ и $\{\psi^j\}$ – вектор функции формы (собственный вектор) на предыдущей и текущей итерации, соответственно.

После составления матричной формы (2.11) переходим к итерационному процессу последовательных приближений, после которого будут известны

собственный вектор $\{\psi\}$ (форма потери устойчивости) и собственное значение матрицы Λ (первая критическая сила).

Итерационный процесс решения (2.11) происходит по следующему алгоритму:

1. Вычисление матрицы $[R]$.

2. Задание первоначального приближения вектора $\{\psi^{j-1}\}$. В качестве первоначального приближения было принято распределение форм перемещений в виде одной полуволны синусоиды: $\psi^{j-1} = \sin\left(\pi \frac{z}{L}\right)$.

3. Решение (2.11) с получением нового собственного вектора $\{\psi^j\} = [R]\{\psi^{j-1}\}$.

4. Нормализация вектора $\{\psi^j\}$ – деление всех составляющих вектора на одно из значений. В расчете была принята нормализация вектора делением его на значение в середине интервала $\{\psi^j\} = \frac{\{\psi^j\}}{\psi_{mid}^j}$. Это же значение (ψ_{mid}^j) принимается контрольным при оценке сходимости решения.

5. Вычисление собственного значения матрицы $\Lambda = \frac{1}{\psi_{mid}^j}$.

6. Проверка сходимости решения. Для этого сравниваются контрольные значения на текущей и предыдущей итерациях:

$$\frac{\psi_{mid}^j - \psi_{mid}^{j-1}}{\psi_{mid}^j} < 10^{-7}, \quad (2.12)$$

где 10^{-7} – заранее заданная в расчете точность.

7. В случае если условие (2.12) не выполняется, тогда происходит переход обратно к шагу № 3, где вектор $\{\psi^j\}$, полученный на текущей итерации, подставляется в качестве $\{\psi^{j-1}\}$.

8. В случае если условие (2.12) выполнено, то вычисляется собственное значение матрицы $\Lambda = \frac{1}{\psi_{mid}^j}$ и фиксируется собственный вектор $\{\psi^j\}$. Далее вычисляется первая критическая сила:

$$N_{cr} = \frac{\Lambda E J_x^{mid}}{a^2} \quad (2.13)$$

Описанный алгоритм был реализован в программном пакете Maple. При проведении расчетов МКР стержень разбивался на 40 частей.

С помощью представленного алгоритма было произведено исследование двутавровых стержней переменной жесткости (Рисунок 2.4а), у которых среднее по длине ($z=0.5L$) поперечное сечение принималось одинаковым (Рисунок 2.4б).

Соотношение радиусов инерции принятого среднего сечения: $i_y/i_x = 4.4$.

Варьируемые параметры стержней были следующими (Рисунок 2.4а):

1) длина элементов L ; принималась на основании гибкости стержня в плоскости меньшей жесткости λ_y^{mid} в среднем сечении

$$L = \lambda_y^{mid} i_x^{mid}, \quad (2.14)$$

где i_x^{mid} – радиус инерции в середине длины стержня ($z = 0.5L$).

Значение λ_y^{mid} в расчетах принималось 60; 80; 100; 120; 140, что соответствует значениям условной гибкости $\bar{\lambda}_y^{mid} = 2.1; 2.8; 3.4; 4.1; 4.8$ стержней, изготовленных из стали С245 с расчетным сопротивлением $R_y = 24.5 \text{ кН/см}^2$.

2) взаимный угол наклона поясов β_1 ; принимался равным: 0° (постоянное сечение); 3° ; 6° ; 9° ; 12° ; 15° (в расчетах принимались максимально возможные для определенной гибкости углы, при которых возможно изготовление стержней);

3) угол сужения поясов β_2 (только для $\lambda_y^{mid} = 120$); принимался 1.5° и 3° .

Геометрия принята таким образом, что все стержни одинаковой гибкости имеют одинаковый расход стали.

В дальнейшем верхний индекс «*mid*» в обозначениях гибкости опущен.

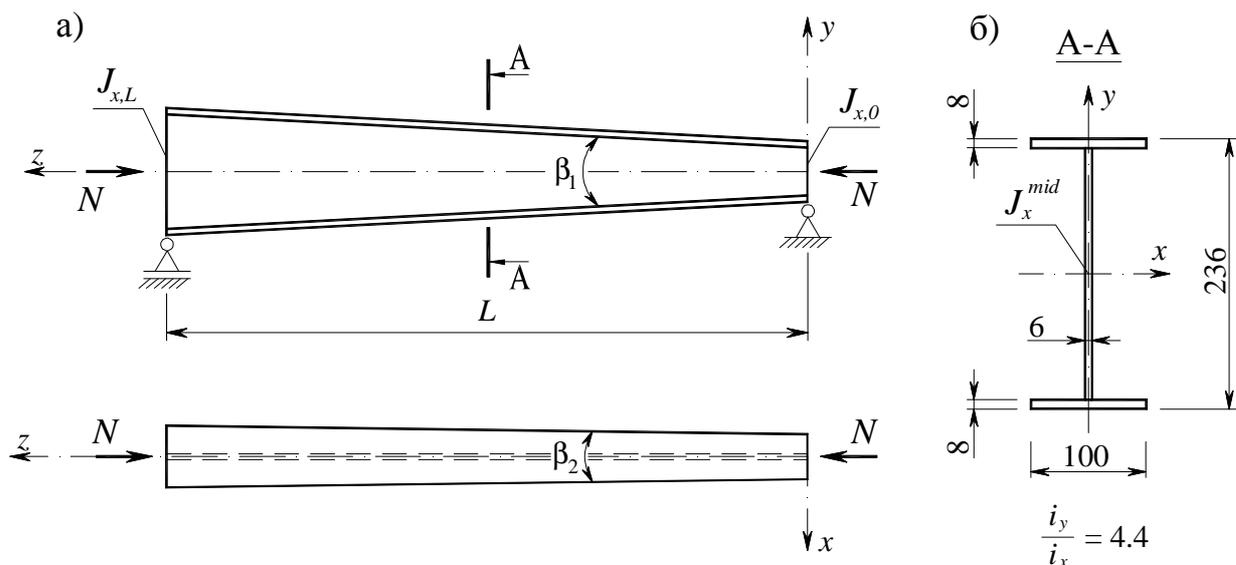


Рисунок 2.4. Расчетная схема стержня (а) и размеры (в мм) среднего по длине ($z = 0.5L$) поперечного сечения (б)

Исследование двутавров переменного сечения показало, что изгибные формы потери устойчивости центрально-сжатых элементов с линейным изменением высоты стенки и/или ширины полки не зависят от геометрии стержней и определяются лишь соотношением жесткостей концевых сечений $J_{x,L}/J_{x,0}$. Аналогичная ситуация наблюдается для брусков разного поперечного сечения с линейным изменением его высоты (при прочих постоянных размерах) с отличием в том, что формы зависят только от соотношения высот торцевых сечений [36].

Ввиду того, что величины первой критической силы (2.10) не имеют практического применения в задаче о пространственной устойчивости и могут быть найдены в литературе, поэтому не приводятся.

На Рисунке 2.5 приведены результаты определения изгибных форм потери устойчивости центрально-сжатого стержня в зависимости от соотношений $J_{x,L}/J_{x,0}$. Для удобства сравнения все формы были нормализованы путем деления всех значений вектора $\{\psi\}$ на наибольшее значение из его ряда.

Для практического понимания, в Таблице 2.1 в качестве примеров приведены стержни с условными гибкостями 2.8, 4.1, 4.8 (при различных β_1 и β_2) с соответствующими соотношениями $J_{x,L}/J_{x,0}$.

Таблица 2.1. Стержни с соответствующими соотношениями $J_{x,L}/J_{x,0}$

	$J_{x,L}/J_{x,0}$									
	1	5		20		40		75		
$\bar{\lambda}_y^{mid}$	любая	2.8	4.1	2.8	4.1	2.8	4.8	2.8	4.1	
β_1	0°	5.3°	3°	9°	6°	10.5°	6°	11.6°	6°	
β_2	0°	0°	0°	0°	0°	0°	0°	0°	3°	

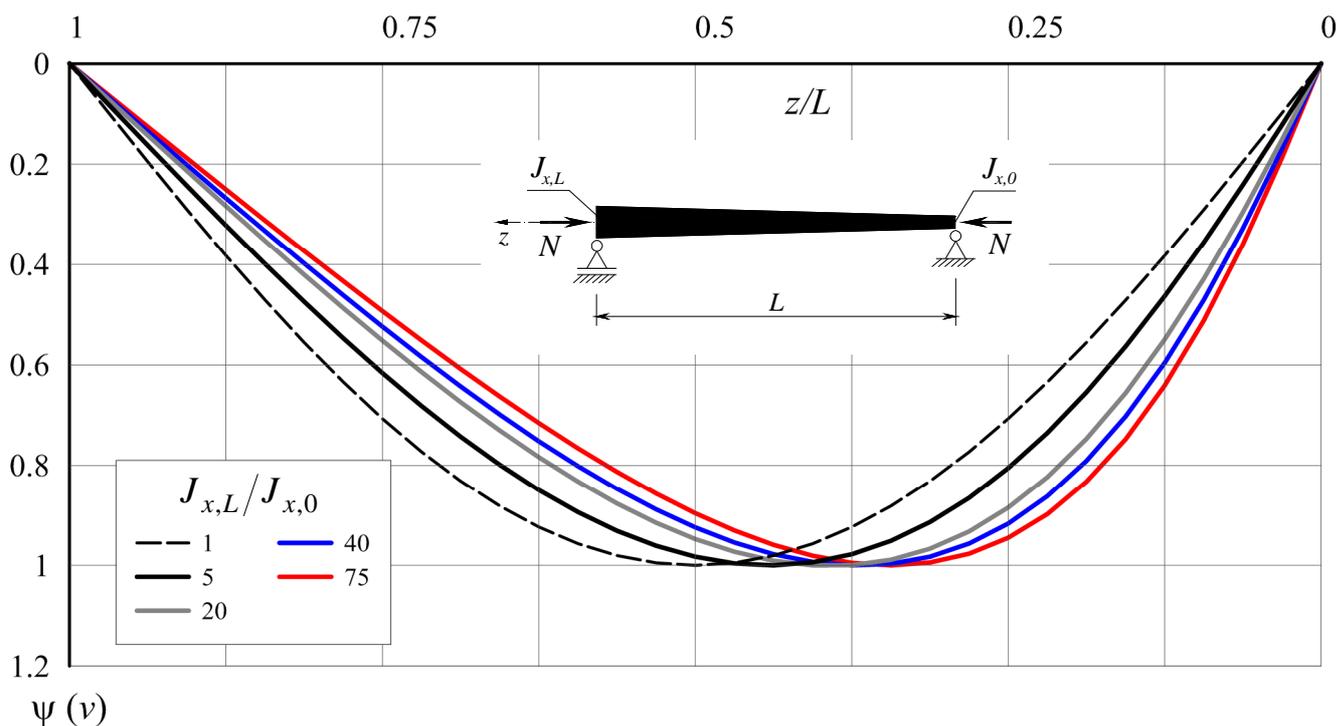


Рисунок 2.5. Изгибные формы потери устойчивости центрально-сжатого стержня в зависимости от соотношений жесткостей конечных сечений $J_{x,L}/J_{x,0}$

В результате анализа форм потери устойчивости можно сделать вывод, что с увеличением соотношения изгибных жесткостей конечных сечений максимальная ордината смещается в сторону с меньшим поперечным сечением. Если для призматических стержней ($J_{x,L}/J_{x,0} = 1$) кривая представляет собой «классическую» полуволну синусоиды с максимальной ординатой посередине, то для конических стержней с отношением $J_{x,L}/J_{x,0} = 75$ максимальная ордината смещается почти в первую треть длины элемента. Найденные формы потери устойчивости в последующем используются в аналитически-численном методе расчета на пространственную устойчивость (Глава 3).

2.1.2. Устойчивость внецентренно-сжатого стержня по изгибно-крутильной форме

Решение бифуркационной задачи устойчивости по изгибно-крутильной форме стержня, сжатого продольной силой с различными концевыми эксцентриситетами (Рисунок 2.6) выполняется при соблюдении следующих граничных условий:

- свободный поворот торцевых сечений относительно осей x и y , при этом линейные перемещения относительно этих осей запрещены (шарнирное опирание): $u(z=0)=v(z=0)=0$ и $u(z=L)=v(z=L)=0$;
- свободная депланация торцевых сечений: $\theta'(z=0) \neq 0$ и $\theta'(z=L) \neq 0$;
- кручение торцевых сечений относительно оси z запрещено: $\theta(z=0)=\theta(z=L)=0$.

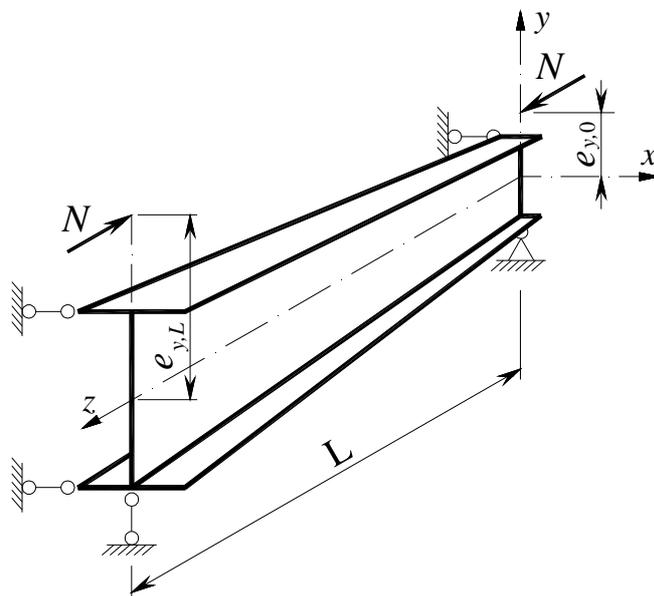


Рисунок 2.6. Расчетная схема задачи об устойчивости по изгибно-крутильной форме

Система однородных дифференциальных уравнений, описывающих данную задачу, вытекает из деформационной теории расчета тонкостенных стержней с учетом особенностей работы на кручение и имеет следующий вид:

$$\begin{cases} (EJ_y^* u_y'')'' + Nu_y'' + (M_x \theta_y')' = 0 \\ \left[\frac{EJ_\omega^*}{h_\omega^{*2}} (\theta_y h_\omega^*)'' \right] h_\omega^* - (GJ_d^* \theta_y')' + M_x u_y'' + N(i_p^{*2} \theta_y')' = 0, \end{cases} \quad (2.15)$$

где J_y^* – главный осевой момент инерции относительно оси y ; J_ω^* – секториальный момент инерции; h_ω^* – расстояние между центрами тяжести поясов; J_d^* – момент инерции при чистом кручении; G – модуль сдвиговой деформации; $i_p^{*2} = \frac{J_x^* + J_y^*}{A^*}$ – геометрическая характеристика, где A^* – площадь поперечного сечения; N – продольная сжимающая сила, M_x – изгибающий момент относительно оси x ; $u_y = u_y(z)$ и $\theta_y = \theta_y(z)$ – функции потери устойчивости.

Первый и второй члены второго уравнения системы (2.15) содержат дифференциальные зависимости, связанные с особенностями стесненного кручения тонкостенных стержней открытого профиля переменного сечения, которые описаны в Параграфе 3.1.2.

При решении бифуркационной задачи о потере устойчивости по изгибно-крутильной форме в (2.15) также заменяем функции на формы потери устойчивости:

$$\begin{cases} (EJ_y^* \varphi_y'')'' + N\varphi_y'' + (M_x v_y')' = 0 \\ \left[\frac{EJ_\omega^*}{h_\omega^{*2}} (v_y h_\omega^*)'' \right] h_\omega^* - (GJ_d^* v_y')' + M_x \varphi_y'' + N(i_p^{*2} v_y')' = 0. \end{cases} \quad (2.16)$$

В дальнейшем индекс « y » опущен.

Как показали исследования, первое уравнение (2.16) может быть предварительно проинтегрировано без учета производных J_y^* и M_x для стержней с линейным изменением ширины поясов без потери точности расчетов. С учетом предварительного интегрирования система (2.16) предстанет в виде:

$$\begin{cases} EJ_y^* \varphi'' + N\varphi + M_x v' = 0 \\ \left[\frac{EJ_\omega^*}{h_\omega^{*2}} (v h_\omega^*)'' \right] h_\omega^* - (GJ_d^* v')' + M_x \varphi'' + N(i_p^{*2} v')' = 0. \end{cases} \quad (2.17)$$

Решение системы (2.17) также производится в матричной форме по алгоритму [149] с помощью МКР. Для построения матричной формы все слагаемые, содержащие силу N , переносятся в правую часть. При этом изгибающий момент M_x представляется в виде:

$$M_x = M_{x,L} \mu_x = N e_{y,L} \mu_x, \quad (2.18)$$

где $M_{x,L} = N e_{y,L}$ – опорный изгибающий момент, приложенный к большему сечению; $\mu_x = \left[(1 + n_x) \frac{z}{L} - 1 \right]$ – форма изгибающего момента, $n_x = \frac{e_{y,0}}{e_{y,L}}$ – соотношение конечных эксцентриситетов.

С учетом переноса слагаемых и (2.18), а также с выносом общего множителя N , система (2.17) предстанет в виде:

$$\begin{cases} EJ_y^* \varphi'' = N(-\varphi - e_{y,L} \mu_x v') \\ \left[\frac{EJ_\omega^*}{h_\omega^{*2}} (v h_\omega^*)'' \right] h_\omega^* - (GJ_d^* v')' = N \left(-e_{y,L} \mu_x \varphi'' - (i_p^{*2} v')' \right). \end{cases} \quad (2.19)$$

Для перехода в матричную форму МКР перепишем систему (2.19) для i -й точки разбиения стержня по длине:

$$\begin{cases} EJ_{y,i}^* \varphi_i'' = N(-\varphi_i - e_{y,L} \mu_{x,i} v_i') \\ \left[\frac{EJ_{\omega,i}^*}{h_{\omega,i}^{*2}} (v_i h_{\omega,i}^*)'' \right] h_{\omega,i}^* - (GJ_{d,i}^* v_i')' = N \left(-e_{y,L} \mu_{x,i} \varphi_i'' - (i_{p,i}^{*2} v_i')' \right). \end{cases} \quad (2.20)$$

Аналогичным образом, как в задаче об устойчивости центрально-сжатого стержня, из системы (2.20) составляется матричная форма, при этом общий вектор функций формы составляется из двух самостоятельных векторов: φ и v . Особенность заключается в том, что в общую матрицу сначала записываются все

первые уравнения системы (2.20) для всех точек, а затем, аналогично, все вторые уравнения системы (2.20).

В случае разбиения стержня на 4 равные части (см. Рисунок 2.3), применяя выражения (2.2) и принимая во внимание граничные условия ($\varphi_0 = \varphi_4 = 0$ и $v_0 = v_4 = 0$), матричная форма (2.19) решения МКР примет вид:

$$\begin{bmatrix} c_{11} & c_{12} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ c_{21} & c_{22} & c_{23} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & c_{32} & c_{33} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & c_{44} & c_{45} & c_{46} \\ 0 & 0 & 0 & c_{54} & c_{55} & c_{56} \\ 0 & 0 & 0 & c_{64} & c_{65} & c_{66} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \varphi_1 \\ \varphi_2 \\ \varphi_3 \\ v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{Bmatrix} = N \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 & d_{14} & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 & d_{25} & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & d_{36} \\ d_{41} & d_{42} & 0 & d_{44} & d_{45} & 0 \\ d_{51} & d_{52} & d_{53} & d_{54} & d_{55} & d_{56} \\ 0 & d_{62} & d_{63} & 0 & d_{65} & d_{66} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \varphi_1 \\ \varphi_2 \\ \varphi_3 \\ v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{Bmatrix}, \quad (2.21)$$

где c_{ik} и d_{ik} – коэффициенты перед составляющими общего вектора формы; φ_i и v_i – узловые значения функции изогнутой и закрученной формы оси стержня, соответственно; N – собственное значение матрицы и, в данной задаче, также наименьшая критическая сила при потере устойчивости по изгибно-крутильной форме.

В общем виде (2.21) переписывается в виде:

$$[C]\{\varphi v\} = N[D]\{\varphi v\}, \quad (2.22)$$

где $\{\varphi v\}$ – общий вектор, составленный из узловых значений двух функций формы оси стержня; $[C]$ и $[D]$ – матрицы, содержащие коэффициенты перед значениями вектора формы.

Переписем (2.22) в следующем виде:

$$\{\varphi v^j\} = N [C]^{-1} [D] \{\varphi v^{j-1}\} = N [H] \{\varphi v^{j-1}\}, \quad (2.23)$$

где $[H] = [C]^{-1} [D]$; $\{\varphi v^j\}$ и $\{\varphi v^{j-1}\}$ – общий вектор функции формы (собственный вектор) на предыдущей и текущей итерации, соответственно.

Составив матричную форму МКР (2.23), можно приступить к итерационному процессу решения задачи об изгибно-крутильной потере устойчивости.

Алгоритм решения (2.23) построен по такому же принципу, что и в задаче об устойчивости центрально-сжатого стержня:

1. Вычисление матрицы $[H]$.

2. Задание первоначального приближения вектора $\{\varphi v^{j-1}\}$. В качестве первоначального приближения принималось распределение форм перемещений и форм углов закручивания с одной полуволной синусоиды: $\{\varphi^{j-1}\} = \{v^{j-1}\} = \sin\left(\pi \frac{z}{L}\right)$.

3. Решение (2.20) с получением нового общего собственного вектора $\{\varphi v^j\} = [H] \{\varphi v^{j-1}\}$.

4. Нормализация общего вектора $\{\varphi v^j\}$ – деление всех составляющих вектора на одно из значений. В расчете была принята нормализация вектора делением его на значение в середине интервала линейной формы перемещений $\{\varphi v^j\} = \frac{\{\varphi v^j\}}{\varphi_{mid}^j}$. Это же значение (φ_{mid}^j) принимается контрольным при оценке

сходимости решения.

5. Вычисление собственного значения матрицы $N = \frac{1}{\varphi_{mid}^j}$.

6. Проверка сходимости решения. Для этого сравниваются контрольные значения на текущей и предыдущей итерациях:

$$\frac{\varphi_{mid}^j - \varphi_{mid}^{j-1}}{\varphi_{mid}^j} < 10^{-7}, \quad (2.24)$$

где 10^{-7} – заранее заданная в расчете точность.

7. В случае если условие (2.24) не выполняется, тогда происходит переход обратно к шагу № 3, где общий вектор, полученный на текущей итерации, подставляется в качестве начального приближения.

8. В случае если условие (2.24) выполнено, то вычисляется собственное значение матрицы $N = \frac{1}{\varphi_{mid}^j}$ и фиксируется общий собственный вектор $\{\varphi v^j\}$ и первая критическая сила, которая в данной задаче равняется собственному значению матрицы.

Описанный алгоритм был реализован в программном пакете Maple. При проведении расчетов МКР стержень разбивался на 40 частей.

2.2. Результаты решения задачи об устойчивости по изгибно-крутильной форме при различных схемах загрузки

2.2.1 Результаты определения критических параметров φ_{cr}

Задача об устойчивости внецентренно-сжатого стержня по изгибно-крутильной форме была решена для того же набора стержней, что и в задаче об устойчивости центрально-сжатого стержня (Параграф 2.1.1).

Напомним, что среднее сечение ($z = 0.5L$) у всех стержней принято одинаковым (Рисунок 2.4б). Площадь среднего сечения $A_{mid} = 29.2 \text{ см}^2$. Изменяемые параметры (Рисунок 2.4а) принимались следующими: $\lambda_y = 60 \dots 140$ (с шагом 20); $\beta_1 = 0 \dots 15^\circ$ (с шагом 3°); $\beta_2 = 1.5$ и 3° (только для $\lambda_y = 120$).

Для исследования устойчивости по изгибно-крутильной форме были рассмотрены три различных схемы загрузки продольной силой N :

- Схема № 1: приложение силы с односторонними эксцентриситетами (Рисунок 2.7а);
- Схема № 2: приложение к меньшему сечению центрально-сжимающей силы (Рисунок 2.7б);
- Схема № 3: приложение силы с разносторонними эксцентриситетами (Рисунок 2.7в).

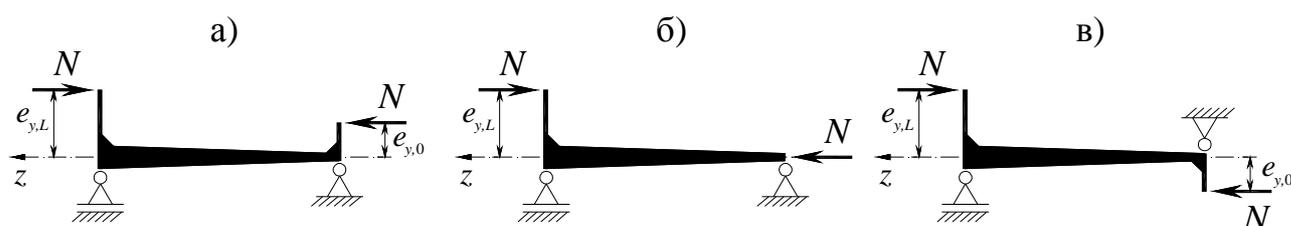


Рисунок 2.7. Схемы загрузки стержней в задаче о потере устойчивости по изгибно-крутильной форме

Значения абсолютных эксцентриситетов приложения силы к большому сечению $e_{y,L}$ принимались, исходя из относительных эксцентриситетов $m_{x,L}$:

$$e_{y,L} = \frac{m_{x,L} W_{x,L}}{A_L} \quad (\text{где } A_L \text{ – площадь большого концевое сечения, } W_{x,L} \text{ – момент}$$

сопротивления большого концевое сечения относительно оси x). Значения $m_{x,L}$ задавались равными 1.5; 7.5; 15.

Значения эксцентриситетов $e_{y,0}$ вычислялись, исходя из равенства фибровых напряжений в концевых сечениях (при сжатии с изгибом относительно оси x):

$$\frac{N}{A_L} + \frac{Ne_{y,L}}{W_{x,L}} = \frac{N}{A_0} + \frac{Ne_{y,0}}{W_{x,0}}. \quad (2.25)$$

Из (2.25) $e_{y,0}$ выражается в следующем виде:

$$e_{y,0} = \frac{e_{y,L} W_{x,0}}{W_{x,L}} + \left(\frac{1}{A_L} - \frac{1}{A_0} \right) W_{x,0}. \quad (2.26)$$

В результате решения задачи о потере устойчивости по изгибно-крутильной форме по алгоритму, представленному в Параграфе 2.1.2, были получены значения критических сил N_{cr} .

Для удобства анализа полученных результатов, значения N_{cr} выражены через коэффициенты устойчивости (критические параметры):

$$\Phi_{cr} = \frac{N_{cr}}{A_{mid} R_y}. \quad (2.27)$$

При этом гибкости стержня из плоскости стенки заменены на их условные значения (при условии расчетного сопротивления $R_y = 24.5 \frac{\text{кН}}{\text{см}^2}$):

$$\bar{\lambda}_y = \lambda_y \sqrt{\frac{R_y}{E}}. \quad (2.28)$$

На Рисунке 2.8 для различных схем загрузки представлены графики зависимости φ_{cr} от углов наклона поясов β_1 и углов сужения поясов β_2 . Зависимости φ_{cr} от β_2 представлены только для элементов с гибкостью $\bar{\lambda}_y = 4.1$.

Здесь следует напомнить важную деталь, что любые изменения геометрических параметров (β_1 и β_2) стержней одной и той же длины не меняют его веса. Поэтому, сравнивая критические параметры φ_{cr} можно будет судить об эффективности изменяемых параметров высоты стенки и ширины поясов.

Из графиков видно, что φ_{cr} весьма существенно зависит от схемы загрузки и величины конечных эксцентриситетов $m_{x,L}$ как при изменении высоты стенки (Рисунок 2.8а-в), так и при переменной ширине поясов (Рисунок 2.8г-д). При загрузке стержня по Схеме № 2 и 3 (последняя – с разносторонними конечными эксцентриситетами) φ_{cr} всегда больше, чем при загрузке по Схеме № 1 с (односторонние конечные эксцентриситеты). С физической точки зрения это вполне объяснимо.

При малом изменении высоты стенки $\beta_1 \rightarrow 0$ и ширины поясов $\beta_2 \rightarrow 0$ (случай призматического стержня) указанные отличия достигают максимальных значений. В этом случае при загрузке по Схеме № 2 и 3 в зависимости от эксцентриситетов $m_{x,L}$, соответственно, в 1.25...2.0 раза и 1.5...3.0 раза больше, чем при загрузке по Схеме № 1. С увеличением β_1 и β_2 указанные отличия уменьшаются. Так, в случае $\beta_1 = 6^\circ \dots 9^\circ$ и $\beta_2 = 1.5^\circ \dots 3^\circ$ коэффициенты φ_{cr} практически имеют одинаковые значения.

При этом с увеличением изменения высоты стенки и ширины поясов φ_{cr} при односторонних эксцентриситетах (Схема № 1) увеличивается, а при разносторонних эксцентриситетах (Схема № 2 и 3), наоборот, уменьшается.

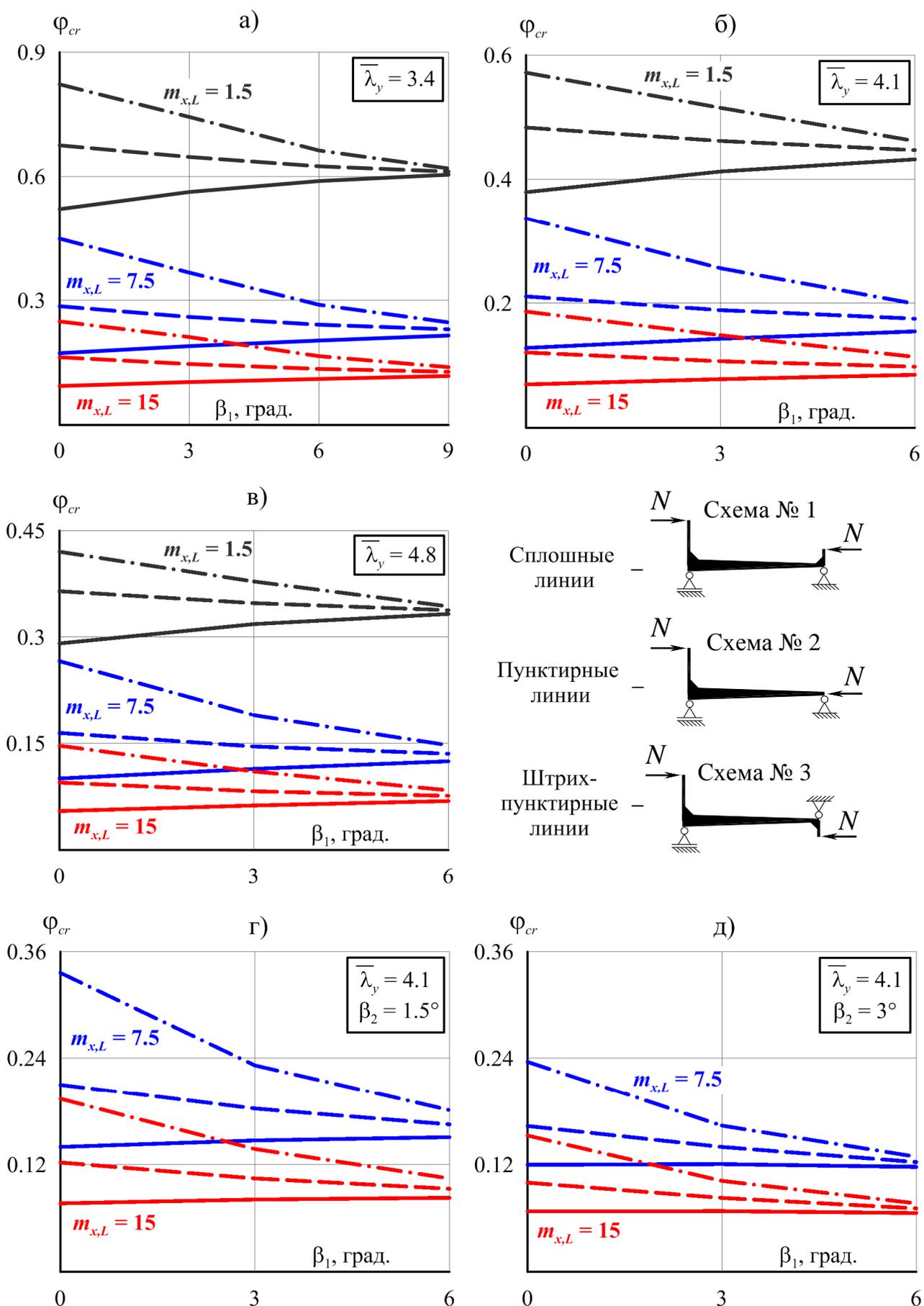


Рисунок 2.8. Критические параметры φ_{cr} для стержней с переменной высотой (а-в) и для стержней с переменной высотой и шириной (г-д)

2.2.2 Результаты определения форм потери устойчивости

В результате исследований также были определены формы потери устойчивости: изгибная $\varphi_y(z)$ и крутильная $v_y(z)$ для каждого из рассматриваемых ранее случаев загрузки (далее индекс «у» опущен).

Выявить общие правила изменения форм потери устойчивости (как в задаче о центрально-сжатом стержне) не представляется возможным ввиду большого числа переменных, входящих в расчет, однако при этом оказалось возможным выявление частных закономерностей и общих тенденций для исследуемых стержней.

Тенденции и закономерности выявлялись при рассмотрении группы стержней, имеющих один различный признак (гибкость, угол наклона поясов и т.д.), при этом рассматривалось загрузке с относительным эксцентриситетом на большем конечном сечении $m_{x,L} = 7.5$.

Для удобства сравнения все формы были нормализованы путем деления всех значений векторов $\{\varphi\}$ и $\{v\}$ на соответствующие наибольшие значения из каждого ряда.

Формы потери устойчивости при различных гибкостях

При загрузке стержня по Схеме № 1 и 2, для гибких стержней (при $\bar{\lambda}_y \geq 3.4$) с одинаковым углом наклона поясов, формы потери устойчивости $\varphi(z)$ и $v(z)$ с достаточной для практических расчетов точностью можно считать идентичными как при малых значениях β_1 (Рисунок 2.9а), так и при больших (Рисунок 2.9б).

При тех же условиях, но для Схемы № 3, формы качественно меняют свое очертание при переходе от малого наклона поясов ($\beta_1 = 1.5^\circ$ – Рисунок 2.9в) к большому ($\beta_1 = 6^\circ$ – Рисунок 2.9г), поэтому формы потери устойчивости надо определять в каждом расчетном случае отдельно.

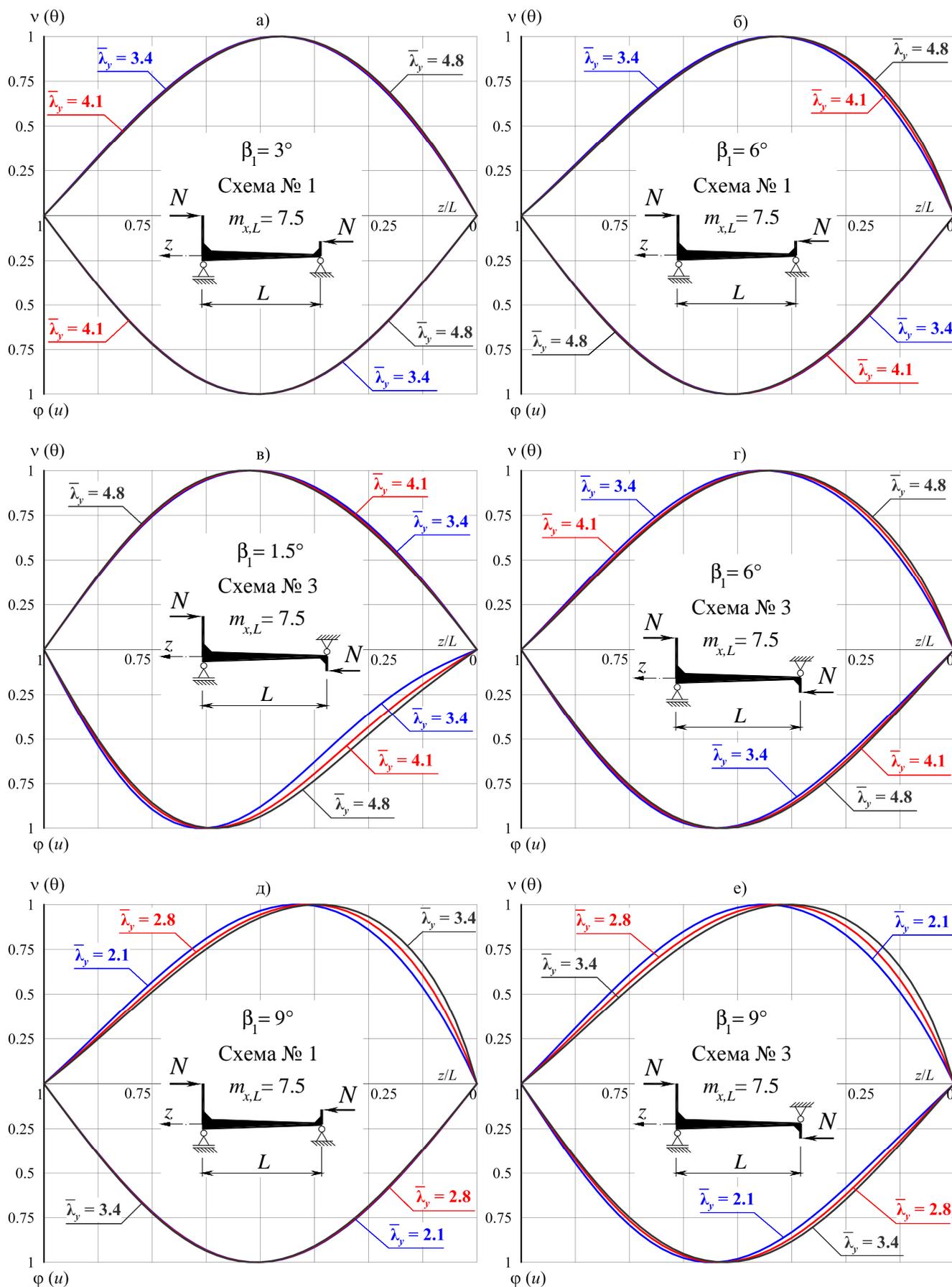


Рисунок 2.9. Формы потери устойчивости при различных условных гибкостях: для гибких стержней (а-г) и для стержней с невысокой гибкостью (д-е)

Следует также отметить, что в случае загрузки по Схемам № 1 и 2 максимальная ордината изгибной формы φ_{max} для стержней любой гибкости, у которых меняется только высота стенки (то есть момент инерции J_y^* изменяется по длине в пределах нескольких процентов), находится во всех случаях на участке стержня $z/L = 0.5...0.55$.

По Схемам загрузки № 1 и 2, для стержней гибкостью $\bar{\lambda}_y \leq 3.4$ с одинаковым углом наклона поясов, формы $\varphi(z)$ идентичны и могут быть приняты одинаковыми (Рисунок 2.9д). Однако крутильные формы $v(z)$ качественно различаются (максимальная ордината $v(z)$, смещается в сторону меньшего сечения с увеличением $\bar{\lambda}_y$) и должны вычисляться индивидуально. Так, для стержней с углом наклона поясов $\beta_1 = 9^\circ$ (Рисунок 2.9д) максимальная ордината v_{max} смещается с координаты $z/L = 0.425$ в координату $z/L = 0.375$ при увеличении $\bar{\lambda}_y$ с 2.1 до 3.4.

При тех же условиях ($\bar{\lambda}_y \leq 3.4$), но для стержней, загруженных по Схеме № 3, происходит аналогичное явление, что и для гибких стержней – качественное изменение очертания форм при увеличении угла наклона поясов. Даже при довольно большом угле наклона ($\beta_1 = 9^\circ$) различия в формах представленных стержней довольно заметны (Рисунок 2.9е).

Формы потери устойчивости при различных углах наклона поясов

Для стержней равной гибкости с постоянной шириной поясов, загруженных по Схеме № 1, как уже было отмечено, формы $\varphi(z)$ практически идентичны, при этом максимальная ордината крутильной формы v_{max} смещается от середины в сторону меньшего сечения с увеличением угла наклона поясов β_1 . Для стержня $\bar{\lambda}_y = 3.4$ (Рисунок 2.10а) v_{max} смещается с координаты $z/L = 0.45$ в координату $z/L = 0.375$ при увеличении угла наклона поясов β_1 с 3° до 9° .

Характер форм потери устойчивости для стержней, загруженных по Схеме № 2, имеют схожие тенденции, что и для стержней, загруженных по Схеме № 1.

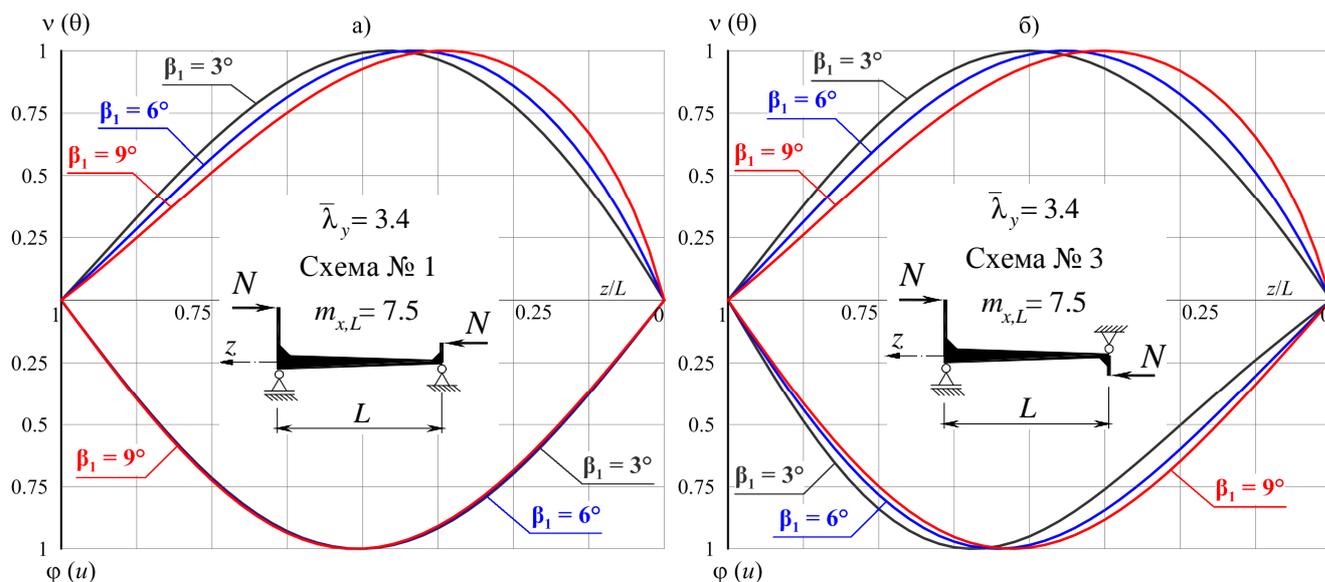


Рисунок 2.10. Формы потери устойчивости стержня при различных углах наклона поясов β_1 для Схемы № 1 (а) и Схемы № 3 (б)

Для таких же стержней, загруженных по Схеме № 3, форма $\varphi(z)$ с увеличением β_1 имеет тенденцию к «возвращению» φ_{max} в середину стержня. Так, для стержня с $\bar{\lambda}_y = 3.4$ (Рисунок 2.10б) максимальная ордината $\varphi(z)$ смещается с координаты $z/L = 0.6$ в координату $z/L = 0.525$ при увеличении угла наклона поясов β_1 с 3° до 9° . Форма $v(z)$, как и для Схемы № 1, смещается от середины в сторону меньшего сечения с увеличением β_1 . Для этого же стержня (Рисунок 2.10б) максимальная ордината v_{max} смещается с координаты $z/L = 0.5$ в координату $z/L = 0.375$ при увеличении угла наклона поясов β_1 с 3° до 9° .

Формы потери устойчивости при различных углах сужения поясов

При сравнении форм потери устойчивости стержней с переменной шириной поясов и высотой стенки, с условной гибкостью $\bar{\lambda}_y = 4.1$, для одинаковых значений угла сужения поясов β_2 , во многом обнаруживаются те же тенденции, что и для стержней с постоянным сечением поясов.

Так, для стержней одной гибкости с определенным углом наклона поясов β_1 при различных углах сужения поясов β_2 характерны те же тенденции, что и для стержней с $\beta_2 = 0^\circ$. Отличие в том, что форма $\varphi(z)$ имеет максимум в точке, положение которой зависит от степени сужения поясов. Для стержня $\bar{\lambda}_y = 4.1$ и

$\beta_1 = 6^\circ$ (Рисунок 2.11а) максимальная ордината φ_{max} при $\beta_2 = 1.5^\circ$ располагается в координате $z/L=0.45$, а при $\beta_2 = 3^\circ$ – в координате $z/L=0.35$. При этом максимальная ордината v_{max} смещается с координаты $z/L=0.4$ в $z/L=0.25$ при увеличении угла сужения поясов β_2 с 0° до 3° . Подобные тенденции прослеживаются для всех трех схем загрузки.

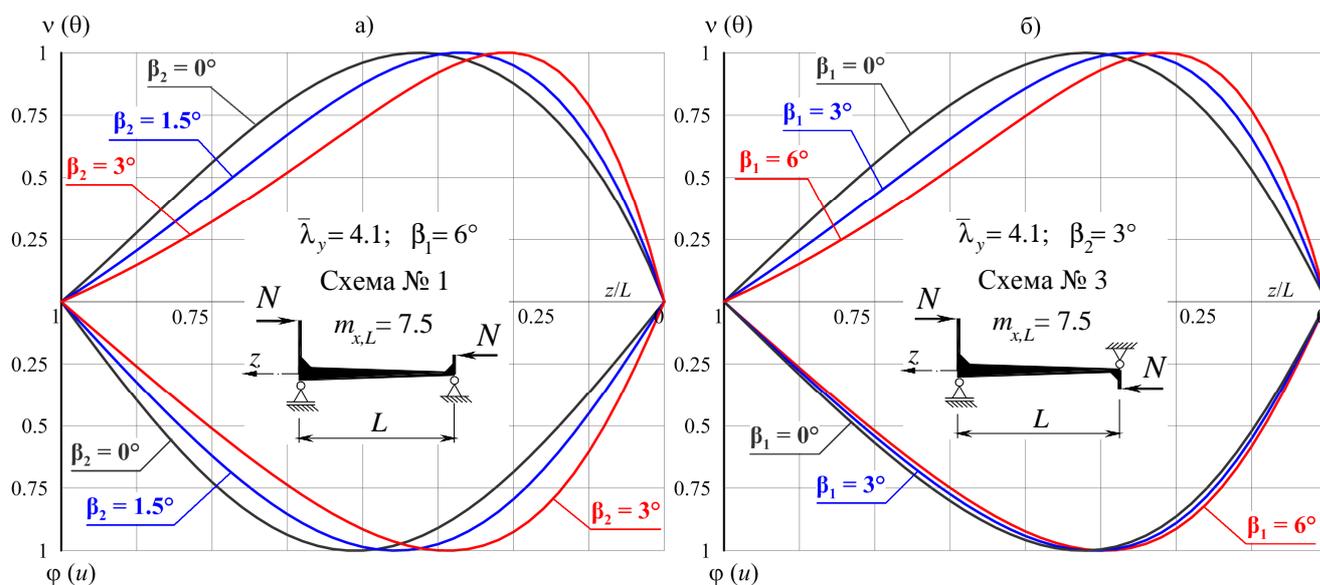


Рисунок 2.11. Формы потери устойчивости стержня переменной жесткости при различных углах сужения поясов β_2 (а) и наклона β_1 (б)

Для стержней $\bar{\lambda}_y = 4.1$ с переменным наклоном β_1 и одинаковым сужением β_2 характерны те же особенности, что и для элементов при $\beta_2 = 0^\circ$. Отличие в том, что с увеличением β_1 форма $\varphi(z)$ начинает смещаться не к середине стержня (как показано на Рисунке 2.10б), а от неё в сторону меньшего сечения. При этом форма $v(z)$ также смещается в сторону меньшего сечения, но смещение носит более резкий характер. Так для стержня $\bar{\lambda}_y = 4.1$ и $\beta_2 = 3^\circ$ (Рисунок 2.11б) максимальная ордината φ_{max} при $\beta_1 = 0^\circ$ располагается в координате $z/L=0.4$, а при $\beta_1 = 6^\circ$ – в координате $z/L=0.375$. При этом максимальная ордината v_{max} смещается с координаты $z/L=0.4$ в $z/L=0.275$ при увеличении угла наклона поясов β_1 с 0° до 6° .

Формы потери устойчивости при различных относительных эксцентриситетах

Для нагрузок по Схемам № 1 и 2, для стержней определенной условной гибкости $\bar{\lambda}_y$ и определенного угла наклона β_1 формы потери устойчивости при различных относительных эксцентриситетах $m_{x,L}$ практически не различаются (к примеру, стержень $\bar{\lambda}_y = 4.8$ при $\beta_1 = 3^\circ$ – Рисунок 2.12а) и в практических расчетах могут приниматься одинаковыми.

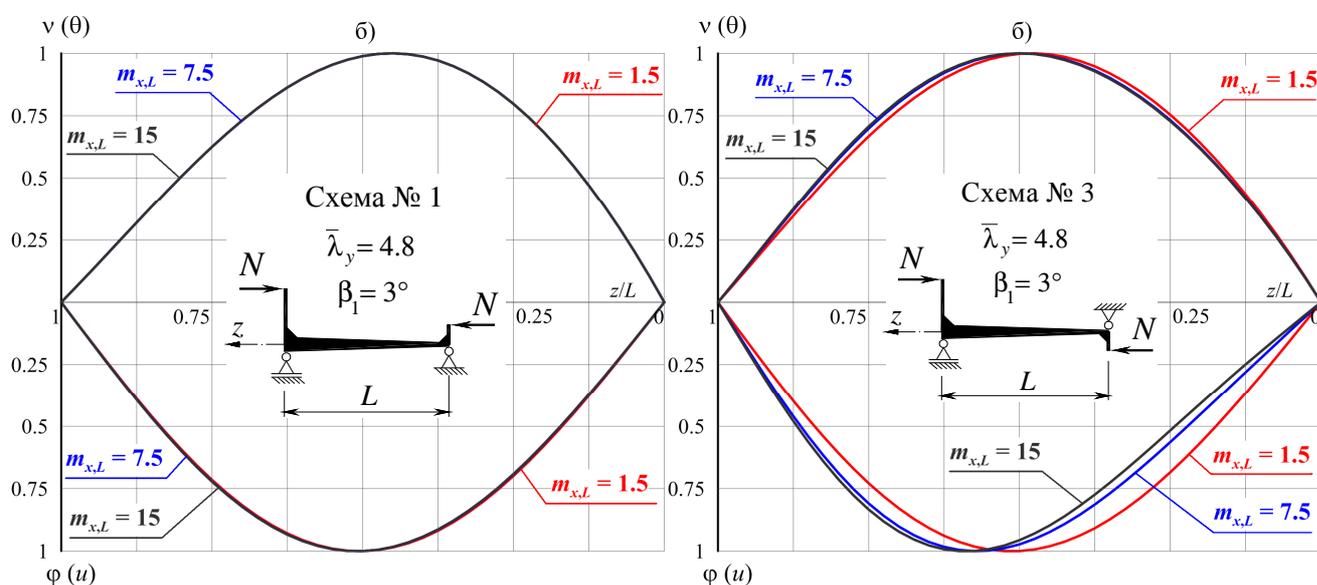


Рисунок 2.12. Формы потери устойчивости стержня при различных эксцентриситетах $m_{x,L}$ для Схемы № 1 (а) и Схемы № 3 (б)

В случае нагружения по Схеме № 3 основные различия заключаются в форме $\varphi(z)$ – при росте $m_{x,L}$ максимальная ордината φ_{max} смещается в сторону большего сечения, в то время как формы $v(z)$ почти накладываются друг на друга. Для стержня $\bar{\lambda}_y = 4.8$ и $\beta_1 = 3^\circ$ (Рисунок 2.12б) максимальная ордината φ_{max} смещается с координаты $z/L = 0.525$ в координату $z/L = 0.6$ при увеличении относительного эксцентриситета на большем сечении $m_{x,L}$ с 1.5 до 15.

Формы потери устойчивости при различных схемах нагружения

Для одинаковых стержней, нагруженных по разным схемам, формы потери устойчивости при малых углах наклона поясов значительно отличаются друг от друга (например, стержень $\bar{\lambda}_y = 3.4$ при $\beta_1 = 3^\circ$ на Рисунке 2.13а).

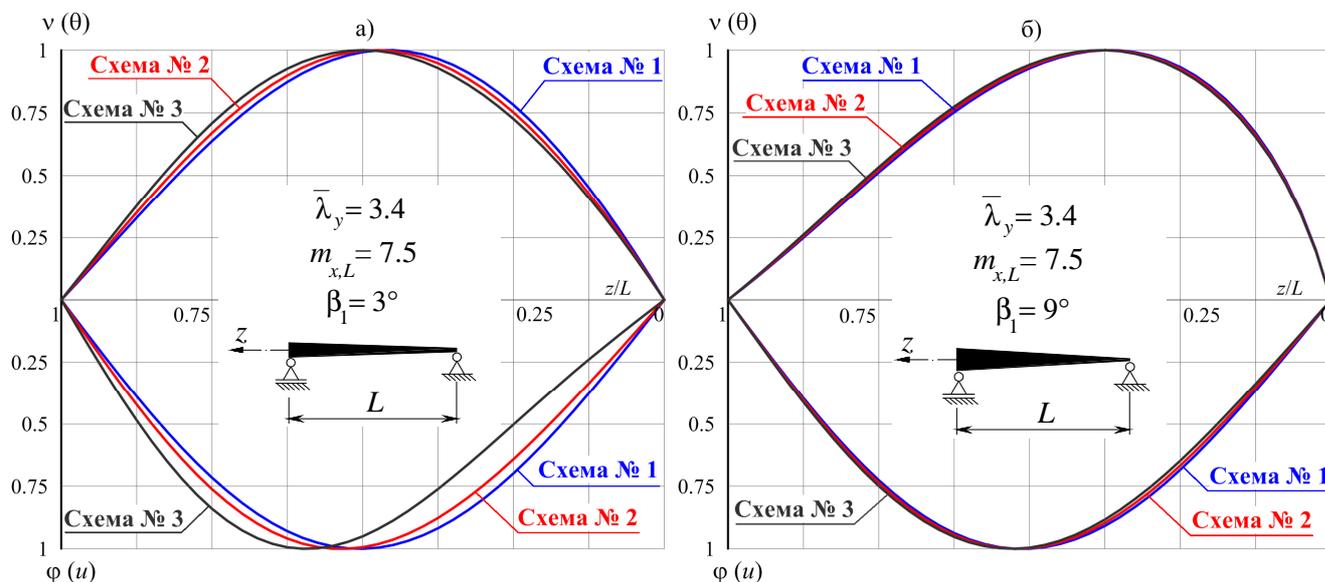


Рисунок 2.13. Формы потери устойчивости стержня $\bar{\lambda}_y = 3.4$ при различных схемах нагружения при $\beta_1 = 3^\circ$ (а) и $\beta_1 = 9^\circ$ (б)

Однако при больших углах, близких к максимальным для данной гибкости, формы $\varphi(z)$ и $v(z)$ при всех 3-х схемах почти накладываются и в практических расчетах могут быть приняты одинаковыми. Это объясняется тем, что с увеличением наклона уменьшается высота меньшего сечения и, как следствие, уменьшается эксцентриситет приложения продольной силы $e_{y,0}$. В итоге это приводит к тому, что различия в 3-х схемах нагружения становятся минимальными. К примеру, для стержня $\bar{\lambda}_y = 3.4$ угол, при котором стержень становится клиновидным ($h_0 = 0$) равен 12.5° , однако уже при $\beta_1 = 9^\circ$ формы практически идентичны (Рисунок 2.13б).

Формы потери устойчивости при стеснении деформации торцов

В реальных элементах рамных конструкций всегда имеется конструктивное оформление (в виде плит, траверс и т.п.), которое препятствует деформации торцевых сечений.

Стеснение деформаций, во-первых, изменяет формы потери устойчивости, во-вторых, увеличивает критическую силу (φ_{cr}).

Предложенный алгоритм решения бифуркационной задачи об устойчивости по изгибно-крутильной форме позволяет учитывать полное стеснение деформации опорных сечений путем задания соответствующих граничных условий:

$$\begin{aligned} \theta'(z=0) &= 0 \\ \theta'(z=L) &= 0 \end{aligned} \quad (2.29)$$

Стеснение деформации может учитываться как для одного торца, так и для двух торцов сразу. Первое бывает необходимо из-за того, что стойки рам переменной жесткости, шарнирно опертые на фундамент, имеют опорные плиты небольшой толщины, которые не препятствуют деформации, в то время как массивные плиты фланцевого стыка в карнизном узле, как показано в [88], практически полностью её исключают. В тоже время стеснение деформации двух опорных сечений может учитываться для ригелей переменной жесткости, имеющие жесткие фланцевые стыки с двух торцов.

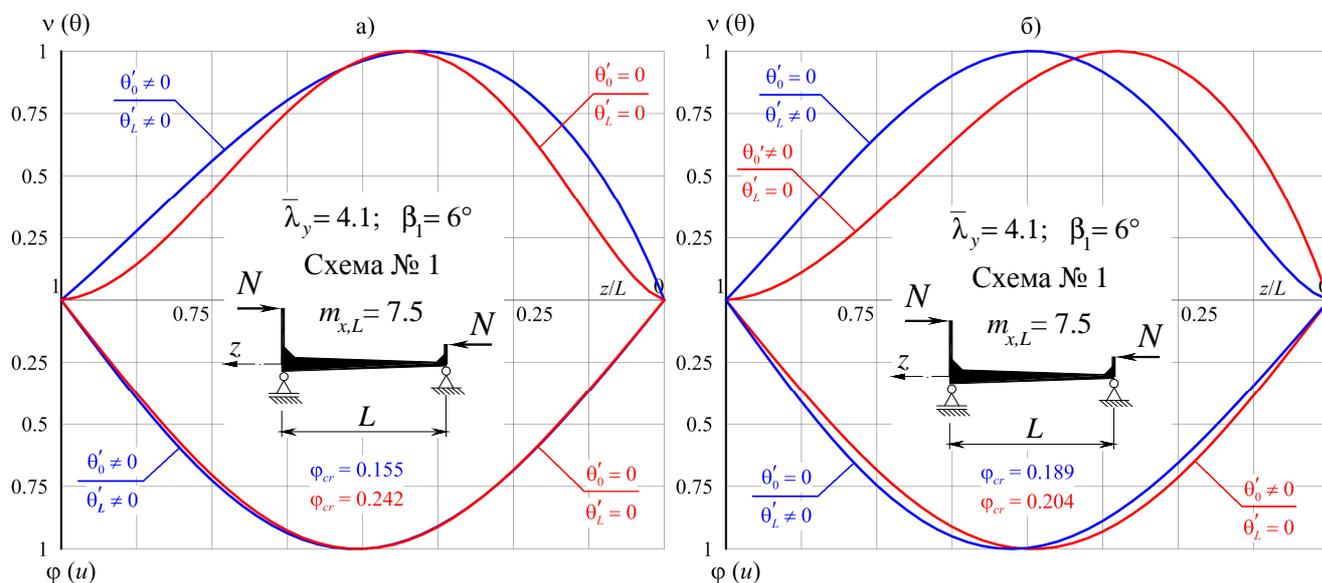


Рисунок 2.14. Формы потери устойчивости стержня $\bar{\lambda}_y = 4.1$ при отсутствии деформации обоих торцевых сечений (а) и одного из торцов (б)

На Рисунке 2.14 показаны формы потери устойчивости для стержня $\bar{\lambda}_y = 4.1$ и углом наклона поясов $\beta_1 = 6^\circ$, нагруженного по Схеме № 1 при $m_{x,L} = 7.5$. Видно, что при свободной (синие линии) и стесненной (красные

линии) на обоих торцах деформации (Рисунок 2.14а), изгибные формы $\varphi(z)$ практически накладываются друг на друга, при этом крутильные формы $v(z)$ отличаются даже положением максимальной ординаты. В случае стеснения двух торцов повышение критической силы для стержня гибкостью $\bar{\lambda}_y = 4.1$ составляет 56.1% по сравнению со свободной деформацией.

На Рисунке 2.14б показаны формы $\varphi(z)$ и $v(z)$ при полном стеснении деформации только меньшего сечения (синие линии) и только большего сечения (красные линии). Помимо значительных изменений в крутильной форме $v(z)$, стеснение деформации одного из торцов также приводит к качественному изменению изгибных форм $\varphi(z)$. Повышение критической силы для стержня гибкостью $\bar{\lambda}_y = 4.1$ при этом составляет 21.9% и 31.6% при стеснении деформации только меньшего сечения и только большего, соответственно, по сравнению со случаем свободной деформации торцов.

2.2.3 Сравнение результатов с численным решением методом конечных элементов

В связи с тем, что в литературе не имеется результатов решения бифуркационных задач об устойчивости по изгибно-крутильной форме двутавровых стержней переменной жесткости для исследуемых схем нагружений (Рисунок 2.7), то была произведена верификация полученных теоретических результатов путем сравнения с результатами численного решения методом конечных элементов (МКЭ) в расчетном комплексе ANSYS Mechanical APDL 12.1.

Применение «тонкостенных» балочных конечных элементов (КЭ) типа BEAM188/189 для расчета стержней переменной жесткости не представляется правильным. Это связано с тем, что при использовании BEAM188/189 конический стержень разбивается на определенное количество призматических элементов и при этом получившийся стержень со ступенчатым изменением жесткостей не отражает особенностей кручения, связанных с взаимным наклоном поясов. Это

приводит к ошибкам, как при вычислении критической силы, так и форм потери устойчивости.

Поэтому в качестве расчетной модели использовалась оболочечная модель (тип КЭ – SHELL181). Полное описание расчетной модели, граничных условий, способа приложения нагрузки приведено в Параграфе 4.2. Отличия данного расчета заключаются в том, что в случае решения бифуркационных задач устойчивости используются только упругие характеристики материала для стержня, нагруженного продольной силой с концевыми эксцентриситетами, находящимися в плоскости стенки (Рисунок 2.6).

После построения расчетной модели производился анализ устойчивости с получением изгибно-крутильных форм потери устойчивости $\varphi(z)$, $v(z)$ и критической силы.

Результаты сравнения критических параметров φ_{cr} (критических сил), полученных с помощью представленного алгоритма («Алг») и в расчетном комплексе ANSYS («МКЭ»), приведены в Таблицах 2.2-2.3 (для стержней переменной высоты и постоянной ширины) и в Таблице 2.4 (для стержней с переменной высотой и шириной).

Расхождение между результатами, вычислялось по формуле:

$$\Delta = \frac{\varphi_{cr}^{\text{МКЭ}} - \varphi_{cr}^{\text{Алг}}}{\varphi_{cr}^{\text{МКЭ}}} \cdot 100\% . \quad (2.30)$$

В Таблицу 2.2 и 2.3 также включены результаты для призматических стержней ($\beta_1 = \beta_2 = 0^\circ$). Всего было исследовано 45 стержней с постоянной жесткостью и 180 с переменной (всего 225 расчетных случая).

Значения $\varphi_{cr}^{\text{МКЭ}}$, отсутствующие в Таблице 2.2, связаны с расчетами для Схемы № 3, при которых бифуркационный анализ устойчивости завершался формой с потерей местной устойчивости стенки при заведомо низких значениях критической силы. Такие случаи не были включены в сравнение и расхождения для них не вычислялись.

Таблица 2.2. Критические параметры φ_{cr} для стержней с переменной высотой (начало)

$\bar{\lambda}_y$	β_1	Тип результата	Критические параметры φ_{cr}								
			Схема № 1			Схема № 2			Схема № 3		
			$m_{x,L}$			$m_{x,L}$			$m_{x,L}$		
			1.5	7.5	15	1.5	7.5	15	1.5	7.5	15
2.1	0°	АЛГ	1.321	0.427	0.231	1.753	0.711	0.404	2.283	1.092	0.610
		МКЭ	1.323	0.432	0.234	1.719	0.687	0.387			
		$\Delta, \%$	+0.2	+1.2	+1.3	-2.0	-3.5	-4.4			
	3°	АЛГ	1.391	0.453	0.245	1.700	0.669	0.377	2.108	1.014	0.579
		МКЭ	1.391	0.458	0.248	1.663	0.649	0.364			
		$\Delta, \%$	0	+1.1	+1.2	-2.2	-3.1	-3.6			
	6°	АЛГ	1.444	0.473	0.257	1.650	0.632	0.354	1.900	0.863	0.496
		МКЭ	1.440	0.480	0.261	1.614	0.618	0.346			
		$\Delta, \%$	-0.3	+1.5	+1.5	-2.2	-2.3	-2.3			
	9°	АЛГ	1.477	0.489	0.265	1.602	0.599	0.334	1.741	0.743	0.425
		МКЭ	1.471	0.498	0.271	1.570	0.593	0.331			
		$\Delta, \%$	-0.4	+1.8	+2.2	-2.0	-1.0	-0.9			
	12°	АЛГ	1493	499	272	1556	570	316	1622	653	369
		МКЭ	1490	514	281	1536	575	319	1581	634	357
		$\Delta, \%$	-0.2	+2.9	+3.2	-1.3	+0.9	+0.9	-2.6	-3.0	-3.4
	15°	АЛГ	1.493	0.499	0.272	1.556	0.570	0.316	1.622	0.653	0.369
		МКЭ	1.490	0.514	0.281	1.536	0.575	0.319	1.581	0.634	0.357
		$\Delta, \%$	+0.7	+5.2	+5.5	+0.2	+3.9	+4.4	-0.4	+2.2	+2.4
2.8	0°	АЛГ	0.777	0.254	0.137	1.020	0.421	0.240	1.284	0.653	0.364
		МКЭ	0.788	0.259	0.141	1.023	0.423	0.240			
		$\Delta, \%$	+1.4	+1.9	+2.8	+0.3	+0.5	0			
	3°	АЛГ	0.829	0.274	0.149	0.983	0.389	0.219	1.170	0.571	0.328
		МКЭ	0.841	0.281	0.152	0.986	0.392	0.221	1.155		
		$\Delta, \%$	+1.4	+2.5	+2.0	+0.3	+0.8%	+0.9	-1.3		
	6°	АЛГ	0.866	0.290	0.158	0.950	0.364	0.204	1.044	0.464	0.266
		МКЭ	0.879	0.298	0.163	0.956	0.370	0.207	1.041	0.455	0.259
		$\Delta, \%$	+1.5	+2.7	+3.1	+0.6	+1.6%	+1.4	-0.3	-2.0	-2.7
	9°	АЛГ	0.887	0.302	0.165	0.922	0.344	0.191	0.959	0.393	0.223
		МКЭ	0.905	0.315	0.172	0.937	0.355	0.198	0.969	0.399	0.226
		$\Delta, \%$	+2.0	+4.1	+4.1	+1.6	+3.1%	+3.5	+1.0	+1.5	+1.3
	12°	АЛГ	0.899	0.314	0.172	0.906	0.332	0.184	0.913	0.350	0.196
		МКЭ	0.933	0.339	0.186	0.939	0.355	0.197	0.945	0.372	0.209
		$\Delta, \%$	+3.6	+7.4	+7.5	+3.5	+6.5	+6.6	+3.4	+5.9	+6.2

Таблица 2.3. Критические параметры φ_{cr} для стержней
с переменной высотой (окончание)

$\bar{\lambda}_y$	β_1	Тип результата	Критические параметры φ_{cr}								
			Схема № 1			Схема № 2			Схема № 3		
			$m_{x,L}$			$m_{x,L}$			$m_{x,L}$		
			1.5	7.5	15	1.5	7.5	15	1.5	7.5	15
3.4	0°	Алг	0.521	0.173	0.094	0.675	0.286	0.163	0.822	0.449	0.249
		МКЭ	0.531	0.178	0.096	0.681	0.291	0.166	0.817	0.427	0.235
		$\Delta, \%$	+1.9	+2.8	+2.1	+0.9	+1.7	+1.8	-0.6	-5.2	-6.0
	3°	Алг	0.562	0.190	0.103	0.647	0.260	0.146	0.744	0.367	0.212
		МКЭ	0.573	0.195	0.107	0.654	0.265	0.150	0.744	0.363	0.208
		$\Delta, \%$	+1.9	+2.6	+3.7	+1.1	+1.9	+2.7	0	-1.1	-1.9
	6°	Алг	0.589	0.203	0.111	0.625	0.241	0.135	0.663	0.289	0.166
		МКЭ	0.601	0.211	0.115	0.635	0.249	0.139	0.670	0.295	0.168
		$\Delta, \%$	+2.0	+3.8	+3.5	+1.6	+3.2	+2.9	+1.0	+2.0	+1.2
	9°	Алг	0.604	0.215	0.118	0.612	0.230	0.128	0.619	0.247	0.139
		МКЭ	0.624	0.229	0.126	0.630	0.244	0.136	0.637	0.260	0.147
		$\Delta, \%$	+3.2	+6.1	+6.3	+2.9	+5.7	+5.9	+2.8	+5.0	+5.4
4.1	0°	Алг	0.379	0.128	0.069	0.483	0.211	0.121	0.571	0.336	0.186
		МКЭ	0.386	0.132	0.072	0.488	0.216	0.124	0.569	0.333	0.183
		$\Delta, \%$	+1.8	+3.0	+4.2	+1.0	+2.3	+2.4	-0.4	-0.9	-1.6
	3°	Алг	0.412	0.143	0.078	0.462	0.189	0.107	0.515	0.256	0.148
		МКЭ	0.420	0.147	0.081	0.468	0.194	0.110	0.518	0.259	0.150
		$\Delta, \%$	+1.9	+2.7	+3.7	+1.3	+2.6	+2.7	+0.6	+1.2	+1.3
	6°	Алг	0.432	0.155	0.085	0.447	0.175	0.098	0.462	0.199	0.114
		МКЭ	0.442	0.155	0.089	0.455	0.182	0.102	0.469	0.205	0.117
		$\Delta, \%$	+2.3	0	+4.5	+1.8	+3.8	+3.9	+1.5	+2.9	+2.6
4.8	0°	Алг	0.291	0.100	0.055	0.365	0.164	0.095	0.420	0.265	0.146
		МКЭ	0.296	0.103	0.056	0.368	0.169	0.097	0.419	0.268	0.148
		$\Delta, \%$	+1.7	+2.9	+1.8	+0.8	+3.0	+2.1	-0.2	+1.1	+1.4
	3°	Алг	0.318	0.114	0.062	0.348	0.145	0.082	0.378	0.189	0.110
		МКЭ	0.324	0.117	0.065	0.352	0.149	0.085	0.381	0.193	0.112
		$\Delta, \%$	+1.9	+2.6	+4.6	+1.1	+2.7	+3.5	+0.8	+2.1	+1.8
	6°	Алг	0.333	0.125	0.069	0.338	0.135	0.076	0.343	0.147	0.084
		МКЭ	0.340	0.130	0.072	0.344	0.141	0.079	0.349	0.153	0.087
		$\Delta, \%$	+2.1	+3.8	+4.2	+1.7	+4.3	+3.8	+1.7	+3.9	+3.4

Таблица 2.4. Критические параметры φ_{cr} для стержней гибкостью $\bar{\lambda}_y = 4.1$ с переменной высотой и шириной

$\bar{\lambda}_y$	β_1	Тип результата	Критические параметры φ_{cr}					
			Схема № 1		Схема № 2		Схема № 3	
			$m_{x,L}$		$m_{x,L}$		$m_{x,L}$	
			7.5	15	7.5	15	7.5	15
4.1	0°	Алг	0.140	0.076	0.210	0.122	0.336	0.194
		МКЭ	0.144	0.079	0.215	0.125	0.337	0.193
		Δ, %	+2.8	+3.8	+2.3	+2.4	+0.3	-0.5
	3°	Алг	0.147	0.081	0.183	0.104	0.232	0.137
		МКЭ	0.151	0.083	0.187	0.107	0.236	0.139
		Δ, %	+2.6	+2.4	+2.1	+2.8	+1.7	+1.4
	6°	Алг	0.151	0.083	0.165	0.093	0.181	0.104
		МКЭ	0.156	0.086	0.170	0.096	0.186	0.107
		Δ, %	+3.2	+3.5	+2.9	+3.1	+2.7	+2.8
4.1	0°	Алг	0.120	0.068	0.163	0.100	0.236	0.152
		МКЭ	0.123	0.070	0.167	0.102	0.239	0.155
		Δ, %	+2.4	+2.9	+2.4	+2.0	+1.3	+1.9
	3°	Алг	0.120	0.068	0.140	0.082	0.163	0.102
		МКЭ	0.123	0.069	0.142	0.084	0.166	0.103
		Δ, %	+2.4	+1.4	+1.4	+2.4	+1.8	+1.0
	6°	Алг	0.117	0.066	0.123	0.071	0.129	0.076
		МКЭ	0.119	0.067	0.125	0.072	0.130	0.078
		Δ, %	+1.7	+1.5	+1.6	+1.4	+0.8	+2.6

Следует пояснить, что значения φ_{cr} , превышающие единицу, характерны для стержней с невысокой гибкостью. В реальности такие стержни всегда теряют устойчивость в упруго-пластической стадии и коэффициент снижения расчетных напряжений меньше единицы.

Сравнение коэффициентов φ_{cr} , полученных по представленному алгоритму и с использованием МКЭ комплекса ANSYS Mechanical APDL 12.1, показал, что расхождение в критических силах для всех расчетов не превышает 7.5% для 3-х схем нагружения. При этом в 74% из 208 расчетных случаев расхождение не превышает 3% (напомним: 17 значений исключены из общей статистики ввиду того, что оболочечная модель в МКЭ расчете теряла местную устойчивость).

Качественное сравнение форм потери устойчивости $\varphi(z)$ и $v(z)$, полученных указанными способами, приведено на Рисунке 2.15 для стержней гибкостью

$\bar{\lambda}_y = 4.1$, нагруженных по схеме с односторонними (Схема № 1) и разносторонними (Схема № 3) эксцентриситетами со свободной и стесненной деформацией торцевых сечений стержней. Сплошные линии соответствуют решению по представленному алгоритму, пунктирные – решение МКЭ в ANSYS. Как видно из Рисунка 2.15, полученные формы практически накладываются друг на друга, что свидетельствует о достоверности представленного алгоритма.

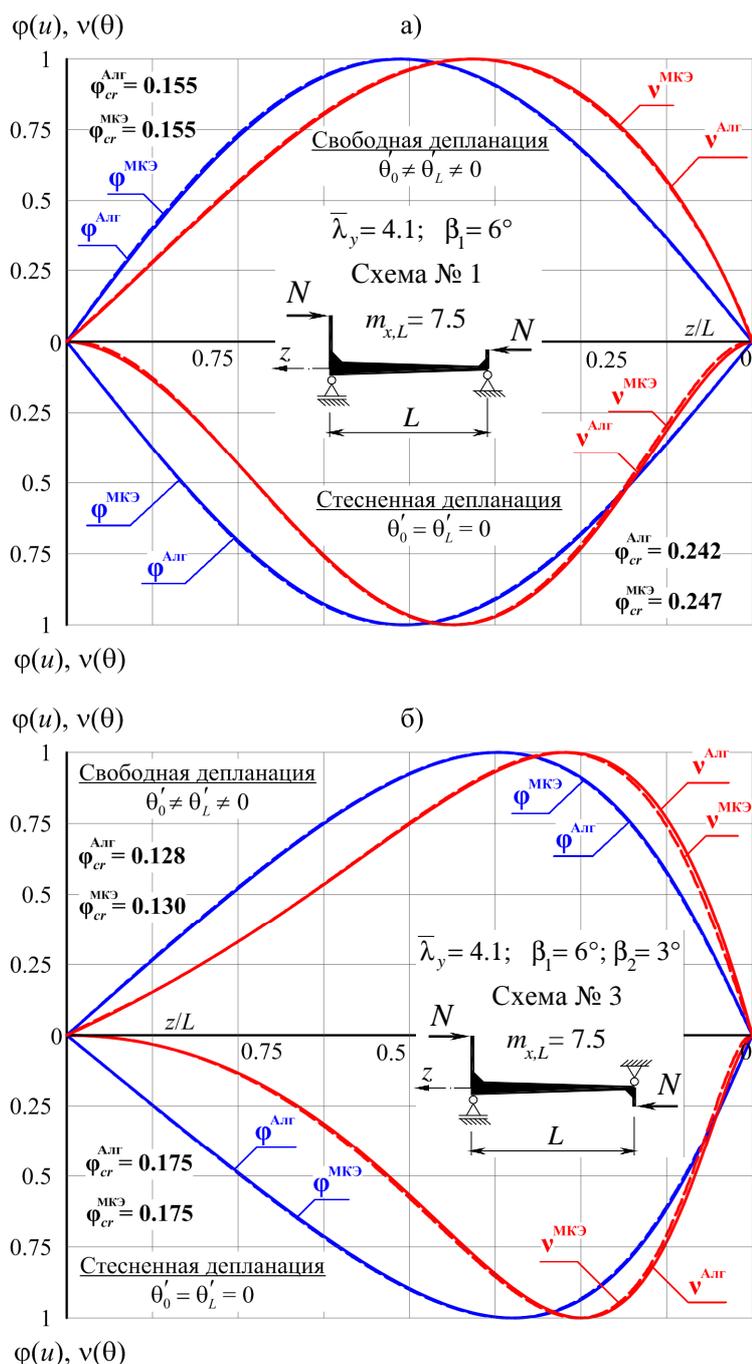


Рисунок 2.15. Сравнение форм потери устойчивости стержня с переменной высотой (а) и стержня с переменной высотой и шириной (б)

Выводы по второй главе

1. Представлен эффективный численный алгоритм решения бифуркационных задач устойчивости, основанный на методе конечных разностей, для двутавровых стержней, имеющих переменную высоту стенки и/или ширину поясов с учетом возможного стеснения деформации торцов.

2. С помощью представленного численного алгоритма получены коэффициенты критических сил и соответствующие им изгибные и изгибно-крутильные формы потери устойчивости двутавровых стержней переменной жесткости в зависимости от следующих параметров:

- углов наклона и сужения поясов;
- схемы нагружения стержня;
- условной гибкости;
- стеснения деформации торцов стержня.

3. Исследование изгибных форм потери устойчивости центрально-сжатых стержней показало, что они (формы) зависят только от соотношений жесткостей торцевых сечений.

4. Исследование изгибно-крутильных форм потери устойчивости внецентренно-сжатых двутавровых стержней переменной жесткости с постоянной шириной поясов показало, что:

- изгибные формы для стержней, нагруженных односторонними концевыми эксцентриситетами с любой комбинацией последних при одних и тех же углах наклона поясов качественно близки и могут приниматься одинаковыми;
- крутильные формы для тех же схем нагружения оказываются весьма различными и зависят от угла наклона поясов.

5. Исследование изгибно-крутильных форм потери устойчивости внецентренно-сжатых двутавровых стержней переменной жесткости, у которых изменяется как высота стенки, так и ширина поясов, показало, что они (формы) весьма существенно зависят от комбинации угла наклона и сужения поясов и должны определяться в каждом расчетном случае индивидуально.

6. Стеснение деформации торцов стержня существенно влияет как на величину критической силы, так и на формы потери устойчивости.

7. Достоверность результатов, получаемых с помощью представленного алгоритма, подтверждена сравнением с выполненным МКЭ решением в комплексе ANSYS Mechanical APDL 12.1. По критическим силам для различных схем нагружения в более чем 74% случаев расхождение не превысило 3%, в остальных случаях оно составило не более 7.5%. Качественное сравнение форм потери устойчивости показало практически полное соответствие между двумя решениями.

ГЛАВА 3. ПРОСТРАНСТВЕННЫЕ ДЕФОРМАЦИИ И УСТОЙЧИВОСТЬ СТЕРЖНЕЙ ПЕРЕМЕННОЙ ЖЕСТКОСТИ

3.1. Постановка задачи о пространственных деформациях и устойчивости стержней переменной жесткости

Рассматривается упругий тонкостенный стержень двутаврового бисимметричного сечения с линейно изменяющимися высотой стенки и шириной поясов (конический стержень), нагруженный продольной силой с различными концевыми двухосными эксцентриситетами (Рисунок 3.1а). Пространственные перемещения сечений в процессе нагружения стержня приведены на Рисунке 3.1б.

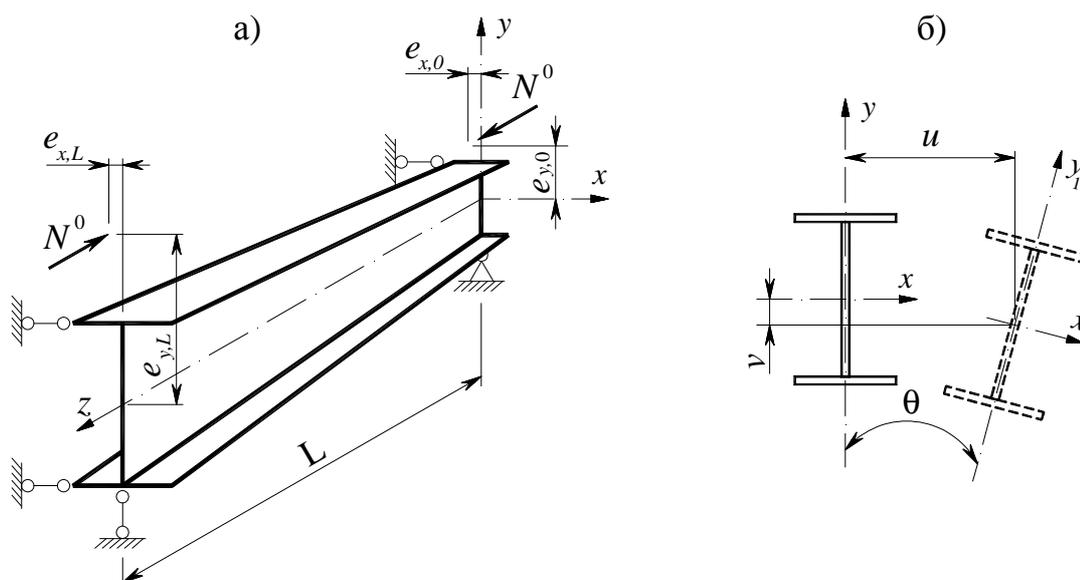


Рисунок 3.1. Схема нагружения стержня (а) и его пространственные перемещения (б)

Общий вид рассматриваемых стержней приведен на Рисунке 3.2а, где, как уже упоминалось в Главе 2, основными параметрами, отличающими их от двутавровых стержней постоянной жесткости являются: β_1 – взаимный угол наклона поясов ($\beta_0 = 0.5\beta_1$ – наклон одного пояса к продольной оси стержня); β_2 – угол сужения ширины поясов. Поперечное двутавровое бисимметричное сечение стержня (Рисунок 3.2б) компонуется из листов, с произвольными размерами t_w, t_f, b_f^*, h^* .

Напомним, что индекс «*» в обозначении размеров и геометрических характеристик означает их переменность по длине.

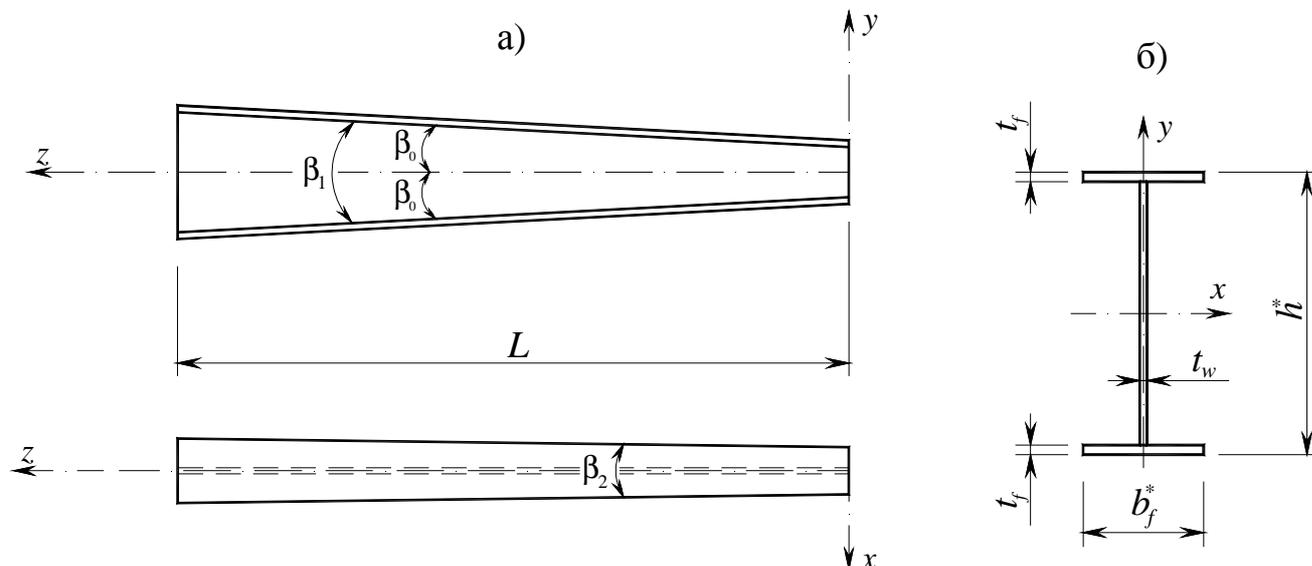


Рисунок 3.2. Продольный вид (а) и произвольное поперечное сечение (б) стержня

Закрепление стержня, также же как и при исследовании бифуркационных задач устойчивости (Параграф 2.1.2), принято шарнирным в двух главных плоскостях при отсутствии угла закручивания конечных сечений, имеющих свободную депланацию.

Представленная схема закрепления подразумевает равенство расчетных длин элемента в двух плоскостях. В рамных конструкциях, как известно, расчетные длины элементов в двух плоскостях разные. Поэтому в соответствии с методом [18], выделение элемента из рамной конструкции производится по расчетной длине из плоскости рамы $l_{ef,y}$ (Рисунок 3.3б). При этом необходимо произвести расчет плоской упругой рамы по деформированной схеме (без учета кручения) от решающего действия сочетания нагрузок с целью определения «деформационных» изгибающих моментов $M_{x,0}, M_{x,L}$ и продольной силы N , действующих на концах выделяемого элемента (Рисунок 3.3в). Тогда, возвращаясь к схеме загрузки (Рисунок 3.1), эксцентриситеты в плоскости стенки можно определить:

$$e_{y,0} = \frac{M_{x,0}}{N}; \quad e_{y,L} = \frac{M_{x,L}}{N}. \quad (3.1)$$

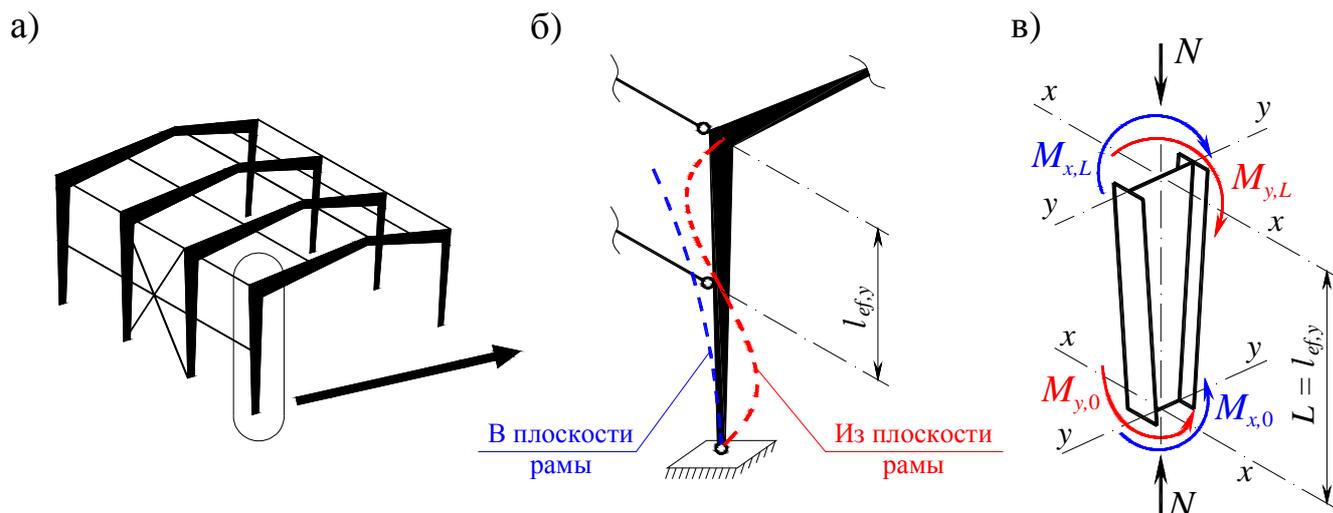


Рисунок 3.3. Выделение стержневого элемента из конструкции рамы: а) пространственная схема рамного каркаса; б) формы потери устойчивости стойки рамы в двух главных плоскостях; в) расчетная схема выделенного из рамы элемента

Эксцентриситеты из плоскости стенки, учитывающие несовершенства, неизбежно возникающие в элементе в процессах изготовления, транспортировки и монтажа, приняты в соответствии с Нормами [89], как случайные:

$$e_{x,0} = e_{x,L} = e_x = \frac{L}{750} + \frac{i_x^{mid}}{20}, \quad (3.2)$$

где i_x^{mid} – радиус инерции среднего сечения (при $z = 0.5L$).

Решение поставленной задачи основано на технической теории расчета тонкостенных стержней открытого профиля В.З. Власова [45] и деформационной теории их расчета В.З. Власова [45], Б.М. Броуде [38-40], обобщенной Е.А. Бейлиным [7-11]. При этом учтены особенности работы двутавровых стержней с переменной высотой. Остановимся на пояснении последних.

3.1.2. Особенности работы двутавровых стержней переменной жесткости

Ввиду отсутствия в русскоязычных источниках информации о специфике работы рассматриваемых стержней, приведем краткие сведения о: стесненном

кручении; вычислении геометрических характеристик; напряженно-деформированном состоянии (НДС) в поперечных сечениях при кручении.

Особенности стесненного кручения

По сравнению с призматическими, стесненное кручение тонкостенных конических стержней имеет ряд особенностей, естественным образом возникающих из-за наклона элементов поперечного сечения поясов к продольной оси стержня.

Для наглядности вывода дифференциальных зависимостей, будем использовать бисимметричный двутавр с линейно-изменяющейся высотой стенки и постоянной шириной поясов.

Рассмотрим поперечное сечение такого стержня, получаемое малый угол закручивания θ под действием крутящего момента M_z (Рисунок 3.4а).

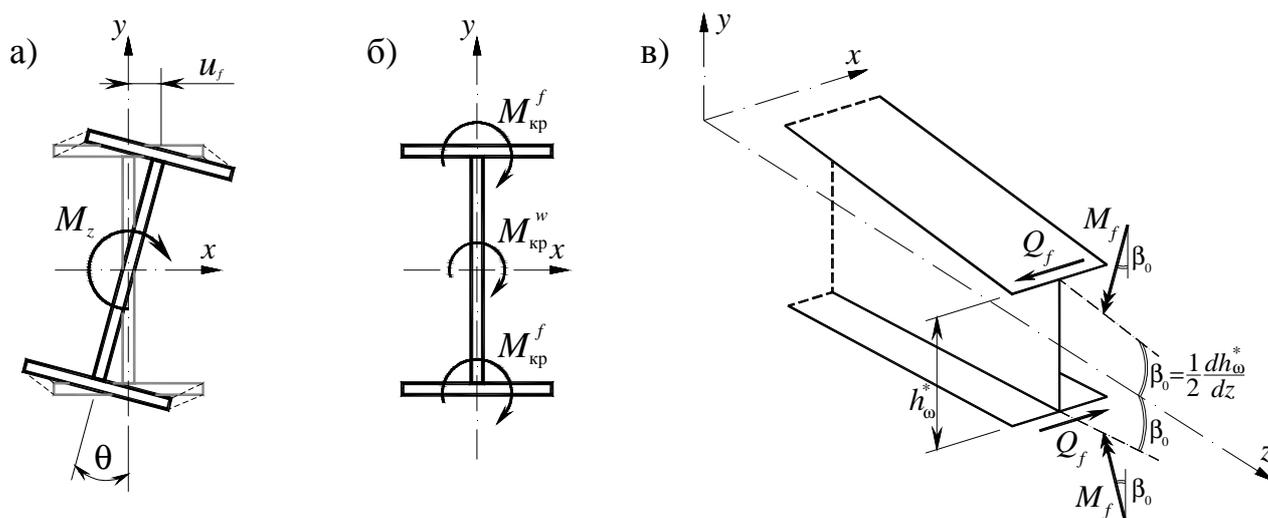


Рисунок 3.4. Поперечные деформации сечения при кручении (а), действие момента чистого кручения $M_{кр}$ (б), действие изгибно-крутящего момента M_{ω} (в)

Общий крутящий момент $M_z = M_z(z)$ для рассматриваемых стержней находится по известной формуле, как сумма момента чистого кручения $M_{кр} = M_{кр}(z)$ и изгибно-крутящего момента $M_{\omega} = M_{\omega}(z)$:

$$M_z = M_{кр} + M_{\omega}. \quad (3.3)$$

Чистое кручение происходит аналогично стержням постоянной жесткости – за счет кручения отдельных элементов сечения (Рисунок 3.4б) и выражается суммой:

$$M_{\text{кр}} = 2M_{\text{кр}}^f + M_{\text{кр}}^w, \quad (3.4)$$

где $M_{\text{кр}}^f = M_{\text{кр}}^f(z)$, $M_{\text{кр}}^w = M_{\text{кр}}^w(z)$ – моменты чистого кручения в поясе и стенке, соответственно.

Связь между моментом чистого кручения и производной угла закручивания принимается в виде традиционной зависимости:

$$M_{\text{кр}} = GJ_d^* \theta'. \quad (3.5)$$

Для определения изгибно-крутящего момента M_ω рассмотрим комплекс внутренних усилий, возникающих в поясе от его действия: поперечная сила $Q_f = Q_f(z)$ и изгибающий момент $M_f = M_f(z)$ (Рисунок 3.4в).

Для определения M_ω необходимо выполнить следующие процедуры:

1. Определить боковое смещение пояса $u_f = u_f(z)$, вызванное крутящим моментом M_z (Рисунок 3.3а):

$$\left. \begin{aligned} \tan \theta &= \frac{u_f}{h_\omega^*} \\ \tan \theta &\approx \theta \end{aligned} \right| \Rightarrow u_f = \theta \frac{h_\omega^*}{2}, \quad (3.6)$$

где $h_\omega^* = h_\omega^*(z)$ – расстояние между центрами тяжести.

2. Определить изгибающий момент в полке M_f :

$$M_f = -EJ_{yf} u_f'' = -\frac{EJ_\omega^*}{h_\omega^{*2}} (\theta h_\omega^*)'', \quad (3.7)$$

где J_{yf} – момент инерции одного пояса относительно оси y .

3. Определить поперечную силу Q_f :

$$Q_f = M_f' \Rightarrow Q_f = -\left[\frac{EJ_\omega^*}{h_\omega^{*2}} (\theta h_\omega^*)'' \right]'. \quad (3.8)$$

Тогда изгибно-крутящий момент M_ω можно представить в виде:

$$M_{\omega} = Q_f h_{\omega}^* - M_f (h_{\omega}^*)', \quad (3.9)$$

где $M_f (h_{\omega}^*)' = 2 \left(\frac{1}{2} \frac{dh_{\omega}^*}{dz} \right) M_f$ – компонент, который появляется в рассматриваемых стержнях из-за наклона поясов и является суммой проекций двух вектор-моментов M_f на продольную ось z . Данный компонент отсутствует в классической теории расчета тонкостенных призматических стержней открытого профиля.

Таким образом, общий крутящий момент по формуле (3.3) с учетом (3.5) и (3.9) будет равен:

$$M_z = M_{\omega} + M_{кр} = -M_f (h_{\omega}^*)' + Q_f h_{\omega}^* + GJ_d^* \theta'. \quad (3.10)$$

Подставляя в (3.10) выражения (3.7) и (3.8), получаем:

$$M_z = \left[\frac{EJ_{\omega}^*}{h_{\omega}^{*2}} (\theta h_{\omega}^*)'' \right] (h_{\omega}^*)' - \left[\frac{EJ_{\omega}^*}{h_{\omega}^{*2}} (\theta h_{\omega}^*)'' \right]' h_{\omega}^* + GJ_d^* \theta'. \quad (3.11)$$

Дифференцируя выражение (3.11) по z и полагая, что для рассматриваемых стержней $(h_{\omega}^*)'' = 0$, получаем уравнение упругой линии углов закручивания стержней с линейным изменением высоты, в котором учтено влияние изгибающих моментов в поясе M_f на кручение:

$$\left[\frac{EJ_{\omega}^*}{h_{\omega}^{*2}} (\theta h_{\omega}^*)'' \right]' h_{\omega}^* - (GJ_d^* \theta')' = -\frac{dM_z}{dz} = -m. \quad (3.12)$$

Полагая, что в (3.12) величины $J_{\omega}^*, J_d^*, h_{\omega}^*$ являются постоянными по длине, можем получить классическое уравнение углов закручивания призматического тонкостенного стержня открытого профиля:

$$EJ_{\omega} \theta^{IV} - GJ_d \theta'' = -m. \quad (3.13)$$

Следует отметить, что определение углов закручивания для двутавровых стержней с переменной высотой стенки по уравнению (3.13), либо МКЭ путем разбиения стержневого элемента на участки с постоянной жесткостью (как это

делается, например, в задачах об изгибе), ведет к качественно неверным результатам, т.к. при этом не учитывается влияние наклона поясов. Следует заметить также, что в случае двутавровых стержней постоянной высоты, но с переменной шириной поясов, угол закручивания определяется из решения (3.13), но с учетом переменных по длине жесткостей J_{ω}^*, J_d^* .

Более подробно отмеченные особенности работы таких стержней на кручение можно найти в работах [114, 131-135, 160].

Особенности НДС в поперечных сечениях при стесненном кручении

С учетом изложенного, относительные удлинения точки срединной поверхности при кручении стержней с наклоном поясов имеет вид:

$$\varepsilon = -\theta''\omega - \theta'\psi, \quad (3.14)$$

где θ', θ'' – соответственно, первая и вторая производная угла закручивания; ω – секториальная координата точки.

Новой величиной в (3.14) является параметр ψ , который можно назвать «конусным» или «коническим» и который в свою очередь также является и координатой, т.к. зависит от секториальной площади ω :

$$\psi = 2\omega' = 2 \left(\frac{h_{\omega}^*'}{h_{\omega}^*} \right) \omega. \quad (3.15)$$

С кинематической точки зрения ψ обеспечивает еще одну форму продольных перемещений ε , амплитуда которых – это мера деформации кручения θ' . Продольные деформации (3.14), если отбросить член, содержащий ψ , не полностью отражают эффект наклона поясов при кручении. Со статической точки зрения ψ обеспечивают вклад мембранных сил, действующих в поясах, на кручение. Очевидно, что в призматических тонкостенных стержнях этот вклад, как и параметр ψ , отсутствует.

Как видно из Рисунка 3.5 эпюра распределения ψ в сечении аналогична эпюре секториальной площади. Максимальная ордината $\psi_{\max} = \frac{b_f h_{\omega}^*}{2}$ зависит от угла наклона поясов β_1 и, соответственно, чем больше β_1 , тем больше ψ_{\max} .

Выражение (3.14) представляет собой классическую формулу, впервые полученную В.З. Власовым [45], в которой в случае двутавровых стержней с наклоном поясов имеется дополнительный член, естественным образом получаемый в результате операций дифференцирования выражения для продольных перемещений точек сечения.

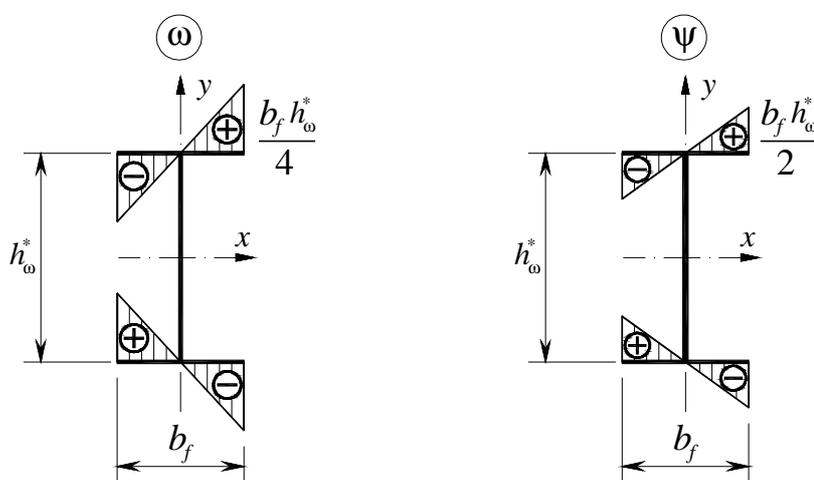


Рисунок 3.5. Эпюры распределения ω и ψ в сечении

Применив закон Гука для (3.14), перейдем от относительных удлинений к нормальным напряжениям в сечениях при стесненном кручении рассматриваемых стержней:

$$\sigma = E(-\theta''\omega - \theta'\psi). \quad (3.16)$$

Из теории тонкостенных призматических стержней известно, что первое произведение в (3.16) соответствует известной интегральной характеристике: изгибно-крутящему бимоменту B_{ω} .

Возникает вопрос о том, какой силовой фактор соответствует второму произведению в (3.16): $\sigma_{\psi} = -E\theta'\psi$. Очевидно, что напряжения $\sigma_{\omega} = -E\theta''\omega$ и $\sigma_{\psi} = -E\theta'\psi$ не могут вызываться двумя разными силовыми факторами, т.к.

невозможно предположить, что для двутавровых стержней с линейно-изменяющейся высотой стенки возможен такой случай стесненного кручения, при котором полученная функция угла закручивания $\theta(z)$ имеет первую производную θ' , но не имеет второй θ'' и наоборот. Следовательно, необходимо рассматривать два этих слагаемых вместе:

$$\sigma_{\omega} + \sigma_{\psi} = -E\theta''\omega - E\theta'\psi. \quad (3.17)$$

Очевидно, что одним из силовых факторов, соответствующих (3.17), является изгибно-крутящий бимомент B_{ω} . Для определения бимомента вычислим интеграл (по площади A) в предположении работы элементарных продольных сил $(\sigma_{\omega} + \sigma_{\psi})dA$ на единичных перемещениях, распределенных по сечению по закону секториальных площадей:

$$B_{\omega} = \int_A (\sigma_{\omega} + \sigma_{\psi}) dA. \quad (3.18)$$

Преобразуем (3.18) с учетом (3.17):

$$\begin{aligned} B_{\omega} &= -\int_A (E\theta''\omega + E\theta'\psi)\omega dA = -E\theta'' \int_A \omega^2 dA - E\theta' \int_A \psi\omega dA = \\ &= -E\theta'' J_{\omega}^* - E\theta' J_{\psi\omega}^* \end{aligned} \quad (3.19)$$

Выражение (3.19) для бимомента можно найти в работах [112, 123, 194].

В (3.19) J_{ω}^* – секториальный момент инерций, $J_{\psi\omega}^*$ – новая геометрическая характеристика сечения, равная:

$$J_{\psi\omega}^* = \int_A \psi\omega dA = 2 \left(\frac{h_{\omega}^*}{h_{\omega}^*} \right)' J_{\omega}^*. \quad (3.20)$$

Теперь определим силовой фактор, элементарные продольные силы $(\sigma_{\omega} + \sigma_{\psi})dA$ которого производят работу на единичных перемещениях, распределенных по сечению по закону параметра ψ . Назовем его B_{ψ} :

$$\begin{aligned} B_{\psi} &= -\int_A (E\theta''\omega + E\theta'\psi)\psi dA = -E\theta'' \int_A \omega\psi dA - E\theta' \int_A \psi^2 dA = \\ &= -E\theta'' J_{\omega\psi}^* - E\theta' J_{\psi} \end{aligned} \quad (3.21)$$

В (3.21) J_ψ – еще одна новая геометрическая характеристика сечения, равная:

$$J_\psi = \int_A \psi^2 dA = \left(\frac{2h_\omega^*}{h_\omega^*} \right)^2 J_\omega^*. \quad (3.22)$$

Если в (3.19) и (3.21) новые геометрические характеристики $J_{\psi\omega}^*$ и J_ψ выразить по (3.20) и (3.22) через J_ω^* , то получатся следующие уравнения:

$$\begin{aligned} B_\omega &= E \left(J_\omega^* \theta'' + \left(\frac{2h_\omega^*}{h_\omega^*} \right) J_\omega^* \theta' \right); \\ B_\psi &= E \left(\left(\frac{2h_\omega^*}{h_\omega^*} \right) J_\omega^* \theta'' + \left(\frac{2h_\omega^*}{h_\omega^*} \right)^2 J_\omega^* \theta' \right). \end{aligned} \quad (3.23)$$

Из (3.23) видно, что $B_\psi = \left(\frac{2h_\omega^*}{h_\omega^*} \right) B_\omega$ и, таким образом выходит, что тем

основным силовым фактором, которому соответствует сумма нормальных напряжений $\sigma_\omega + \sigma_\psi$, является изгибно-крутящий бимомент B_ω .

В зарубежных источниках [110, 114] B_ψ , обозначаемый как M_ψ , является частью крутящего момента, которая вызывает нормальные напряжения в поперечных сечениях по закону параметра ψ . При этом, как показано выше, этот силовой фактор не является самостоятельным и зависит от наклона поясов и изгибно-крутящего бимоента. В призматических стержнях он отсутствует.

Для того, чтобы не путать B_ω и B_ψ , далее будем обозначать последний как M_ψ .

Выразим из (3.19) произведение $E\theta''$:

$$E\theta'' = -\frac{B_\omega}{J_\omega^*} - \frac{E\theta' J_{\psi\omega}^*}{J_\omega^*}, \quad (3.24)$$

и подставим его в (3.17):

$$\begin{aligned}\sigma_{\omega} + \sigma_{\psi} &= -\left(\frac{B_{\omega}}{J_{\omega}^*} - \frac{E\theta'J_{\psi\omega}^*}{J_{\omega}^*}\right)\omega - E\theta'\psi = \\ &= \frac{B_{\omega}}{J_{\omega}^*}\omega + E\theta'\left(\frac{J_{\psi\omega}^*}{J_{\omega}^*}\omega - \psi\right).\end{aligned}\quad (3.25)$$

Если в (3.25) выразить члены внутри скобки $\left(\frac{J_{\psi\omega}^*}{J_{\omega}^*}\omega - \psi\right)$ с помощью выражений (3.15) и (3.20), то увидим, что эта скобка тождественно равна нулю.

Если аналогичным образом произвести операции по выражению $E\theta'$ из (3.21) и затем подставить в (3.17), то получим:

$$\begin{aligned}\sigma_{\omega} + \sigma_{\psi} &= -\left(\frac{M_{\psi}}{J_{\psi}} - \frac{E\theta''J_{\psi\omega}^*}{J_{\psi}^*}\right)\psi - E\theta''\omega = \\ &= \frac{M_{\psi}}{J_{\psi}}\psi + E\theta''\left(\frac{J_{\omega\psi}^*}{J_{\psi}^*}\psi - \omega\right) = \frac{M_{\psi}}{J_{\psi}}\psi.\end{aligned}\quad (3.26)$$

Из (3.25) и (3.26) видно, что сумма напряжений $\sigma_{\omega} + \sigma_{\psi}$ может быть вычислена либо по (3.25), либо по (3.26) и никоим образом не является их суммой. Таким образом, вести расчеты по определению внутренних усилий или продольных деформаций можно только в матричном виде, что обычно используется в МКЭ. К примеру, матрицы при недеформационном расчете будут иметь вид:

$$\begin{Bmatrix} B_{\omega} \\ M_{\psi} \end{Bmatrix} = -E \begin{bmatrix} J_{\omega}^* & J_{\omega\psi}^* \\ J_{\omega\psi}^* & J_{\psi}^* \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \theta'' \\ \theta' \end{Bmatrix}.\quad (3.27)$$

Следует подчеркнуть, что результаты расчетов на пространственную устойчивость, полученные автором с учетом представленных в (3.27) силовых факторов (см. статью за 2015 г.), и дальнейшее их сравнение с результатами расчетов с учетом только бимоента B_{ω} показало ничтожное различие между ними. Следовательно, при кручении рассматриваемых стержней для принятой схемы загрузки и условий закрепления, нормальные напряжения и продольные

деформации с достаточной точностью могут быть определены при учете только бимоента B_ω (3.19), что и сделано в рамках настоящей работы.

С учетом указанных допущений, нормальные напряжения от бимоента в двутавровых стержнях бисимметричного сечения с линейно-изменяющейся высотой стенки будут вычисляться по известной для призматических стержней формуле:

$$\sigma_\omega = \frac{B_\omega}{J_\omega^*} \omega, \quad (3.28)$$

при этом сам бимомент B_ω вычисляется по формуле (3.19), в которой учитывается влияние наклона поясов к продольной оси.

В связи с тем, что в настоящей работе, все особенности стесненного кручения рассматриваемых стержней выражаются через дифференциальные зависимости (как сделано в [131-135]), то формула (3.19) в дальнейшем будет использоваться в следующем виде:

$$B_\omega = -\frac{EJ_\omega^*}{h_\omega^*} (\theta h_\omega^*)'' \quad (3.29)$$

Таким образом, выражение (3.16) для вычисления нормальных напряжений в сечении с учетом (3.28) предстанет в классическом виде:

$$\sigma = \frac{B_\omega}{J_\omega^*} \omega. \quad (3.30)$$

Редуцированная толщина поясов

Если разграничивать производные относительно продольной оси стержня и относительно длины дуги продольной оси поясов, то в рассматриваемых стержнях при выводе интегральных значений внутренних усилий, как это сделано в [111, 168, 189], появляется так называемая редуцированная толщина поясов:

$$t_f^{red} = t_f \cos^3 \beta_0, \quad (3.31)$$

где $\beta_0 = \frac{\beta_1}{2}$ – угол наклона пояса к продольной оси стержня (Рисунок 3.1в).

Таким образом, все интегральные геометрические характеристики сечений должны вычисляться с учетом редуцированной толщины поясов.

Полные выражения для вычисления геометрических характеристик с учетом редуцированной толщины поясов $t_f \cos^3 \beta_0$, могут быть найдены в работах [111, 168].

В настоящей работе все геометрические и жесткостные характеристики принимались такими же, как в работах [111, 168], и были вычислены с учетом редуцированной толщины поясов, однако для удобства записи редуцирующий множитель $\cos^3 \beta_0$ в формулах опущен.

3.2. Определение НДС за пределом упругости.

Алгоритм «Сечение»

Физические зависимости между напряжениями и деформациями в сечениях стержня принимаются на основании предварительно заданной упруго-пластической модели работы стали.

При этом если в расчетах используется полные усилия, то связь между напряжениями и деформациями выражается:

$$\sigma = \varepsilon E_s, \quad (3.32)$$

где E_s – секущий модуль упругости.

Если же расчет ведется в приращениях усилий, то зависимость имеет вид:

$$\Delta\sigma = \Delta\varepsilon E_t, \quad (3.33)$$

где E_t – касательный модуль упругости.

Диаграмма работы стали (зависимость « σ - ε ») может быть произвольной и должна быть задана изначально. В данной работе зависимость « σ - ε » принималась в виде унифицированной диаграммы работы пластичной стали (Рисунок 3.6а), предложенная в [22] на основании исследований, произведенных в ЦНИИСК им. В.А. Кучеренко. Криволинейный участок диаграммы может быть принят либо в виде кусочно-линейной функции, либо аппроксимирован полиномом. В данной

работе использовалась аппроксимация полиномом четвертой степени, что позволило достаточно точно воспроизвести криволинейный участок.

В настоящем исследовании предполагается, что все элементы выполнены из стали С245 (с расчетным сопротивлением $R_y = 24.5 \frac{\text{кН}}{\text{см}^2}$), диаграмма работы которой представлена на Рисунке 3.6б. Индекс «пц» означает предел пропорциональности, индекс «т» – текучести.

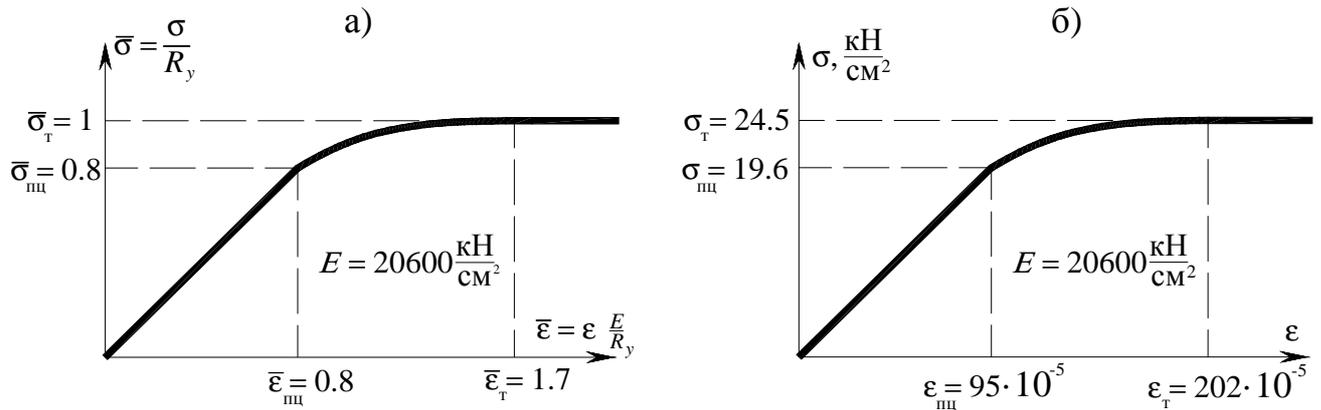


Рисунок 3.6. Унифицированная диаграмма работа стали (а) и диаграмма работы для стали С245 (б)

Для решения задачи об определении напряженно-деформированного состояния в поперечном сечении элемента за пределом упругости используется алгоритм «Сечение» [18]. Данный алгоритм позволяет определять пластические деформации на каждом шаге нагружения и оценивать прочность сечений элемента за пределом упругости.

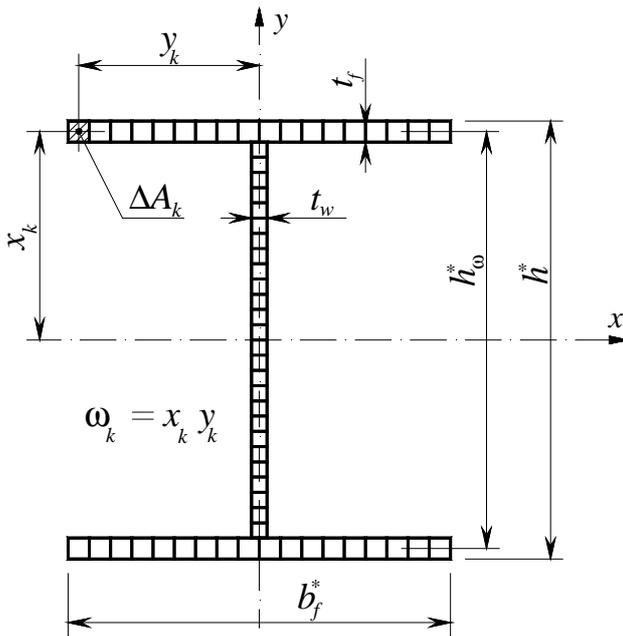
В соответствии с [18] для реализации алгоритма необходимо разбить сечение двутаврового стержня на достаточно малые площадки ΔA_k с координатами x_k, y_k, ω_k (Рисунок 3.7).

Количество площадок разбиения поперечного сечения m подбирается таким образом, чтобы при обеспечении необходимой точности время расчета было бы минимальным.

Относительные деформации каждой k -й площадки определяются в соответствии с гипотезой плоских сечений в сочетании с законом секториальных площадей, которые можно представить в виде:

$$\varepsilon_k = \varepsilon_0 - v'' y_k - u'' x_k - \theta'' \omega_k, \quad (3.34)$$

где ε_0 – относительная деформация оси стержня; v'' , u'' – кривизны продольной оси стержня в двух плоскостях сечения; θ'' – вторая производная угла закручивания.



Условные обозначения:

h^* – высота сечения;

h_ω^* – расстояние между центрами тяжести поясов;

b_f^* – ширина полок;

t_f – толщина полок;

t_w – толщина стенки;

ΔA_k – площадь площадки разбиения;

x_k, y_k – координаты центра тяжести площадки;

ω_k – секториальная координата;

* – размеры, переменные по длине.

Рисунок 3.7. Схема разбиения сечений стержня

Напряженно-деформированное состояние в поперечном сечении стержня с учетом нелинейной работы стали определяется из решения системы нелинейных уравнений. Согласно теории тонкостенных стержней, эти уравнения определяют связь между усилиями N, M_x, M_y, B_ω и нормальными напряжениями σ :

$$\begin{aligned} N &= \int_A \sigma dA \approx \sum_{k=1}^m \sigma_k \Delta A_k, \\ M_x &= \int_A \sigma y dA \approx \sum_{k=1}^m \sigma_k y_k \Delta A_k, \\ M_y &= \int_A \sigma x dA \approx \sum_{k=1}^m \sigma_k x_k \Delta A_k, \\ B_\omega &= \int_A \sigma \omega dA \approx \sum_{k=1}^m \sigma_k \omega_k \Delta A_k. \end{aligned} \quad (3.35)$$

С целью повышения скорости расчета НДС в сечении за пределом упругости будем определять в приращениях, тогда физические зависимости и относительные деформации также следует принимать в приращениях:

$$\Delta\sigma = \Delta\varepsilon E_t, \quad (3.36)$$

$$\Delta\varepsilon_k = \Delta\varepsilon_0 - \Delta v'' y_k - \Delta u'' x_k - \Delta\theta'' \omega_k. \quad (3.37)$$

С учетом (3.36) и (3.37) выражения для внутренних усилий (3.35) в приращениях предстанут в виде:

$$\begin{aligned} \Delta N &= k_{11}\varepsilon_0 - k_{12}\Delta v'' - k_{13}\Delta u'' - k_{14}\Delta\theta'', \\ \Delta M_x &= k_{21}\varepsilon_0 - k_{22}\Delta v'' - k_{23}\Delta u'' - k_{24}\Delta\theta'', \\ \Delta M_y &= k_{31}\varepsilon_0 - k_{32}\Delta v'' - k_{33}\Delta u'' - k_{34}\Delta\theta'', \\ \Delta B_\omega &= k_{41}\varepsilon_0 - k_{42}\Delta v'' - k_{43}\Delta u'' - k_{44}\Delta\theta'', \end{aligned} \quad (3.38)$$

$$\text{где } k_{11} = \sum_{k=1}^m E_t \Delta A_k, \quad k_{12} = k_{21} = \sum_{k=1}^m E_t y_k \Delta A_k, \quad k_{13} = k_{31} = \sum_{k=1}^m E_t x_k \Delta A_k,$$

$$\begin{aligned} k_{14} &= k_{41} = k_{32} = k_{23} = \sum_{k=1}^m E_t \omega_k \Delta A_k, & k_{22} &= \sum_{k=1}^m E_t y_k^2 \Delta A_k, \\ k_{24} &= k_{42} = \sum_{k=1}^m E_t \omega_k y_k \Delta A_k, & k_{33} &= \sum_{k=1}^m E_t x_k^2 \Delta A_k, \\ k_{34} &= k_{43} = \sum_{k=1}^m E_t \omega_k x_k \Delta A_k, & k_{44} &= \sum_{k=1}^m E_t \omega_k^2 \Delta A_k. \end{aligned} \quad (3.39)$$

При упругой работе материала система (3.38) является линейной и жесткостные коэффициенты $k_{ij} = 0$ при $i \neq j$. При этом коэффициенты k_{ij} при $i = j$ приобретают вид классических выражений для жесткостей.

Коэффициенты (3.39) вычислялись с учетом редуцированной толщины поясов (Параграф 3.1.2).

При упруго-пластической работе материала система (3.38) становится нелинейной, так как в (3.38) входит касательный модуль E_t нелинейно связанный с относительной деформацией (3.37).

Для решения (3.38) в упруго-пластической стадии используется метод быстрого спуска [70], который посредством последовательных итераций позволяет получить НДС в сечении с заранее заданной точностью в процессе

пошагового нагружения при любом сочетании усилий. Для этого на каждом шаге нагружения необходимо знать как внутренние $\Delta N, \Delta M_x, \Delta M_y, \Delta B_\omega$, так и внешние усилия $\overline{\Delta N}, \overline{\Delta M}_x, \overline{\Delta M}_y, \overline{\Delta B}_\omega$.

Изложим алгоритм расчета более подробно. Удобно разделить порядок расчета на 2 этапа. В описании алгоритма индекс « i » указывает на номер шага нагружения сечения; индекс « j » обозначает номер итерации на определенном шаге « i ».

Этап I. Определение усилий, соответствующих упругой работе материала.

При упругой работе материала усилия могут быть определены при достижении максимальных напряжений $\sigma_{пр} = 0.8R_y$:

$$\sigma_{\max}^y = \frac{\overline{N}^y}{A} + \frac{\overline{M}_x^y}{W_x} + \frac{\overline{M}_y^y}{W_y} + \frac{\overline{B}_\omega^y}{W_\omega} = 0.8R_y. \quad (3.40)$$

Принимая, что $\overline{M}_x^y = \overline{N}^y e_y$, $\overline{M}_y^y = \overline{N}^y e_x$, $\overline{B}_\omega^y = \overline{N}^y e_y e_x$, а также $W_x = \rho_y A$, $W_y = \rho_x A$, $W_\omega = \rho_\omega A$, из общего выражения (3.40) получаем «упругую» продольную силу:

$$\overline{N}^y = \frac{0.8R_y A}{\left(1 + \frac{e_y}{\rho_y} + \frac{e_x}{\rho_x} + \frac{e_y e_x}{\rho_\omega}\right)}; \quad (3.41)$$

По найденной «упругой» продольной силе, определяем оставшиеся «упругие» усилия: $\overline{M}_x^y = \overline{N}^y e_y$, $\overline{M}_y^y = \overline{N}^y e_x$, $\overline{B}_\omega^y = \overline{N}^y e_y e_x$.

Этап II. Определение НДС при упруго-пластической работе материала.

Первая итерация.

1. По «упругим» усилиям определяем соответствующие им относительную деформацию, кривизны и вторую производную угла закручивания:

$$\varepsilon_{0y} = \frac{\overline{N}^y}{EA}; \quad v_y'' = -\frac{\overline{M}_x^y}{EJ_x}; \quad u_y'' = -\frac{\overline{M}_y^y}{EJ_y}; \quad \theta_y'' = -\frac{\overline{B}_\omega^y}{EJ_\omega}.$$

Тогда относительная упругая деформация k -го волокна определяется как:

$$\varepsilon_k^y = \varepsilon_{0y} - v_y'' y_k - u_y'' x_k - \theta_y'' \omega_k. \quad (3.42)$$

После этого к внешним «упругим» усилиям $\bar{N}^y, \bar{M}_x^y, \bar{M}_y^y, \bar{B}_\omega^y$ добавляем приращения $\Delta \bar{N}, \Delta \bar{M}_x, \Delta \bar{M}_y, \Delta \bar{B}_\omega$, которые бы вызывали малые пластические деформации;

далее эти приращения подставляем в уравнения (3.38), которые решаются в предположении упругой работы материала (т.е. $E_t = E$). Из решения линейной на данной итерации системы (3.38) получаем приращения компонент деформаций

$$\Delta \varepsilon_0, \Delta v''_{j=1}, \Delta u''_{j=1}, \Delta \theta''_{j=1};$$

затем, используя выражение (3.37), вычисляем приращения деформаций $\Delta \varepsilon_k$ для каждой площадки ΔA_k , и устанавливаем полные относительные деформации $\varepsilon_k = \varepsilon_k^y + \Delta \varepsilon_k$.

2. На основании полученных значений ε_k определяем модули деформации по диаграмме « σ - ε ». При этом, если $\varepsilon \leq \varepsilon_{\text{пл}}$, то используется упругий модуль E ; если $\varepsilon > \varepsilon_{\text{пл}}$, то определяется касательный модуль E_t .

3. Определяем жесткостные коэффициенты (3.39) на основании модулей деформации, полученных для каждой площадки ΔA_k . Далее по (3.38), с учетом полученных ранее $\Delta \varepsilon_0, \Delta v''_{j=1}, \Delta u''_{j=1}, \Delta \theta''_{j=1}$, вычисляем приращения внутренних усилий $\Delta N, \Delta M_x, \Delta M_y, \Delta B_\omega$.

4. Находим невязки между приращениями внешних (задаваемых) и внутренних (получаемых) усилий:

$$\begin{aligned} \Delta \Delta \bar{N} &= \Delta \bar{N} - \Delta N, \\ \Delta \Delta \bar{M}_x &= \Delta \bar{M}_x - \Delta M_x, \\ \Delta \Delta \bar{M}_y &= \Delta \bar{M}_y - \Delta M_y, \\ \Delta \Delta \bar{B}_\omega &= \Delta \bar{B}_\omega - \Delta B_\omega. \end{aligned} \tag{3.43}$$

5. Если полученные невязки (3.43) находятся в пределах заданной точности расчета, то итерационный процесс прекращается и происходит переход к

следующему шагу нагружения (возвращаемся к пункту 1Б). При этом оставшиеся невязки суммируются с заданными на последующем этапе загрузки. Если полученные невязки (3.43) превышают заданную точность расчета, то переходим ко второй итерации.

Вторая и последующие итерации (на примере второй итерации).

6. Полученные на предыдущей итерации невязки задаются как вновь заданные приращения внешних усилий:

$$\begin{aligned}\Delta_{j=2} \bar{N} &= \Delta \Delta_{j=1} \bar{N}, \\ \Delta_{j=2} \bar{M}_x &= \Delta \Delta_{j=1} \bar{M}_x, \\ \Delta_{j=2} \bar{M}_y &= \Delta \Delta_{j=1} \bar{M}_y, \\ \Delta_{j=2} \bar{B}_\omega &= \Delta \Delta_{j=1} \bar{B}_\omega.\end{aligned}\tag{3.44}$$

Далее приращения (3.44) подставляем в систему (3.38), при этом используя жесткостные характеристики (3.39) с предыдущей итерации. В результате решения системы (3.38) находим приращения компонент деформаций $\Delta_{j=2} \varepsilon_0, \Delta_{j=2} v_k'', \Delta_{j=2} u'', \Delta_{j=2} \theta''$.

7. Далее, по (3.37), вычисляем приращения деформаций $\Delta_{j=2} \varepsilon_k$ в каждой площадке и определяем полные относительные деформации:

$$\varepsilon_k = \varepsilon_k + \Delta_{j=1} \varepsilon_k + \Delta_{j=2} \varepsilon_k.\tag{3.45}$$

8. На основании полученных значений ε_k определяем модули деформации по диаграмме « σ - ε ».

9. Определяем жесткостные коэффициенты (3.39) на основании определенных модулей деформации. Далее по (3.38), с учетом полученных

$$\Delta_{j=2} \varepsilon_0, \Delta_{j=2} v_k'', \Delta_{j=2} u'', \Delta_{j=2} \theta'', \quad \text{вычисляем приращения внутренних усилий}$$

$$\Delta_{j=2} N, \Delta_{j=2} M_x, \Delta_{j=2} M_y, \Delta_{j=2} B_\omega.$$

10. Находим невязки между заданными и полученными усилиями:

$$\begin{aligned}
\Delta\Delta\bar{N} &= \Delta\bar{N} - \Delta N, \\
\Delta\Delta\bar{M}_x &= \Delta\bar{M}_x - \Delta M_x, \\
\Delta\Delta\bar{M}_y &= \Delta\bar{M}_y - \Delta M_y, \\
\Delta\Delta\bar{B}_\omega &= \Delta\bar{B}_\omega - \Delta B_\omega.
\end{aligned}
\tag{3.46}$$

11. Если полученные невязки (3.46) находятся в пределах заданной точности расчета, то завершаем итерационный процесс и переходим к следующему шагу нагружения с учетом оставшихся невязок (возвращаемся к пункту 1Б). Если полученные невязки (3.46) превышают заданную точность расчета, то переходим к следующей итерации (возвращаемся к пункту б).

С ростом нагрузок сходимость итерационного процесса ухудшается и на определенном этапе он становится расходящимся, что соответствует нарушению равновесного состояния стержня. Нагрузку, при которой процесс еще сходил, принимаем за предельную. Описанный численный алгоритм получил название «Сечение».

При оценке прочности расходимость процесса должна быть заменена ограничением величины максимальной пластической деформации $\bar{\varepsilon}_{p,\max} = 3$.

3.3. Определение упругих пространственных деформаций сечений тонкостенного стержня переменной жесткости.

Алгоритм «Стержень»

Решение задачи об определении пространственных перемещений и устойчивости двутавровых стержней переменной жесткости основано на деформационной теории упругих тонкостенных стержней В.З. Власова [45], Л.Н. Воробьева [47] и Б.М. Броуде [38-40], обобщенной Е.А. Бейлиным [7-11] на случай, когда необходимо учитывать различие кривизн и наклоны отдельных волокон, связанных с кручением стержня.

Система деформационных уравнения равновесия Е.А. Бейлина [10], с учетом особенностей кручения двутавровых стержней переменной жесткости

(согласно Z. Cywinski [131-135]), для принятых условий загрузки стержня (Рисунок 3.1 и 3.2) имеет вид:

$$\left\{ \begin{array}{l} (EJ_x^* v'')'' + N^0 v'' - (M_y^0 \theta')' + (M_z^0 u')'' = 0 \\ (EJ_y^* u'')'' + N^0 u'' + (M_x^0 \theta')' - (M_z^0 v')'' = 0 \\ \left[\frac{EJ_\omega^*}{(h_\omega^*)^2} (\theta h_\omega^*)'' \right]'' h_\omega^* - (GJ_d^* \theta')' - M_y^0 v'' + M_x^0 u'' + N^0 (i_p^{2*} \theta')' = 0, \end{array} \right. \quad (3.47)$$

где v, u – функции перемещений вдоль осей y и x , соответственно;

θ – угол закручивания относительно оси z ; N^0 – продольная сила;

M_x^0, M_y^0 – изгибающие моменты относительно осей x и y , соответственно;

M_z^0 – общий крутящий момент;

E, G – модули линейной и сдвиговой деформации;

h_ω^* – расстояние между центрами тяжести полков двутавра;

J_x^*, J_y^*, J_ω^* – главные осевые и секториальный моменты инерции;

J_d^* – момент инерции чистого кручения;

$i_p^{2*} = \frac{J_x^* + J_y^*}{A^*}$ – геометрическая характеристика, где A^* – площадь сечения.

Верхний индекс «0» в обозначении усилий означает, что последние приняты по недеформированной расчетной схеме стержня.

Геометрические характеристики сечений, входящие в (3.47), учитывают редуцированную толщину поясов (Параграф 3.1.2).

Как показали исследования, для рассматриваемых стержней первые два уравнения системы (3.47) могут быть предварительно проинтегрированы с пренебрежением членов, содержащих производные изгибных жесткостей и силовых факторов, без потери в точности.

Таким образом, система (3.47) после предварительного интегрирования первых двух уравнений примет вид:

$$\begin{cases} EJ_x^* v'' + N^0 v - M_y^0 \theta + M_z^0 u' = M_x^0 \\ EJ_y^* u'' + N^0 u + M_x^0 \theta - M_z^0 v' = -M_y^0 \end{cases} \quad (3.48)$$

$$\left[\frac{EJ_\omega^*}{(h_\omega^*)^2} (\theta h_\omega^*)'' \right]'' h_\omega^* - (GJ_d^* \theta')' - M_y^0 v'' + M_x^0 u'' + N^0 (i_p^{2*} \theta')' = 0.$$

В исследовании приняты следующие правила знаков для внешних усилий:

1. Сжимающая продольная сила положительна.
2. Изгибающий момент положительный, если соответствующий ему вектор момент совпадает с положительным направлением оси.
3. Бимомент положительный, если при взгляде вдоль плеча бипары, ближайшая к нему бипара действует по часовой стрелке.

Правило знаков для прогибов и угла закручивания:

1. Прогибы в направлении осей положительны.
2. Угол закручивания положительный, если при взгляде с положительного направления оси сечение поворачивается против часовой стрелки.

Для решения системы (3.48) воспользуемся аналитическим методом Г.И. Белого [18], в соответствии с которым общее решение (3.48) может быть представлено в виде линейной комбинации частных решений:

$$v = v_0 + v_n + v_y, \quad u = u_0 + u_n + u_y, \quad \theta = \theta_0 + \theta_n + \theta_y, \quad (3.49)$$

где v_0, u_0, θ_0 – начальные перемещения и угол закручивания или деформированное состояние с предыдущего этапа нагружения; v_n, u_n, θ_n – перемещения и угол закручивания, полученные из решения задачи по недеформированной расчетной схеме при действии только активных сил [87]; v_y, u_y, θ_y – функции потери устойчивости, полученные из решения бифуркационных задач устойчивости, постановка которых может быть выполнена только при действии параметрических сил [87].

Функции начальных несовершенств могут быть представлены в виде:

$$v_0 = V_0 \Psi_0(z); \quad u_0 = U_0 \Phi_0(z); \quad \theta_0 = \Theta_0 \nu_0(z), \quad (3.50)$$

где V_0, U_0, Θ_0 – константы, связанные с начальными несовершенствами, которые устанавливаются по натурным замерам элемента; $\psi_0(z), \phi_0(z), v_0(z)$ – формы начальных перемещений и угла закручивания, которые могут быть аппроксимированы по замерам стержня в незагруженном состоянии.

Решение как бифуркационных задач, так и задач недеформационного расчета стержней переменной жесткости, в замкнутом виде невозможно, поэтому для решения последних был применен метод конечных разностей (МКР).

Перемещения v_n, u_n находятся путем решения МКР двух первых уравнений (3.48) при пренебрежении влияния перемещений на усилия:

$$\begin{aligned} EJ_x^* v_n'' &= M_x^0, \\ EJ_y^* u_n'' &= -M_y^0. \end{aligned} \quad (3.51)$$

Уравнения (3.51) имеют второй порядок, следовательно, для их решения МКР необходимо дополнительно определить две неизвестных ординаты. Последние определяются через статические граничные условия.

Расчетная схема в задачах об определении недеформационных перемещений является статически определимой, поэтому выражения для изгибающих моментов приняты по известным выражениям:

$$\begin{aligned} M_x^0 &= M_{x,L} \mu_x = N^0 e_{y,L} \left[(1+n_x) \frac{z}{L} - 1 \right], \\ M_y^0 &= M_{y,L} \mu_y = N^0 e_{x,L} \left[(1+n_y) \frac{z}{L} - 1 \right], \end{aligned} \quad (3.52)$$

где $M_{x,L} = N^0 e_{y,L}, M_{y,L} = N^0 e_{x,L}$ – опорные изгибающие моменты, приложенные к

большому торцевому сечению; $\mu_x = \left[(1+n_x) \frac{z}{L} - 1 \right], \mu_y = \left[(1+n_y) \frac{z}{L} - 1 \right]$ – формы

изменения изгибающих моментов, $n_x = \frac{e_{y,0}}{e_{y,L}}, n_y = \frac{e_{x,0}}{e_{x,L}}$ – соотношения концевых

эксцентриситетов.

Угол закручивания θ_n определяется путем решения МКР дифференциального уравнения углов закручивания двутаврового стержня с переменной высотой стенки и/или шириной поясов:

$$\left[\frac{EJ_{\omega}^*}{(h_{\omega}^*)^2} (\theta_n h_{\omega}^*)'' \right]' h_{\omega}^* - (GJ_d^* \theta_n')' = 0. \quad (3.53)$$

Уравнение (3.53) имеют четвертый порядок, следовательно, для их решения МКР необходимо дополнительно определить четыре неизвестных ординаты, две из которых также определяются через статические граничные условия задачи (отсутствие кручения торцевых сечений, $\theta=0$). Остальные две ординаты определяются через силовые граничные условия на основании выражения для бимоментов:

$$B_{\omega}^0 = - \frac{EJ_{\omega}^*}{h_{\omega}^*} (\theta_n h_{\omega}^*)'', \quad (3.54)$$

где $B_{\omega}^0 = N^0 e_x e_y$ – внешние концевые бимоменты от продольных сил, приложенных с разными двухосными эксцентриситетами.

Крутящий момент, как было показано в Параграфе 3.1.2, в рассматриваемых стержнях определяется следующим дифференциальным выражением:

$$M_z^0 = M_{\omega} + M_{кр} = \left\{ \left[\frac{EJ_{\omega}^*}{(h_{\omega}^*)^2} (\theta h_{\omega}^*)'' \right]' h_{\omega}^* - \frac{EJ_{\omega}^*}{(h_{\omega}^*)^2} [\theta h_{\omega}^*]'' h_{\omega}^* \right\} - GJ_d^* \theta', \quad (3.55)$$

где M_{ω} – изгибно-крутящий момент, $M_{кр}$ – момент чистого кручения.

Как указано в Главе 2, функции потери устойчивости, вытекающие из решения бифуркационных задач, согласно [18] имеют вид:

$$v_y = V_y \psi_y(z); \quad u_y = U_y \phi_y(z); \quad \theta_y = \Theta_y v_y(z), \quad (3.56)$$

где V_y, U_y, Θ_y – константы, с точностью до которых решаются бифуркационные задачи устойчивости, имеющие размерности, соответствующие перемещениям v, u, θ ; $\psi_y(z), \phi_y(z), v_y(z)$ – формы потери устойчивости.

Напомним, что для двутавровых профилей, применяемых в рамках переменного сечения, жесткость в плоскости стенки во много раз превышает жесткость из этой плоскости, что позволяет разделить бифуркационные задачи на задачу о потере устойчивости центрально-сжатого стержня по изгибной форме в плоскости большей жесткости и задачу о потере устойчивости внецентренно-сжатого стержня по изгибно-крутильной форме [18].

Задача об устойчивости центрально-сжатого стержня описывается следующим дифференциальным уравнением:

$$EJ_x^* v_y'' + Nv_y = 0, \quad (3.57)$$

Так как в рамках задач устойчивости, связанных с определением точки бифуркации, возможно определение лишь форм потери устойчивости, то в (3.57) функции потери устойчивости заменяются на формы:

$$EJ_x^* \psi_y'' + N\psi_y = 0. \quad (3.58)$$

Задача об устойчивости внецентренно-сжатого стержня по изгибно-крутильной форме описывается следующей системой дифференциальных уравнений (в которой, аналогично (3.58), функции сразу заменены на формы потери устойчивости):

$$\begin{cases} EJ_y^* \phi_y'' + N\phi_y + M_x v_y' = 0 \\ \left[\frac{EJ_\omega^*}{h_\omega^{*2}} (v_y h_\omega^*)'' \right]'' h_\omega^* - (GJ_d^* v_y')' + M_x \phi_y'' + N(i_p^{*2} v_y')' = 0. \end{cases} \quad (3.59)$$

Решение бифуркационных задач устойчивости, описываемых уравнением (3.58) и системой уравнений (3.59), с определением соответствующих форм потери устойчивости: $\psi_y(z)$ для первой задачи и $\phi_y(z)$, $v_y(z)$ – для второй, подробно приведено в Главе 2.

Таким образом, все частные решения, входящие в (3.49), могут быть найдены. Подставляя их значения в систему (3.48), получим:

$$\begin{cases}
L_v = EJ_x^* v_y'' + N^0(v_0 + v_n + v_y) - M_y^0(\theta_0 + \theta_n + \theta_y) + M_z^0(u_0 + u_n + u_y)' = 0 \\
L_u = EJ_y^* u_y'' + N^0(u_0 + u_n + u_y) + M_x^0(\theta_0 + \theta_n + \theta_y) - M_z^0(v_0 + v_n + v_y)' = 0 \\
L_\theta = \left[\frac{EJ_\omega^*}{(h_\omega^*)^2} (\theta_y h_\omega^*)'' \right] h_\omega^* - (GJ_d^* \theta_y)' - M_y^0(v_0 + v_n + v_y)'' + \\
+ M_x^0(u_0 + u_n + u_y)'' + N^0 \left[i_p^{2*} (\theta_0 + \theta_n + \theta_y)' \right]' = 0.
\end{cases} \quad (3.60)$$

Из структуры уравнений (3.60) следует, что они являются уравнениями равновесия стержня, имеющего начальные перемещения $v_0 + v_n$, $u_0 + u_n$, $\theta_0 + \theta_n$ и получившего дополнительные перемещения v_y, u_y, θ_y .

Применяя к системе (3.60) алгоритм метода Бубнова-Галеркина:

$$\int_0^L L_v \psi_y''(z) dz = 0; \int_0^L L_u \phi_y''(z) dz = 0; \int_0^L L_\theta v_y(z) dz = 0, \quad (3.61)$$

придем к системе из трех алгебраических уравнений относительно неизвестных констант V_y, U_y, Θ_y . Определив их значения, в предложенном решении (3.49) становятся известны все составляющие упругих пространственных перемещений.

Таким образом, можно перейти к определению деформационных усилий:

$$\begin{aligned}
M_x^d &= M_x^0 + N^0 v - M_y^0 \theta, \\
M_y^d &= M_y^0 + N^0 u + M_x^0 \theta,
\end{aligned} \quad (3.62)$$

$$B_\omega^d = -\frac{EJ_\omega^*}{h_\omega^*} (\theta h_\omega^*)''$$

и оценить несущую способность в наиболее напряженном сечении по фибровой текучести.

Представленный аналитический алгоритм определения упругих пространственных деформаций получил название «Стержень».

3.4. Определение пространственных деформаций в упруго-пластической стадии. Совместная работа алгоритмов «Стержень» и «Сечение»

Развитие пластических деформаций учитывается введением в алгоритм «Стержень» дополнительных пространственных перемещений $v_{пл}, u_{пл}, \theta_{пл}$, с учетом которых общее решение (3.49) предстанет в виде:

$$v = v_0 + v_n + v_y + v_{пл}, \quad u = u_0 + u_n + u_y + u_{пл}, \quad \theta = \theta_0 + \theta_n + \theta_y + \theta_{пл}. \quad (3.63)$$

Для учета развития пластических деформаций, разобьем стержень по длине на 8 равных частей (Рисунок 3.8). При этом НДС контролируются в 9 сечениях, включая опорные.

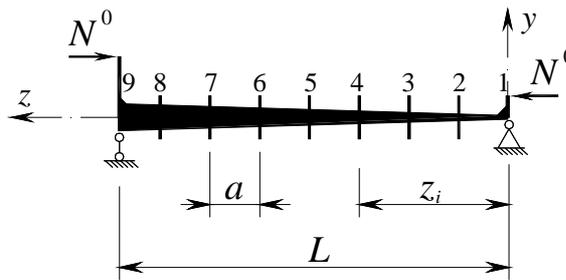


Рисунок 3.8. Схема разбиения стержня по длине

Дополнительные пространственные перемещения $v_{пл}, u_{пл}, \theta_{пл}$ аппроксимируются тригонометрическими полиномами, которые удовлетворяют кинематическим граничным условиям [88]:

$$\begin{aligned} v_{пл} &= V_1^{пл} \psi_1(z) + \sum_{i1=1}^4 V_{i1}^{пл} \psi_{i1}(z) + \sum_{i2=1}^4 V_{i2}^{пл} \psi_{i2}(z), \\ u_{пл} &= U_1^{пл} \phi_1(z) + \sum_{i1=1}^4 U_{i1}^{пл} \phi_{i1}(z) + \sum_{i2=1}^4 U_{i2}^{пл} \phi_{i2}(z), \\ \theta_{пл} &= \Theta_1^{пл} \vartheta_1(z) + \sum_{i1=1}^4 \Theta_{i1}^{пл} \vartheta_{i1}(z) + \sum_{i2=1}^4 \Theta_{i2}^{пл} \vartheta_{i2}(z), \end{aligned} \quad (3.64)$$

где $V_i^{пл}, U_i^{пл}, \Theta_i^{пл}$ – неизвестные константы аппроксимирующих функций,

$$\psi_1(z) = \phi_1(z) = \vartheta_1(z) = \sin(\pi z),$$

$$\Psi_{i1}(z) = \Phi_{i1}(z) = \vartheta_{i1}(z) = \bar{z} \cos\left(\frac{(2i_1 - 1)\pi\bar{z}}{2}\right),$$

$$\Psi_{i2}(z) = \Phi_{i2}(z) = \vartheta_{i2}(z) = (1 - \bar{z}) \sin\left(\frac{(2i_2 - 1)\pi\bar{z}}{2}\right), \quad \bar{z} = z/L.$$

Подставляя (3.63) в (3.48) получим:

$$\begin{cases} L_v = EJ_x^* v_y'' + N^0(v_0 + v_n + v_y + v_{пл}) - M_y^0(\theta_0 + \theta_n + \theta_y + \theta_{пл}) + M_z^0(u_0 + u_n + u_y + u_{пл})' = 0 \\ L_u = EJ_y^* u_y'' + N^0(u_0 + u_n + u_y + u_{пл}) + M_x^0(\theta_0 + \theta_n + \theta_y + \theta_{пл}) - M_z^0(v_0 + v_n + v_y + v_{пл})' = 0 \\ L_\theta = \left[\frac{EJ_\omega^*}{(h_\omega^*)^2} (\theta_y h_\omega^*)'' \right] h_\omega^* - (GJ_d^* \theta_y)' - M_y^0(v_0 + v_n + v_y + v_{пл})'' + \\ + M_x^0(u_0 + u_n + u_y + u_{пл})'' + N^0 \left[i_p^{2*} (\theta_0 + \theta_n + \theta_y + \theta_{пл})' \right]' = 0. \end{cases} \quad (3.65)$$

Дополнительные пространственные перемещения $v_{пл}, u_{пл}, \theta_{пл}$ определяются в ходе итерационного процесса, поэтому с самого начала расчета производим пошаговое увеличение нагрузки.

При работе материала в упругой стадии, используется только алгоритм «Стержень», при этом в (3.65) $v_{пл} = u_{пл} = \theta_{пл} = 0$.

При упруго-пластической работе материала к алгоритму «Стержень» подключается алгоритм «Сечение», с помощью которого, в ходе итераций на каждом шаге нагружения, определяются приращения пластических составляющих кривизн и кручения в виде $\Delta v_{пл}'', \Delta u_{пл}'', \Delta \theta_{пл}''$, на основании которых, посредством метода коллокаций и полиномов (3.64), можно перейти к приращениям перемещений $\Delta v_{пл}, \Delta u_{пл}, \Delta \theta_{пл}$, вызванных пластическими деформациями.

Опишем порядок взаимодействия между алгоритмами «Стержень» и «Сечение» на произвольном, i -м шаге нагружения. В описании индекс « i » указывает на номер шага нагружения; индекс « j » обозначает номер итерации на определенном шаге « i ».

Порядок расчета на i -м шаге нагружения.

Первая итерация.

1. Обращаясь к алгоритму «Стержень», определяем в первом приближении пространственные перемещения точек оси стержня от заданной нагрузки

$N^i = N^{i-1} + \Delta N$, где ΔN – приращение продольной силы на каждом шаге нагружения. По (3.62) определяем деформационные усилия в каждом контролируемом сечении $\overline{M}_{x,k}^{d,j=1}, \overline{M}_{y,k}^{d,j=1}, \overline{B}_{\omega,k}^{d,j=1}$ и устанавливаем их приращения:

$$\begin{aligned}\Delta \overline{M}_{x,k}^{d,j=1} &= \overline{M}_{x,k}^{d,j=1} - M_{x,k}^{d,i-1}, \\ \Delta \overline{M}_{y,k}^{d,j=1} &= \overline{M}_{y,k}^{d,j=1} - M_{y,k}^{d,i-1}, \\ \Delta \overline{B}_{\omega,k}^{d,j=1} &= \overline{B}_{\omega,k}^{d,j=1} - B_{\omega,k}^{d,i-1},\end{aligned}\quad (3.66)$$

где $M_{x,k}^{d,i-1}, M_{y,k}^{d,i-1}, B_{\omega,k}^{d,i-1}$ – деформационные усилия в сечениях, полученные на предыдущем шаге нагружения $i-1$.

Усилия и их приращения, отмеченные чертой сверху, определяются только на первом шаге первой итерации.

2. Обращаясь к алгоритму «Сечение», определяем приращения пластических кривизн и кручения $\Delta v_{пл}'' , \Delta u_{пл}'' , \Delta \theta_{пл}''$, соответствующих приращениям деформационных усилий (3.66) и приращению продольной силы ΔN . Пластические составляющие $\Delta v_{пл}'' , \Delta u_{пл}'' , \Delta \theta_{пл}''$ определяются как разница между полными и упругими кривизнами и кручением от одних и тех же усилий.

3. По известным значениям $\Delta v_{пл}'' , \Delta u_{пл}'' , \Delta \theta_{пл}''$, воспользовавшись методом коллокаций и решив три системы линейных уравнений, определяем приращения дополнительных пространственных перемещений $\Delta v_{пл} , \Delta u_{пл} , \Delta \theta_{пл}$, вызванных пластической работой материала.

4. Обращаясь к алгоритму «Стержень», определяем деформационные усилия $M_{x,k}^{d,j=1}, M_{y,k}^{d,j=1}, B_{\omega,k}^{d,j=1}$, учитывая в алгоритме значения $\Delta v_{пл} , \Delta u_{пл} , \Delta \theta_{пл}$, как начальные геометрические несовершенства.

5. Определяем приращения деформационных усилий:

$$\begin{aligned}\Delta M_{x,k}^{d,j=1} &= M_{x,k}^{d,j=1} - \overline{M}_{x,k}^{d,j=1}, \\ \Delta M_{y,k}^{d,j=1} &= M_{y,k}^{d,j=1} - \overline{M}_{y,k}^{d,j=1}, \\ \Delta B_{\omega,k}^{d,j=1} &= B_{\omega,k}^{d,j=1} - \overline{B}_{\omega,k}^{d,j=1}.\end{aligned}\quad (3.67)$$

6. Если полученные приращения (3.67) находятся в пределах заранее заданной точности, то итерационный процесс заканчивается и происходит переход к следующему шагу нагружения $i+1$ и весь процесс (пункты 1-5) повторяется. Если полученные приращения (3.67) превышают заданную точность расчета, то переходим ко второй итерации.

Вторая и последующая итерации (на примере второй итерации).

7. Обращаясь к алгоритму «Сечение», по приращениям (3.67) определяем приращения пластических деформаций $\Delta v_{j=2}''_{пл}, \Delta u_{j=2}''_{пл}, \Delta \theta_{j=2}''_{пл}$ (при этом $\Delta N = 0$).

8. По известным значениям $\Delta v_{j=2}''_{пл}, \Delta u_{j=2}''_{пл}, \Delta \theta_{j=2}''_{пл}$, определяем приращения дополнительных пространственных перемещений $\Delta v_{j=2}_{пл}, \Delta u_{j=2}_{пл}, \Delta \theta_{j=2}_{пл}$ (так же, как в пункте 3).

9. Аналогично пункту 4, определяем $M_{x,k}^{д,j=2}, M_{y,k}^{д,j=2}, B_{\omega,k}^{д,j=2}$.

10. Определяем приращения деформационных усилий:

$$\begin{aligned} \Delta M_{x,k}^{д,j=2} &= M_{x,k}^{д,j=2} - M_{x,k}^{д,j=1}, \\ \Delta M_{y,k}^{д,j=2} &= M_{y,k}^{д,j=2} - M_{y,k}^{д,j=1}, \\ \Delta B_{\omega,k}^{д,j=2} &= B_{\omega,k}^{д,j=2} - M_{\omega,k}^{д,j=1}. \end{aligned} \quad (3.68)$$

11. Если полученные приращения (3.68) находятся в пределах заранее заданной точности, то итерационный процесс заканчивается и происходит переход к следующему шагу нагружения $i+1$ и весь процесс (начиная с пункта 1) повторяется. Если полученные приращения (3.68) превышают заданную точность расчета, то переходим к следующей итерации (переход к пункту 7) итерации.

Описанный порядок совместной работы алгоритмов «Стержень» и «Сечение» на произвольном шаге нагружения N^i схематично представлен Рисунке 3.9 (синие прямоугольники соответствуют вычислениям в рамках алгоритма «Стержень», красные – в рамках алгоритма «Сечение»).

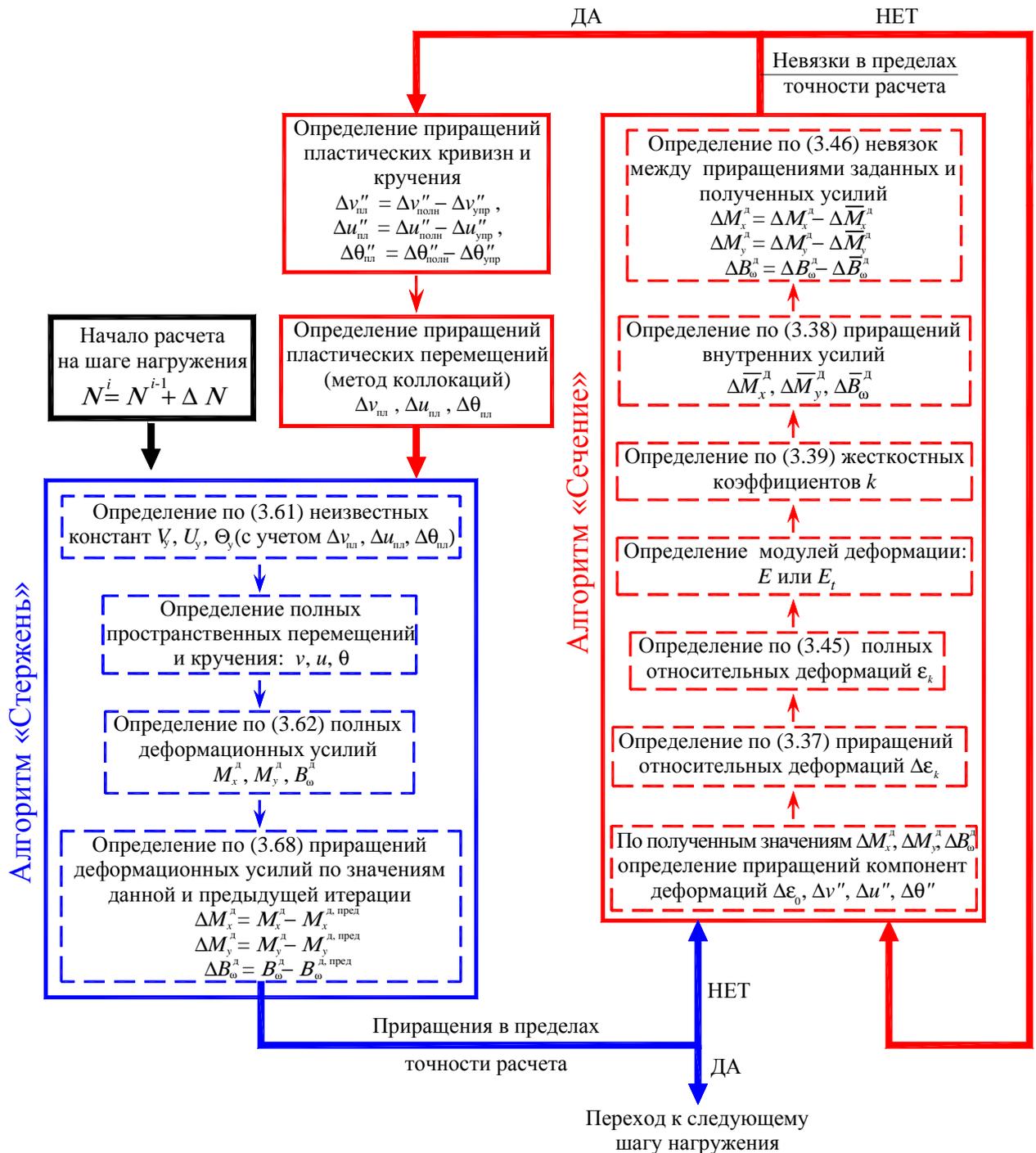


Рисунок 3.9. Схема совместной работы алгоритмов «Стержень» и «Сечение» на произвольном шаге нагружения N^i

Итерационный процесс на каждом шаге нагружения i продолжается до тех пор, пока на какой-то итерации $j = j_p$ приращения (3.68) не будут находиться в пределах заданной точности расчета.

На каждой итерации приращения пластических составляющих пространственных перемещений суммируются:

$$\begin{aligned}
 v_{\text{пл}} &= \Delta v_{\text{пл}} + \Delta v_{\text{пл}} + \dots + \Delta v_{\text{пл}}, \\
 u_{\text{пл}} &= \Delta u_{\text{пл}} + \Delta u_{\text{пл}} + \dots + \Delta u_{\text{пл}}, \\
 \theta_{\text{пл}} &= \Delta \theta_{\text{пл}} + \Delta \theta_{\text{пл}} + \dots + \Delta \theta_{\text{пл}}.
 \end{aligned}
 \tag{3.69}$$

С ростом нагрузок сходимость процесса ухудшается и на определенном этапе он становится расходящимся, что соответствует нарушению устойчивого процесса деформирования. Если это произошло, то уменьшаем величину приращения продольной силы ΔN и выполняем расчет на последнем шаге нагружения заново. Таким образом, с требуемой точностью определяем нагрузку, при которой процесс еще сходил. При этом достаточно малое приращение нагрузки приводит к расходимости процесса. Эти нагрузки считаем предельными.

Разработанный аналитически-численный метод (совместная работа алгоритмов «Стержень» и «Сечение») был реализован в программном пакете Maple.

3.5. Пространственные деформации и устойчивость стержней переменной жесткости при различных геометрических параметрах и схемах загрузки

Исследование пространственной устойчивости было произведено для того же набора стержней, что и при решении бифуркационных задач устойчивости (Глава 2). Напомним, что среднее поперечное сечение ($z = 0.5L$) всех стержней принято одинаковым (Рисунок 3.10б), при этом варьируемыми геометрическими параметрами являлись: условная гибкость из плоскости стенки $\bar{\lambda}_y^{mid} = 2.1 \dots 4.8$ (которая принималась по радиусу инерции среднего сечения и соответствовала гибкостям $\lambda_y^{mid} = 60 \dots 140$ стержней выполненных из стали С245); угол наклона поясов $\beta_1 = 0 \dots 15^\circ$ (максимальное значение β_1 для каждой гибкости принималось, исходя из условия возможности физического изготовления образцов); угол сужения поясов $\beta_2 = 1.5$ и 3° (только для стержня гибкостью $\bar{\lambda}_y = 4.1$).

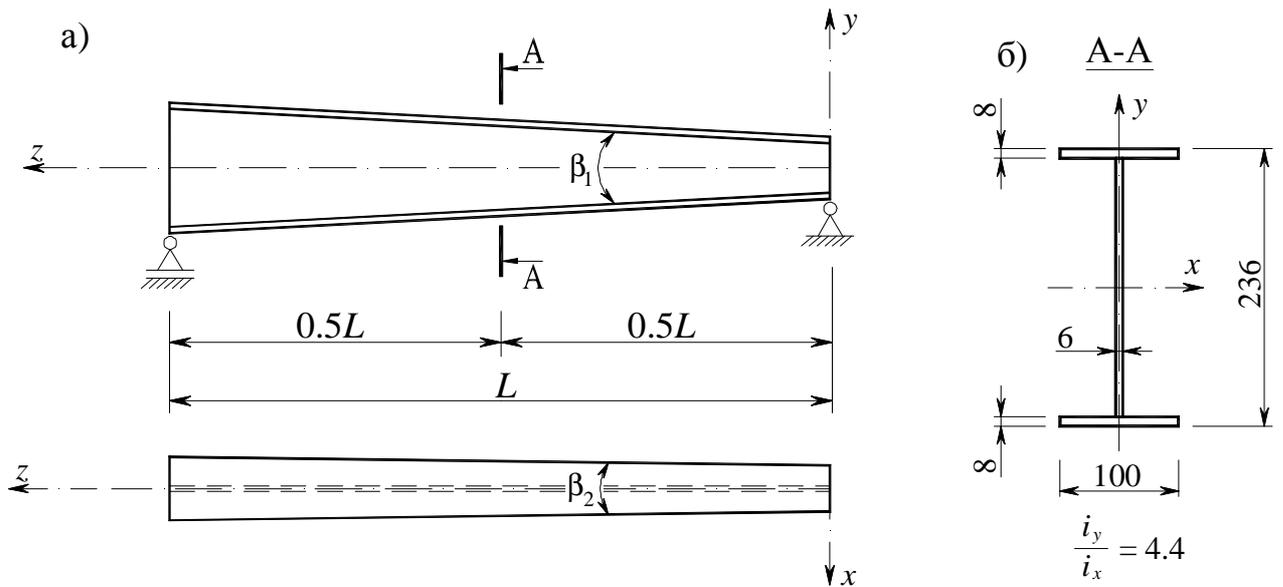


Рисунок 3.10. Общий вид стержня (а) и размеры (в мм) среднего сечения (б)

Геометрия была принята таким образом, чтобы все стержни одной и той же гибкости имели одинаковый расход стали.

Верхний индекс «*mid*» в обозначении гибкости далее опущен.

Загружение стержней в их плоскости производилось по схемам, которые были приняты в решениях бифуркационных задачах устойчивости по изгибно-крутильной форме (Параграф 2.1.2):

- Схема № 1: приложение силы с односторонними эксцентриситетами (Рисунок 3.11а);
- Схема № 2: приложение к меньшему сечению центрально-сжимающей силы (Рисунок 3.11б);
- Схема № 3: приложение силы с разносторонними эксцентриситетами (Рисунок 3.11в).

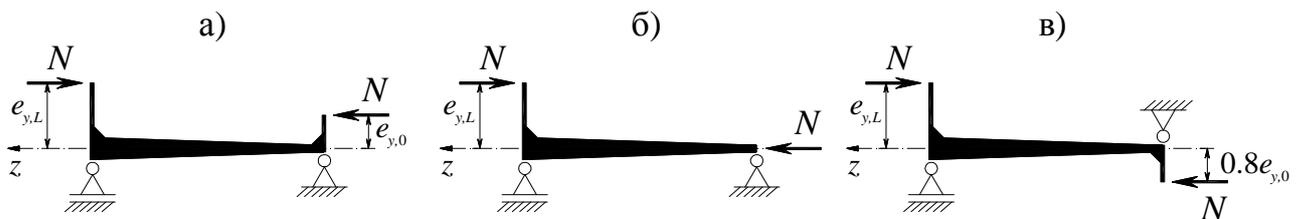


Рисунок 3.11. Схемы загрузки стержней в плоскости большей жесткости

Значения абсолютных эксцентриситетов на торце с большим сечением $e_{y,L}$ принимались, исходя из относительных эксцентриситетов $m_{x,L}$: $e_{y,L} = \frac{m_{x,L} W_{x,L}}{A_L}$ (где A_L и $W_{x,L}$ – площадь и момент сопротивления большего концевое сечения). Значения $m_{x,L}$ принимались равными 1.5; 7.5; 15.

Значения эксцентриситетов $e_{y,0}$ на торце с меньшим сечением вычислялись исходя из равенства фибровых напряжений на торцах стержня:

$$e_{y,0} = \frac{e_{y,L} W_{x,0}}{W_{x,L}} + \left(\frac{1}{A_L} - \frac{1}{A_0} \right) W_{x,0}. \quad (3.70)$$

Из плоскости действия момента, как указано ранее, принимались равные односторонние случайные эксцентриситеты.

Результаты расчетов получены в виде коэффициентов устойчивости при сжатии с изгибом в двух плоскостях, которые согласно Нормам [89], обозначались как φ_{exy} :

$$\varphi_{exy} = \frac{N^{\text{пред}}}{A_{\text{mid}} R_y}, \quad (3.71)$$

где $N^{\text{пред}}$ – предельная сила, при которой стержень терял устойчивость.

С целью практического применения, ниже приведены результаты исследования пространственной устойчивости при 3-х схемах загрузки в зависимости от следующих геометрических параметров двутавровых стержней: гибкости, углов наклона и сужения поясов, стеснения депланации торцевых сечений.

3.5.1. Пространственная устойчивость при различной гибкости

На графиках Рисунка 3.12 показаны кривые зависимости φ_{exy} от угла наклона поясов β_1 , равном 3° (а, б) и 6° (в, г). При этом в каждом случае рассматривались три схемы загрузки стержня с различными значениями относительных эксцентриситетов $m_{x,L}$: малом 1.5, среднем 7.5 и большом 15.

Из графиков видно, что устойчивость стержней во многом зависит от схемы загрузки. Так, максимальная устойчивость наблюдается при схеме загрузки

с разносторонними эксцентриситетами (Схема № 3), далее идет схема, при которой к меньшему торцевому сечению приложена сила без эксцентриситета (Схема № 2), минимальная устойчивость наблюдается при загрузении силой с односторонними эксцентриситетами (Схема № 1).

Анализируя приведенные графики можно увидеть, что с увеличением гибкости устойчивость снижается. Однако, как и для призматических стержней, для стержней переменной жесткости небольшой гибкости ($\bar{\lambda}_y = 2.1$ и $\bar{\lambda}_y = 2.8$) при загрузении относительно большими эксцентриситетами ($m_{x,L} = 7.5; 15$) наблюдаются практически горизонтальные участки для Схемы № 2 и 3, что объясняется значительным влиянием развития пластических деформаций на потерю устойчивости негибких стержней.

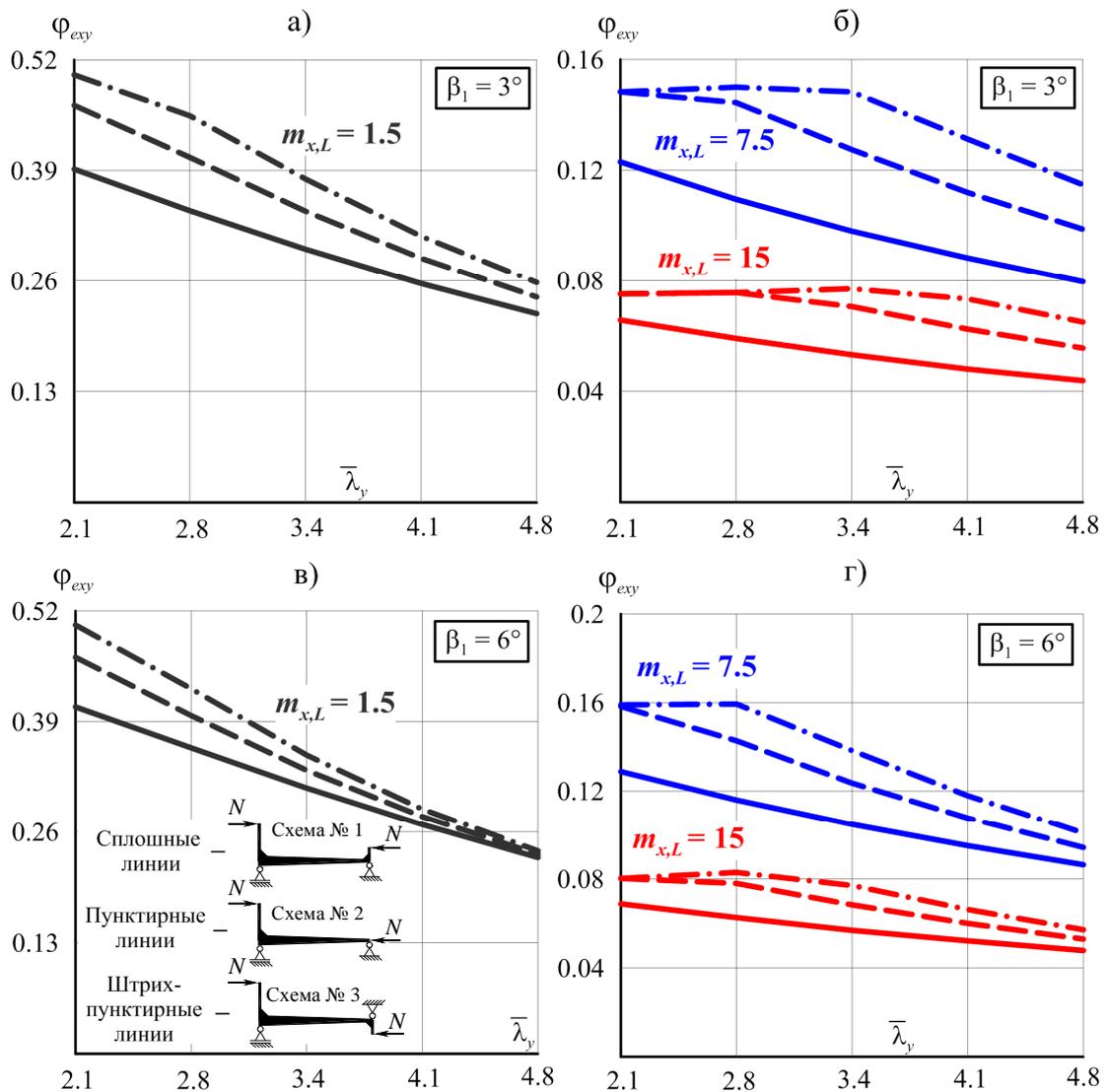


Рисунок 3.12. Зависимость коэффициентов ϕ_{eyy} от гибкости $\bar{\lambda}_y$ при наклоне поясов $\beta_1 = 3^\circ$ и 6°

3.5.2. Пространственные деформации и устойчивость при различных углах наклона поясов

Исследования пространственных перемещений среднего сечения u , v , θ и устойчивости φ_{exy} стержня гибкостью $\bar{\lambda}_y = 4.8$, нагруженного продольной силой с односторонними концевыми эксцентриситетами (Схема № 1), в зависимости от угла наклона поясов β_1 , показано на Рисунке 3.13. Здесь следует напомнить, что эксцентриситет $e_{y,0}$ на меньшем сечении принимался в зависимости от ядрового расстояния ρ_x . Поэтому, при меньших значениях β_1 , например $\beta_1 = 0.5^\circ$, $e_{y,0}$ оказывается больше, чем при $\beta_1 = 6^\circ$. В этом случае пространственная устойчивость, характеризуемая коэффициентом φ_{exy} , при $\beta_1 = 6^\circ$ оказалась больше того же стержня, но с меньшим наклоном поясов 3° и 0.5° на 7.5% и 19.4%, соответственно.

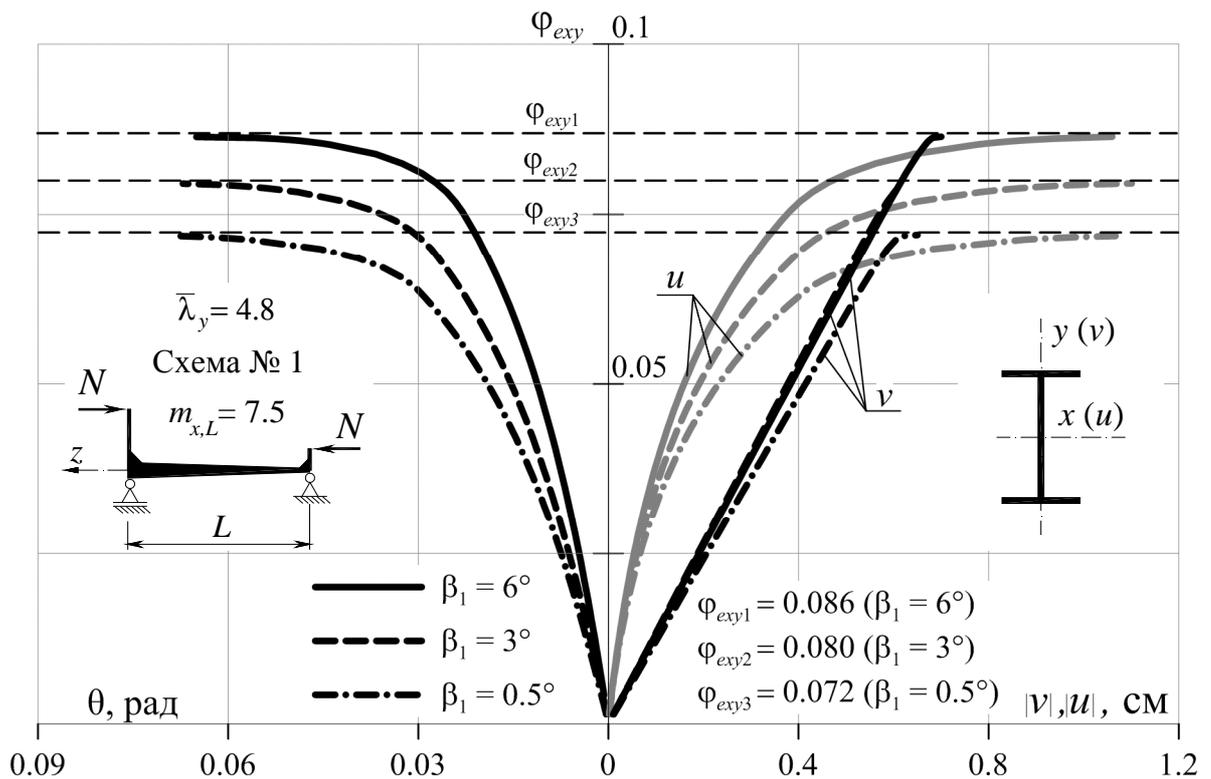


Рисунок 3.13. Перемещения и углы закручивания среднего сечения стержня при различных углах наклона поясов

Исследование пространственной устойчивости стержней φ_{exy} , нагруженных по различным схемам в зависимости от угла наклона поясов β_1 при изменении

гибкости $\bar{\lambda}_y$ показано на графиках Рисунка 3.14 и 3.15. Для удобства чтения кривые для малого значения эксцентриситета ($m_{x,L}=1.5$) приведены на графиках слева, для среднего и большого значений ($m_{x,L}=7.5$ и $m_{x,L}=15$) – справа.

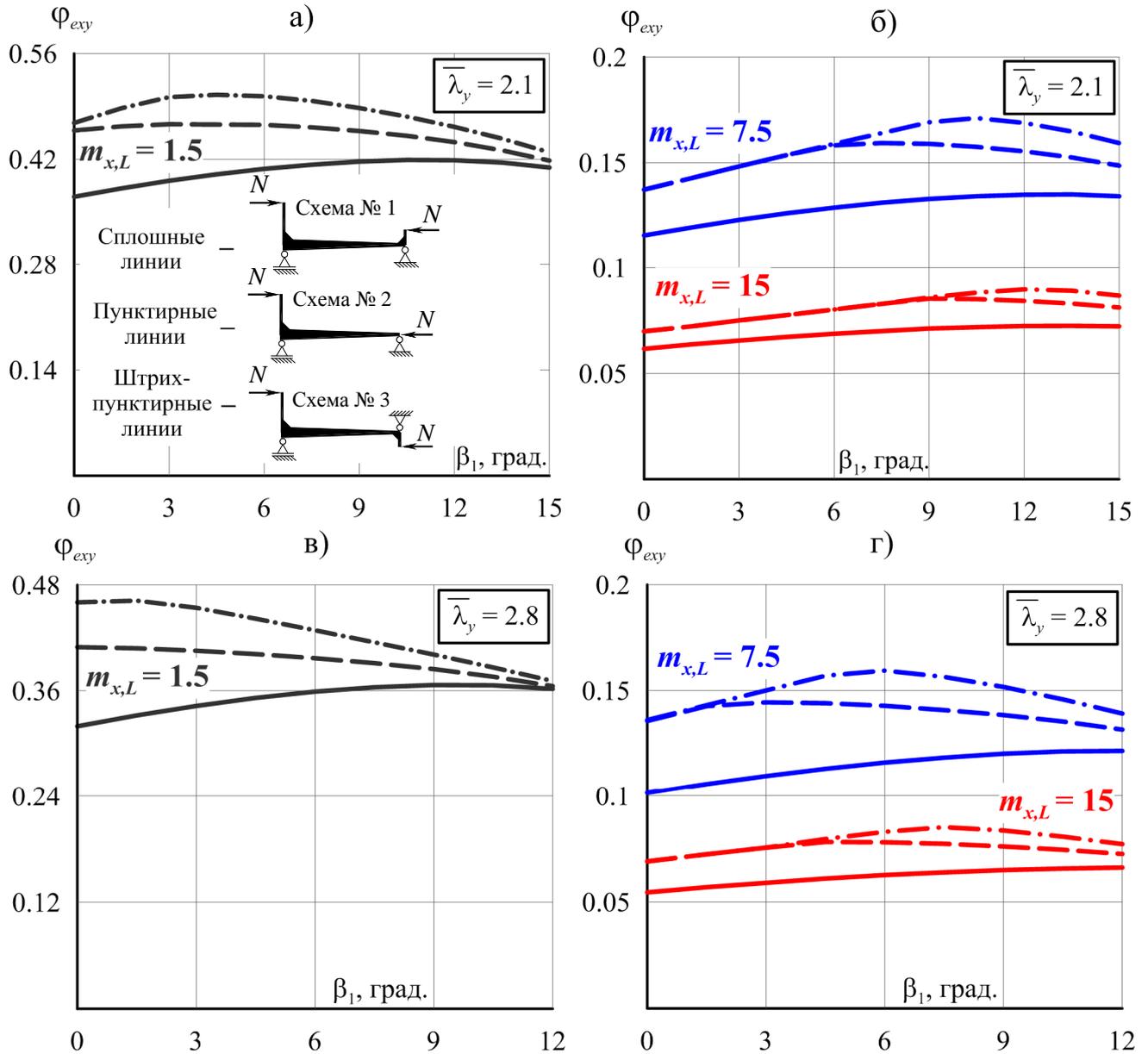


Рисунок 3.14. Коэффициенты φ_{ey} в зависимости от угла наклона поясов β_1 для стержней с гибкостью $\bar{\lambda}_y = 2.1$ и 2.8

Следует повторить, что все рассмотренные на графиках стержни равной длины (гибкости) имеют одинаковый расход стали.

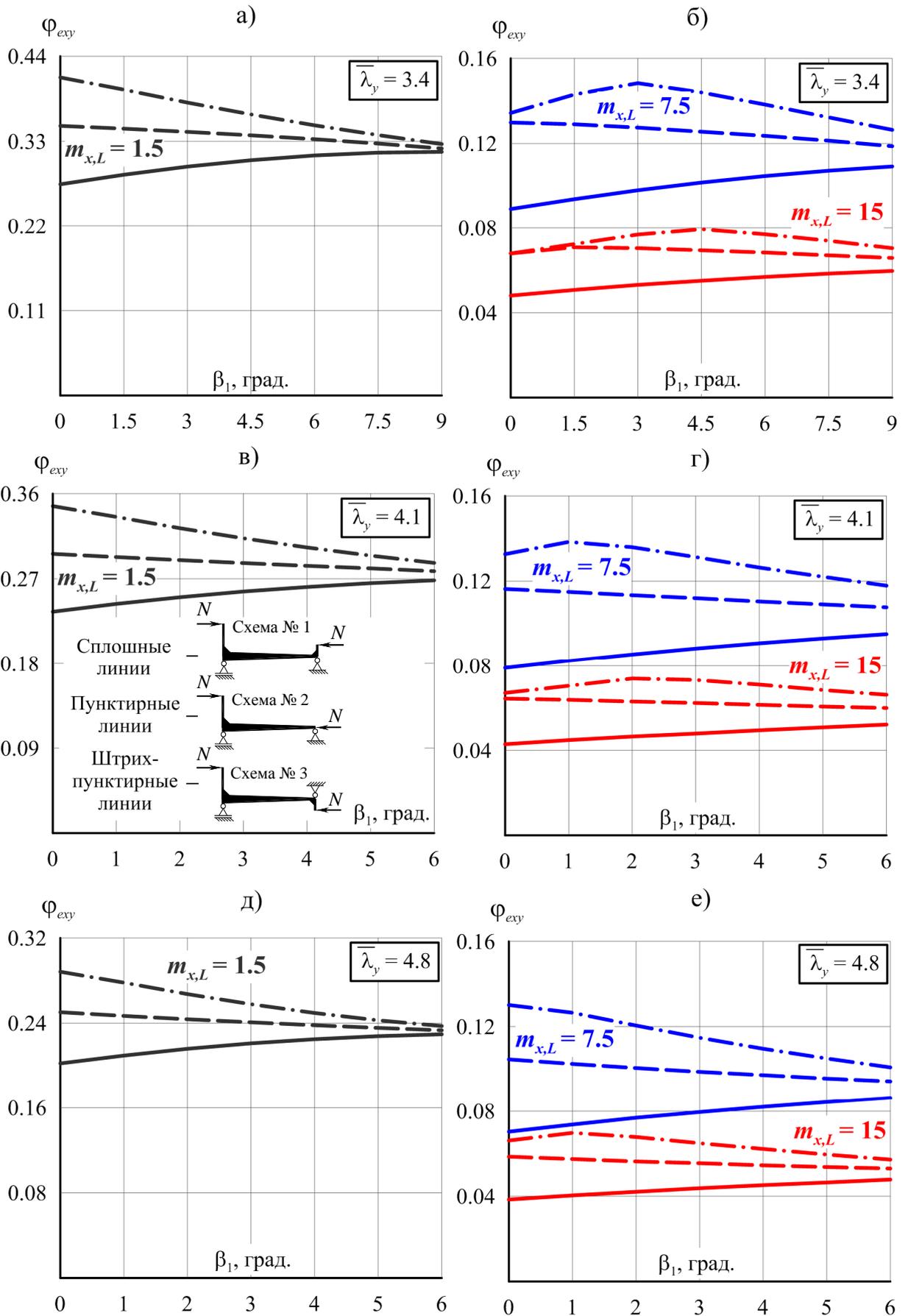


Рисунок 3.15. Коэффициенты φ_{eyx} в зависимости от угла наклона поясов β_1 для стержней с гибкостью $\bar{\lambda}_y = 3.4...4.8$

Анализируя представленные на Рисунке 3.14 и 3.15 графики, можно выявить следующие тенденции в устойчивости стержней:

1. В целом, как уже было указано в предыдущем параграфе, устойчивость зависит от схемы загрузки: устойчивость стержней максимальна при схеме загрузки продольной силой с разносторонними эксцентриситетами (Схема № 3). Меньшей устойчивостью обладают стержни, загруженные по схеме, при которой к меньшему сечению прикладывается продольная сила без эксцентриситета, т.е. $e_{y,0} = 0$ (Схема № 2). И, наконец, наихудший вариант загрузки – при приложении продольной силы с односторонними эксцентриситетами (Схема № 1).

2. При загрузении по схеме односторонними эксцентриситетами (Схема № 1) устойчивость для всех рассмотренных случаев, в целом, повышается при увеличении угла наклона поясов.

3. При загрузениях по Схеме № 2 и 3 в случаях малого эксцентриситета ($m_{x,L} = 1.5$) устойчивость снижается, причем снижение для Схемы № 3 носит более ярко выраженный характер. При среднем и большом эксцентриситете ($m_{x,L} = 7.5$ и $m_{x,L} = 15$) для большинства рассмотренных стержней выявлена следующая тенденция: до определенного угла наклона устойчивость возрастает, а затем снижается (как и в случае малого эксцентриситета). Таким образом, может быть выявлен угол наклона поясов, при котором устойчивость достигает своего максимального значения (к примеру, для стержня $\bar{\lambda}_y = 3.4$, показанного на Рисунке 3.15б, при загрузении по Схеме № 3 при $m_{x,L} = 7.5$ такой угол наклона составляет 3°). Значение этого угла для стержней переменной жесткости зависит от их геометрии, уровня и схемы загрузки, соотношения концевых эксцентриситетов.

4. Снижение абсолютного соотношения концевых эксцентриситетов (при увеличении угла наклона поясов β_1) приводит к тому, что при наклоне поясов, близком к предельному для определенной гибкости, различия φ_{exy} при 3-х схемах становятся наименьшими.

В целом, с помощью разработанного метода расчета можно быстро и эффективно подбирать угол наклона поясов двутавровых элементов переменной жесткости таким образом, чтобы полученное распределение материала по длине стержня наилучшим образом соответствовало действующим в раме усилиям, а также выявлять угол наклона, при котором устойчивость может достигать своего максимального значения.

Ввиду того, что рассмотренные схемы загрузки значительно влияют на устойчивость, в рамках данного исследования также произведено сравнение предельных сил для Схем загрузки № 2 и 3 относительно Схемы № 1. Полученные превышения сведены в Таблицу 3.1.

Таблица 3.1. Превышение устойчивости относительно Схемы № 1, %

$\bar{\lambda}_y$	$m_{x,L}$	β_1									
		3°		6°		9°		12°		15°	
		Для Схемы		Для Схемы		Для Схемы		Для Схемы		Для Схемы	
		№ 2	№ 3	№ 2	№ 3	№ 2	№ 3	№ 2	№ 3	№ 2	№ 3
2.1	1.5	19.1	28.3	14.3	23.6	9.7	17	5.7	10.5	2.3	5.0
	7.5	20.6	20.6	22.9	23.5	19.6	27.2	15.2	25.2	10.7	18.8
	15	14.5	14.5	16.7	16.7	19.8	20.6	16.4	23.9	12.4	20.1
2.8	1.5	18.3	32.5	10.5	19.3	4.9	9.4	0.9	2.5	–	–
	7.5	31.9	37	23.2	37.5	15.3	26.3	8.3	14.5	–	–
	15	28	28	24.6	32.4	17	28.6	9.7	16.7	–	–
3.4	1.5	15	27.8	6.7	12.5	1.4	3.1	–	–	–	–
	7.5	30.1	51.4	18	32	8.7	15.7	–	–	–	–
	15	32.6	44.7	20.1	35.4	10.3	18	–	–	–	–
4.1	1.5	11.8	22	3.6	6.9	–	–	–	–	–	–
	7.5	26.9	48.8	13.2	24	–	–	–	–	–	–
	15	30	52.8	15	27.1	–	–	–	–	–	–
4.8	1.5	8.9	16.6	1.6	3.3	–	–	–	–	–	–
	7.5	24.1	44.3	9.1	16.7	–	–	–	–	–	–
	15	26.8	48.2	10.8	19.6	–	–	–	–	–	–

Как видно из Таблицы 3.1 максимальные превышения характерны для меньших углов наклона поясов. Это связано с тем, что с увеличением угла

наклона поясов β_1 (и соответственно, уменьшением высоты меньшего сечения), эксцентриситеты $e_{y,0}$ снижаются, что, в свою очередь, снижает различие между схемами загрузки. Последнее, как раз, и выражается в низких значениях превышений относительно схемы с односторонними эксцентриситетами (Схемы № 1).

Кроме того наблюдается следующая тенденция: чем больше значение относительного эксцентриситета, тем больше величина превышения. Так, для стержня $\bar{\lambda}_y = 3.4$ с углом наклона поясов $\beta_1 = 9^\circ$, превышение, полученное при $m_{x,L} = 15$, примерно в 7.4 и 5.8 раз больше (для Схемы № 2 и 3, соответственно), чем величины, полученные при $m_{x,L} = 1.5$.

Если по данным Таблицы 3.1 проанализировать превышение устойчивости для рассмотренных стержней с умеренным наклоном поясов (3° и 6°), то можно заметить, что для стержней с наклоном $\beta_1 = 3^\circ$ среднее его значение составляет 22.6% и 34.5% для Схем загрузки № 2 и 3, соответственно, а для стержней с наклоном $\beta_1 = 6^\circ$: 14% и 22%, соответственно. Указанные углы наклона поясов могут быть отнесены к широкому кругу элементов рамных конструкций переменной жесткости, применяемых на практике.

Как видно по приведенным результатам, расчет по фактической схеме загрузки стержня, а не по наихудшей (по схеме загрузки с односторонними эксцентриситетами), может приводить к существенному увеличению устойчивости элемента, что на практике выражается в снижении материалоемкости рамной конструкции.

Разработанный метод позволяет производить расчеты стержней переменной жесткости на пространственную устойчивость при различных схемах приложения продольной силы быстро и эффективно, таким образом, приводя к важным с практической точки зрения результатам.

3.5.3. Пространственные деформации и устойчивость при различных углах наклона и сужения поясов

Для демонстрации возможностей разработанного метода расчета на пространственные деформации и устойчивость стержней переменной жесткости, также было произведено исследование двутавров гибкостью $\bar{\lambda}_y = 4.1$, у которых изменялась как высота стенки, так и ширина поясов. Следует напомнить, что все стержни, рассмотренные в данном параграфе имеют одинаковую массу.

В качестве примера, на Рисунке 3.16 представлены пространственные деформации среднего сечения стержней с углом наклона поясов 3° , при этом сужение поясов принималось по трем вариантам: 0° (постоянная ширина), 1.5° и 3° .

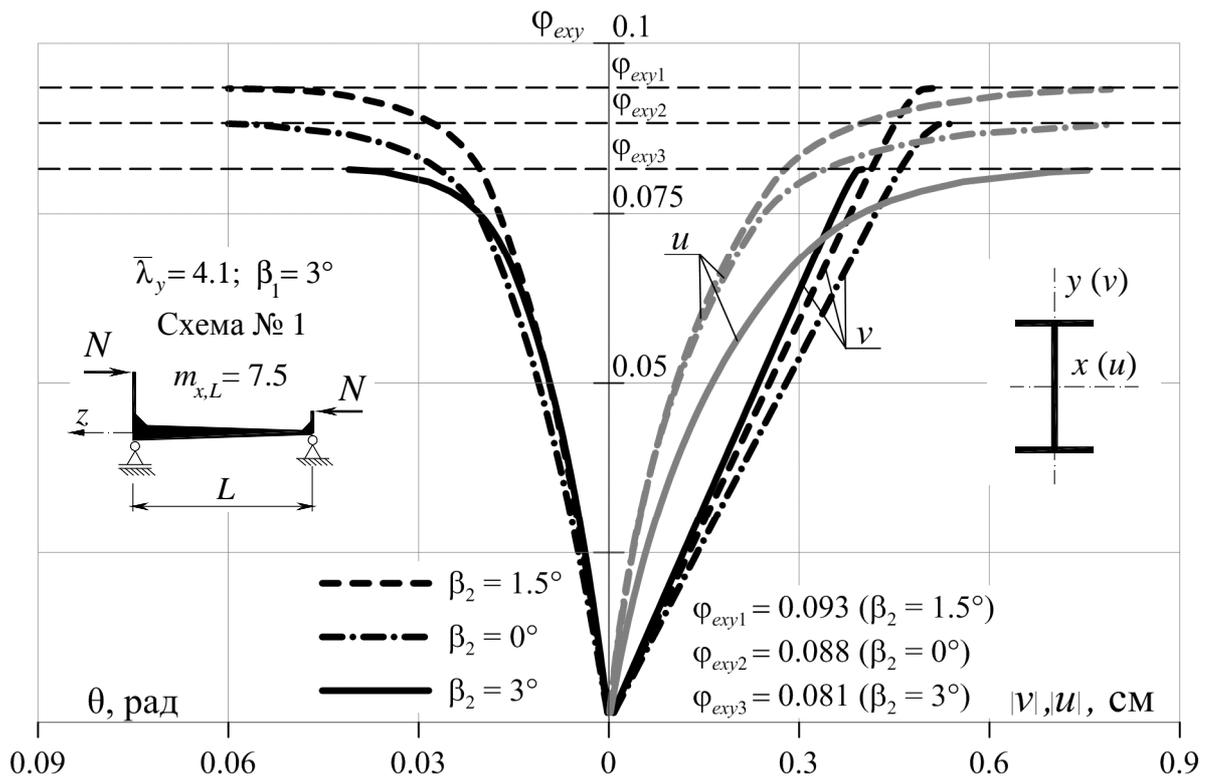


Рисунок 3.16. Перемещения и углы закручивания среднего сечения стержней переменной высоты при различных углах сужения поясов

Из Рисунка 3.16 видно, что для представленного стержня использование полок переменной ширины не всегда приводит к увеличению устойчивости стержней. Так, в случае угла сужения полок $\beta_2 = 1.5^\circ$ можно достичь увеличения

устойчивости на 5.4% относительно стержня постоянной ширины ($\beta_2 = 0^\circ$), однако при угле сужения полков $\beta_2 = 3^\circ$, наоборот, происходит потеря в устойчивости на 8% относительно стержня постоянной ширины.

Коэффициенты φ_{exy} для всего ряда рассмотренных стержней гибкостью $\bar{\lambda}_y = 4.1$ с переменной шириной поясов представлены на графиках Рисунка 3.17а (при наклоне поясов $\beta_1 = 3^\circ$) и 3.17б (при наклоне поясов $\beta_1 = 6^\circ$). Угол сужения поясов β_2 рассматривался в диапазоне от 0 до 3° .

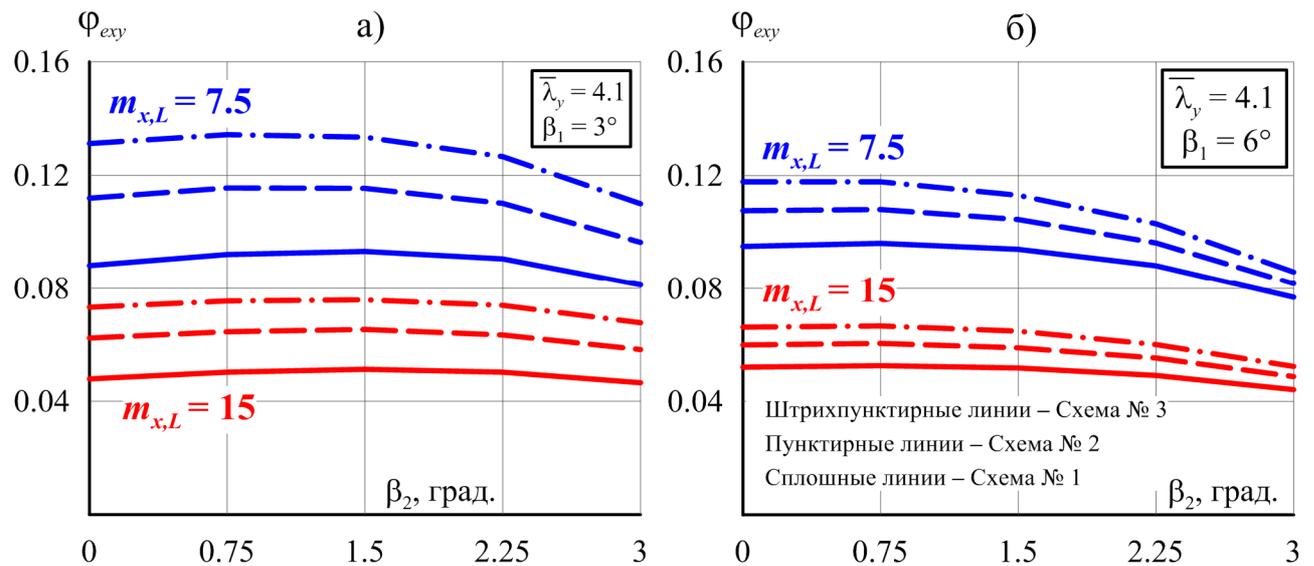


Рисунок 3.17. Коэффициенты φ_{exy} для стержней с гибкостью $\bar{\lambda}_y = 4.1$ в зависимости от угла сужения поясов β_2

На основании приведенных графиков можно сделать следующие выводы:

1. В стержнях с умеренным наклоном поясов (в данном случае 3°), нагруженных продольной силой со средним и большим эксцентриситетами ($m_{x,L} = 7.5$ и $m_{x,L} = 15$), варьированием степенью сужения поясов можно добиться увеличения устойчивости. Например, для стержня с углом наклона поясов $\beta_1 = 3^\circ$ (Рисунок 3.17а) и углом сужения $\beta_2 = 1.5^\circ$ при эксцентриситете $m_{x,L} = 15$ происходит увеличение устойчивости на 6.7%, 4.7%, 6.6% (для Схемы № 1, 2, 3, соответственно) относительно такого же стержня с наклоном поясов, но постоянной ширины. С последующим увеличением сужения поясов устойчивость снижается. Следовательно, можно сделать вывод, что для стержней с умеренным

изменением высоты существует определенный угол сужения поясов, при котором можно добиться максимальной устойчивости.

2. В случае стержней с изначально существенным наклоном поясов (в данном случае 6°), происходит снижение устойчивости с ростом угла сужения поясов при всех эксцентриситетах и схемах загрузки. Это происходит по причине резкого, непропорционального снижения всех геометрических характеристик по длине стержня. Так, для стержня с наклоном поясов $\beta_1=6^\circ$ и сужением $\beta_2=3^\circ$ (Рисунок 3.17б), загруженного по Схеме № 2 при $m_{x,L}=7.5$, коэффициент ϕ_{exy} на 24% ниже, чем для такого же стержня постоянной ширины.

В целом, исследование стержней гибкостью $\bar{\lambda}_y = 4.1$ показало, что двутавры, у которых меняется как высота стенки, так и ширина поясов, могут давать некоторое преимущество в виде увеличения устойчивости относительно таких же стержней, но у которых изменяется только высота, а ширина остается постоянной. Однако увеличения устойчивости можно достичь только в случае использования небольших углов сужения полок при определенных схемах загрузки.

Для рассматриваемых стержней также были исследованы превышения предельной силы для загрузок по Схеме № 2 и 3 относительно Схемы № 1. Результаты сравнительного исследования стержней с различными геометрическими параметрами приведены в Таблице 3.2 (там же приведены результаты исследования стержней с постоянной шириной поясов). Из Таблицы 3.2 видно, что для стержней с переменной шириной и высотой соблюдаются те же принципы в превышениях устойчивости по Схемам загрузки № 2 и 3 относительно Схемы № 1, что и для стержней с постоянной шириной (Параграф 3.5.2). Следует отметить также, что с увеличением угла сужения поясов β_2 превышения снижаются. Это объясняется тем же фактом, что и для стержней с постоянной шириной: чем больше угол сужения, тем меньше эксцентриситет на меньшем сечении и, следовательно, тем меньше разница в предельных силах между схемами загрузки.

Таблица 3.2. Превышение устойчивости относительно Схемы № 1, %

$\bar{\lambda}_y$	β_2	$m_{x,L}$	β_1			
			3°		6°	
			Для Схемы		Для Схемы	
			№ 2	№ 3	№ 2	№ 3
4.1	0°	7.5	26.9	48.8	13.2	24
		15	30	52.8	15	27
	1.5°	7.5	23.8	43.1	11.1	20.2
		15	27.5	48	13.7	25.1
	3°	7.5	18.8	35.5	6.4	11.8
		15	25.2	45.6	10.4	18.7

Ввиду многообразия геометрических параметров и их комбинаций для двутавровых стержней с переменной шириной и высотой, охватить в исследовании широкий диапазон размеров элементов, которые могут быть применены на практике, не представляется возможным, поэтому представлено исследование стержней одной гибкости для демонстрации возможностей разработанного метода расчета.

Следует отметить, что разработанный метод расчета дает возможность исследовать стержни с изменением по длине любых размеров (вплоть до толщины полок и стенки), что на практике позволяет быстро и эффективно компоновать геометрию стержня таким образом, чтобы максимально соответствовать действующим в раме усилиям и иным заранее заданным исходным данным.

3.5.4. Пространственные деформации и устойчивость при стеснении деформации торцевых сечений

В рамках переменной жесткости, как уже отмечалось, часто принимается шарнирное опирание стоек на фундамент, при этом стойки имеют жесткий фланцевый стык с ригелем в карнизном узле. В то же время ригели переменной жесткости могут иметь жесткие фланцевые стыки с обоих торцов. При таких конструктивных решениях имеет смысл учитывать в расчетах на пространственную устойчивость стеснение деформации торцевых сечений с целью выявления резервов устойчивости таких элементов.

На Рисунке 3.18 показаны пространственные перемещения среднего сечения стержня гибкостью $\bar{\lambda}_y = 4.1$ с наклоном поясов $\beta_1 = 6^\circ$, нагруженного продольной силой с односторонними эксцентриситетами (Схема № 1). Видно, что при полном стеснении деформации опорных сечений устойчивость повышается на 23.2%, а при полном стеснении деформации только большего сечения – на 15.8%.

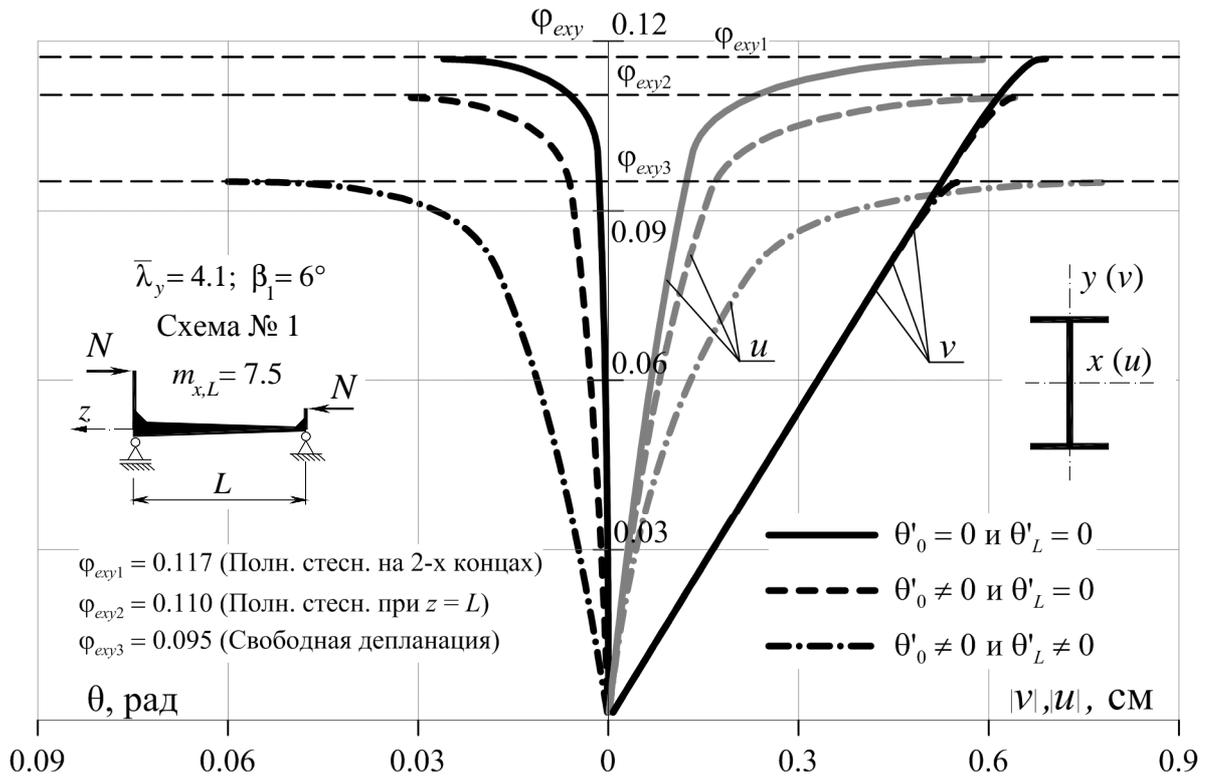


Рисунок 3.18. Перемещения и углы закручивания среднего сечения стержня при различных случаях стеснения деформации торцов

На практике, стеснение деформации торцов зависит от геометрии стержней, толщины опорных пластин и траверс, препятствующих деформации опорных сечений, поэтому в каждом отдельно взятом случае резервы устойчивости должны выявляться индивидуально, что может быть сделано с помощью разработанного метода расчета.

3.6. Сравнительное исследование пространственных деформаций и устойчивости стержней постоянного и переменного сечения равной массы

3.6.1. Сравнительное исследование стержней с переменной и постоянной высотой равной массы

С целью выявления экономии при использовании двутавровых элементов с линейно-изменяющейся высотой стенки и/или шириной поясов в рамных конструкциях, были произведены расчеты стержней переменного и постоянного сечения равной массы по 3-м схемам загрузки. Поперечное сечение призматических стержней принималось как среднее по длине сечение, которое было принято одинаковым для всех стержней переменной жесткости (Рисунок 3.10б).

Загружение призматических стержней продольной силой происходило с теми же эксцентриситетами, что были получены при расчетах стержней переменной жесткости. К примеру, загрузка призматического стержня при его сравнении со стержнем переменной жесткости с гибкостью $\bar{\lambda}_y = 4.8$, углом наклона поясов 6° и относительным эксцентриситетом $m_{x,L} = 7.5$ показано на Рисунке 3.19.

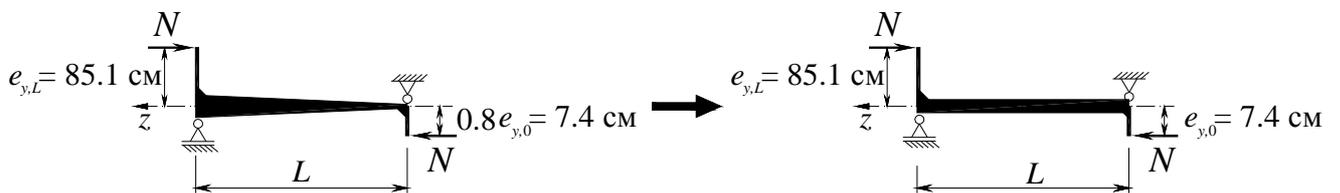


Рисунок 3.19. Пример загрузки призматического стержня (справа) при его сравнении со стержнем переменной жесткости (слева)

Эксцентриситеты продольной силы из плоскости действия момента e_x принимались единые, т.к. геометрические характеристики, входящие в (3.2), для стержней переменной и постоянной жесткости равной массы одинаковы.

Пространственные деформации среднего по длине сечения призматического и конического стержней представлены на графиках Рисунка 3.20. Сплошные линии соответствуют стержню переменного сечения, пунктирные – стержню постоянного сечения. Видно, что устойчивость стержня с наклоном поясов $\beta_1=6^\circ$ на 30.8% выше, чем у призматического.

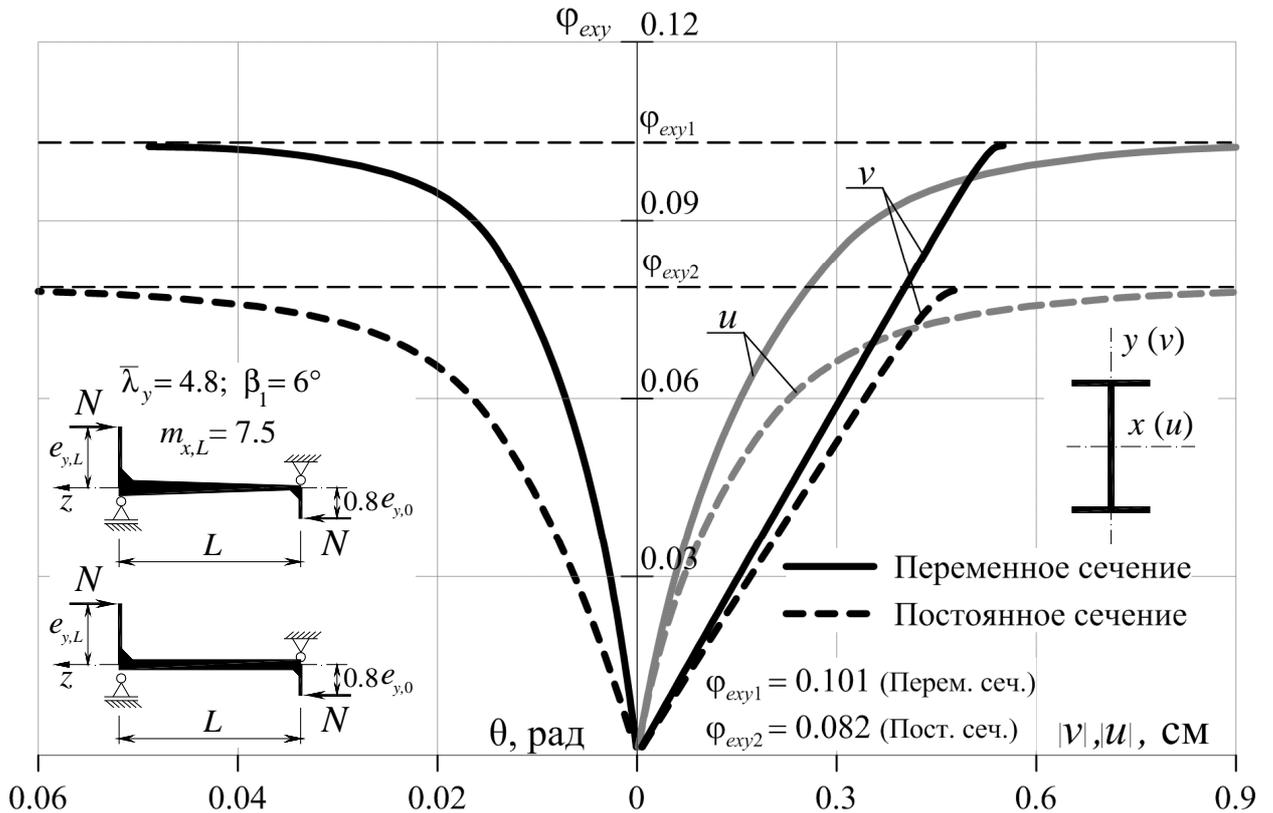


Рисунок 3.20. Перемещения и углы закручивания среднего сечения стержней постоянной и переменной жесткости равной массы

На графиках Рисунка 3.21 представлены зависимости коэффициентов пространственной устойчивости стержней переменной и постоянной жесткости от схемы нагружения и гибкости. Слева представлены кривые при сравнении со стержнями с наклоном поясов 3° , справа – с наклоном 6° . Сплошные линии на графиках соответствуют стержням переменного сечения, пунктирные – постоянного.

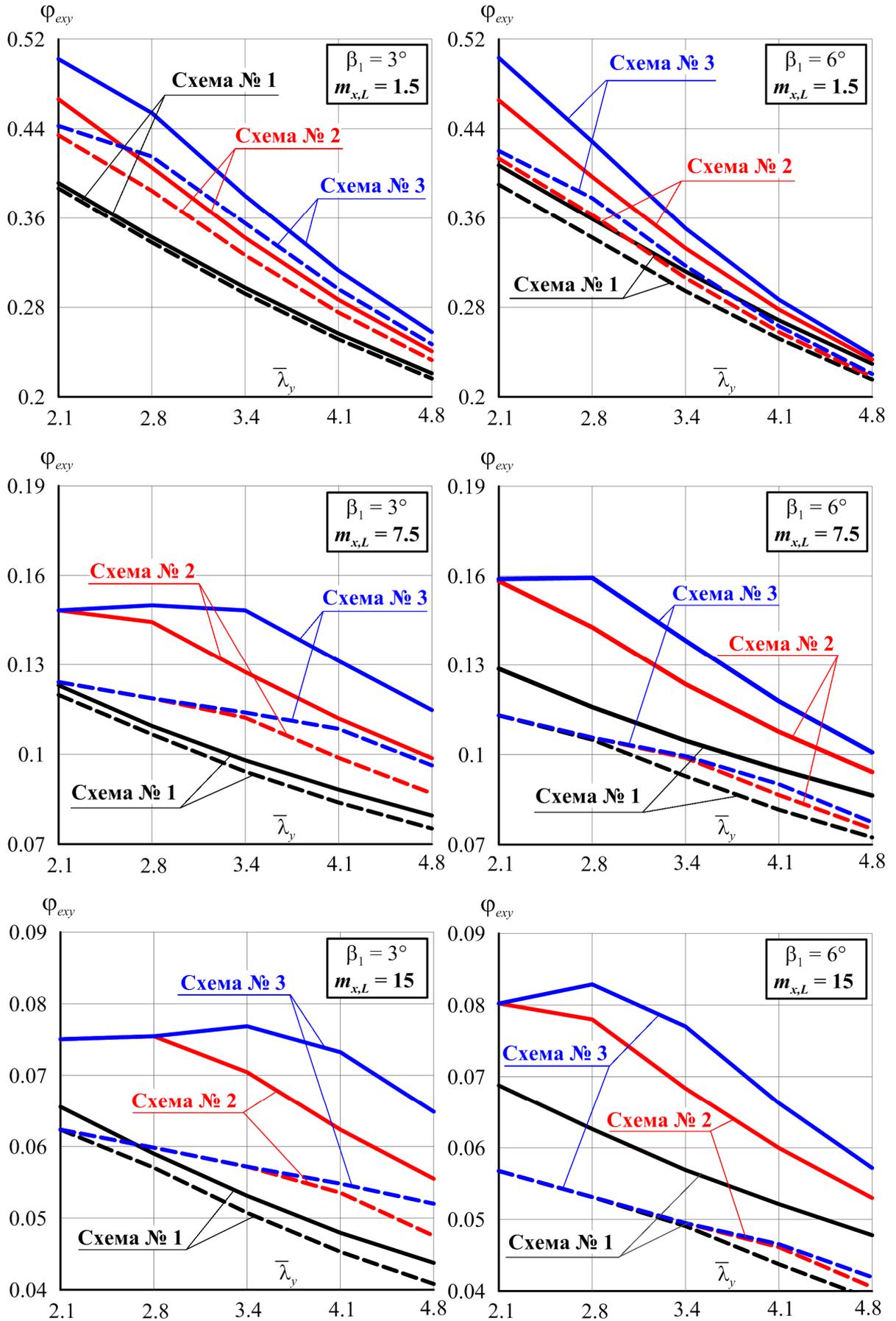


Рисунок 3.21. Коэффициенты φ_{eyx} для стержней переменной (сплошные линии) и постоянной (пунктирные линии) высоты равной массы

Как видно из графиков, во всех случаях кривые коэффициентов устойчивости φ_{exy} для призматических стержней (пунктирные линии) лежат ниже аналогичных кривых, построенных для стержней переменной жесткости (сплошные линии). В некоторых случаях кривые для призматических стержней совпадают. Это объясняется тем, что стержни малой гибкости, нагруженные очень большими эксцентриситетами (для их сечения), теряют прочность. Очевидно, что использование стержней переменной жесткости наиболее выгодно там, где имеются большие эксцентриситеты. При этом, большему углу наклона поясов соответствует большее увеличение коэффициента устойчивости.

Исследования стержней с другими углами наклона поясов показали также, что их устойчивость превосходит устойчивость стержней постоянной жесткости равной массы.

На Рисунке 3.22 приведены диаграммы повышения устойчивости стержней гибкостью $\bar{\lambda}_y = 3.4$ с переменной высотой относительно стержней с постоянной жесткостью при различных схемах загрузки.

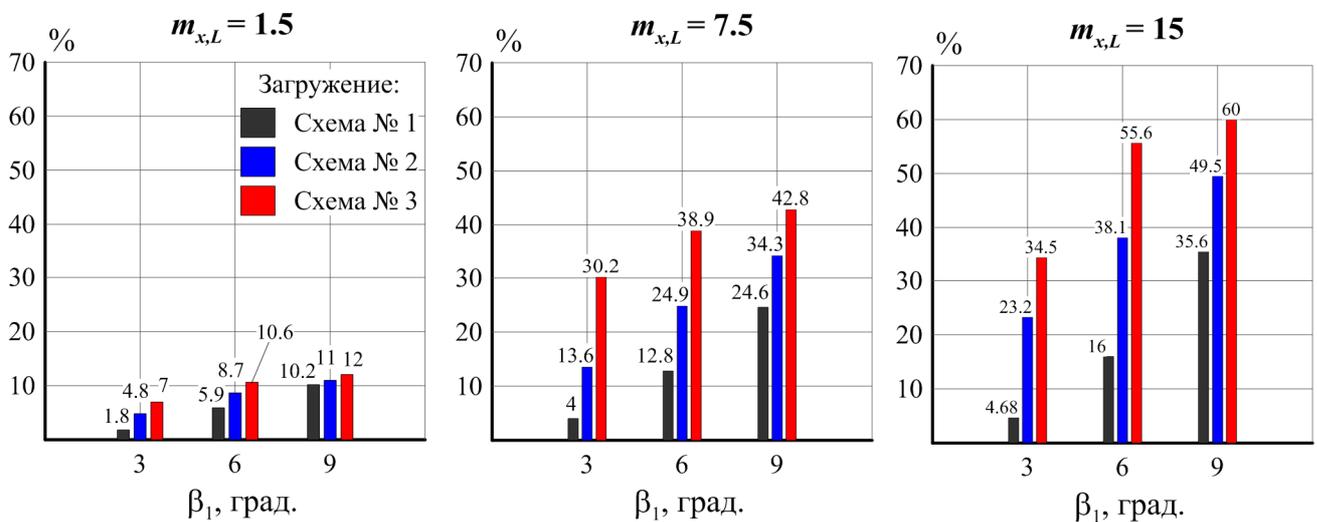


Рисунок 3.22. Повышение устойчивости стержня гибкостью $\bar{\lambda}_y = 3.4$ с переменной высотой относительно стержня постоянного сечения равной массы

Из диаграмм видно, что повышение устойчивости тем значительней, чем выше значение каждого из факторов (эксцентриситета, угла наклона, схемы загрузки). Максимальные преимущества стержней с переменной жесткостью можно получить, когда они имеют большой наклон поясов при загрузении

продольной силой со значительным эксцентриситетом $m_{x,L}$ по схеме с разносторонними эксцентриситетами (Схема № 3).

Повышение устойчивости стержней с переменной высотой для всех рассмотренных случаев сведено в Таблицу 3.3.

Таблица 3.3. Повышение устойчивости относительно стержней постоянного сечения, %

$\bar{\lambda}_y$	$m_{x,L}$	β_1														
		3°			6°			9°			12°			15°		
		Схема			Схема			Схема			Схема			Схема		
		№1	№2	№3	№1	№2	№3	№1	№2	№3	№1	№2	№3	№1	№2	№3
2.1	1.5	1.3	7.4	13.5	4.4	12.6	19.8	8.4	15.8	22	12	17.1	21.6	13.1	15.4	18.1
	7.5	2.7	19.5	19.5	13.8	39.9	40.5	28	53	62.9	39.7	60.9	74.8	49.3	65.3	77.3
	15	5.2	20.4	20.4	21.2	41.4	41.4	37.5	64.7	65.8	50.6	75.3	86.6	60.6	80.4	92.9
2.8	1.5	1.4	5.5	9.4	4.9	9.4	13.4	8.7	11.8	14.7	11	11.7	12.9	–	–	–
	7.5	2.6	21.7	26.4	10.4	35.1	50.8	25.6	44.7	58.6	39	50.6	59.2	–	–	–
	15	3.4	26.2	26.2	17.9	46.8	56.1	36	59.1	74.3	52.6	67.4	78.1	–	–	–
3.4	1.5	1.8	4.8	7	5.9	8.7	10.6	10.2	11	12	–	–	–	–	–	–
	7.5	4	13.6	30.2	12.8	24.9	38.9	24.6	34.3	42.8	–	–	–	–	–	–
	15	4.7	23.2	34.5	16	38.1	55.6	35.6	49.5	60	–	–	–	–	–	–
4.1	1.5	2	4.1	5.6	6.5	7.8	9	–	–	–	–	–	–	–	–	–
	7.5	5.2	13.3	21	16.4	24.4	30.7	–	–	–	–	–	–	–	–	–
	15	5.9	16.4	33.7	19.2	30	42.3	–	–	–	–	–	–	–	–	–
4.8	1.5	2.1	3.4	4.4	6.6	7.1	7.6	–	–	–	–	–	–	–	–	–
	7.5	5.8	13.5	19.2	19.3	25.3	30.1	–	–	–	–	–	–	–	–	–
	15	7.2	16.8	24.7	23	36.9	36.3	–	–	–	–	–	–	–	–	–

Как видно из значений, представленных в Таблице 3.3, наибольшие повышения получены для стержня $\bar{\lambda}_y = 2.1$ с наклоном поясов 15° и относительным эксцентриситетом $m_{x,L} = 15$. При этом максимальное значение в 92.9% из этого ряда соответствует загрузению с разносторонними эксцентриситетами (Схема № 3). Такие высокие значения получаются из-за того, что призматические стержни с малой гибкостью загружаются очень значительными для их сечения эксцентриситетами. Например, для указанного стержня гибкостью $\bar{\lambda}_y = 2.1$ относительный эксцентриситет $m_{x,L} = 15$ «перенесенный» на поперечное сечение призматического стержня равен 23, при

котором стержни постоянного сечения теряют прочность как изгибаемые элементы.

Если определить повышение устойчивости для рассмотренных стержней с умеренным наклоном поясов (3° и 6°), имеющих широкое применение в рамных конструкциях, то для стержней с наклоном $\beta_1 = 3^\circ$ среднее значение составляет 3.7% для Схемы № 1, 14% для Схемы № 2, 19.7% для Схемы № 3; для стержней с наклоном $\beta_1 = 6^\circ$: 13.2%, 25.9% и 32.2%, соответственно.

Таким образом, использование в порталных рамах элементов с переменной жесткостью вместо призматических позволяет значительно снизить материалоемкость конструкций. Разработанный метод расчета дает возможность получить оптимальные параметры стержневых элементов рам переменной жесткости в зависимости от сочетания следующих факторов: схемы загрузки, величины эксцентриситетов, угла наклона поясов, гибкости.

3.6.2. Сравнительное исследование стержней с переменной шириной и высотой равной массы

С целью выявления возможных преимуществ при изменении в рассматриваемых стержнях не только высоты стенки, но и ширины поясов было произведено дополнительное исследование.

Для этого было выполнено сравнение устойчивости стержней гибкостью $\bar{\lambda}_y = 4.1$ с переменной высотой и шириной поясов относительно тех же стержней, но с постоянной шириной поясов. Следует напомнить, что все стержни, рассмотренные в данном параграфе, имели одинаковую массу.

Результаты сравнения устойчивости представлены на диаграммах Рисунка 3.23 (слева представлены диаграммы для среднего значения эксцентриситета $m_{x,L} = 7.5$, справа – для большого значения $m_{x,L} = 15$).

На основании приведенных диаграмм можно сделать вывод о том, что рассмотренные стержни с переменной высотой и шириной в определенных случаях могут давать дополнительные преимущества в виде увеличения

устойчивости по сравнению со стержнями с постоянной шириной поясов. Однако, такого увеличения можно добиться только при определенной схеме загрузки, и только в случае умеренного изменения жесткости по длине. К примеру, стержень с наклоном $\beta_1=3^\circ$ и сужением поясов $\beta_2=1.5^\circ$, загруженный по схеме с разносторонними эксцентриситетами (Схема № 3) при $m_{x,L} = 15$, обладает устойчивостью почти на 20% выше, чем такой же стержень, но с поясами постоянной ширины. Для стержней с резким изменением жесткости по длине (наклон $\beta_1=6^\circ$ и сужение поясов $\beta_2=3^\circ$), наоборот, происходит снижение устойчивости до 20% при любых схемах загрузки и эксцентриситетах.

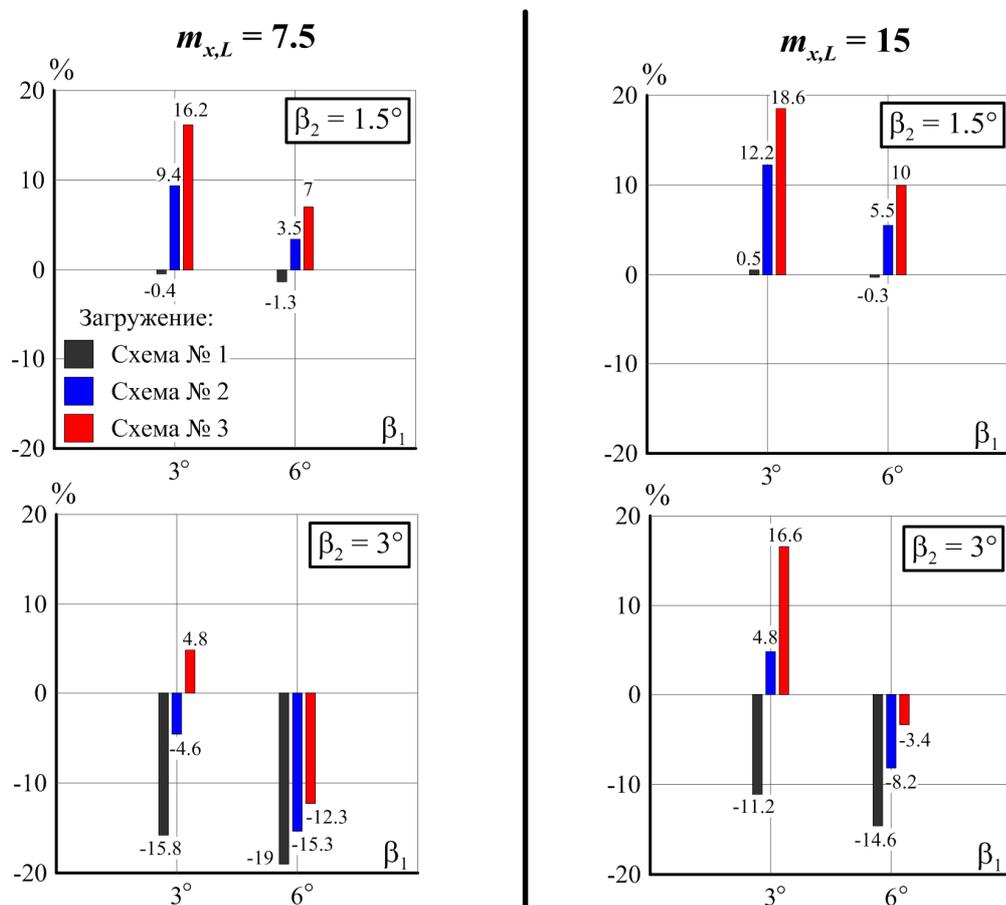


Рисунок 3.23. Сравнение устойчивости стержней гибкостью $\bar{\lambda}_y = 4.1$ переменной высоты и ширины со стержнями равного веса переменной высоты и постоянной ширины

В целом, варьированием угла сужения и/или наклона поясов можно добиться максимального значения устойчивости среди стержней равной массы. Однако, ввиду большого количества параметров в геометрии таких стержней, такую задачу следует решать в случае заранее определенного при проектировании

диапазона исходных данных. Разработанный метод расчета на пространственную устойчивость позволяет решать такого рода задачи на практике быстро и эффективно.

3.7. Инженерная методика расчета

Использование разработанного метода расчета в инженерной практике представляется весьма затруднительным, поэтому предлагается производить расчет на пространственную устойчивость внецентренно-сжатых и сжато-изгибаемых в плоскости стенки элементов рам переменной жесткости (постоянной ширины) по следующей формуле:

$$\frac{N}{K_{exy} \varphi_{exy} A_{mid}} \leq \gamma_c R_y, \quad (3.72)$$

где φ_{exy} – коэффициент, зависящий от относительного эксцентриситета $m_{x,L}$ приложения продольной силы N к большему сечению, средней условной гибкости $\bar{\lambda}_y^{mid}$, угла взаимного наклона поясов β_1 , соотношения радиусов инерции среднего сечения $\frac{i_y^{mid}}{i_x^{mid}}$; K_{exy} – коэффициент, учитывающий схему загрузки элемента (т.е. соотношение концевых эксцентриситетов); A_{mid} – площадь среднего по длине элемента поперечного сечения; R_y – расчетное сопротивление стали; γ_c – коэффициент условий работы элемента.

Как можно заметить, предложенная формула проверки на устойчивость (3.72), сведена к общепринятой форме, представленной в Нормах [89] для стержней постоянной жесткости.

Предложенная формула (3.72) применяется для стержней с шарнирным опиранием в главных плоскостях и закреплением торцевых сечений от кручения. Для перехода к такой модели необходимо выделить элемент из конструкции рамы по расчетной длине из плоскости действия нагрузок $l_{ef,y}$. Затем с помощью деформационного расчета рамы в её плоскости при упругой работе материала от

наихудшего сочетания нагрузок (Рисунок 3.3) определить концевые эксцентриситеты продольной силы (3.1). При этом для расчета по пространственной схеме необходимо также учитывать односторонние равные случайные эксцентриситеты, вычисляемые по (3.2).

В связи с трудоемкостью учета стеснения депланации торцевых сечений в практических расчетах, в (3.72) принята свободная депланация, что дает некоторый запас пространственной устойчивости, который в некоторых случаях может быть учтен коэффициентом условий работы.

Коэффициенты φ_{exy} вычислялись для схемы нагружения с односторонними эксцентриситетами. Коэффициенты K_{exy} получены для двух дополнительных схем нагружения: одна – при равенстве нулю изгибающего момента на меньшем сечении, вторая – при нагружении с разносторонними эксцентриситетами. При всех трех схемах нагружения, принятых в инженерной методике, соотношения концевых эксцентриситетов n_x основаны на равенстве фибровых напряжений в опорных сечениях элемента (от действия продольной силы и изгибающего момента). В связи с тем, что максимальное значение n_x зависит от геометрии элемента и в каждом расчетном случае индивидуально, промежуточные значения n_x (как при расчете стержней постоянной жесткости) не рассматривались. Для иллюстрации зависимости коэффициента K_{exy} от n_x для всего возможного диапазона соотношений, на Рисунке 3.25 представлен соответствующий график для конкретного расчетного случая (синие точки на графике при $n_x = 0$ – значения K_{exy} , приведенные в Таблице 3.5; красные точки при $n_x < 0$ – в Таблице 3.6).

Значения φ_{exy} и K_{exy} для стержней гибкостью $\bar{\lambda}_y^{mid} = 2...5$, изготовленных из углеродистых сталей с пределом текучести $R_y = 23.5...25.5 \frac{\text{кН}}{\text{см}^2}$, с уклоном поясов $\beta_1 = 0.5...6^\circ$ приведены в Таблицах 3.4-3.6. График зависимости φ_{exy} от $m_{x,L}$ проиллюстрирован на Рисунке 3.24. Следует пояснить, что при определенных гибкостях и соотношениях радиусов инерции использование

больших углов наклона не всегда возможно, поэтому в представленных таблицах отсутствуют некоторые значения при $\beta_1 = 6^\circ$.

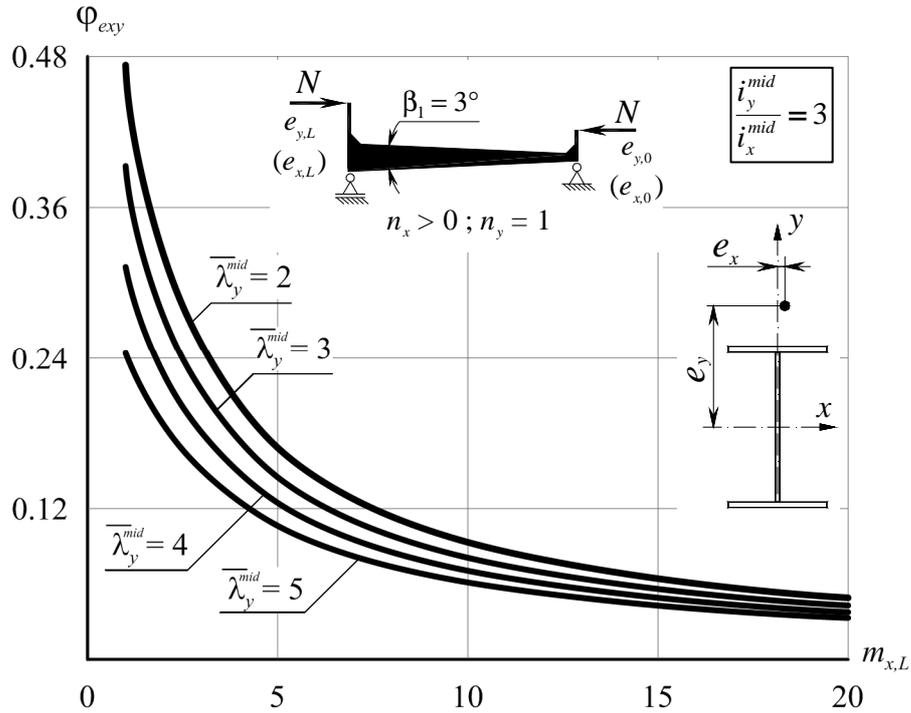


Рисунок 3.24. Зависимость коэффициентов ϕ_{eyx} от значений относительного эксцентриситета на большом сечении $m_{x,L}$ и средней гибкости $\bar{\lambda}_y^{mid}$

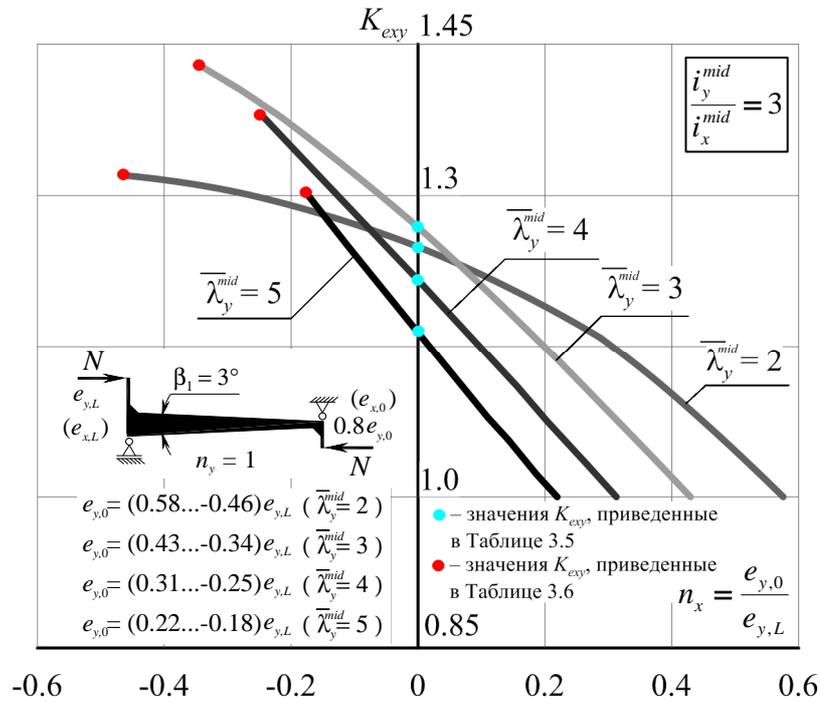


Рисунок 3.25. Зависимость коэффициентов K_{eyx} от соотношения конечных эксцентриситетов и средней гибкости $\bar{\lambda}_y^{mid}$ при $m_{x,L} = 10$

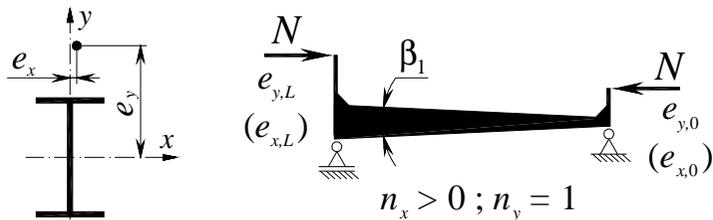


Таблица 3.4. Коэффициенты Φ_{exy} для внецентренно-сжатых шарнирно закрепленных двутавров с переменной высотой с углом взаимного наклона поясов $\beta_1=0.5^\circ$, $\beta_1=3^\circ$ и $\beta_1=6^\circ$, изготовленных из углеродистых сталей с расчетным сопротивлением $R_y = 23.5...25.5 \text{ кН/см}^2$

$\bar{\lambda}_y^{mid}$	$\frac{i_y^{mid}}{i_x^{mid}}$	Относительный эксцентриситет в плоскости большей жесткости большого сечения $m_{x,L}$														
		1			5			10			15			20		
		β_1			β_1			β_1			β_1			β_1		
		0.5°	3°	6°	0.5°	3°	6°	0.5°	3°	6°	0.5°	3°	6°	0.5°	3°	6°
2	2	436	460	467	154	164	171	85	91	96	59	63	66	45	48	51
	3	448	472	489	159	168	176	88	93	98	61	64	67	46	49	51
	4	458	479	497	164	172	180	90	95	99	62	65	68	47	50	52
	5	467	485	503	168	176	183	92	97	101	63	66	69	48	50	53
3	2	361	386	–	133	145	–	74	81	–	51	57	–	39	43	–
	3	366	391	404	134	145	154	74	81	87	51	56	60	39	43	46
	4	368	390	407	134	144	153	75	80	86	52	56	59	39	43	45
	5	371	391	408	137	146	154	76	81	86	53	56	60	40	43	46
4	2	290	309	–	113	127	–	64	73	–	45	51	–	34	39	–
	3	291	311	316	113	124	135	63	70	78	44	49	55	34	37	42
	4	288	307	319	111	122	131	62	68	74	43	48	52	33	36	40
	5	289	306	318	112	122	130	63	69	74	44	48	51	34	36	39
5	3	229	244	–	95	106	–	54	61	–	37	43	–	29	33	–
	4	225	240	245	92	102	112	52	59	65	36	41	46	28	31	35
	5	225	238	245	93	102	110	53	58	63	37	41	45	28	31	34

Примечание. Коэффициенты Φ_{exy} в таблице увеличены в 1000 раз.

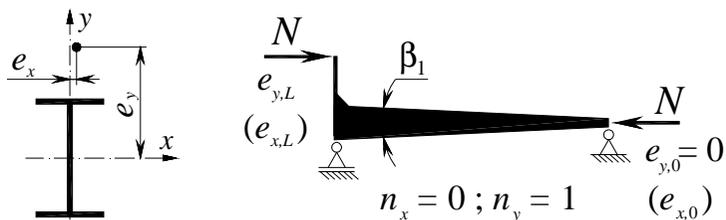


Таблица 3.5. Коэффициенты K_{exy} для внецентренно-сжатых шарнирно закрепленных двутавров с переменной высотой с углом взаимного наклона поясов $\beta_1=0.5^\circ$, $\beta_1=3^\circ$ и $\beta_1=6^\circ$, изготовленных из углеродистых сталей с расчетным сопротивлением $R_y = 23.5...25.5 \text{ кН/см}^2$

$\bar{\lambda}_y^{mid}$	$\frac{i_y^{mid}}{i_x^{mid}}$	Относительный эксцентриситет в плоскости большей жесткости большего сечения $m_{x,L}$														
		1			5			10			15			20		
		β_1			β_1			β_1			β_1			β_1		
		0.5°	3°	6°	0.5°	3°	6°	0.5°	3°	6°	0.5°	3°	6°	0.5°	3°	6°
2	2	1.18	1.11	1.04	1.24	1.21	1.12	1.18	1.21	1.13	1.15	1.17	1.14	1.13	1.15	1.13
	3	1.19	1.14	1.08	1.23	1.25	1.19	1.17	1.19	1.20	1.14	1.15	1.19	1.12	1.14	1.17
	4	1.19	1.15	1.10	1.23	1.24	1.23	1.16	1.18	1.20	1.13	1.14	1.17	1.11	1.13	1.15
	5	1.19	1.16	1.11	1.21	1.23	1.24	1.15	1.16	1.19	1.13	1.13	1.15	1.11	1.11	1.13
3	2	1.19	1.07	–	1.33	1.16	–	1.34	1.18	–	1.31	1.19	–	1.27	1.19	–
	3	1.20	1.10	1.02	1.37	1.24	1.12	1.37	1.27	1.13	1.33	1.28	1.14	1.30	1.28	1.15
	4	1.21	1.12	1.04	1.40	1.29	1.18	1.38	1.32	1.21	1.34	1.33	1.22	1.31	1.33	1.23
	5	1.21	1.13	1.06	1.41	1.32	1.22	1.38	1.35	1.26	1.33	1.34	1.27	1.31	1.33	1.27
4	2	1.16	1.02	–	1.34	1.10	–	1.37	1.11	–	1.38	1.12	–	1.38	1.12	–
	3	1.17	1.05	1.00	1.38	1.19	1.03	1.42	1.22	1.04	1.43	1.23	1.05	1.44	1.23	1.05
	4	1.17	1.08	1.01	1.41	1.24	1.11	1.46	1.28	1.13	1.47	1.29	1.14	1.48	1.30	1.15
	5	1.17	1.09	1.02	1.42	1.27	1.15	1.47	1.32	1.19	1.49	1.34	1.20	1.50	1.35	1.21
5	3	1.13	1.03	–	1.38	1.13	–	1.44	1.16	–	1.45	1.17	–	1.46	1.18	–
	4	1.14	1.04	1.00	1.41	1.20	1.05	1.47	1.24	1.06	1.49	1.25	1.07	1.50	1.26	1.08
	5	1.14	1.06	1.00	1.42	1.23	1.10	1.48	1.28	1.13	1.50	1.30	1.14	1.52	1.31	1.14

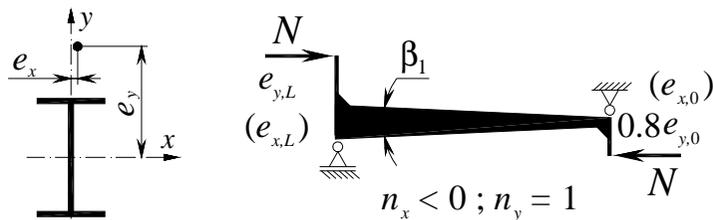


Таблица 3.6. Коэффициенты K_{exy} для внецентренно-сжатых шарнирно закрепленных двутавров с переменной высотой с углом взаимного наклона поясов $\beta_1=0.5^\circ$, $\beta_1=3^\circ$ и $\beta_1=6^\circ$, изготовленных из углеродистых сталей с расчетным сопротивлением $R_y = 23.5...25.5 \text{ кН/см}^2$

$\bar{\lambda}_y^{mid}$	$\frac{i_y^{mid}}{i_x^{mid}}$	Относительный эксцентриситет в плоскости большей жесткости большего сечения $m_{x,L}$														
		1			5			10			15			20		
		β_1			β_1			β_1			β_1			β_1		
		0.5°	3°	6°	0.5°	3°	6°	0.5°	3°	6°	0.5°	3°	6°	0.5°	3°	6°
2	2	1.23	1.19	1.08	1.24	1.28	1.20	1.18	1.21	1.21	1.15	1.17	1.21	1.13	1.15	1.20
	3	1.23	1.22	1.14	1.23	1.26	1.29	1.17	1.19	1.23	1.14	1.16	1.19	1.12	1.14	1.17
	4	1.23	1.23	1.17	1.23	1.24	1.28	1.16	1.18	1.20	1.13	1.14	1.17	1.11	1.13	1.15
	5	1.24	1.24	1.19	1.21	1.23	1.26	1.15	1.16	1.19	1.13	1.13	1.15	1.11	1.11	1.13
3	2	1.34	1.13	–	1.43	1.28	–	1.35	1.30	–	1.31	1.30	–	1.27	1.30	–
	3	1.36	1.18	1.04	1.45	1.40	1.20	1.37	1.40	1.23	1.33	1.36	1.24	1.30	1.33	1.25
	4	1.37	1.22	1.09	1.48	1.48	1.31	1.38	1.41	1.36	1.34	1.36	1.37	1.31	1.34	1.37
	5	1.37	1.24	1.12	1.48	1.50	1.39	1.38	1.41	1.42	1.33	1.35	1.18	1.31	1.33	1.37
4	2	1.30	1.05	–	1.57	1.18	–	1.54	1.20	–	1.49	1.21	–	1.45	1.21	–
	3	1.31	1.10	1.00	1.66	1.34	1.06	1.60	1.38	1.08	1.53	1.40	1.08	1.50	1.40	1.09
	4	1.32	1.14	1.02	1.72	1.44	1.20	1.64	1.51	1.24	1.57	1.52	1.25	1.54	1.53	1.27
	5	1.31	1.16	1.05	1.75	1.51	1.28	1.64	1.58	1.34	1.58	1.59	1.36	1.55	1.58	1.37
5	3	1.23	1.05	–	1.71	1.25	–	1.77	1.30	–	1.76	1.32	–	1.73	1.33	–
	4	1.25	1.08	1.00	1.78	1.37	1.09	1.85	1.44	1.12	1.84	1.46	1.13	1.81	1.48	1.14
	5	1.24	1.10	1.01	1.80	1.44	1.18	1.89	1.53	1.23	1.86	1.56	1.25	1.82	1.57	1.26

Выводы по третьей главе

1. Разработан аналитически-численный метод и программа расчета на пространственную устойчивость двутавровых стержней с переменной высотой стенки и/или шириной поясов, учитывающие особенности кручения обозначенных стержней.

2. Получены новые результаты в виде коэффициентов пространственной устойчивости в зависимости от следующих весьма важных для практики проектирования факторов: гибкости, углов наклона и сужения поясов, схемы нагружения, величины эксцентриситетов и стеснении деформации торцов.

3. Исследованы особенности пространственной работы и устойчивости внецентренно-сжатых двутавровых стержней переменной жесткости в зависимости от их геометрических параметров и схем нагружения. При этом выявлены следующие новые результаты:

- устойчивость при нагружении стержней с односторонними эксцентриситетами возрастает с увеличением наклона поясов, а при нагружении с разносторонними эксцентриситетами, наоборот, снижается;

- устойчивость при стеснении деформации торцевых сечений повышается и зависит от гибкости; так при нагружении продольной силой с односторонними эксцентриситетами в случае стеснения деформации только большего торцевого сечения повышение может составлять в среднем 15%, при стеснении обоих торцевых сечений – в среднем 20%.

- учет различия концевых двухосных эксцентриситетов продольной силы позволяет вскрыть резервы устойчивости до 50%;

- увеличение устойчивости стержней переменной жесткости относительно призматических стержней с таким же расходом стали зависит от ряда параметров, используемых в практике проектирования рамных конструкций (гибкости, угла наклона поясов, схемы нагружения, относительных эксцентриситетов). Для стержней с умеренным наклоном поясов (от 3° до 6°),

имеющих широкое распространение в рамных конструкциях, повышение устойчивости составляет в среднем от 4 до 32%. При больших углах наклона устойчивость стержней переменной жесткости значительно превышает устойчивость стержней постоянной жесткости равной массы;

– изменение в двутавровых стержнях ширины поясов при постоянном угле наклона может приводить как к повышению, так и к снижению устойчивости относительно таких же стержней равной массы, но постоянной ширины. Устойчивость стержней в данном случае зависит от многих параметров (гибкость, угол наклона и сужения поясов, схема загрузки, относительный эксцентриситет и др.) и в каждом расчетном случае должна определяться индивидуально.

4. Разработана инженерная методика расчета на устойчивость выделенных из конструкции рамы двутавровых элементов переменной высоты (постоянной ширины) из углеродистых сталей. Разработанная методика приведена к форме, представленной в отечественных Нормах для расчета элементов постоянного сечения:

сечения: $\frac{N}{K_{exy} \phi_{exy} A_{mid}} \leq \gamma_c R_y$, где ϕ_{exy} – коэффициент пространственной

устойчивости, зависящий от величины эксцентриситетов и геометрии стержней;

K_{exy} – коэффициент перехода от загрузки с односторонними концевыми эксцентриситетами к другим схемам; A_{mid} – площадь среднего поперечного сечения.

ГЛАВА 4. СРАВНИТЕЛЬНЫЙ АНАЛИЗ ТЕОРЕТИЧЕСКИХ ИССЛЕДОВАНИЙ С ДАННЫМИ НАТУРНЫХ ИСПЫТАНИЙ ЗАРУБЕЖНЫХ АВТОРОВ

4.1. Испытания зарубежных авторов

Имеющиеся в зарубежной литературе натурные испытания двутавровых стержней переменной жесткости на пространственную устойчивость позволяют верифицировать достоверность результатов, получаемых с помощью разработанного аналитически-численного метода расчета, посредством сравнения экспериментальных и теоретических результатов.

В сравнительное исследование включены только те эксперименты, в которых авторы предоставили всю исходную информацию, необходимую для теоретического расчета натуральных образцов (в том числе: характеристики стали, начальные несовершенства, конструктивное оформление торцов элементов и т.д.). Испытания, которые полностью соответствуют предмету исследования настоящей работы, но не обеспечивают полноту исходных данных (например, [156]) в сравнительное исследование включены не были.

С целью проверки возможностей и точности разработанного аналитически-численного метода также приведено сопоставление с результатами численного исследования методом конечных элементов (МКЭ) для различных схем загрузки стержней (Параграф 4.2).

4.1.1. Испытания J.B. Salter, D. Anderson, I.M. May

J.B. Salter, D. Anderson и I.M. May (Англия, 1980 г.) провели серию испытаний со сварными стальными двутавровыми колоннами бисимметричного сечения с линейно-изменяющейся высотой стенки [180]. Образцы были подвергнуты сжатию с изгибом таким образом, чтобы элементы теряли устойчивость по пространственной схеме. Помимо натуральных испытаний,

авторами также был выполнен численный расчет в программе, изначально разработанной для призматических стержней.

Образцы представляли собой сварные двутавры с переменной высотой стенки, при этом соединение полок со стенкой осуществлялось односторонними сварными швами.

Всего авторами было испытано 8 образцов (Таблица 4.1), среди которых: С1...С5 – элементы не имели промежуточных связей; С6...С7 – элементы, в середине длины которых растянутый пояс был закреплен от поперечного смещения; С8 – элемент с закреплением сжатого пояса посередине длины. В рамках настоящей диссертации рассматривались элементы без промежуточного раскрепления, однако, как утверждается в работе [180], раскрепление растянутого пояса практически никак не повлияло ни на предельное значение нагрузки, ни на характер деформирования до самого момента потери устойчивости. Данное обстоятельство позволяет включить элементы С6 и С7 в исследование и произвести расчет данных образцов без учета промежуточных связей (как и было сделано авторами эксперимента).

Загружение образцов происходило в два этапа (Рисунок 4.1):

- I-й этап: приложение продольной центрально-сжимающей силы N_0 величиной 100 или 200 кН (Таблица 4.1);
- II-й этап: не снимая нагрузки N_0 , прикладывался изгибающий момент к большему сечению до потери устойчивости элемента.

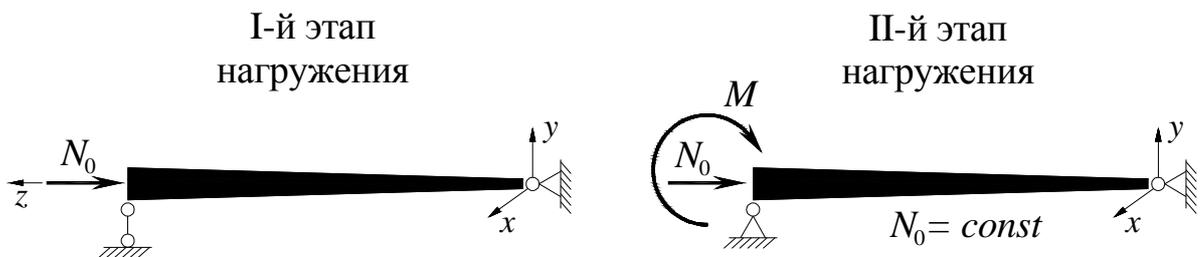


Рисунок 4.1. Последовательность испытания элементов

Характеристики натуральных образцов, включенных в сравнительное исследование, представлены в Таблице 4.1.

Таблица 4.1. Характеристики опытных образцов [180]

Обра- зец	Полки		Стенка	h_0 , мм	h_L , мм	L , мм	λ_y^{mid}	u_0	L_{Φ} , мм	β_1	σ_T , кН/см ²	N_0 , кН
	b_f , мм	t_f , мм	t_w , мм									
C1	101.6	6.37	4.73	128	299	2622	118	$L/564$	2342	4.2°	32.5	100
C2	102.2	6.35	4.74	126	276.5	2620	115	$L/718$	2340	3.7°	32.5	200
C3	102.2	6.39	4.67	124.5	250.5	2619	113	$L/494$	2339	3.1°	32.5	200
C4	89.0	4.70	4.70	102	252	1903	103	$L/297$	1623	5.3°	31.5	100
C5	89.0	4.68	4.71	102.5	204	1903	100	$L/2537$	1623	3.6°	31.5	200
C6	102.7	6.36	4.67	126	277.5	2619	114	$L/689$	2339	3.7°	33.5	200
C7	102.5	6.36	4.70	124	249.5	2619	113	$L/426$	2339	3.1°	33.5	200

Примечание: b_f, t_f – ширина и толщина полок двутавра; t_w – толщина стенки; h_0 – высота меньшего сечения; h_L – высота большего сечения; L – номинальная длина элемента (расстояние между центрами тяжести ножевых опор); $\lambda_y^{mid} = L/i_x^{mid}$ – средняя гибкость элемента (i_x^{mid} – радиус инерции среднего по длине сечения); u_0 – ордината начальных искривлений в плоскости меньшей жесткости в середине длины элемента; L_{Φ} – фактическая длина элемента, равная $L_{\Phi} = L - 2 \cdot 0.14$ м (см. Рисунок 4.2); β_1 – взаимный угол наклона поясов; σ_T – предел текучести для стали образцов; N_0 – величина центрально-сжимающей силы, приложенной на I-м этапе нагружения.

Каждая колонна монтировалась горизонтально. По обоим торцам колонн была приварена опорная пластина толщиной 25 мм. Нагрузка на стержень колонны передавалась через ножевые шарниры, которые располагались в стальных боксах. Расчетная длина колонны, указанная в Таблице 4.1, бралась как расстояние между центрами тяжести ножевых шарниров. Расстояние от торца образца до центра тяжести ножевого шарнира – 140 мм (Рисунок 4.2). Применение ножевых шарниров обеспечивало свободный поворот концов относительно главных осей x, y , при этом довольно толстые торцевые пластины препятствовали деформации опорных сечений.

Принципиальная схема экспериментальной установки представлена на Рисунке 4.2. Сжимающая сила прикладывалась к большему сечению через гидравлический домкрат, при этом реактивная сила передавалась на меньшее

сечение через 4 преднапрягаемых стержня. Изгибающий момент создавался за счет приложения с эксцентриситетом продольной силы, создаваемой винтовым домкратом. Передача изгибающего момента происходила через распределительную балку, связанную с домкратом и стальным боксом опорного сечения. После этапа I, распределительная подвижная рама у большего сечения фиксировалась неподвижно, что обеспечивало передачу только изгибающего момента без продольной силы. В связи с ожиданием того, что поперечные силы в испытуемых колоннах будут значительным (относительно продольной силы), в установке предусматривались две связи на эти силы.

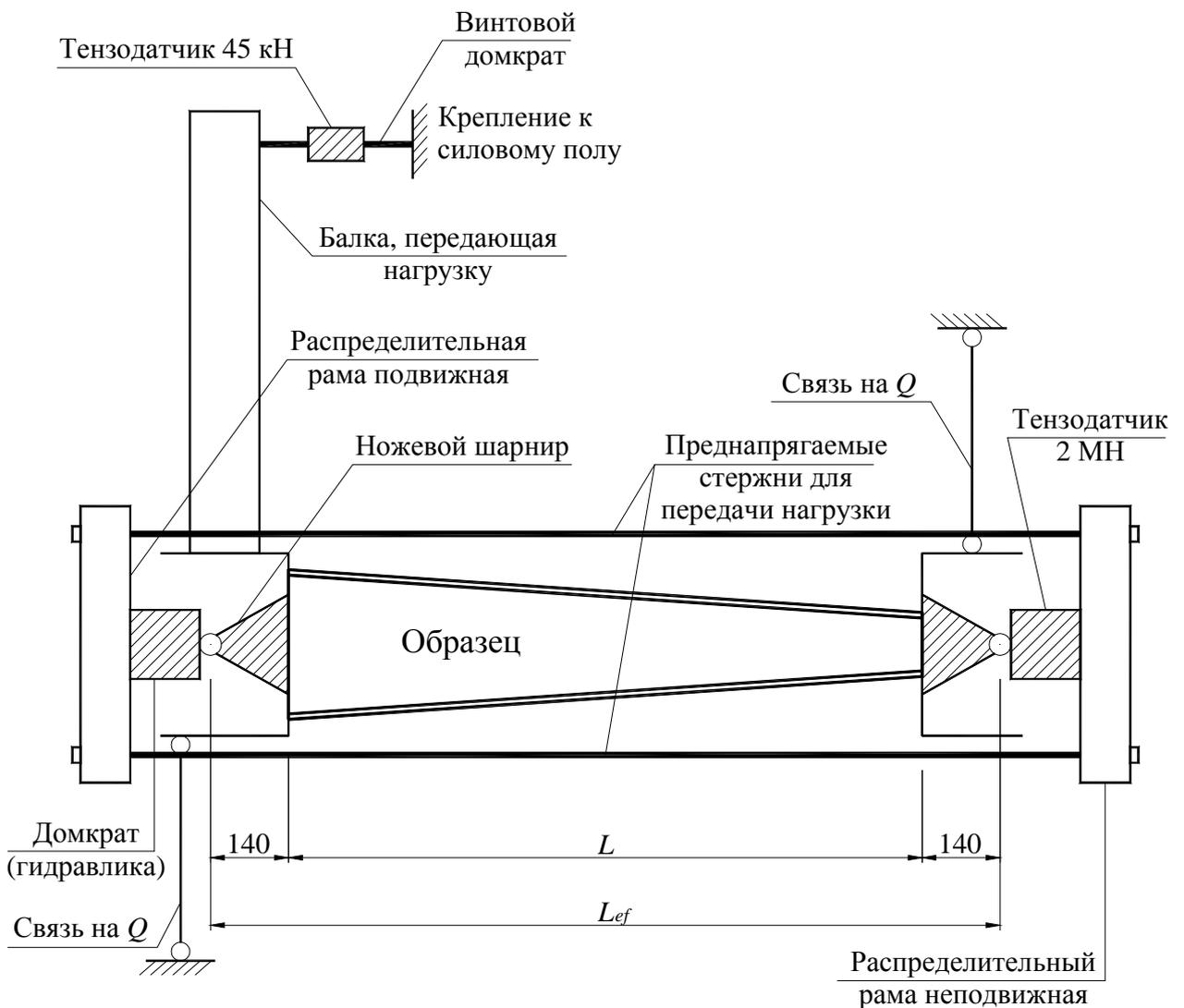


Рисунок 4.2. Принципиальная схема экспериментальной установки

Как указано в работе [180], в результате исследований была определена эпюра остаточных напряжений в сечениях колонн, которая соответствовала таковой для сварных двутавровых стержней постоянного сечения. Авторы принимали эпюру остаточных напряжений по работе [195], в которой значения остаточных напряжений было предложено вычислять по формуле:

$$\sigma_r = \frac{(a+b)}{2-(a+b)} \sigma_T, \quad (4.1)$$

где σ_r, σ_T – остаточные напряжения и предел текучести, соответственно; a и b – безразмерные параметры.

Согласно [180], авторы принимали в расчете значение $a = 0.08$ и $b = 0.29$, что в натуральных образцах наилучшим образом соответствовало предложенным в [195] эпюрам. Принципиальная схема эпюры остаточных напряжений приведена на Рисунке 4.3 (знак «+» соответствует растягивающим напряжениям, знак «-» – сжимающим).

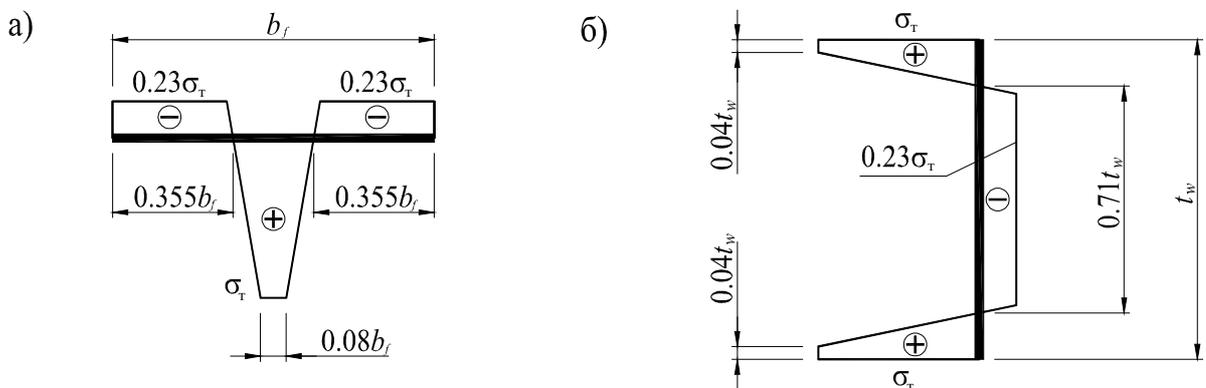


Рисунок 4.3. Эпюра остаточных напряжений для поясов (а) и для стенки (б)

Для теоретической проверки данной серии экспериментов были приняты все расчетные предпосылки, указанные авторами в [180]. Расчет с помощью аналитически-численного метода был также разделен на 2 этапа:

– на I-м этапе стержень, имеющий начальные несовершенства по длине и остаточные напряжения в 9-ти сечениях, загружался центрально-сжимающей силой N_0 . В результате данного расчета было получено НДС во всех сечениях, которое служило исходным для расчета этапа II.

– на этапе II, стержень, имеющий сложное НДС от этапа I, догружался изгибающим моментом, приложенным к большому сечению, до потери пространственной устойчивости.

Результаты сравнения предельных моментов, полученных в ходе эксперимента ($M_{эк}$) и расчетом по разработанному методу ($M_{расч}$), представлены в Таблице 4.2.

Таблица 4.2. Сравнение расчетных и экспериментальных [180] предельных моментов

Образец	Длина, L , мм	Гибкость средняя, λ_y^{mid}	Предел текучести, σ_T , кН/см ²	Цент.-сжим. сила (I-й этап), N_0 , кН	Предельные моменты		Расхождение $\frac{M_{эк} - M_{расч}}{M_{эк}} \cdot 100\%$
					$M_{эк}$, кНм	$M_{расч}$, кНм	
C1	2622	118	32.5	100	82.8	63.7	+23.1
C2	2620	115	32.5	200	53.0	53.4	-0.8
C3	2619	113	32.5	200	45.6	43.3	+5.0
C4	1903	103	31.5	100	44.6	42.5	+4.7
C5	1903	100	31.5	200	22.3	22.2	+0.4
C6	2619	114	33.5	200	53.9	55.0	-2.0
C7	2619	113	33.5	200	47.4	46.9	+1.1

Примечание: в таблице не приведены результаты численных расчетов авторов [180] в связи с тем, что авторы использовали расчетную программу, предназначенную для стержней постоянной жесткости, в которой не учтены особенности стесненного кручения тонкостенных стержней открытого профиля переменной жесткости.

Как видно из Таблицы 4.2, результаты расчета по разработанному аналитически-численному методу и экспериментального исследования довольно хорошо согласуются между собой. В 85% случаев разница не превысила 5% и только для одного случая (образец C1) расхождение получилось 23.1%. Однако, физически- и геометрически-нелинейный расчет оболочечной модели в МКЭ комплексе ABAQUS данного образца с учетом всех приведенных выше расчетных предпосылок, выполненный Y.D. Kim в диссертации [158], даёт значение предельного момента ниже нами полученного, а именно 56.6 кНм, что служит подтверждением того, что авторами была допущена неточность в исходных данных или в значении предельного момента.

На Рисунке 4.4 представлены кривые деформирования среднего по длине сечения в плоскости большей жесткости (перемещения v) для образца С2 и С4. Помимо экспериментальных кривых и кривых, полученных расчетом по разработанному методу, также представлены кривые, полученные авторами [180] численным методом.

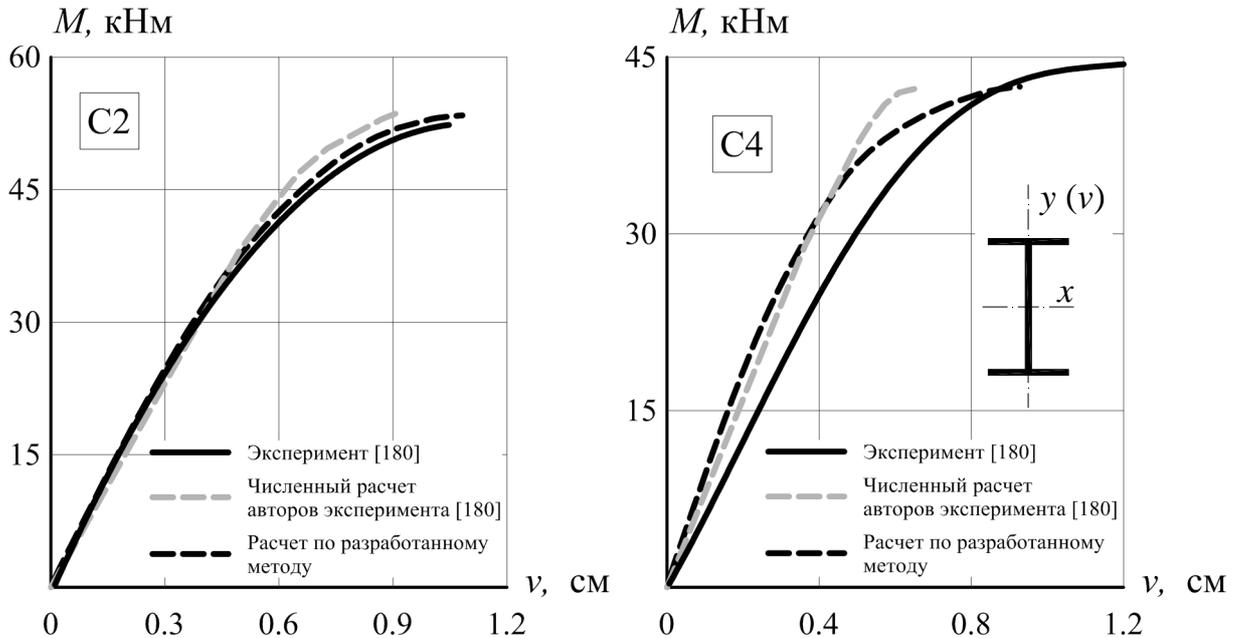


Рисунок 4.4. Перемещения v среднего сечения образцов С2 и С4

Как видно из Рисунка 4.4, кривые деформирования, полученные по разработанному методу, хорошо согласуются с кривыми, полученными в результате эксперимента и расчета авторов [180].

Достоверность полученных теоретических результатов расчетов также показывает на универсальность разработанного аналитически-численного метода в случаях, когда необходимо учитывать поэтапное приложение нагрузок или учитывать начальное напряженно-деформированное состояние элемента.

4.1.2. Испытания Н. Shiomi, S. Nishikawa, М. Kurata

Н. Shiomi, S. Nishikawa и М. Kurata (Япония, 1983 г.) провели большое экспериментальное исследование стальных сварных двутавровых стоек переменного сечения на пространственную устойчивость [184-185].

В рамках этого экспериментального исследования было произведено три серии испытаний: серия «ОТ» – образцы (19 шт.) подвергались сжатию с изгибом до потери пространственной устойчивости; серия «ИТ» – образцы (5 шт.) также подвергались сжатию с изгибом, но перемещения в плоскости меньшей жесткости и закручивание по длине стержня были полностью исключены за счет постановки раскрепляющих связей так, что образцы теряли устойчивость по изгибной форме в плоскости большей жесткости; серия «РТ» – исследование распределения остаточных напряжений в сечениях образцов (3 шт.).

Образцы представляли собой сварные двутавры с переменной высотой стенки, соединение полки со стенкой осуществлялось двумя угловыми швами. Элементы изготавливались из стали марки SS-41 с минимальным гарантированным пределом текучести 23.5 кН/см^2 .

Проверка разработанного аналитически-численного метода расчета производилась путем сравнения расчетных и экспериментальных предельных сил для образцов серии «ОТ», характеристики которых представлены в Таблице 4.3.

Принципиальная схема экспериментальной установки приведена на Рисунке 4.5. Образцы монтировались горизонтально. К меньшему и большему торцам приваривались опорные пластины толщиной 19 и 25 мм соответственно. Загружение образцов происходило посредством приложения к большему сечению центрально сжимающей силы через нижний домкрат и изгибающего момента, создаваемого за счет передачи силы от верхнего домкрата через распределительную балку. Передача реактивной силы на меньшее сечение и сжатия на большее происходила через стальной шарик. При этом распределительная балка была закреплена из плоскости специальными полукруглыми дисками, чтобы не препятствовать возможности поворота опорного сечения относительно вертикальной оси балки. Таким образом, закрепление элементов принималось простым – свободный поворот концов относительно главных осей x , y . При этом кручение и депланация торцевых сечений отсутствовали за счет относительно толстых опорных плит, соединенных болтами с силовыми рамами.

Таблица 4.3. Характеристики опытных образцов [184-185]

Образец	Полки		Стенка	h_0 , мм	h_L , мм	L , мм	λ_y^{mid}	u_0	β_1	$m_{x,L}$	$\frac{N_{эк}}{N_{y,0}}$	σ_T^{cp} , кН/см ²
	b_f , мм	t_f , мм										
ОТ-1.4-2	120.7	7.93	6.05	121.2	168.0	2000	68	$L/5000$	1.3°	1.69	0.479	30.27
ОТ-1.4-4	129.9	7.94	6.05	121.1	168.7	2500	78	$L/800$	1.1°	2.47	0.326	28.64
ОТ-1.6-1	81.3	8.19	6.05	150.5	240.8	3000	172	$L/2000$	1.7°	8.02	0.127	29.39
ОТ-1.6-2	110.6	8.08	6.05	121.4	191.9	2000	76	$L/2200$	2.0°	1.04	0.494	29.90
ОТ-1.6-4	127.2	8.04	6.05	124.8	197.5	2500	81	$L/2800$	1.7°	1.50	0.447	29.88
ОТ-1.6-5	125.4	7.95	6.05	126.6	199.8	3000	100	$L/1600$	1.4°	2.39	0.306	30.30
ОТ-1.8-1	111.5	8.20	6.05	110.0	198.3	2000	75	$L/3800$	2.5°	1.02	0.582	29.56
ОТ-1.8-3	120.7	8.09	6.05	121.1	214.6	2500	87	$L/2000$	2.1°	1.49	0.462	29.86
ОТ-1.8-4	120.8	7.90	6.05	129.0	233.5	2500	88	$L/1900$	2.4°	2.55	0.334	30.59
ОТ-1.8-5	125.9	8.16	6.05	125.8	224.6	3000	100	$L/2000$	1.9°	2.32	0.321	29.70
ОТ-2.0-1	100.2	8.03	6.05	100.2	199.8	2000	85	$L/1700$	2.9°	0.92	0.557	30.17
ОТ-2.0-3	100.3	7.97	6.05	133.3	260.1	2500	112	$L/5000$	2.9°	2.45	0.325	29.99
ОТ-2.0-4	125.6	9.13	6.05	126.5	249.5	3000	100	$L/1500$	2.3°	2.47	0.334	29.75
ОТ-2.0-5	125.3	9.15	6.05	126.7	250.2	3000	100	$L/3000$	2.4°	1.51	0.457	29.83
ОТ-2.2-3	120.8	8.08	6.05	124.5	264.0	2500	89	$L/1600$	3.2°	1.54	0.454	29.65
ОТ-2.2-5	125.5	8.05	6.05	125.9	274.2	3000	103	$L/1300$	2.8°	2.58	0.346	30.03
ОТ-2.4-1	100.6	7.93	6.05	100.5	239.8	2000	87	$L/1300$	4.0°	0.93	0.635	30.34
ОТ-2.4-3	100.9	7.94	6.05	100.2	238.6	2500	108	$L/3800$	3.2°	1.38	0.449	30.26
ОТ-2.4-4	125.4	9.14	6.05	127.5	298.8	3000	102	$L/1500$	3.3°	2.50	0.351	29.81

Примечание: b_f, t_f – ширина и толщина полок двутавра; t_w – толщина стенки; h_0 – высота меньшего сечения; h_L – высота большего сечения; L – длина элемента; $\lambda_y^{mid} = L/i_x^{mid}$ – средняя гибкость элемента (i_x^{mid} – радиус инерции среднего по длине сечения); u_0 – ордината начальных искривлений в плоскости меньшей жесткости в середине длины элемента; β_1 – взаимный угол наклона поясов; $m_{x,L}$ – относительный эксцентриситет приложения продольной силы к большому сечению; $N_{эк}/N_{y,0}$ – отношение предельной экспериментальной силы к осевой прочности меньшего сечения; σ_T^{cp} – среднее значение предела текучести для стали образцов.

Загружение образцов сжимающей силой и изгибающим моментом происходило одновременно до потери элементом пространственной устойчивости. Расчетная схема испытания образцов представлена на Рисунке 4.6а.

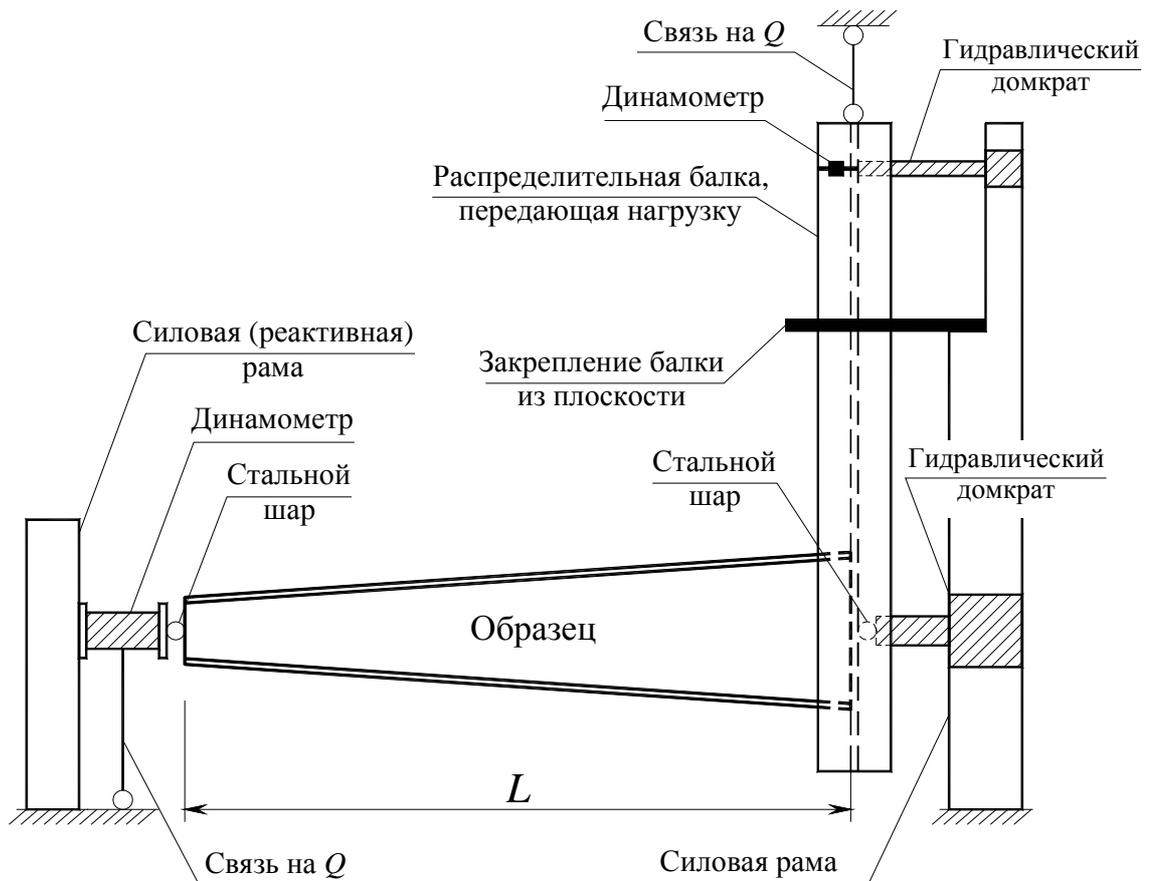


Рисунок 4.5. Принципиальная схема экспериментальной установки

При проверке данного эксперимента с помощью разработанного метода расчета, сжато-изогнутая модель, принятая в эксперименте, заменялась на традиционную – внецентренно-сжатый стержень с эксцентриситетом e_y приложения продольной силы N (Рисунок 4.6б). При этом значение e_y вычислялось на основании приведенных в работе [184] предельных экспериментальных значений продольной силы $N_{эк}$ и изгибающего момента $M_{эк}$:

$$e_y = \frac{M_{эк}}{N_{эк}}. \quad (4.2)$$

И, соответственно, относительный приведенный эксцентриситет m_L приложения силы к большему сечению (представленный в Таблице 4.3):

$$m_x = \frac{e_y}{\rho_x}, \quad (4.3)$$

где ρ_x – радиус ядра большего сечения.

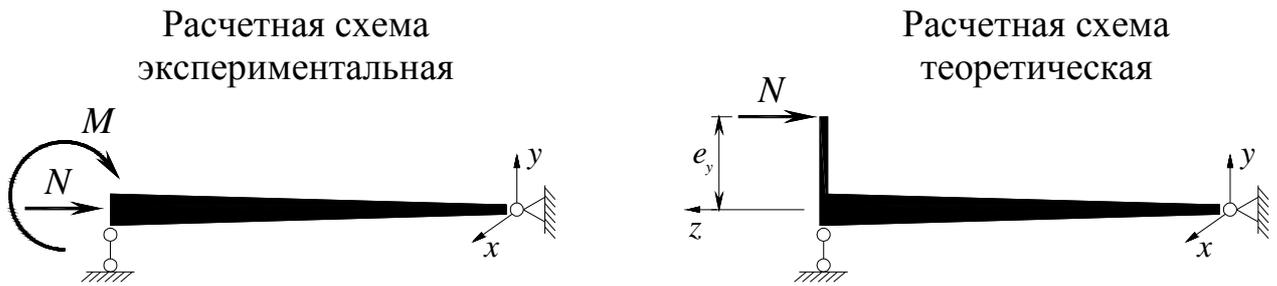


Рисунок 4.6. Расчетная схема испытания образцов

Средний предел текучести σ_T^{cp} (приведенный в Таблице 4.3) вычислялся на основании представленного авторами отношения $N_{\text{эк}}/N_{y,0}$ (где $N_{y,0} = A_0 \sigma_T^{\text{cp}}$ – осевая прочность меньшего сечения образца). Авторами также было представлено отношение $M_{\text{эк}}/M_{y,L}$ (где $M_{y,L} = W_L \sigma_T$ – изгибная прочность большего сечения образца), что позволяет вычислить пределы текучести стали поясов (σ_T^f) и стенки (σ_T^w) путем решения системы двух линейных уравнений. Но, как показало исследование, использование в алгоритме «Сечение» (Глава 3) двух показателей: σ_T^f , σ_T^w , дают несущественную разницу в предельной силе, однако усложняют расчет.

В связи с тем, что авторами не представлены принципиальные эпюры распределения остаточных напряжений в сечениях, в расчете они не учитывались.

Результаты сравнения предельных сил, полученных в ходе эксперимента ($N_{\text{эк}}$) и в результате расчета по разработанному аналитически-численному методу ($N_{\text{расч}}$), приведены в Таблице 4.4.

Как видно из Таблицы 4.4, результаты теоретических исследований с помощью разработанного метода вполне удовлетворительно согласуются с экспериментальными данными. В 63% опытов расхождение не превысило 5%. При этом максимальные расхождения в 15.0% и -12.8% для образцов ОТ-1.6-1 и ОТ-1.6-2, соответственно, получились из-за возможных неточностей проведения эксперимента.

Таблица 4.4. Сравнение расчетных и экспериментальных [184-185] предельных сил

Образец	Длина, L , мм	Гибкость средняя, λ_y^{mid}	Относит. эксцентр., $m_{x,L}$	Средний предел текучести, σ_T^{cp} , кН/см ²	Предельные силы		Расхождение $\frac{N_{эк} - N_{расч}}{N_{эк}} \cdot 100\%$
					$N_{эк}$, кН	$N_{расч}$, кН	
ОТ-1.4-2	2000	68	1.69	30.27	370	349	+5.7
ОТ-1.4-4	2500	78	2.47	28.64	252	250	+0.8
ОТ-1.6-1	3000	172	8.02	29.39	80	68	+15.0
ОТ-1.6-2	2000	76	1.04	29.90	358	404	-12.8
ОТ-1.6-4	2500	81	1.50	29.88	361	373	-3.3
ОТ-1.6-5	3000	100	2.39	30.30	247	259	-4.9
ОТ-1.8-1	2000	75	1.02	29.56	412	413	-0.2
ОТ-1.8-3	2500	87	1.49	29.86	357	350	+2.0
ОТ-1.8-4	2500	88	2.55	30.59	265	271	-2.3
ОТ-1.8-5	3000	100	2.32	29.70	259	272	-5.0
ОТ-2.0-1	2000	85	0.92	30.17	356	358	-0.6
ОТ-2.0-3	2500	112	2.45	29.99	225	235	-4.4
ОТ-2.0-4	3000	100	2.47	29.75	293	285	+2.7
ОТ-2.0-5	3000	100	1.51	29.83	402	377	+6.2
ОТ-2.2-3	2500	89	1.54	29.65	351	349	+0.6
ОТ-2.2-5	3000	103	2.58	30.03	279	251	+10.0
ОТ-2.4-1	2000	87	0.93	30.34	406	382	+6.3
ОТ-2.4-3	2500	108	1.38	30.26	287	287	0
ОТ-2.4-4	3000	102	2.50	29.81	309	286	+7.4

Как замечено в [184], потеря устойчивости образца ОТ-1.6-1, ввиду его большой гибкости ($\lambda_y^{mid} = 172$), произошла в упругой стадии. Относительно большое расхождение между теоретическим и экспериментальным значениями предельной силы скорее всего связано с неточной или неполной информацией, изложенной в [184-185], о начальных несовершенствах стержня из плоскости изгиба. Для гибких элементов, к которым относится ОТ-1.6-1, важно знать не только максимальную ординату искривлений посередине длины элемента, но также и их характер распределения по длине. Подтверждением сказанному является также физически- и геометрически-нелинейный расчет оболочечной модели ОТ-1.6-1 в МКЭ комплексе ABAQUS с учетом всех приведенных выше

расчетных предпосылок, выполненный Y.D. Kim в диссертации [158], который дал среднее значение предельной силы 68.5 кН.

При проведении испытания ОТ-1.6-2 приложение сжимающей силы произошло со смещением по оси x , что, в свою очередь, создало дополнительные изгибающие моменты в плоскости меньшей жесткости и, в итоге привело к снижению предельной силы.

Таким образом, не беря во внимание результаты для образцов ОТ-1.6-1 и ОТ-1.6-2, расхождение результатов теоретического расчета с экспериментом не превышает 10% в 100% испытаний, что служит доказательством достоверности разработанного метода.

На Рисунке 4.7 и 4.8 представлены перемещения среднего по длине сечения образцов, полученные в ходе эксперимента (сплошные линии) и в результате расчета по разработанному методу (пунктирные линии).

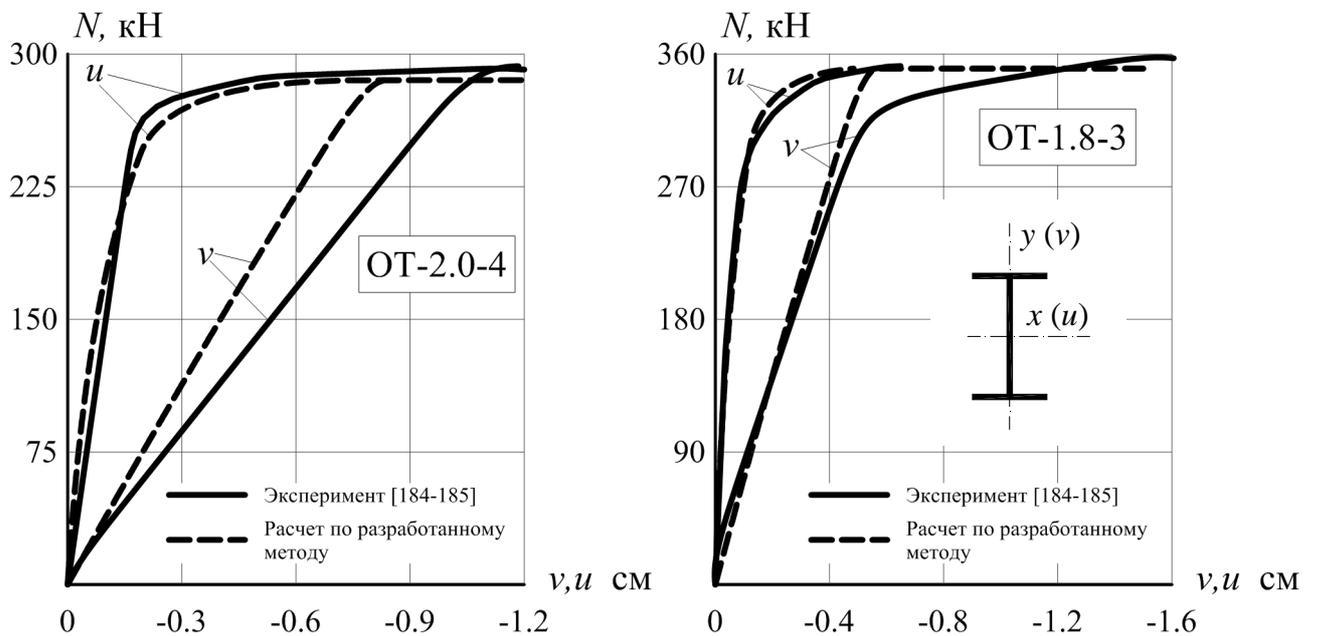


Рисунок 4.7. Перемещения u, v среднего сечения образцов ОТ-2.0-4 и ОТ-1.8-3

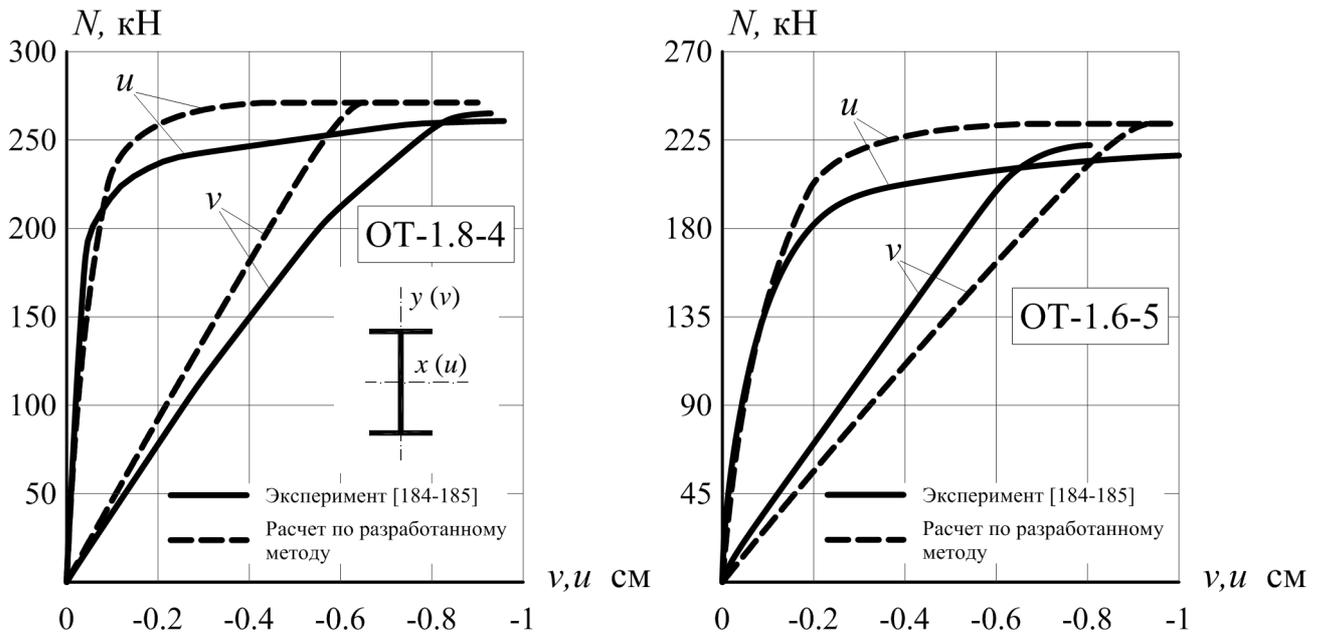


Рисунок 4.8. Перемещения u , v среднего сечения образцов OT-1.8-4 и OT-1.6-5

Как видно из Рисунка 4.7 и 4.8, кривые деформирования, полученные в результате расчета по разработанному аналитически-численному методу, удовлетворительно согласуются с кривыми, полученными в результате испытаний [184-185].

4.1.3. Испытания I.M. Cristutiu, D.L. Nunes, A.I. Dogariu

I.M. Cristutiu, D.L. Nunes и A.I. Dogariu (Румыния, 2013 г.) выполнили экспериментальное исследование работы стоек и карнизного узла стальных рам переменного сечения [128-129].

В рамках экспериментального исследования стоек, авторами было испытано 6 внецентренно-сжатых элементов переменного сечения, различающихся типом раскрепления образцов по длине и толщиной стенки.

Раскрепление стоек по длине принималось следующим:

- для образцов серии «NR» – без раскреплений;
- для образцов серии «LR» – закрепление от поперечных смещений;
- для образцов серии «TR» – закрепление от кручения.

Для верификации разработанного аналитически-численного метода принимались образцы серии «NR» (2 шт.).

Размеры принятых к сравнению образцов представлены в Таблице 4.5.

Таблица 4.5. Характеристики опытных образцов [128-129]

Обра- зец	Полки		Стенка	h_0 , мм	h_L , мм	L , мм	λ_y^{mid}	u_0	L_Φ , мм	β_1	σ_T^w , кН/см ²	σ_T^f , кН/см ²
	b_f , мм	t_f , мм	t_w , мм									
C1_8_NR	200	10	8	250	600	3600	83.8	$L_\Phi/150$	3411	5.6°	41.0	26.7
C2_6_NR	200	10	6	250	600	3600	79	$L_\Phi/150$	3411	5.6°	31.9	26.7

Примечание: b_f, t_f – ширина и толщина полок двутавра; t_w – толщина стенки; h_0 – высота меньшего сечения; h_L – высота большего сечения; L – номинальная длина элемента (расстояние между точками приложения нагрузок); $\lambda_y^{mid} = L/i_y^{mid}$ – средняя гибкость элемента (i_y^{mid} – радиус инерции среднего по длине сечения); u_0 – ордината начальных искривлений (с распределением по синусоиде) в плоскости меньшей жесткости в середине длины элемента; L_Φ – фактическая длина элемента; β_1 – взаимный угол наклона поясов; σ_T^w – предел текучести для стали стенки; σ_T^f – предел текучести для стали поясов.

Начальная погибь u_0 (Таблица 4.5) в плоскости меньшей жесткости, с максимальной ординатой $1/150$ длины образца, принята авторами [128-129] согласно указаниям EN1993-1-1 [140] и подразумевает под собой такие эффекты, как остаточные напряжения и различного рода линейные несовершенства (кроме крутильных), возникающие при изготовлении, транспортировке и монтаже элементов конструкций.

Принципиальная схема испытательной установки представлена на Рисунке 4.9а. Загружение образцов происходило посредством передачи силы с гидравлического домкрата на образец с плечом 1.85 м. Таким образом, элемент подвергался сжатию с изгибом. Особенностью данного натурального эксперимента является тот факт, что авторами не предусмотрены специальные мероприятия (ножевые шарниры, центрирующие шарики и т.п.), обеспечивающие точность приложения нагрузки к испытуемым образцам. Это связано, по-видимому, с тем, что авторы решили полностью воспроизвести работу стойки в составе поперечной рамы. Подтверждением тому служат фланцевые узлы (Рисунок 4.9б) крепления стоек-образцов к испытательной раме.

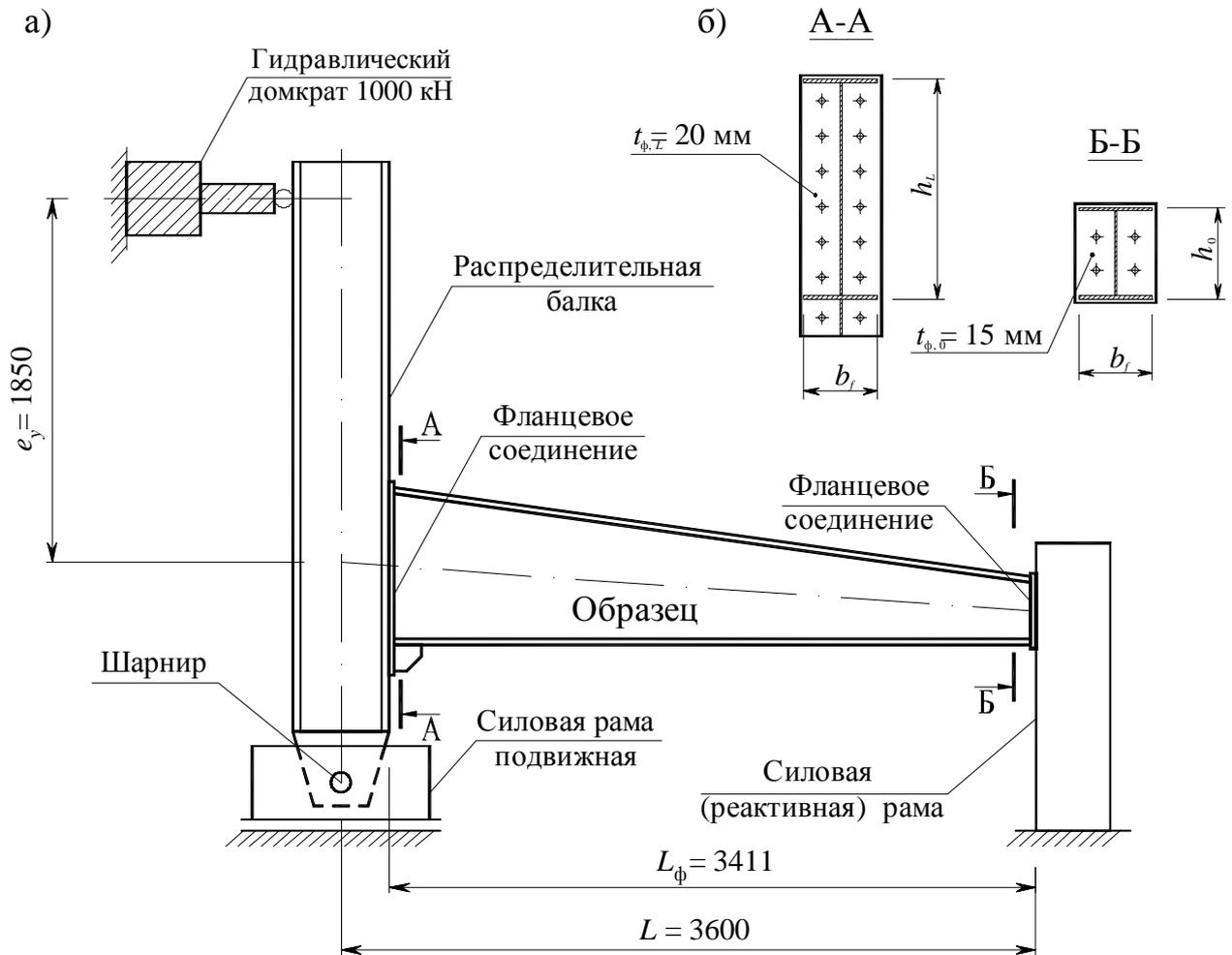


Рисунок 4.9. Схема испытательной установки (а) и фланцевые узлы крепления образцов (б)

Однако, если при расчете поперечных рам фланцевые стыки крепления меньшего сечения колонн к фундаментам еще можно условно принимать шарнирными, то при проведении натуральных испытаний данная предпосылка ошибочна. В данном случае меньшее сечение образцов крепилось через пластину толщиной 15 мм, соединенную 4-мя болтами диаметром 20 мм к опорной раме установки (Б-Б на Рисунке 4.9б). Такое конструктивное исполнение почти полностью препятствует повороту опорного сечения относительно осей x , y , поэтому предложенная авторами расчетная схема (Рисунок 4.10а) была скорректирована с учетом конструктивных особенностей крепления торцов и конструкции экспериментальной установки. Следует также заметить, что расчетная схема в плоскости меньшей жесткости была принята с заделками по концам ввиду того, что элементы силовых рам установки не подразумевают

повороты опорных сечений (Рисунок 4.10б). Кручение и депланация опорных сечений также отсутствовали.

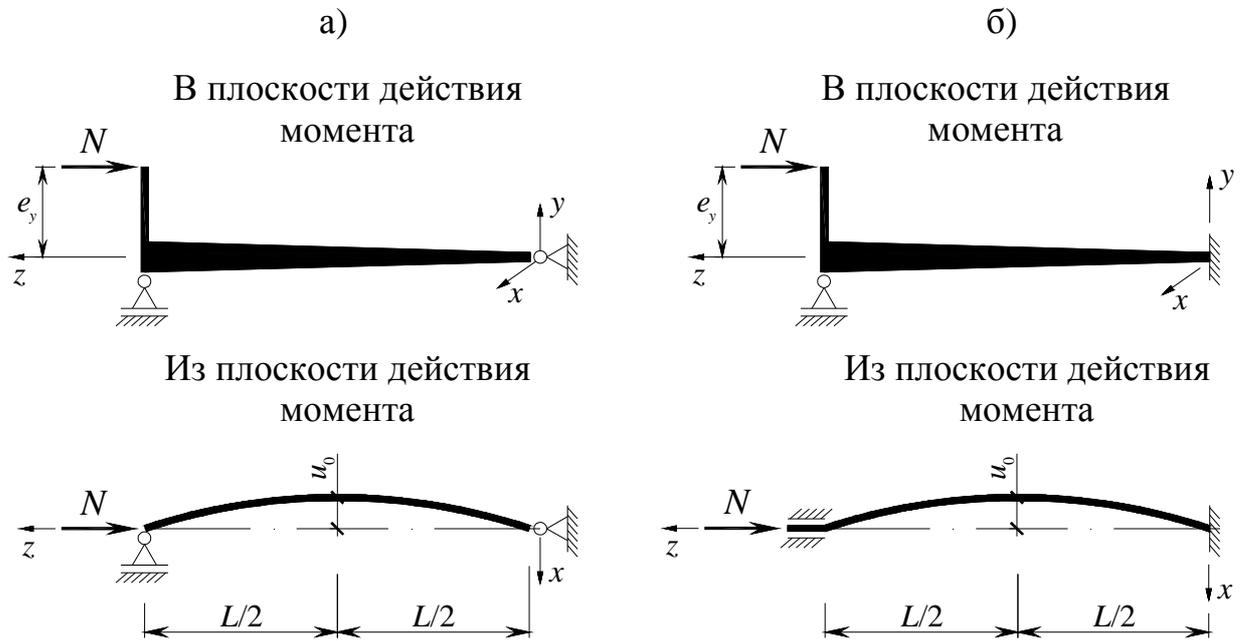


Рисунок 4.10. Расчетная схема, предложенная авторами эксперимента (а), и принятая при расчете с помощью разработанного метода (б)

Следует отметить, что для получения корректных результатов расчетов с помощью разработанного аналитически-численного метода, было необходимо внести изменения в алгоритм «Стержень» (Глава 3), связанные с отличием закреплений образцов от простых (шарнирных), принятых ранее.

Основной задачей было определение эпюр «недеформационных» изгибающих моментов M_x , M_y в статически неопределимой расчетной схеме. Для этого был выполнен линейный недеформационный расчет образцов С1_8 и С2_6 в МКЭ комплексе ANSYS Mechanical APDL 12.1 с использованием балочных КЭ.

В результате численного исследования было установлено следующее:

– эпюра M_x имеет линейный вид и повторяет очертание таковой для призматического стержня с аналогичными закреплениями с отличием в том, что ордината в заделке равна 0.24 от приложенного изгибающего момента $M_{x,L}$ вместо 0.5. Эпюра M_x представлена на Рисунке 4.11а. На основании полученной эпюры

далее было составлено аналитическое выражение для M_x для последующего использования в алгоритме «Стержень»;

– эпюра M_y для защемленного изогнутого стержня с синусоидальным очертанием (см. Рисунок 4.10б) совпадает с таковой для защемленного с двух концов стержня постоянного сечения, нагруженного равномерно-распределенной нагрузкой q_x (Рисунок 4.11б). Линейный коэффициент k_{fem} между усилием сжатия N и величиной условной распределенной нагрузки q_x для данных образцов равен $0.0157 \frac{1}{M}$. После определения q_x было также составлено аналитическое выражение для M_y на основании табличных данных для расчета призматических стержней. Эпюра M_y представлена на Рисунке 4.11б.

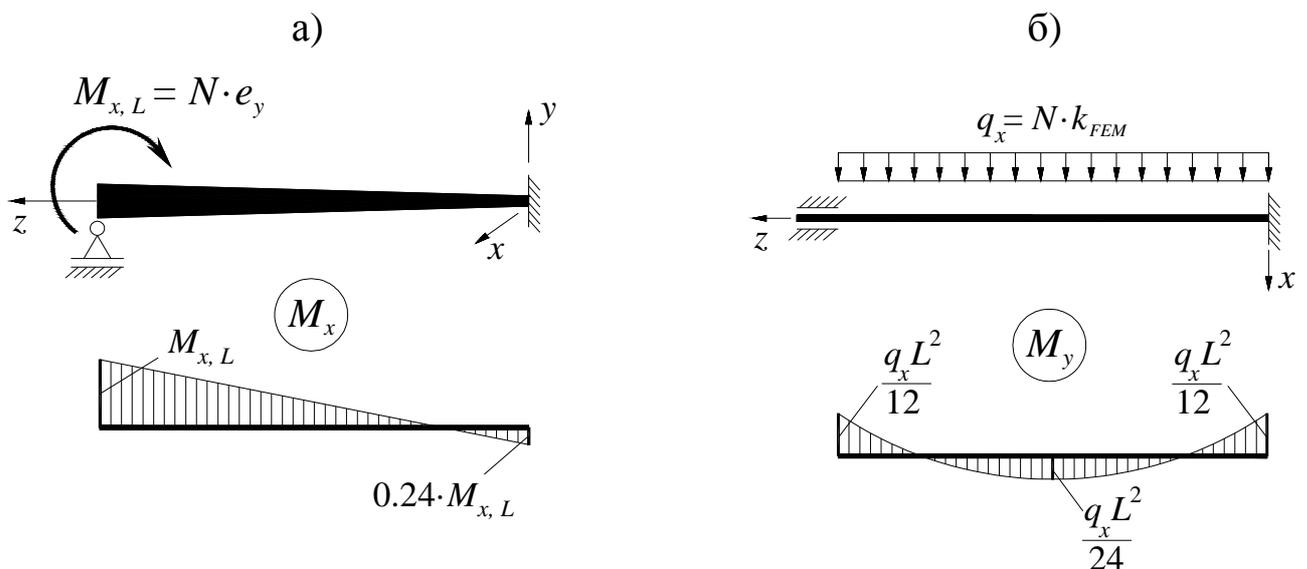


Рисунок 4.11. Расчетные схемы и соответствующие им эпюры изгибающих моментов в плоскости большей жесткости (а) и в плоскости меньшей жесткости (б)

Помимо аналитических выражений для изгибающих моментов M_x , M_y , также были внесены изменения в граничные условия систем уравнений метода конечных разностей (МКР) при решении задач недеформационного расчета и бифуркационных задач устойчивости (Глава 3).

Вероятно, неточности в описании граничных условий для стержневой расчетной модели были допущены авторами экспериментального исследования [128-129] из-за того, что помимо натуральных испытаний, ими также был выполнен

численный расчет образцов МКЭ в расчетном комплексе ABAQUS. В своей расчетной схеме они максимально подробно замоделировали образцы и экспериментальную установку с использованием оболочечных и объемных КЭ, а также поверхностей трения во фланцевых стыках. Такой подход к построению расчетных схем исключает необходимость детального анализа граничных условий, но, как показывает практика, может приводить к ошибочным выводам.

Значения предельных моментов $M_{расч}$, полученных расчетом по разработанному методу, экспериментальных ($M_{эк}$) и численных (M_{fem}) результатов, полученных авторами [128-129], а также их сравнение приведены в Таблице 4.6.

Таблица 4.6. Сравнение расчетных и экспериментальных [128-129] предельных моментов

Образец	Абс. эксц. $e_{y,L}$, см	Относит. эксцентр., $m_{x,L}$	Предельные моменты			Расхождение $\frac{M_{эк} - M_{расч}}{M_{эк}} \cdot 100\%$	Расхождение $\frac{M_{fem} - M_{расч}}{M_{fem}} \cdot 100\%$
			$M_{эк}$, кНм	M_{fem} , кНм	$M_{расч}$, кНм		
C1_8_NR	185	9.76	488.75	474.51	488.4	+0.1	-2.9
C2_6_NR	185	9.06	395.75	388.04	434.8	-9.9	-12.1

Согласно [128-129], потеря пространственной устойчивости образца C2_6_NR предшествовала местная потеря устойчивости сжатого пояса, что объясняет превышение предельного теоретического момента $M_{расч}$ над экспериментальными значениями в пределах 10%. Для образца C1_8_NR (сначала потерял пространственную устойчивость, а затем была зафиксирована местная потеря устойчивости сжатого пояса) расхождение между теоретическими и экспериментальными предельными моментами составляет менее 1%.

Сравнение результатов теоретического расчета с помощью разработанного метода и экспериментальных данных [128-129] указывает на достоверность разработанного метода и показывает его достаточную универсальность в случаях, когда необходимо учитывать нестандартные граничные условия.

4.2. Численное исследование методом конечных элементов

Для верификации разработанного аналитически-численного метода при различных схемах загрузки стержней, было произведено численное исследование методом конечных элементов в расчетном комплексе ANSYS Mechanical APDL 12.1.

В рамках численного исследования было рассчитано 4 типоразмеров моделей с переменной высотой стенки (серия расчетов «Т») и один с переменными высотой стенки и шириной поясов (элемент «ТЗА»), при этом у всех моделей размеры поперечного сечения в середине длины одинаковые (Рисунок 4.12б). Размер моделей принят в диапазоне 1/3..1/4 от габаритов реальных элементов рамных конструкций переменной жесткости. Материал – сталь С245 с пределом текучести 24.5 кН/см^2 . Гибкости моделей относительно оси y приняты 80 и 120. Общий вид моделей-образцов представлен на Рисунке 4.12а.

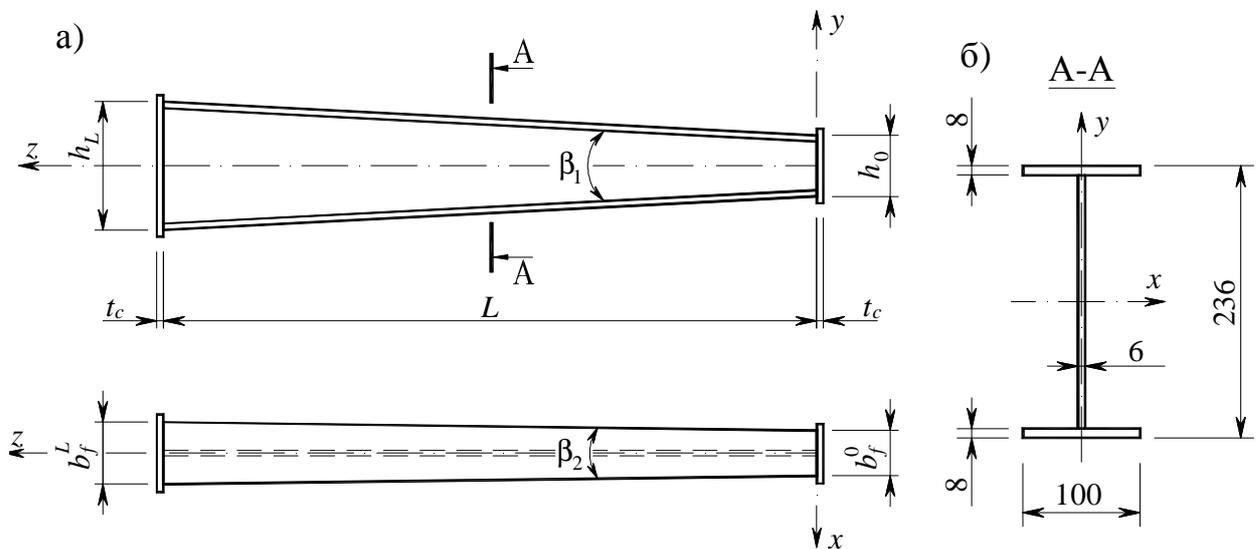


Рисунок 4.12. Общий вид моделей-образцов (а) и размеры (в мм) среднего по длине поперечного сечения образцов (б)

Характеристики моделей представлены в табл. 4.7.

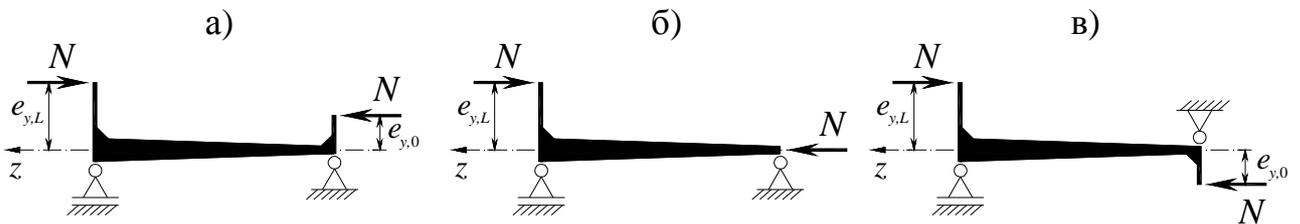
Таблица 4.7. Характеристики исследуемых моделей-образцов

Мо- дель	Полки			Стенка	h_0 , мм	h_L , мм	L , мм	λ_y^{mid}	β_1	β_2	σ_T , кН/см ²
	b_f^0 , мм	b_f^L , мм	t_f , мм	t_w , мм							
T1	100		8	6	191.2	280.8	1712	80	3°	0	24.5
T2	100		8	6	146.3	325.7	1712	80	6°	0	24.5
T3	100		8	6	168.8	303.2	2568	120	3°	0	24.5
T4	100		8	6	101.4	370.6	2568	120	6°	0	24.5
T3A	66.4	133.6	8	6	168.8	303.2	2568	120	3°	1.5°	24.5

Примечание: b_f^0, b_f^L – ширина полок двутавра в торцевых сечениях с меньшей (h_0) и большей (h_L) высотой, соответственно; L – длина модели; $\lambda_y^{mid} = L/i_y^{mid}$ – «средняя» гибкость элемента (вычислена на основании радиуса инерции среднего по длине сечения i_y^{mid}); β_1 – взаимный угол наклона поясов; β_2 – угол сужения поясов.

Загружение элементов продольной силой N в плоскости большей жесткости осуществлялось по следующим схемам:

- Схема № 1: приложение силы с односторонними эксцентриситетами (Рисунок 4.13а);
- Схема № 2: к меньшему сечению прикладывалась сила без эксцентриситета, т.е. $e_{y,0} = 0$ (Рисунок 4.13б);
- Схема № 3: приложение силы с разносторонними эксцентриситетами (Рисунок 4.13в).

**Рисунок 4.13.** Схемы нагружений элементов в плоскости большей жесткости

Значения относительных эксцентриситетов приложения продольной силы к большему сечению $m_{x,L}$ ($m_{x,L} = e_{y,L} \frac{A_L}{W_{x,L}}$) принимались равными 1.5; 7.5; 15.

Значения эксцентриситетов приложения продольной силы к меньшему сечению вычислялись на основании равенства фибровых напряжений в концевых сечениях (при сжатии с изгибом относительно оси x):

$$\frac{N}{A_L} + \frac{Ne_{y,L}}{W_{x,L}} = \frac{N}{A_0} + \frac{Ne_{y,0}}{W_{x,0}}. \quad (4.4)$$

Загружение элементов в плоскости меньшей жесткости происходило по схеме с равными односторонними «случайными» эксцентриситетами, вычисляемыми по формуле, соответствующей Нормам [89]:

$$e_{x,0} = e_{x,L} = e_x = \frac{L}{750} + \frac{i_x^{mid}}{20}. \quad (4.5)$$

Величины эксцентриситетов представлены в Таблице 4.8.

Граничные условия опорных сечений были приняты следующими – свободный поворот относительно осей x , y ; отсутствие кручения (поворота относительно оси z); свободная деформация.

Расчетная схема исследуемых моделей и пространственные перемещения сечений представлены на Рисунке 4.14.

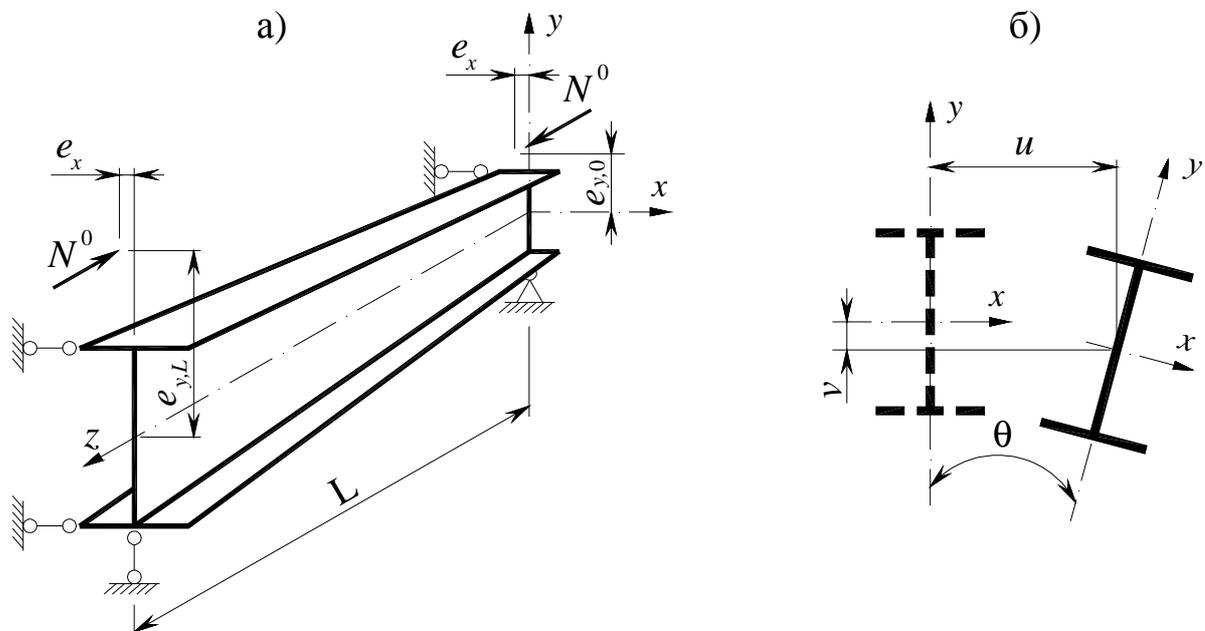


Рисунок 4.14. Расчетная схема моделей (а) и пространственные перемещения сечений в процессе нагружения (б)

Таблица 4.8. Эксцентриситеты приложения силы N^0

Для выполнения численных расчетов в комплексе ANSYS Mechanical APDL 12.1 была выбрана оболочечная (тип оболочек – SHELL181) расчетная модель. Такая модель позволяет прикладывать внешние бимоменты к торцам исследуемых элементов, в то время как «тонкостенные» балочные КЭ типа BEAM188/189 такой опции не имеют и также, как указано в Главе 2, они не позволяют учитывать особенности кручения тонкостенных стержней открытого профиля переменной жесткости.

Мо- дель	$m_{x,L}$	$e_{y,L}$, см	$e_{y,0}$, см	$m_{x,0}$	e_x , см
T1	1.5	13.09	6.86	1.08	0.34
	7.5	65.47	38.61	6.07	
	15	130.93	78.3	12.31	
T2	1.5	14.74	3.64	0.72	0.34
	7.5	73.7	24.47	4.86	
	15	147.4	50.51	10.04	
T3	1.5	13.91	5.11	0.89	0.45
	7.5	69.57	31.08	5.44	
	15	139.14	63.54	11.12	
T4	1.5	16.29	1.49	0.41	0.45
	7.5	81.46	13.6	3.82	
	15	162.93	28.75	8.08	
T3A	1.5	14.98	1.46	0.28	0.45
	7.5	74.91	17.41	3.36	
	15	149.82	37.34	7.2	

Общий вид конечно-элементной модели с приложенными нагрузками представлен на Рисунке 4.15б.

Для реализации принятых граничных условий в численных расчетах МКЭ были наложены связи в трех точках (Рисунок 4.15а) торцевых сечений элементов. В Таблице 4.9 представлены перемещения (см. Рисунок 4.14б), которые закреплены наложенными связями.

Таблица 4.9. Ограничение перемещений торцевых сечений

Большее сечение ($z = L$)			Меньшее сечение ($z = 0$)		
Точка 1	Точка 2	Точка 3	Точка 1	Точка 2	Точка 3
$u = 0$	$v = 0$	$u = 0$	$u = 0$	$w = 0$ $v = 0$	$u = 0$

Примечание: w – перемещения по направлению оси z .

Опорные плиты элементов были приняты толщиной $t_c = 6..8$ мм (Рисунок 4.15а и 4.15б). Их толщина подобрана таким образом, чтобы не препятствовать деформации и в то же время сохранять контур торцевых сечений недеформируемым (согласно гипотезе) в процессе нагружения.

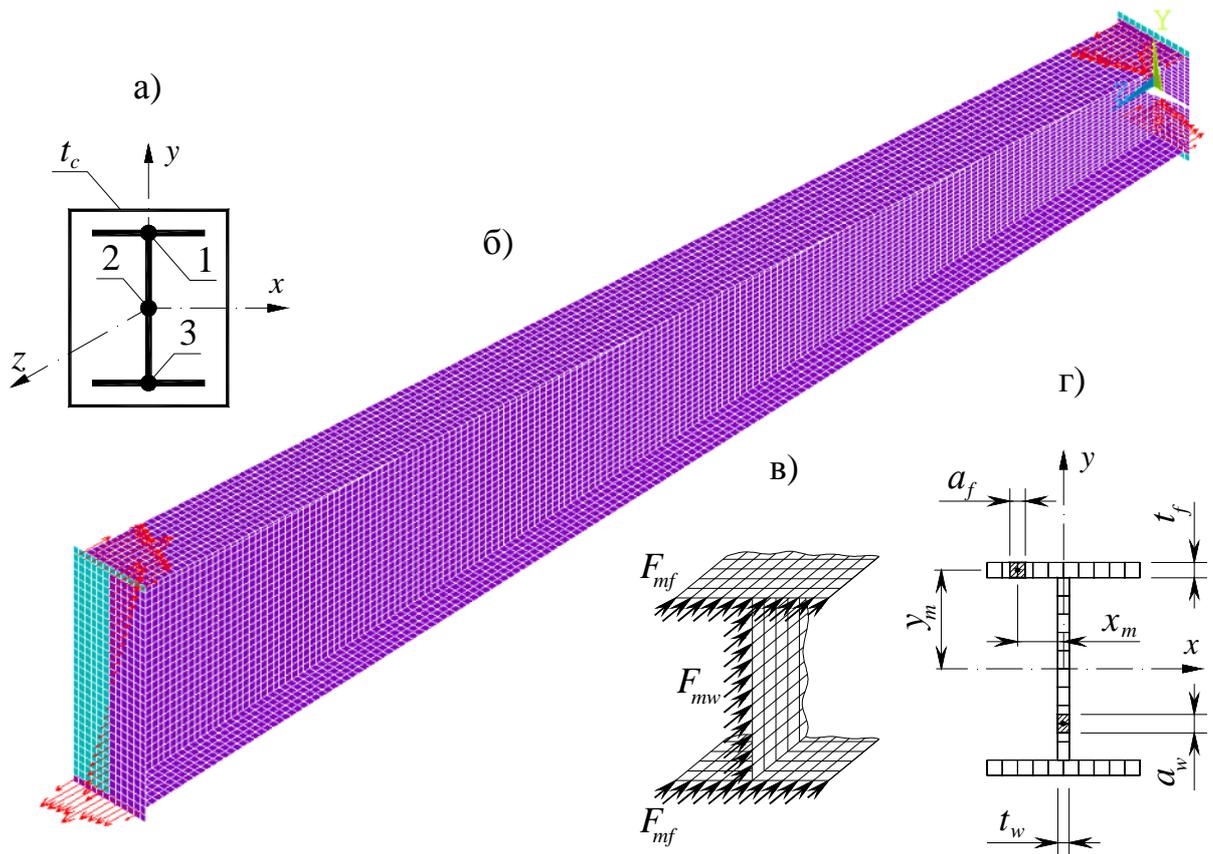


Рисунок 4.15. Схема закрепления торцевых сечений (а), общий вид расчетной КЭ модели (б), схема приложения внешней нагрузки к торцу стержня (в), схема вычисления продольной нагрузки на КЭ (г)

Сжимающая с двухосными эксцентриситетами продольная сила N^0 (см. Рисунок 4.14а) передавалась на расчетную модель в виде определенного количества сил F_{mf} (на пояса) и F_{mw} (на стенку), приложенных в узлах конечно-элементной сетки торцевых сечений (Рисунок 4.15в).

Для этого N^0 разделялась на 4 нагрузки: N, M_x, M_y, B_ω :

$$N = N^0; M_x = N^0 e_y; M_y = N^0 e_x; B_\omega = N^0 e_x e_y. \quad (4.6)$$

Далее, в предположении действия нагрузок на отдельно взятое сечение, находились суммарные нормальные напряжения в срединной поверхности полок и стенки (Рисунок 4.16) от действия 4-х нагрузок на торцы:

$$\sum \sigma_m = \frac{N}{A} + \frac{M_x}{J_x} y_m + \frac{M_y}{J_y} x_m + \frac{B_\omega}{J_\omega} \omega_m, \quad (4.7)$$

где x_m, y_m, ω_m – координаты центров тяжести КЭ торцевых сечений (Рисунок 4.15г).

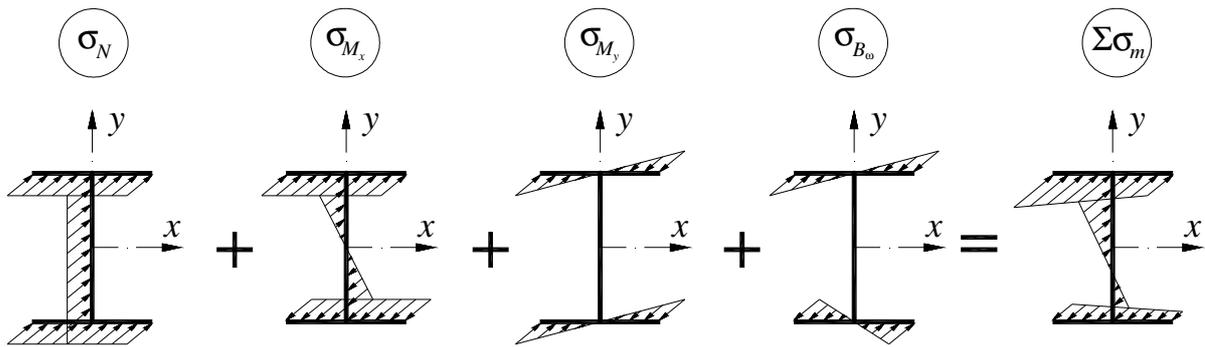


Рисунок 4.16. Нормальные напряжения в торцевых сечениях от действия внешних нагрузок

После этого вычислялись силы F_{mf} и F_{mw} , приложенные в каждом узле сетки как внешние нагрузки (Рисунок 14.5в):

$$F_{mw} = \sum \sigma_m t_w a_w; \quad F_{mf} = \sum \sigma_m t_f a_f, \quad (4.8)$$

где a_w, a_f – размер стороны конечного элемента стенки и поясов, соответственно (Рисунок 14.5г).

Таким образом, путем приложения локальных сил F_{mf} и F_{mw} в узловых точках торцевых сечений, достигалось полное соответствие между теоретической и МКЭ расчетными схемами.

Ввиду того, что для подобного рода задач характерны «малые» деформации, то зависимость « σ - ε » для стали С245 задавалась не в истинных значениях, как это предусмотрено в расчетном комплексе ANSYS, а в инженерных, т.к. при ожидаемых величинах деформаций разница между ними несущественна [123].

Зависимость « σ - ε » принималась согласно унифицированной диаграмме работы стали [22] для марки С245. Точки мульти-линейной диаграммы деформирования, задаваемой в МКЭ расчете, приведены в Таблице 4.10.

Таблица 4.10. Точки мульти-линейной диаграммы « σ - ε »

σ , кН/см ²	0	19.6	21.07	22.173	23.055	23.618	24.035	24.28	24.427	24.476	24.5
$\varepsilon \cdot 10^5$	0	95	107	119	131	143	155	167	178	190	202

После задания всех исходных данных выполнялся нелинейный расчет с пошаговым увеличением силы $\Delta N = 1$ кН. За предельную принималась нагрузка, предшествующая этапу, при котором решение расходилось.

Результаты сравнения предельных сил, полученных по МКЭ ($N_{\text{МКЭ}}$) и по разработанному методу ($N_{\text{расч}}$), приведены в Таблице 4.11 и 4.12. Некоторые качественные результаты расчетов представлены на графиках перемещений среднего по длине сечения моделей-образцов в процессе нагружения (Рисунок 4.17 и 4.18), а также перемещений v , u и углов закручивания θ сечений при различном уровне нагружения (Рисунок 4.19 и 4.20).

Сравнение результатов полученных с помощью разработанного аналитически-численного метода расчета с результатами численного исследования МКЭ показало, что в 100% расчетов расхождение в предельных силах не превышает 3% для всех схем загрузки. Сравнение пространственных перемещений сечений стержней в зависимости от уровня нагружения также показало почти полное соответствие между ними, что свидетельствует о достоверности разработанного метода.

Таким образом, сложная и ресурсозатратная оболочечная МКЭ задача о пространственной устойчивости стержня может быть решена с помощью разработанного аналитически-численного метода. При этом разработанный метод позволяет получать решение на несколько порядков быстрее и не требует от пользователя навыков владения специализированными расчетными комплексами и языками программирования.

Таблица 4.11. Сравнение предельных сил (начало)

Модель-образец	Гибкость средняя, λ_y^{mid}	Угол наклона поясов, β_1	Схема	Относит. эксцентр., $m_{x,L}$	Предельные силы		Расхождение $\frac{N_{\text{МКЭ}} - N_{\text{расч}}}{N_{\text{МКЭ}}} \cdot 100\%$
					$N_{\text{МКЭ}}$, кН	$N_{\text{расч}}$, кН	
Т1	80	3°	№ 1	1.5	247.6	246.2	+0.6
				7.5	79.6	78.3	+1.6
				15	43.1	42.2	+2.1
			№ 2	1.5	289.8	291	-0.4
				7.5	101.6	103.4	-1.8
				15	54.9	54	+1.6
			№ 3	1.5	326.2	333.8	-2.3
				7.5	104.6	106.7	-2.0
				15	54.55	53.9	+1.2

Таблица 4.12. Сравнение предельных сил (окончание)

Модель-образец	Гибкость средняя, λ_y^{mid}	Угол наклона поясов, β_1	Схема	Относит. эксцентр., $m_{x,L}$	Предельные силы		Расхождение $\frac{N_{МКЭ} - N_{расч}}{N_{МКЭ}} \cdot 100\%$
					$N_{МКЭ}$, кН	$N_{расч}$, кН	
Т2	80	6°	№ 1	1.5	260.97	257.4	+1.4
				7.5	85.1	82.8	+2.7
				15	45.85	44.7	+2.5
			№ 2	1.5	285.1	284.6	+0.2
				7.5	101.45	102	-0.5
				15	55.55	55.8	-0.5
			№ 3	1.5	309	313.1	-1.3
				7.5	115.7	116.6	-0.8
				15	58.6	58.5	+0.2
Т3	120	3°	№ 1	1.5	182.8	183.9	-0.6
				7.5	62.95	63	-0.1
				15	34.375	34.3	+0.2
			№ 2	1.5	203.8	205.6	-0.9
				7.5	79.1	80.1	-1.3
				15	44.1	44.6	-1.1
			№ 3	1.5	226.2	228.9	-1.2
				7.5	94.8	97.4	-2.7
				15	53.45	54.3	-1.6
Т4	120	6°	№ 1	1.5	192.6	192.2	+0.2
				7.5	68.45	67.9	+0.8
				15	37.5	37.2	+1.1
			№ 2	1.5	198.95	199	-0.05
				7.5	76.45	77	-0.7
				15	42.5	42.9	-0.7
			№ 3	1.5	206.2	207.2	-0.5
				7.5	84.7	86	-1.5
				15	47.5	48.4	-1.9
Т3А*	120	3° ($\beta_2=1.5^\circ$)	№ 1	1.5	185	183.1	+1.0
				7.5	67.6	66.6	+1.5
				15	37.2	36.6	+1.6
			№ 2	1.5	193.5	192.2	+0.7
				7.5	82.9	82.7	+0.2
				15	46.9	46.7	+0.4
			№ 3	1.5	202.2	201.5	+0.4
				7.5	98	98.6	-0.6
				15	55.9	56.1	-0.4

* Элемент Т3А – с переменной высотой стенки и шириной поясов

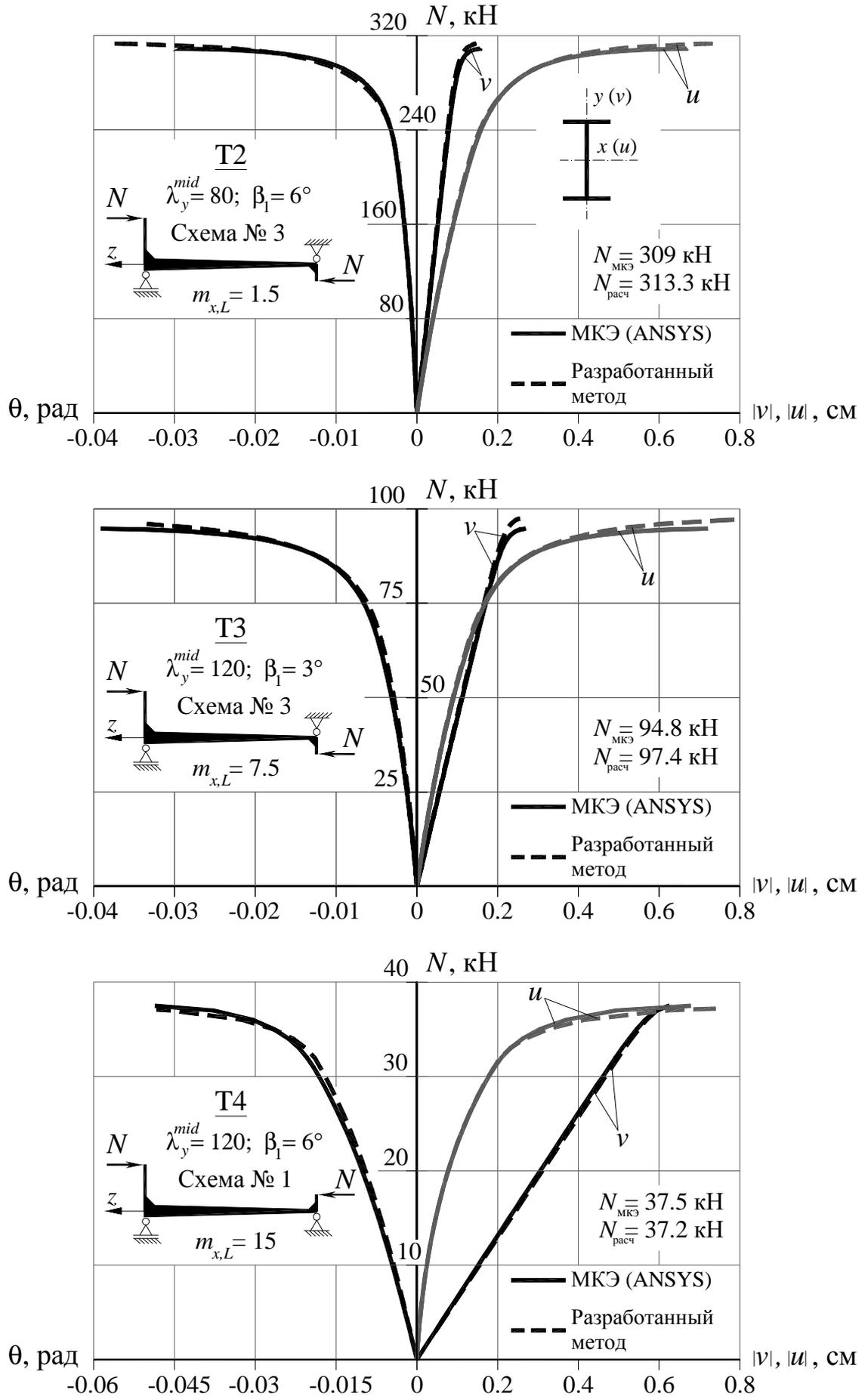


Рисунок 4.17. Перемещения и углы закручивания среднего сечения образцов Т2, Т3, Т4

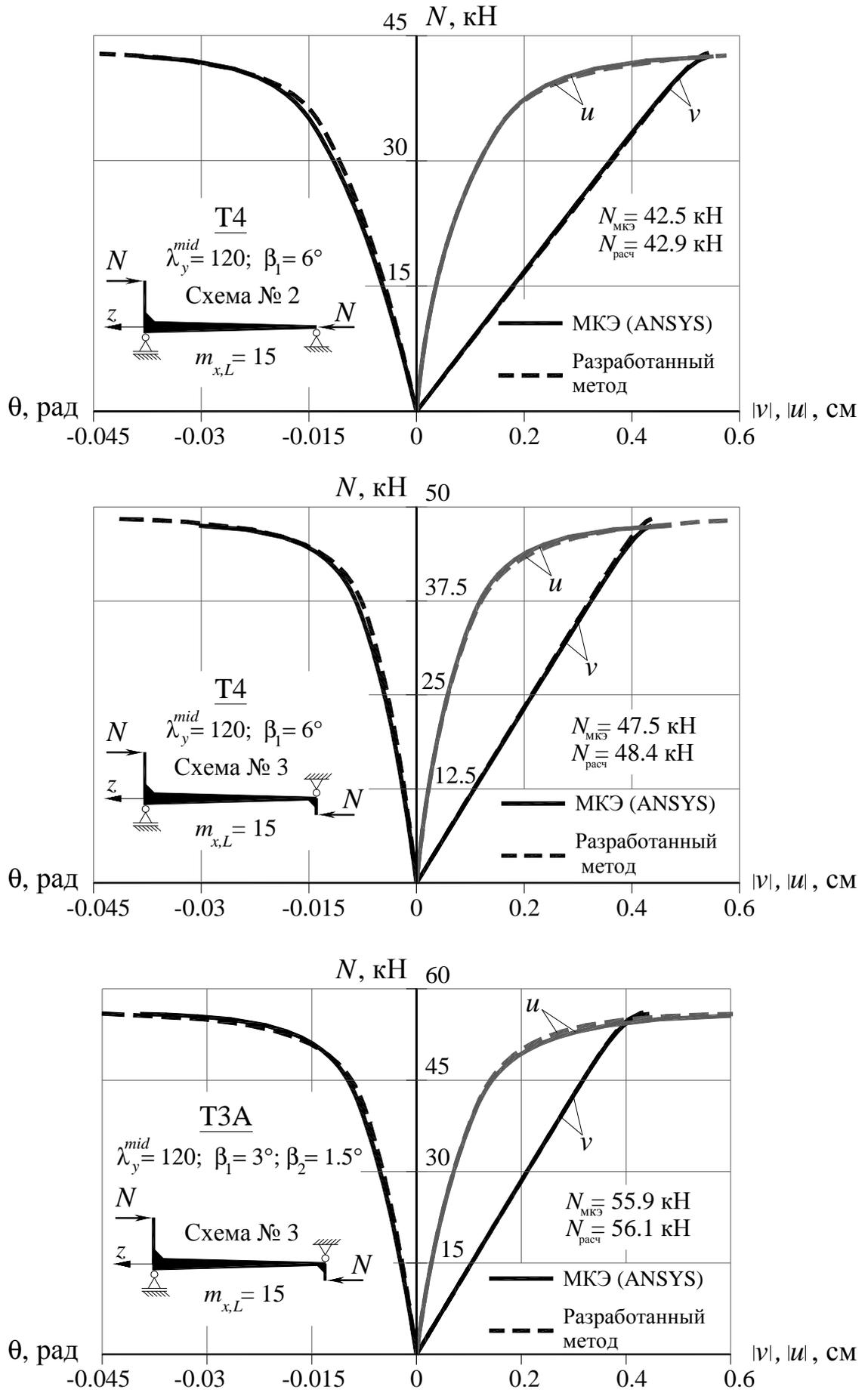


Рисунок 4.18. Перемещения и углы закручивания среднего сечения образцов Т4, Т3А

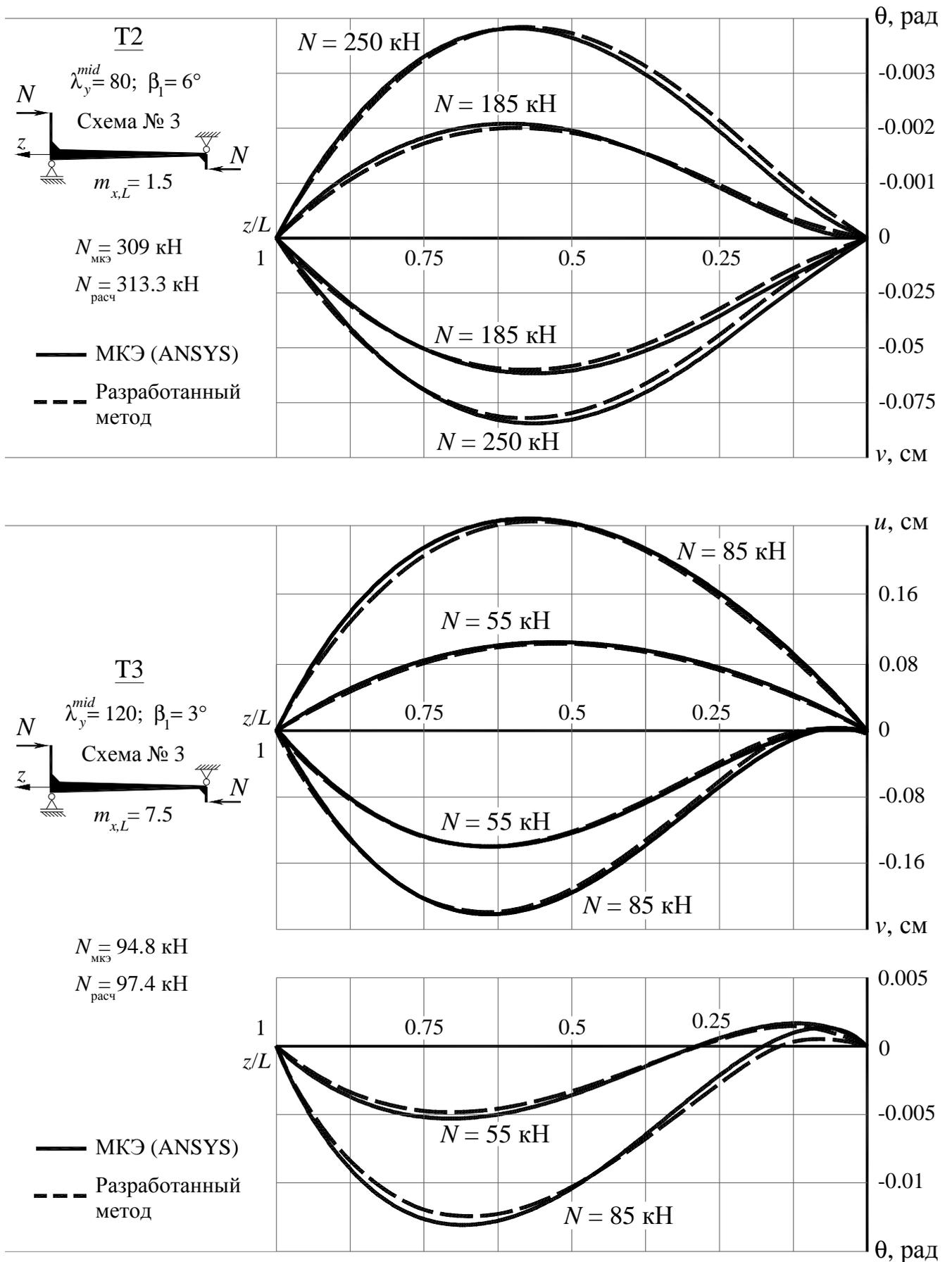


Рисунок 4.19. Осевые перемещения v , u и углы закручивания θ образцов T2, T3 при различном уровне нагружения

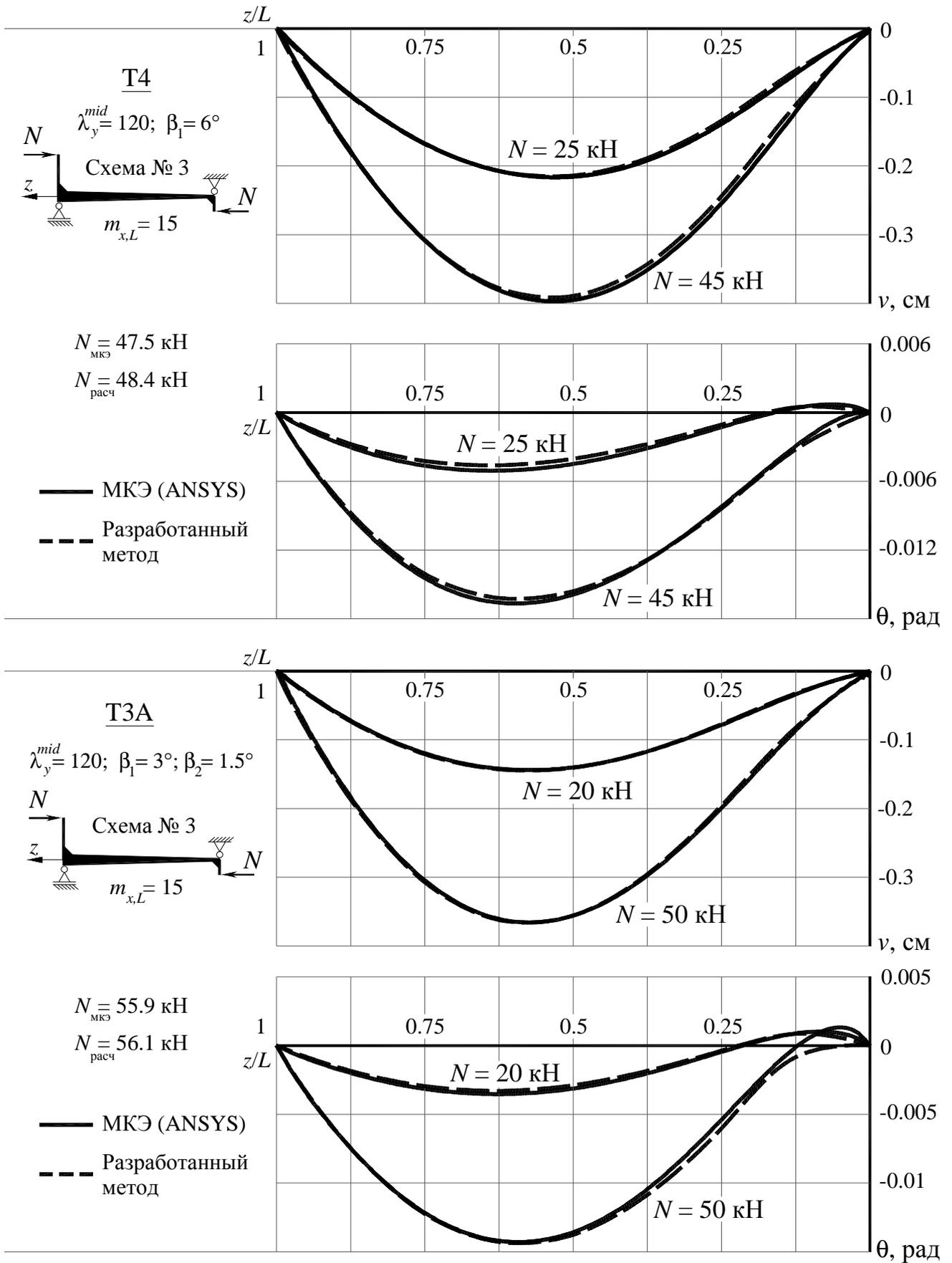


Рисунок 4.19. Осевые перемещения v , u и углы закручивания θ образцов Т4, Т3А при различном уровне нагружения

Выводы по четвертой главе

1. Произведено верификационное исследование достоверности результатов, получаемых с помощью разработанного аналитически-численного метода расчета на пространственную устойчивость стержней переменной жесткости. В рамках исследования было проведено сравнение результатов расчетов по разработанному методу с результатами натурных экспериментов зарубежных авторов и результатами численных исследований автора на основе оболочечных моделей стержней в МКЭ комплексе ANSYS Mechanical APDL 12.1.

2. Сравнение с экспериментальными исследованиями показали, что в 79% случаев (22 из 28 испытанных образцов) расхождение в предельных силах не превышает 7%.

3. Сравнение с теоретическими исследованиями автора с помощью МКЭ показало, что в 100% расчетов расхождение в предельных силах не превышает 3% для всех схем загрузки. Сравнение пространственных перемещений сечений стержней в зависимости от уровня нагружения также показало почти полное соответствие между ними.

Таким образом, сравнение полученных результатов с данными натурных испытаний зарубежных авторов и численного исследования МКЭ автора показали достоверность разработанного аналитически-численного метода решения задач пространственной устойчивости двутавровых стержней переменной жесткости.

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Основные выводы по результатам выполненного исследования:

1. Представлен эффективный численный алгоритм решения бифуркационных задач устойчивости, основанный на методе конечных разностей, для двутавровых стержней, имеющих переменную высоту стенки и/или ширину поясов с учетом возможного стеснения деформации торцов. Получены новые результаты по критическим параметрам сил и соответствующим им изгибным и изгибно-крутильным формам потери устойчивости, которые необходимы для решения задач о пространственной устойчивости стержней переменной жесткости.

2. Проведено сравнение результатов решения бифуркационных задач устойчивости с решением МКЭ в расчетном комплексе ANSYS Mechanical APDL 12.1. Расхождения в значениях критической силы для различных схем нагружения в более чем 74% случаев не превысило 3%, в остальных случаях оно составило до 7.5%, качественное сравнение форм потери устойчивости показало практически полное соответствие между двумя решениями, что свидетельствует о достоверности представленного численного алгоритма.

3. Разработан аналитически-численный метод и программа расчета внецентренно-сжатых бисимметричных стержней двутаврового поперечного сечения с линейно-изменяющейся высотой стенки и шириной поясов. При разработке метода учтены особенности стесненного кручения таких стержней, связанные с наклоном поясов.

4. Получены новые результаты о пространственной устойчивости стержней переменной жесткости в зависимости от следующих рассматриваемых параметров: гибкости, углов наклона и сужения поясов, схемы нагружения, величины эксцентриситетов, стеснении деформации торцов. С целью практического применения результаты представлены в виде коэффициентов устойчивости.

5. Исследовано влияние различных геометрических параметров на пространственную устойчивость стержней переменной жесткости. При этом выявлены следующие новые результаты:

– увеличение устойчивости стержней переменной жесткости относительно призматических стержней с таким же расходом стали зависит от ряда параметров,

используемых в практике проектирования рамных конструкций (гибкости, угла наклона поясов, схемы загрузки, относительных эксцентриситетов). Для стержней с умеренным наклоном поясов (от 3° до 6°), имеющих широкое распространение в рамных конструкциях, повышение устойчивости составляет в среднем от 4 до 32%;

– учет различия концевых двухосных эксцентриситетов продольной силы позволяет вскрыть резервы несущей способности до 50%;

– устойчивость при стеснении депланации торцевых сечений повышается и зависит от гибкости; так при загрузке продольной силой с односторонними эксцентриситетами в случае стеснения депланации только большего торцевого сечения повышение может составлять в среднем 15%, при стеснении обоих торцевых сечений – в среднем 20%.

6. Произведено сравнение результатов расчетов по разработанному аналитически-численному методу с результатами натурных испытаний зарубежных авторов, а также с результатами численного исследования автора с помощью МКЭ в расчетном комплексе ANSYS Mechanical APDL 12.1. Сравнение с натурными испытаниями показало, что в 79% случаев (22 из 28 испытанных образцов) расхождение в предельных силах составило до 7%, а с численным исследованием – до 3%. Кроме того, проведено сравнение пространственных перемещений сечений стержней в зависимости от уровня нагружения, которое показало почти полное соответствие между ними, что свидетельствует о достоверности разработанного аналитически-численного метода расчета.

7. Разработана инженерная методика расчета на пространственную устойчивость двутавровых стержневых элементов рам переменной жесткости (постоянной ширины) из углеродистых сталей, обеспечивающая внедрение

результатов по методике, соответствующей СП 16.13330.2011:
$$\frac{N}{K_{exy} \phi_{exy} A_{mid}} \leq \gamma_c R_y,$$

где ϕ_{exy} – коэффициент пространственной устойчивости для схемы загрузки продольной силой с односторонними эксцентриситетами; K_{exy} – коэффициент перехода к другим схемам загрузки; A_{mid} – площадь среднего поперечного сечения.

На основе разработанного в настоящей диссертации эффективного аналитически-численного метода расчета по пространственную устойчивость стержней переменной жесткости, **перспективами дальнейшей разработки темы** могут являться:

- исследование пространственной устойчивости моносимметричных двутавровых стержней переменной жесткости;
- детальные исследования пространственной устойчивости двутавровых стержней с переменной высотой стенки и шириной поясов;
- разработка инженерной методики расчета на пространственную устойчивость стержней с переменной высотой стенки и шириной поясов;
- исследование и подбор рациональной геометрии стержней в рамках переменной жесткости исходя из условия обеспечения пространственной устойчивости;
- исследование пространственной устойчивости стержней переменной жесткости, раскрепленных из своей плоскости с помощью гибких связей, распорок или подкосов;
- исследование влияния элементов конструктивного оформления двутавровых элементов переменной жесткости на их пространственные деформации и несущую способность;
- исследование пространственной устойчивости швеллеров переменной высоты;
- исследование пространственной устойчивости двутавровых стержней переменной высоты с гибкой стенкой, неподкрепленной ребрами;
- исследование пространственной устойчивости двутавровых стержней переменной высоты с перфорированной стенкой;
- исследование пространственной устойчивости двутавровых стержней переменной высоты с гофрированной стенкой.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. **Александров, А.В.** Сопротивление материалов: Учеб. для вузов / А.В. Александров, Б.П. Державин, В.Д. Потапов; под общ. ред. А.В. Александрова. – М.: Высшая школа, 1995. – 560 с.
2. **Алфутов, Н.А.** Основы расчета на устойчивость упругих систем / Н.А. Алфутов. – 2-е изд., перераб. и доп.. – М.: Машиностроение, 1991. – 336 с.
3. **Аржаков, В.Г.** Облегченные стальные сплошностенчатые рамные конструкции / В.Г. Аржаков. – Якутск: Изд-во Якут. гос. ун-та, 1994. – 61 с.
4. **Артемов, П.Я.** Расчет тонкостенных стержней открытого профиля / П.Я. Артемов, М.И. Любошиц, М.Н. Рудицын; под общ. ред. М.Н. Рудицына. – Минск: Редакционно-издательский отдел БПИ им. И.В. Сталина, 1959. – 138 с.
5. **Астахов, И.В.** Пространственная устойчивость элементов конструкций из холодногнуто́тых профилей : дис. ... канд. техн. наук : 05.23.01 / Астахов Иван Витальевич. – СПб, 2006. – 123 с.
6. **Асташкин, М.В.** Напряженно-деформированные и предельные состояния в сечениях стержневых элементов стальных конструкций при общем случае статического нагружения : дис. ... канд. техн. наук : 05.23.01 / Асташкин Максим Викторович. – СПб, 2003. – 130 с.
7. **Бейлин, Е.А.** К деформационному расчету упругих систем, подверженных одновременному действию активных и параметрических нагрузок / Е.А. Бейлин, Г.И. Белый // Строительная механика и расчет сооружений. – 1976. – № 3. – С. 30-34.
8. **Бейлин, Е.А.** О деформационном расчете тонкостенных прямолинейных стержней в упругой среде / Е.А. Бейлин, С.Е. Кузнецов // Механика стержневых систем и сплошных сред. – 1981. – № 14. – С. 73-82.
9. **Бейлин, Е.А.** Обобщение уравнений Киргхофа-Клебша для тонких и тонкостенных стержней / Е.А. Бейлин // Механика стержневых систем и сплошных сред. – 1969. – № 62. – С. 5-19.

10. **Бейлин, Е.А.** Общие уравнения деформационного расчета и устойчивости тонкостенных стержней // Строительная механика и расчет сооружений. – 1969. – № 5. – С. 35-41.

11. **Бейлин, Е.А.** Статика и динамика тонкостенных стержней с криволинейной осью (деформационный расчет, устойчивость, колебания и учет эффекта Кармана): дис. ... д-ра техн. наук : 05.23.01 / Бейлин Ефим Абрамович. – Л., 1972. – 318 с.

12. **Бейлин, Е.А.** Элементы теории кручения тонкостенных стержней произвольного профиля: учебное пособие / Е.А. Бейлин; СПбГАСУ. – СПб.: Гуманистика, 2003. – 113 с.

13. **Белый, Г.И.** К расчету на устойчивость стержневых элементов стальных конструкций / Г.И. Белый // Вестник гражданских инженеров. – 2013. – № 2 (37). – С. 44-48.

14. **Белый, Г.И.** О пространственной деформации тонкостенных стержней, сжатых с двухосными эксцентриситетами / Г.И. Белый, Н.Н. Родиков // Исследования по механике строительных конструкций и материалов. – Л., 1982. – № 32. – С. 30-36.

15. **Белый, Г.И.** О расчете пространственно-деформируемых стержневых элементов металлических конструкций / Г.И. Белый // Металлические конструкции и испытания сооружений. – 1987. – № 21. – С. 48-55.

16. **Белый, Г.И.** О расчете упругих стержней по деформированной схеме при действии активных и параметрических нагрузок / Г.И. Белый // Механика стержневых систем и сплошных сред. – 1980 – № 32. – С. 41-48.

17. **Белый, Г.И.** О расчете упругопластических тонкостенных стержней по пространственно-деформированной схеме с учетом касательных напряжений деформаций сдвига / Г.И. Белый // Металлические конструкции и испытания сооружений. – 1985. – № 62 – С. 10-20.

18. **Белый, Г.И.** Пространственная работа и предельные состояния стержневых элементов металлических конструкций : дис. ... д-ра техн. наук : 05.23.01 / Белый Григорий Иванович. – Л., 1987. – 358 с.

19. **Белый, Г.И.** Пространственная устойчивость стальных колонн рам одноэтажных промзданий / Г.И. Белый, В.Б. Мазур // Металлические конструкции и испытания сооружений. – Л., 1986. – С. 49-57.

20. **Белый, Г.И.** Расчет металлических стержневых элементов, входящих в состав конструкции по пространственно-деформированной схеме / Г.И. Белый // Металлические конструкции и испытания сооружений. – 1983. – № 32 – С. 42-48.

21. **Белый, Г.И.** Расчет упругопластических тонкостенных стержней по пространственно-деформированной схеме / Г.И. Белый // Строительная механика и расчет сооружений. – 1983. – № 42. – С. 40-48.

22. **Бельский, Г.Е.** О едином подходе к использованию диаграмм работы строительных сталей / Г.Е. Бельский, П.Д. Одесский // Промышленное строительство. – 1980. – № 7. – С. 4-6.

23. **Беляева, С.Ю.** Исследование несущей способности элементов стальной рамы переменного сечения при ошибках сборки и монтажа / С.Ю. Беляева, Д.Н. Кузнецов, И.А. Ковылина // Современное строительство и архитектура. – 2016. – № 1 (01). – С. 22-26.

24. **Білик, С.І.** Методологія перевірки просторової стійкості сталевих колон зі змінною висотою перерізу з площинидії згинального моменту / С.І. Білик // Металеви конструкції. – 2008. – Том 14. – № 4. – С. 279-284.

25. **Білик, С.І.** Просторова стійкість сталевих колон зі змінною висотою перерізу / С.І. Білик // Збірник наукових праць Українського науково-дослідного та проектного інституту сталевих конструкцій імені В.М. Шимановського. – 2008. – Вип. 1. – С. 120-126.

26. **Білик, С.І.** Рациональні сталеві каркаси малоенергоємних будівель із двотаврів змінного перерізу : автореф. дис. ... д-ра техн. наук : 05.23.01 / Білик Сергій Іванович. – Київ, 2008. – 37 с.

27. **Блейх, Ф.** Устойчивость металлических конструкций / Фридрих Блейх; перевод с англ. Ж.С. Сисляна; под ред. Э.И. Григолюка. – М.: Физматгиз, 1959. – 544 с.

28. **Богданович, А.У.** Метод структурно-пластических ослаблений при расчетах сжатых стержней на устойчивость / А.У. Богданович // Известия КГАСУ. – 2006. – № 2(6). – С. 34-37.

29. **Богданович, А.У.** Пластический шарнир в тонкостенном стержне переменного сечения при продольном сжатии / А.У. Богданович, И.Л. Кузнецов // Изв. вузов. Строительство. – 2004. – № 4. – С. 110-116.

30. **Богданович, А.У.** Продольное сжатие тонкостенного стержня переменного сечения при различных вариантах закрепления торцов. Сообщение 1 / А.У. Богданович, И.Л. Кузнецов // Изв. вузов. Строительство. – 2005. – № 10. – С. 19-25.

31. **Богданович, А.У.** Тонкостенные стержни переменного сечения: монография / А.У. Богданович. – Казань: КГАСУ, 2008. – 323 с.

32. **Богданович, А.У.** Уравнения сжатия тонкостенных стержней непрерывно-переменного сечения / А.У. Богданович, И.Л. Кузнецов // Изв. вузов. Строительство. – 2002. – № 6. – С. 12-18.

33. **Богданович, А.У.** Устойчивость тонкостенного стержня непрерывно-переменного сечения при продольном сжатии / А.У. Богданович, И.Л. Кузнецов // Изв. вузов. Строительство. – 2002. – № 7. – С. 127-132.

34. **Богданович, А.У.** Устойчивость тонкостенного стержня непрерывно-переменного сечения при продольном сжатии с учетом нормативных эксцентриситетов / А.У. Богданович, И.Л. Кузнецов // Изв. вузов. Строительство. – 2003. – № 9. – С. 11-18.

35. **Богданович, А.У.** Устойчивость тонкостенного стержня переменного сечения при продольном сжатии и учет нелинейных деформаций / А.У. Богданович, И.Л. Кузнецов // Изв. вузов. Строительство. – 2003. – № 2. – С. 123-128.

36. **Болотин, В.В.** Прочность, устойчивость, колебания. Справочник в трех томах. Том 3. / В.В. Болотин, А.С. Вольмир, М.Ф. Диментберг; под общ. ред. И.А. Биргера и Я.Г. Пановко. – М.: Машиностроение, 1968. – 567 с.

37. **Болотин, В.В.** О понятии устойчивости в строительной механике / В.В. Болотин // Проблемы устойчивости в строительной механике. – М., 1965. – С. 6-27.
38. **Броуде, Б.М.** К теории тонкостенных стержней открытого профиля / Б.М. Броуде // Исследования по теории сооружений. – М., 1960. – Вып. 5. – С. 6-11.
39. **Броуде, Б.М.** О линеаризации уравнений устойчивости равновесия внецентренно-сжатого стержня / Б.М. Броуде // Исследования по теории сооружений. – М., 1959. – Вып. 8. – С. 205-223.
40. **Броуде, Б.М.** Об устойчивости стержней, сжатых с двухосным эксцентриситетом / Б.М. Броуде // Расчет пространственных конструкций. – М., 1959. – Вып. 5. – С. 37-50.
41. **Бычков, Д.В.** Строительная механика стержневых тонкостенных конструкций / Д.В. Бычков. – М.: Госстройиздат, 1964. – 475 с.
42. **Валов, А.В.** Численное исследование напряженно-деформированного состояния стальных рам переменного двутаврового сечения / А.В. Валов // International journal for computational civil and structural engineering. – 2008. – Vol. 4. – Issue 2. – С. 39-41.
43. **Винокуров, Л.П.** Расчет тонкостенных стержней переменного сечения открытого профиля / Л.П. Винокуров, В.А. Овчаренко // Изв. вузов. Строительство и архитектура. – 1968. – № 9. – С.31-34.
44. **Винокуров, Л.П.** Стесненное кручение двутавра переменного сечения / Л.П. Винокуров, В.А. Овчаренко // Строительная механика и расчет сооружений. – 1970. – № 3. – С. 31-35.
45. **Власов, В.З.** Тонкостенные упругие стержни / В.З. Власов. – М.: Физматгиз, 1959. – 566 с.
46. **Вольмир, А.С.** Устойчивость деформируемых систем / А.С. Вольмир. – М.: Наука, 1967. – 984 с.
47. **Воробьев, Л.Н.** Деформационный расчет и устойчивость стержней открытого профиля / Л.Н. Воробьев // Тр. Новочерк. политехн. ин-та. – 1958. – Т. 69/93. – С. 3-48.

48. **Вязьменский, С.П.** О граничных условиях в теории тонкостенных стержней / С.П. Вязьменский // Механика стержневых систем и сплошных сред. – Л., 1969. Вып. 60. – С. 20-29.
49. **Вязьменский, С.П.** О пространственной деформации гибких тонкостенных стержней / С.П. Вязьменский // Тр. Ленингр. инж.-строит. ин-та. – 1957. – Вып. 26. – С. 270-313.
50. **Вязьменский, С.П.** Приближенное решение задачи о расчете прямолинейных упругих стержней по деформированному состоянию / С.П. Вязьменский // Механика стержневых систем и сплошных сред. – Л., 1966. – Вып. 49. – С. 268-285.
51. **Геммерлинг, А.В.** Расчет стержневых систем / А.В. Геммерлинг. – М.: Стройиздат, 1974. – 207 с.
52. **Глітін, О.Б.** Оптимізація поперечних рам каркасів з елементами змінної жорсткості : автореф. дис. ... канд. техн. наук : 05.23.01 / Глітін Олександр Борисович. – Київ, 2008. – 20 с.
53. **ГОСТ 1497-84.** Металлы. Методы испытаний на растяжение. – М.: Стандартиформ, 2008. – 22 с.
54. **Графов, Н.С.** Расчет рамы переменного сечения в геометрически и физически нелинейной постановке / Н.С. Графов // Промышленное и гражданское строительство. – 2013. – № 2. – С. 47-49.
55. **Джанелидзе, Г.Ю.** Статика упругих тонкостенных стержней / Г.Ю. Джанелидзе, Я.Г. Пановко. – М.: Гостехиздат, 1948. – 208 с.
56. **Динник, А.Н.** Продольный изгиб. Кручение / А.Н. Динник. – М.: Изд-во АН СССР, 1955. – 392 с.
57. **Дробязко, Л.Е.** Легкие конструкции сельскохозяйственных зданий / Л.Е. Дробязко. – К.: Будівельник, 1985. – 136 с.
58. **Енджиевский, Л.В.** Каркасы зданий из легких металлических конструкций и их элементы / Л.В. Енджиевский, В.Д. Надеяев, И.Я. Петухова. – М.: Изд-во АСВ, 1998. – 247 с.

59. **Зарифьян, А.З.** Деформационный расчет и определение несущей способности внецентренно-сжатых тонкостенных стержней / А.З. Зарифьян, А.Н. Дудченко // Прочность, устойчивость и колебания инженерных конструкций. – Новочеркасск, 1974. – Т. 305. – С. 51-57.

60. **Зарифьян, А.З.** Расчет по деформированной схеме и определение несущей способности тонкостенных стержней открытого профиля // Прочность, устойчивость и колебания инженерных конструкций. – Новочеркасск, 1974. – Т. 305. – С. 35-42.

61. Инженерные технологии построения расчетных моделей и анализа результатов в системе SCAD Office: модели металлокаркасов [Электронный ресурс] / М. Горбушко и др. // CADmaster. – 2006. – № 5. – С. 82-93. – Режим доступа: <http://www.cadmater.ru/>, свободный (дата обращения: 16.06.2014)

62. **Ильюшин, А.А.** Пластичность / А.А. Ильюшин. – М.: Гостехиздат, 1948. – 376 с.

63. Каталог объектов ООО «Научно-исследовательская и проектно-строительная фирма УНИКОН» [Электронный ресурс]. – Кемерово, 2012. – Режим доступа: <http://www.uniconst.ru/files/>, свободный (дата обращения: 10.12.2013).

64. **Катюшин, В.В.** Здания с каркасами из стальных рам переменного сечения (расчет, проектирование, строительство): монография / В.В. Катюшин. – М.: Стройиздат, 2005. – 656 с.

65. **Климов, В.И.** Расчет открытых оболочек типа авиаконструкций / В.И. Климов. – М.: Оборонгиз, 1957. – 158 с.

66. **Климов, В.И.** Расчет тонкостенных конических стержней открытого профиля / В.И. Климов // Труды МАИ. – 1960. – Вып. 130. – С. 57-87.

67. **Колесов, А.И.** Апробация инженерной методики расчета несущей способности стальных рам непрерывного переменного двутаврового сечения / А.И. Колесов, А.А. Лапшин, А.В. Валов // Приволжский научный журнал. – 2007. – № 4. – С. 21-28.

68. **Колесов, А.И.** Инженерная методика расчета несущей способности стальных рам непрерывного переменного двутаврового сечения / А.И. Колесов, А.А. Лапшин, А.В. Валов // Приволжский научный журнал. – 2007. – № 3. – С. 62-68.

69. **Колесов, А.И.** Современные методы исследования тонкостенных стальных конструкций / А.И. Колесов, А.А. Лапшин, А.В. Валов // Приволжский научный журнал. – 2007. – № 1. – С. 28-33.

70. **Коломиец, В.П.** Метод определения напряжений и деформаций в сечении балки при сложном нагружении с учетом действительной диаграммы σ - ϵ / В.П. Коломиец // Известия высших учебных заведений. Серия «Авиационная техника». – 1966. – № 1. – С. 63-71.

71. **Кудишин, Ю.И.** Металлические конструкции: учебник для студ. высш. учеб. заведений / Ю.И. Кудишин, Е.И. Беленя, В.С. Игнатьева; под общ. ред. Ю.И. Кудишина. – М.: Академия, 2010. – 681 с.

72. **Кузнецов, А.Ю.** Прочность и пространственная устойчивость составных стержневых элементов конструкций из холодногнутых профилей : дис. ... канд. техн. наук : 05.23.01 / Кузнецов Алексей Юрьевич. – СПб, 2013. – 142 с.

73. **Лейтес, С.Д.** Устойчивость сжатых стальных стержней / С.Д. Лейтес. – М.: Госстройиздат, 1954. – 308 с.

74. **Лейтес, С.Д.** Устойчивость упруго-закрепленных сжатых стержней, жесткость которых изменяется по степенному закону / С.Д. Лейтес // Материалы по металлическим конструкциям. – М.: Стройиздат, 1973. – Вып. 17. – С. 127-148.

75. **Малышкина, И.Н.** Анализ конструктивных решений промзданий комплектной поставки / И.Н. Малышкина // Исследования легких металлических конструкций для зданий комплектной поставки: сб. науч. тр. – Красноярск: Красноярский ПромстройНИИпроект, 1987. – С. 7-23.

76. **Малышкина, И.Н.** Рама переменного сечения с гибкой стенкой / И.Н. Малышкина // Исследования легких металлических конструкций для зданий комплектной поставки: сб. науч. тр. – Красноярск: Красноярский ПромстройНИИпроект, 1987. – С. 50-68.

77. **Металлические конструкции.** В 3т. Т. 2. Конструкции зданий: Учеб. для строит. вузов / В.В. Горев, Б.Ю. Уваров, В.В. Филиппов, Г.И. Белый и др.; Под ред. В.В. Горева. – 3-е изд., стер. – М.: Высш. шк., 2004. – 528 с.

78. **Михаськин, В.В.** Влияние сварочных процессов на пространственную устойчивость усиливаемых под нагрузкой элементов стержневых конструкций : дис. ... канд. техн. наук : 05.23.01 / Михаськин Владимир Владимирович. – СПб, 2010. – 201 с.

79. **Николаи, Б.Л.** Расчет напряжений в тонкостенных упругих стержнях открытого профиля и конической формы / Б.Л. Николаи // Инженерный сборник АН СССР. – М.: Академиздат, 1954. – Т. XX. – С. 132-141.

80. **Пановко, Я.Г.** Устойчивость и колебания упругих систем: Современные концепции, парадоксы и ошибки / Я.Г. Пановко, И.И. Губанова,. – 5-е изд., стереотипное. – М.: КомКнига, 2006. – 352 с.

81. **Перельмутер, А.В.** Расчетные модели сооружений и возможности их анализа / А.В. Перельмутер, В.И. Сливкер. – М.: СКАД СОФТ, 2007. – 654 с.

82. **Пиковский, А.А.** Статика стержневых систем со сжатыми элементами / А.А. Пиковский. – М.: Физматлит, 1961. – 394 с.

83. Пособие по проектированию стальных конструкций (к СНиП II-23-81* «Стальные конструкции») / ЦНИИСК им. Кучеренко Госстроя СССР. – М.: ЦИТП Госстроя СССР, 1989. – 148 с.

84. **Пяткин, П.А.** Прочность и пространственная устойчивость усиленных под нагрузкой стержневых элементов конструкций открытого сечения : дис. ... канд. техн. наук : 05.23.01 / Пяткин Павел Алексеевич. – СПб, 2000. – 136 с.

85. Рекомендации по расчету элементов стальных конструкций на прочность по критерию предельных пластических деформаций / ЦНИИПСК. – М.: Стройиздат, 1980 – 48 с.

86. **Ржаницын, А.Р.** Расчет тонкостенных стержней ступенчато-переменного сечения / А.Р. Ржаницын // Исследования по теории сооружений. – 1951. – Вып. 5. – С. 324-331.

87. **Ржаницын, А.Р.** Устойчивость равновесия упругих систем / А.Р. Ржаницын. – М.: Гостехиздат, 1955. – 475 с.

88. **Родиков, Н.Н.** Устойчивость сжатых с двухосными эксцентриситетами стержневых элементов конструкций из открытых профилей : дис. ... канд. техн. наук : 05.23.01 / Родиков Николай Николаевич. – Л., 1987. – 143 с.

89. **Свод правил СП 16.13330.2011.** Стальные конструкции. Актуализированная редакция СНиП II-23-81*. – М.: ОАО «ЦПП», 2011. – 172 с.

90. **Серия 1.420.3-37.06.** Каркасы стальные «УНИМАК-Р1» одноэтажных производственных зданий с применением рам переменного сечения. Выпуск 0-0. Материалы для проектирования: разработаны ООО «Научно-исследовательская и проектно-строительная фирма «УНИКОН» при участии ООО КЗЛМК «Маяк». – Кемерово, 2007. – 192 с.

91. **Симаков, Ю.Н.** Облегченные конструкции рам для каркасов одноэтажных зданий многоцелевого назначения / Ю.Н. Симаков, В.Н. Николаенко // Новые формы и прочность металлических конструкций : сб. науч. тр. – М.: ЦНИИСК им. Кучеренко, 1989. – С. 92-98.

92. **Симбиркин, В.Н.** Численный анализ напряженно-деформированного состояния и устойчивости стальных конструкций здания Рижского рынка в Москве / В.Н. Симбиркин, А.В. Ананьев // Строительная механика и расчет сооружений. – 2010. – № 3. – С. 49-54.

93. **Скрипникова, Р.А.** Пространственное деформирование неупругого тонкостенного стержня, внецентренно сжатого с двухосным эксцентриситетом / Р.А. Скрипникова // Строительная механика и расчет сооружений. – 1974. – № 3. – С. 32-35.

94. **Снитко, Н.К.** Устойчивость стержней переменного сечения / Н.К. Снитко // Строительная механика и расчет сооружений. – 1968. – № 1. – С. 34-35.

95. **Стрелецкий, Н.С.** Работа сжатых стоек / Н.С. Стрелецкий. – М.: Госстройиздат, 1959. – 283 с.

96. Строительная механика: динамика и устойчивость сооружений / А.В. Александров, Б.Я. Лащеников, А.Ф. Смирнов и др.; под ред. А.Ф. Смирнова. – М.: Стройиздат, 1984. – 415 с.

97. Тимошенко, С.П. Устойчивость упругих систем / С.П. Тимошенко; под ред. В.З. Власова. – М.: ОГИЗ-Гостехиздат, 1946. – 532 с.

98. Трофимов, В.И. Легкие металлические конструкции зданий и сооружений (разработка конструкций, исследования, расчет, изготовление, монтаж): учеб. пособие / В.И. Трофимов, А.М. Каминский. – М.: Изд-во АСВ, 2002. – 576 с.

99. Хигер, М.Ш. О напряженном состоянии конических тонкостенных стержней при линейной функции толщины / М.Ш. Хигер // Прикладная механика. – 1965. – Т. 1. – Вып. 11. – С. 65-70.

100. Хигер, М.Ш. Прочность открытых тонкостенных стержней переменного сечения : автореф. дис. ... канд. техн. наук : 05.23.01 / Хигер М.Ш. – М., 1966. – 8 с.

101. Хигер, М.Ш. Стесненное кручение конических тонкостенных стержней / М.Ш. Хигер // Изв. вузов. Строительство и Архитектура. – 1965. – № 12. – С. 49-54.

102. Хигер, М.Ш. Стесненное кручение тонкостенных стержней переменной толщины / М.Ш. Хигер // Исследования по теории стержней, пластин, оболочек: сборник трудов Московского Инженерно-строительного Института. – 1965. – № 47. – С. 131-141.

103. Шифр 828КМ. Стальные конструкции каркасов одноэтажных производственных зданий с применением несущих рам из двутавров переменной жесткости. Выпуск 1. Конструкции каркасов зданий пролетом 24м с расчетной сейсмичностью до 9 баллов, возводимых в районах с расчетными температурами минус 40° и выше. Чертежи КМ. – М.: ЦНИИпроектлегконструкция, 1987. – 17 л.

104. Экспериментальные исследования ООО «Научно-исследовательская и проектно-строительная фирма УНИКОН» [Электронный ресурс]. – Кемерово, 2012. – Режим доступа: <http://www.uniconst.ru/files/>, свободный (дата обращения: 05.08.2014).

105. Ягн, Ю.И. Изгибно-крутильные деформации тонкостенных стержней открытого профиля / Ю.И. Ягн – М.: Гостехиздат, 1952. – 108 с.

106. **Ясинский, Ф.С.** Избранные работы по устойчивости сжатых стержней / Ф.С. Ясинский; под ред. И.К. Снитко. – М.: Гостехиздат, 1952. – 427 с.
107. A development in the automated design and fabrication of portal framed industrial buildings / P.J. Dowling, T.F. Mears, G.W. Owens, G.K. Raven // *The structural engineer*. – 1982. – Vol. 60A. – P. 311-319.
108. **Aghoury, I.M. El.** Behavior of bi-axially loaded thin-walled tapered beam-columns with doubly symmetric sections / I.M. El Aghoury, M. El Aghoury, A.H. Salem // *Thin-walled structures*. – 2009. – Vol. 47. – P. 1535-1543.
109. **Amirikian, A.** Wedge-beam framing / A. Amirikian // *Transactions of the ASCE*. – 1952. – Vol. 117. – No. 1. – P. 596-631.
110. Analytical solutions attempt for lateral torsional buckling of doubly symmetric web-tapered I-beams / A. B. Benyamina, S. A. Meftah, F. Mohri, El M. Daya // *Engineering Structures*. – 2013. – Vol. 56. – P. 1207-1218.
111. **Andrade, A.** Elastic lateral-torsional buckling behavior of doubly symmetric tapered beam-columns / A. Andrade, D. Camotim, P. Providencia e Costa // *Proceedings of the annual technical session and meeting of the structural stability research council (SSRC): reports on current research activities*. – SSRC. University of Missouri-Rolla, 2005. – P. 445-468.
112. **Andrade, A.** Lateral-torsional buckling of singly symmetric tapered beams: theory and applications / A. Andrade, D. Camotim // *Journal of engineering mechanics*. – 2005. – Vol. 131. – No. 6. – P. 586-597.
113. **Andrade, A.** Lateral-torsional buckling of singly symmetric web-tapered thin-walled I-beams: 1D model vs. shell FEA / A. Andrade, D. Camotim, P. Borges Dinis // *Computers and structures*. – 2007. – Vol. 85. – No. 17. – P. 1343-1359.
114. **Andrade, A.** One-dimensional models for the spatial behavior of tapered thin-walled bars with open cross-sections: static, dynamic and buckling analyses: PhD dissertation [Электронный ресурс] / Anisio Alberto Martinho de Andrade. – University of Coimbra, Portugal. – 2012. – 320 p. – Режим доступа: <https://estudogeral.sib.uc.pt/>, свободный (дата обращения: 05.05.2013).

115. **Appl, F.J.** Buckling of inelastic, tapered, pin-ended columns / F.J. Appl, J.O. Smith // Journal of the engineering mechanics, ASCE. – 1968. – Vol. 94. – No. EM2. – P. 549-558.
116. **AS 4100-1998.** Australian standard: steel structures. – NSW: Standards Australia, 1998. – 198 p.
117. **Banerjee, J.R.** Compact computation of buckling loads for plane frames consisting of tapered members / J.R. Banerjee // Advances in engineering software. – 1987. – Vol. 9. – No. 3. – P. 162-170.
118. **Baptista, A.M.** Design of tapered compression members according to Eurocode 3 / A.M. Baptista, J.P. Muzeau // Journal of constructional steel research. – 1998. – Vol. 46. – P. 146-148.
119. **Baumeister, H.K.** Critical buckling loads for tapered columns / H.K. Baumeister, R.A. Sebrosky // Machine design. – 1975. – Vol. 47. – P. 70-71.
120. **Boissonnade, N.** A geometrically and materially non-linear 3-D beam finite element for the analysis of tapered steel members / N. Boissonnade, R. Maquoui // International journal of steel structures. – 2005. – Vol. 5. – № 5. – P. 413-419.
121. **Boley, B.A.** On the accuracy of the Bernoulli-Euler theory for beams of variable section / B.A. Boley // Journal of applied mechanics. – 1963 – Vol. 30. – P. 373-378.
122. **Bradford, M.A.** Elastic buckling of tapered monosymmetric I-beams / M.A. Bradford, P.E. Cuk // Journal of structural engineering. – 1988. – Vol. 114. – No. 5. – P. 977-996.
123. **Browell, R.** The power of nonlinear materials capabilities. Part 1 of 2 on modeling materials with nonlinear characteristics / R. Browell, G. Lin // ANSYS Solutions. – 2000. – Vol. 2. – № 1.
124. **Butler, D.J.** Elastic buckling tests on laterally and torsionally braced tapered I-beams / D.J. Butler // Welding Research Supplement. – 1966. – Vol. 45. – P. 41s-48s.
125. **Butler, D.J.** The elastic buckling of tapered beam-columns / D.J. Butler, G.B. Anderson // Welding supplement. – 1963. – Vol. 114. – P. 977-996.

126. **Carter, W.O.** Critical buckling loads for tapered columns / W.O. Carter, J.M. Gere // Journal of the structural division, ASCE. – 1962. – Vol. 88. – No. ST1. – P. 1-11.
127. **Chan, S.L.** Buckling analysis of structures composed of tapered members / S.L. Chan // Journal of the structural engineering. – 1990. – Vol. 116. – P. 1893-1906.
128. **Cristutiu, I.M.** Experimental study on laterally restrained steel columns with variable I cross sections / I.M. Cristutiu, D.L. Nunes, A.I. Dogariu // International journal of steel & composite structures. – 2012. – Vol. 13. – № 3. – P. 225-238.
129. **Cristutiu, I.M.** Experimental study on the behavior of tapered web elements under compression and bending moment / I.M. Cristutiu, D.L. Nunes // Mathematical modeling in civil engineering. – 2012. – No. 4. – P. 158-167.
130. **Culver, C.G.** Elastic stability of tapered beam-columns / C.G. Culver, S.M. Preg, Jr. // Journal of the structural division, ASCE. – 1968. – Vol. 94. – No. ST2. – P. 455-470.
131. **Cywinski, Z.** Skrecanie pretow cienkoscienych typu dwuteownika o dwukierunkowej zmienności przekroju / Z. Cywinski // Rozprawy Inżynierskie. – 1968. – № 16. – P. 21-32.
132. **Cywinski, Z.** Skrecanie pretow cienkoscienych typu dwuteownika o zmiennej wysokości srodnika / Z. Cywinski // Rozprawy Inżynierskie. – 1965. – Vol. 2 – № 13. – P. 269-280.
133. **Cywinski, Z.** Statyka i dynamika skrecanego cienkoscienego dwuteownika o zmiennym, bisymetrycznym przekroju poprzecznym / Z. Cywinski // Rozprawy Inżynierskie. – 1969. – № 17. – P. 185-217.
134. **Cywinski, Z.** Techniczna teoria pretow cienkoscienych o zmiennych, otwartych przekrojach zlozonych / Z. Cywinski // Zeszyty Naukowe Politechniki Gdanskiej. – 1968. – Nr. 134. – P. 1-92.
135. **Cywinski, Z.** Teoria skrecania pretow cienkoscienych o zmiennej sztywności / Z. Cywinski // Archiwum Inżynierii Lądowej. – 1964. – Tom X. – № 2. – P. 161-183.
136. **Davis, D.B.** LRFD evaluation of full-scale metal building rigid frame tests: Master's thesis [Электронный ресурс] / Davis Douglas Bradley. – Virginia

Polytechnic Institute and State University, USA. – 1996. – 255 p. – Режим доступа: <https://theses.lib.vt.edu/>, свободный (дата обращения: 05.08.2014).

137. **Dogaki, M.** Lateral-torsional buckling strength of tapered beam-columns under compression and unequal end moments / M. Dogaki, T. Izutani, H. Yonezawa // *Constructional steel design: world developments*. – Taylor & Francis, 2005. – P. 74-77.

138. **Eisenberger, M.** Buckling loads for variable cross-section members with variable axial forces / M. Eisenberger // *International journal of solids and structures*. – 1991 – Vol. 27. – No. 2. – P. 135-413.

139. **Ermopoulos, J.C.** Buckling of tapered bars under stepped axial loads / J.C. Ermopoulos // *Journal of the structural engineering*. – 1986. – Vol. 112. – No. 6. – P. 1346-1354.

140. **EN-1993-1-1:2005.** Eurocode 3: design of steel structures, Part 1-1: general rules and rules for buildings. – Brussels: European committee for standardization. – 2005. – 91 p.

141. **Fogel, C.M.** Elastic strength of tapered columns / C.M. Fogel, R.L. Ketter // *Journal of the structural division, ASCE*. – 1962. – Vol. 88. – No. ST5. – P. 67-106.

142. **Forest, R.** Rigid frame studies, full scale frame tests. Research report No. FSEL/STAR 82-01 [Электронный ресурс] / R. Forest, T.M. Murray. – University of Oklahoma, USA. – 1982. – 109 p. – Режим доступа: <https://ou.edu/>, свободный (дата обращения: 09.08.2014).

143. **Galambos, T.V.** Stability design criteria for metal structures / edited by T.V. Galambos. – 5th ed. – Wiley, 1998. – 944 p.

144. **Goldberg, J.E.** Inelastic buckling of nonuniform columns / J.E. Goldberg, J. Bogdanoff, H. Lo // *Transactions of the ASCE*. – 1957. – Vol. 122. – P. 722-730.

145. **Guo, Y.L.** Elastic torsional-flexural buckling of tapered I beam-columns / Y.L. Guo, Y. Han, W.Q. Hao, T. Liu // *Advances in steel structures*. – 2002. – Vol. 1. – P. 155-162.

146. **Guo, Y.L.** In-plane ultimate load-carrying capacity of tapered I columns / Y.L. Guo, Y. Pan // *Advances in steel structures*. – 2002. – Vol. 1. – P. 147-154.

147. **Hamayoshi, F.** On torsion of I-beams with a web of variable height / F. Hamayoshi // *Memoirs of the faculty of engineering, Hokkaido university*. – 1961. – Vol. 11(2). – P. 209-228.

148. **Horne, M.R.** The stability of tapered and haunched beams / M.R. Horne, H. Shakir-Khalil, S. Akhtar // *ICE Proceedings*. – 1979. – Vol. 67. – Issue 2. – P. 677-694.

149. **Iremonger, M.J.** Finite difference buckling analysis of non-uniform columns / M.J. Iremonger // *Computers and structures*. – 1980. – Vol. 12. – P. 741-748.

150. **Jimenez, G.A.** Further studies on the lateral-torsional buckling of steel web-tapered beam-columns / G.A. Jimenez // *Proceedings of the annual technical session and meeting of the structural stability research council (SSRC): reports on current research activities*. – SSRC. University of Missouri-Rolla, 2006. – P. 267-280.

151. **Jimenez Lopez, G.A.** Inelastic stability of tapered structural members: PhD dissertation [Электронный ресурс] / Gabriel Alejandro Jimenez Lopez. – University of Minnesota, USA. – 1998. – 203 p. – Режим доступа: <http://www.proquest.com/>, платный (дата обращения: 08.10.2012).

152. **Jimenez, G.A.** Inelastic stability of pinned tapered columns / G.A. Jimenez, T.V. Galambos // *Proceedings of the annual technical session and meeting of the structural stability research council (SSRC): reports on current research activities*. – SSRC. University of Florida, 2001. – P. 143-158.

153. **Jimenez, G.A.** Lateral-torsional buckling of aluminum tapered beam-columns / G.A. Jimenez, T.V. Galambos // *Proceedings of the annual stability conference of the structural stability research council (SSRC): reports on current research activities*. – SSRC. University of Florida, 2002. – P. 481-498.

154. **Jimenez, G.A.** Restrained web-tapered columns: a practical design approach / G.A. Jimenez // *Proceedings of the annual technical session and meeting of the structural stability research council (SSRC): reports on current research activities*. – SSRC. University of Missouri-Rolla, 2005. – P. 225-240.

155. **Kaehler, R.C.** Design guide 25. Frame design using web-tapered members / R.C. Kaehler, D.W. White, Y.D. Kim. – AISC, 2011. – 204 p.

156. **Khaleghi, B.** Inelastic stability of tapered, singly-symmetric beam-columns: PhD dissertation [Электронный ресурс] / Bijan Khaleghi. – The University of Oklahoma, USA. – 1982. – 165 p. – Режим доступа: <http://www.proquest.com/>, платный (дата обращения: 08.10.2012).

157. **Kim, M.C.** Elastic and inelastic buckling analysis of thin-walled tapered members // M.C. Kim, K.C. Chang, G.C. Lee // Journal of engineering mechanics. – 1997. – Vol. 123. – P. 727-737.

158. **Kim, Y.D.** Behavior and design of metal building frames using general prismatic and web-tapered steel I-section members: Phd dissertation [Электронный ресурс] / Yoon Duk Kim. – Georgia institute of technology, USA. – 2010. – 528 p. Режим доступа: <https://smartech.gatech.edu>, бесплатный (дата обращения: 19.05.2012).

159. **Kim, Y.D.** Practical buckling solutions for web-tapered members / Y.D. Kim, D.W. White // Proceedings of the annual stability conference of the structural stability research council (SSRC): reports on current research activities. – SSRC. University of Florida, 2007. – P. 259-278.

160. **Kitipornchai, S.** Elastic stability of tapered I-beams / S. Kitipornchai, N.S. Trahair // Journal of the structural division, ASCE. – 1972. – Vol. 98. – No. ST5. – P. 713-728.

161. **Kus, J.** Lateral-torsional buckling of steel beams with simultaneously tapered flanges and web / J. Kus // Steel and Composite Structures. – 2015. – Vol. 19. – Issue 4. – P. 897-916.

162. **Kus, J.** Analiza statecznoscii belek ze zbieznymi przekrojami poprzecznymi: rozprawa doktorska [Электронный ресурс] / Juliusz Kus. – Politechnika Opolska, Poland. – 2012. – 96 p. – Режим доступа: <https://> <http://www.dbc.wroc.pl/>, бесплатный (дата обращения: 19.06.2016).

163. **Lee, G.C.** Bending and buckling strength of tapered structural members / G.C. Lee, M.L. Morrell, S.P. Prawel // Welding research supplement. – 1974. – Vol. 53. – P. 75s-84s.

164. **Lee, G.C.** Design of tapered members / G.C. Lee, M.L. Morrell, R.L. Ketter // Welding research council bulletin. – 1972. – No. 173. – P. 1-32.
165. **Lee, G.C.** The design of single story rigid frames / G.C. Lee, R.L. Ketter, T.L. Hsu. – MBMA, 1981. – 267 p.
166. **Lee, G.C.** Torsional response of tapered I-girders / G.C. Lee, B.A. Szabo // Journal of the structural division, ASCE. – 1967. – Vol. 93. – No. ST5. – P. 233-252.
167. **Lee, L.H.N.** Non-uniform torsion of tapered I-beams / L.H.N. Lee // Journal of the Franklin institute. – 1956. – Vol. 262. – Issue 1. – P. 37-44.
168. **Lei, Z.** Lateral buckling of web-tapered I-beams: A new theory // Z. Lei, T. G. Shu // Journal of constructional steel research. – 2008. – Vol. 64. – Issue 12. – P. 1379-1393.
169. **Li, J.-J.** A second-order inelastic model for steel frames of tapered members with slender web / J.-J. Li, G.-Q. Li, S.L. Chan // Engineering structures. – 2003. – Vol. 25. – P. 1033-1043.
170. **Li, J.-J.** Large-scale testing of steel portal frames comprising tapered beams and columns / J.-J. Li, G.-Q. Li, // Advances in structural engineering. – 2002. – Vol. 5. – No. 2. – P. 259-269.
171. **Lin, K.H.** Inelastic stability of tapered wide-flange columns / K.H. Lin, E.C. Rossow, S.L. Lee // Publications of the IABSE. – 1968. – Vol. 28-II. – P. 113-136.
172. **Marques, L.R.S.** Tapered steel members: flexural and lateral-torsional buckling : PhD dissertation / Marques Liliana Raquel Simoes. – University of Coimbra, Portugal. – 2012. – p. 272.
173. **Newmark, N.M.** Numerical procedure for computing deflections, moments, and buckling loads / N.M. Newmark // ASCE Transactions. – 1943. – Paper No. 2202. – Vol. 108. – P. 1161-1234.
174. **Olowokere, O.** On the design of web-tapered, unequal-flanged structural steel columns / O. Olowokere // Journal of constructional steel research. – 1984. – Vol. 4. – P. 81-116.

175. **Rajasekaran, S.** Equations for tapered thin-walled beams of generic open section / S. Rajasekaran // *Journal of engineering mechanics*. – 1994. – Vol. 120. – No. 8. – P. 1607-1629.
176. **Rankin, G.I.B.** Novel loading tests on full-scale tapered member portal frames / G.I.B. Rankin, J.C. Leinster, D.J. Robinson // *Proceedings of the institution of civil engineers – Structures and buildings*. – 2009. – Vol. 162. – Issue 3. – P. 151-159.
177. **Ronagh, H.R.** Nonlinear analysis of thin-walled members of variable cross-section. Part I: Theory / H.R. Ronagh, M.A. Bradford, M.M. Attard // *Computers and structures*. – 2000. – Vol. 77. – P. 285-299.
178. **Ronagh, H.R.** Nonlinear analysis of thin-walled members of variable cross-section. Part II: Application / H.R. Ronagh, M.A. Bradford, M.M. Attard // *Computers and structures*. – 2000. – Vol. 77. – P. 301-313.
179. **Salem, A.H.** Ultimate capacity of axially loaded thin-walled tapered columns with doubly symmetric sections / A.H. Salem, M. El Aghoury, M.N. Fayed, I.M. El Aghoury, // *Thin-walled structures*. – 2009. – Vol. 47. – P. 931-941.
180. **Salter, J.B.** Tests on tapered steel columns / J.B. Salter, D. Anderson, I.M. May // *The structural engineer*. – 1980. – № 6. – P. 189-193.
181. **Salvadori, M.G.** Numerical computation of buckling loads by finite differences / M.G. Salvadori // *ASCE Transactions*. – 1951. – Vol. 116. – P. 590-624.
182. **Sapalas, V.** FEM stability analysis of tapered beam-columns / V. Sapalas, M. Samofalov, V. Saraskinas // *Journal of civil engineering and management*. – 2005. – Vol. XI. – No. 3. – P. 211-216.
183. **Shiomi, H.** An interaction formula for in-plane ultimate strength of tapered beam-columns / H. Shiomi, S. Nishikawa // *Memoirs of Chubu institution of technology*. – 1981. – Vol. 17-A. – P. 49-54.
184. **Shiomi, H.** An experimental study on ultimate strength of steel tapered beam-columns / H. Shiomi, S. Nishikawa, M. Kurata // *Memoirs of Chubu institution of technology*. – 1983. – Vol. 19-A. – P. 55-66.
185. **Shiomi, H.** Strength formula for tapered beam-columns / H. Shiomi, M. Kurata // *Journal of the structural engineering*. – 1984. – Vol. 110. – No. 7. – P. 1630-1643.

186. **Simo**s da Silva, L. Design of steel structures. Eurocode 3: Design of steel structures. Part 1-1 – General rules and rules for buildings / L. Simoes da Silva, R. Simoes, H. Gervasio. – Ernst & Sohn, 2010. – 446 p.
187. **Smith, W.G.** Analytic solutions for tapered column buckling / W.G. Smith // Computers and structures. – 1988. – Vol. 28. – P. 677-681.
188. **Vickery, B.J.** The behavior at collapse of simple steel frames with tapered members / B.J. Vickery // The structural engineers. – 1962. – № 40(11). – P. 365-376.
189. **Wilde, P.** The torsion of thin-walled bars with variable cross-section / P.Wilde // Archiwum mechaniki stosowanej. – 1968. – Vol. 4. – № 20. – P. 431-443.
190. **Williams, F.W.** Exact or lower bound tapered column buckling loads / F.W. Williams, G. Aston // Journal of structural engineering. – 1989. – Vol. 115. – No. 4. – P. 1088-1100.
191. **Wu, S.B.** Inelastic buckling loads for nonprismatic columns / S.B. Wu // The journal of Chaoyang university of technology. – 1996. – No. 1. – P. 263-279.
192. **Yau, J.-D.** Elastic stability of I-columns subjected to compressions and bi-moments / J.-D. Yau // Journal of Chinese Institute of Engineers. – 2007. – Vol. 30. – No. 4. – P. 569-578.
193. **Yau, J.-D.** Stability of tapered I-beams under torsional moments / J.-D. Yau // Finite elements in analysis and design. – 2006. – Vol. 42. – P. 914-927.
194. **Yang, Y.-B.** Stability of beams with tapered I-sections / Y.-B. Yang, J.-D. Yau // Journal of engineering mechanics. – 1987. – Vol. 113. – No. 9. – P. 1337-1357.
195. **Young, B.W.** Buckling of axially loaded welded steel columns / B.W. Young, K.W. Robinson // The structural engineer. – 1975. – Vol. 53. – No. 5. – P. 203-207.
196. **Ziemian, R.D.** Guide to stability design criteria for metal structures / edited by R.D. Ziemian. – 6th ed. – Wiley, 2010. – 1024 p.

ПРИЛОЖЕНИЕ 1. Внедрение результатов диссертационной работы



НИЦ строительство
научно-исследовательский центр



АКЦИОНЕРНОЕ ОБЩЕСТВО «НАУЧНО-ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ ЦЕНТР «СТРОИТЕЛЬСТВО».
ЦЕНТРАЛЬНЫЙ НАУЧНО-ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ ИНСТИТУТ СТРОИТЕЛЬНЫХ КОНСТРУКЦИЙ
ИМЕНИ В. А. КУЧЕРЕНКО

№ 3-446 от «28» 03 2017г.

АКТ

о практическом использовании результатов диссертационной работы аспиранта кафедры «Строительных конструкций» СПбГАСУ «Санкт-Петербургский государственный архитектурно-строительный Университет», г. Санкт-Петербург, Аскинази Владимира Юрьевича на тему: «Пространственная устойчивость элементов стальных рамных конструкций переменной жесткости» на соискание ученой степени кандидата технических наук по специальности 05.23.01 – Строительные конструкции, здания и сооружения.

Содержащаяся в диссертации новая методика расчета на пространственную устойчивость двутавровых элементов рам переменной жесткости на основе результатов теоретического исследования и сравнения полученных данных с результатами натурных экспериментов зарубежных авторов, представленная в зависимости от различных параметров в виде коэффициентов устойчивости, принята для включения в СП «Конструкции стальные. Правила проектирования»

Зам. директора по научной работе



О.И. Пономарев

ПРИЛОЖЕНИЕ 2. Внедрение результатов диссертационной работы

ЦЕНТРАЛЬНЫЙ ОРДЕНА ТРУДОВОГО КРАСНОГО ЗНАМЕНИ НАУЧНО - ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ И
ПРОЕКТНЫЙ ИНСТИТУТ СТРОИТЕЛЬНЫХ МЕТАЛЛОКОНСТРУКЦИЙ им. Н. П. МЕЛЬНИКОВА ®

ЦНИИПСК

им. МЕЛЬНИКОВА

Российская Федерация
119607, г. Москва,
Мичуринский пр-т, д. 37

Телефон: +7 (495) 932-70-11
Факс: +7 (495) 932-70-11
E-mail: cniipsk.info@gmail.com
www.cniipsk.com

«31» марта 2017г. № 88/0317

СПРАВКА

о внедрении результатов диссертационной работы
Аскинази Владимира Юрьевича

Настоящей справкой подтверждаем, что результаты диссертации «Пространственная устойчивость элементов стальных рамных конструкций переменной жесткости» Аскинази Владимира Юрьевича используются специалистами ООО «ЦНИИПСК им. Мельникова» в практической работе при проектировании объектов с использованием каркасов из рам переменной жесткости.

Разработанная в диссертации инженерная методика расчета двутавровых элементов рам переменной высоты, выполненных из малоуглеродистых сталей, позволила значительно упростить проверку таких стержней на устойчивость, не используя для этих целей расчетные комплексы и сложные конечно-элементные модели. Результаты исследования пространственной работы и устойчивости таких элементов в зависимости от различных параметров (гибкости, угла наклона поясов, схем загрузки и т.д.), полученные в диссертационной работе Аскинази В.Ю., позволяют подбирать геометрию двутавровых элементов переменного сечения в соответствии с действующими в раме усилиями, что на практике реализуется в существенном снижении расхода стали на несущие конструкции каркасов.

Исполнительный директор, к.т.н.



Павлов С.А.

Заведующий отделом ЛСТК, к.т.н., с.н.с.

Айрумян Э.Л.